République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Étude et Applications du Modèle de « Black-Scholes »

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Derkaoui Nasreddine Mohamed [1]

Sous la direction de

Dr. N. Ait Ouali

Soutenu le 17/07/2019 devant le jury composé de

Pr. T. Gendouzi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. O. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : mohamedderkaoui.1995@gmail.com

Remerciement

En Préambule de ce travail, je remercie le bon dieu qu'il m'a donné la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreure, ***Mme. Nadia Ait Ouali***, pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger.

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier tous les membres de jury, ***Pr. T. Gendouzi*** de m'avoir honoré en acceptant de présider le jury, ***Dr. O. Benzatout*** et ***Dr. F. Benziadi*** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants du département de Mathématiques qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour, ainsi que le personnel de l'administration.
Je remercie tous les membres de laboratoire des Modéles Stochastique, Statistique et Application pour leur accueil et leur sympathie.

Je remercie chaleureusement toute *ma famille*, qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'étude. Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes amis permanents, et , qui m'ont toujours entouré et m'ont motivé à continuer à meilleure.
Tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu de toute manière que ce soit.

Merci à tous

Table des matières

Introduction

Les spécialistes de la finance ont en général recours, depuis quelques années, à des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (martingales, intégrales stochastiques, ...) pour décrire certains phénomènes et mettre au point des techniques de calcul.
L'intervention du calcul des probabilités en modélisation financière n'est pas récente. En effet, c'est Bachelier qui en tentant de bâtir une "théorie de la spéculation" a découverte , au début du XX^{ime} siècle, l'objet mathématique appelé "mouvement Brownien". À partir de 1973 cette théorie a pris une nouvelle dimension avec les travaux de Black-Scholes sur l'évaluation et la couverture des options.
Depuis ces travaux, le monde de la finance a connu de grands bouleversements, les marchés sont devenus plus volatils créant ainsi une demande croissante des produits dérivés (options, contrats à terme, dérivés de crédit) pour contrôler, miser, spéculer et gérer les risques. Les progrès technologiques ont permis aux institutions financières de créer et de mettre sur le marché des produits et des services qui permettront de se prémunir contre les risques et de générer des revenus. La conception, l'analyse et le développement de ces produits et services nécessitent une connaissance approfondie des théories financières avancées, une maîtrise des mathématiques et des calculs numériques sophistiqués.
Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, ... Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Cependant, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspond pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

L'objectif de ce travail est d'introduire des méthodes numériques qui permet d'aborder les équations différentielles stochastiques, on présentera les schémas numériques d'Euler, Milstein et de Runge-Kutta afin de simuler des approximations de la solution de telles équations et son application au modèle de Black-Scholes.
Le mémoire est structuré comme suit :
Premièrement, nous présentons une synthèse détaillée des processus stochastique (processus, filtration, martingale, mouvement Brownien, variation totale et quadratique, intégrale stochastique et calcul d'Itô).
Ensuite, nous présentons les équations différentielles stochastiques : définitions, solution, changement de probabilité et l'étude de quelques schémas numériques.
Finalement, nous étudions en détail un modèle d'application en finance, à savoir le modèle de Black-Scholes pour lequel nous présentons les hypothèses de marché et certaines notions en finance.

Chapitre 1

Généralités sur le processus stochastique et calcul d'Itô

Le but de ce chapitre est d'introduire des outils de base de calcul stochastique essentiels.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille des variables aléatoires* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *définies sur le même espace de probabilité. En d'autres termes,* X *est une fonction à deux variables telle que*

$$\begin{aligned} X : [0, \infty) \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1.
a) L'espace d'arrivée peut être beaucoup plus complexe que $\mathbb{R}$ *;*
b) t *représente, en général, le temps ;*
c) Pour $t \in [0, \infty)$ *fixé, l'application* $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *;*
d) Pour $\omega \in \Omega$ *fixé, l'application* $t \in [0, \infty) \mapsto X_t(\omega)$ *est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, noté* $X_t(\omega)$ *ou* $X_t(t, \omega)$*.*

Définition 1.1.2. *Un processus* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *est appelé* ***un processus à trajectoires continues*** *ou simplement (****processus continu****) si,*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ est continue}) = 1.$$

Définition 1.1.3. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. Les lois de dimension finie du processus X sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ où $n \geq 1$ et $t_1, t_2, t_3 \cdots t_n \in \mathbb{R}^+$.*

- *On dit que deux processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ ont même loi s'ils ont les mêmes lois de dimension finie.*
- *On dit que les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont indistinguables si :*

$$\mathbb{P}(\forall t \in \mathbb{R}^+, X_t = Y_t) = 1.$$

Définition 1.1.4. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un **processus gaussien** si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e.*

$$\forall n \geq 1, \ \ \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in \mathrm{T} \quad (X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien.}$$

Définition 1.1.5. *On dit que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est a **accroissements independants** si :*

$$\forall n \geq 1, \ \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}^+ \quad X_{t_1}, \ X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ sont indépendantes.}$$

Définition 1.1.6. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est **mesurable** si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

1.1.1 Filtration

Définition 1.1.1.1. *Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, i.e.*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s \leq t$.

- *Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelée un espace de probabilite filtre.*
- *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ est la filtration définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.*

Remarque 1.1.1.1. *$\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t. Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps.*

Définition 1.1.1.2. *1. Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration alors on définit la filtration suivante*

$$\mathcal{F}_{t^+} = \Big(\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \Big).$$

2. *On dit qu'une filtration est continue à droite si*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$$

3. *Soit $\mathcal{N}$ la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont $\mathbb{P}$-nègligeables. Si $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est complète.*
4. *On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est a la fois continue a droite et complète.*

Définition 1.1.1.3. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Remarque 1.1.1.2. *Si $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$, et si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.*

Définition 1.1.1.4. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est **progressivement mesurable** par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si l'application $(s, \omega \mapsto X_s(\omega))$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathbb{R}^d$.*

1.2 Mouvement Brownien

1.2.1 Historique

- 1828 : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.
- 1877 : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction).
- 1900 : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif).
- 1905 : Einstein détermine la densité du MB et le lié aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.
- 1923 : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

Définition 1.2.1.1. *(**Mouvement Brownien**) Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Un mouvement Brownien standard est un processus $(B)_{t\geq 0}$ tel que :*

1. *$B_0 = 0$ presque sûrement ;*
2. *B est continu, c'est à dire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour presque tout ω ;*
3. *B est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^B = \sigma\{B_s, s \leq t\}$;*
4. *les accroissements sont stationnaires (pour $s < t$ l'accroissement $B_t - B_s$ ne dépend que de la valeur de $t - s$), Gaussiens, et tels que si $s \leq t$, on a $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*

Un **processus gaussien** (centré) est un processus tel que toutes les marginales fini-dimensionnelles soient des vecteurs gaussiens (centrés), autrement dit tel que toute combinaison linéaire finie de ses marginales fini-dimensionnelles soit gaussienne (centrée). La loi d'un processus gaussien centré est caractérisée par sa **fonction de covariance**.

Théorème 1.2.1. *(**Caractérisation du Mouvement Brownien**) Un processus stochastique $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien si et seulement si B est un processus gaussien centré à trajectoires continues de fonction de covariance $Cov(B_s, B_t) = \min(s, t)$.*

Preuve. voir [13].

1.2.2 Propriétés

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien defini sur un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors

1. **Symétrie.**

   Le processus $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement Brownien
2. **Changement d'échelle (scaling).**

   Soit $C > 0$. Le processus $B^C = (B_t^C)_{t\geq 0}$ avec $B_t^C = (\frac{1}{C})(B_{C^2 t})$ est encore un mouvement Brownien.
3. **Propriété de Markov simple.**

   Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$.

   alors $B^{(s)} = (B_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien independant de $\mathcal{F}_s$.
4. **inversion temporel**

   Soit $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien. On pose $t \geq 0$, $Z_t = tB_{\frac{1}{t}}$, alors (Z_t) est un mouvement Brownien.

Définition 1.2.2.1. ***(Mouvement Brownien Géométrique)*** *Soit B un mouvement Brownien, b et σ deux constante. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ définie par :*

$$X_t = X_0 \exp\big((b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\big)$$

est un mouvement Brownien appellé Brownien géométrique.

Ce processus est aussi appellé processus "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \{b - \frac{1}{2}\sigma^2\}t + \sigma B_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

1.3 Martingales

1.3.1 Espérance conditionnelle

Définition 1.3.1.1. *Soit X un variable aléatoire de l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})$ est l'unique variable aléatoire de $L^1(\mathcal{B})$ telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B}) d\mathbb{P}$$

Proposition 1.3.1.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.*

- *Linéarité :* $\mathbb{E}\big(c\,X + Y/\mathcal{B}\big) = c\,\mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}\big) + \mathbb{E}\big(Y/\mathcal{B}\big)$ *p.s.*
- *Positivité-monotonie :* $X \geq Y$ *p.s.* $\Rightarrow \mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}\big) \geq \mathbb{E}\big(Y/\mathcal{B}\big)$ *p.s.*
- $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})\big) = \mathbb{E}\big(X\big)$.
- *Si* $X \perp Y$ *alors* $\mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}\big) = \mathbb{E}\big(X\big)$ *p.s.*
- *Si X est $\mathcal{B}$-mesurable , alors* $\mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}\big) = X$ *p.s.*
- *Si Y est $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, alors* $\mathbb{E}\big(XY/\mathcal{B}\big) = \mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}\big)Y$ *p.s.*
- *Si* $\mathcal{H} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ *alors* $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(X/\mathcal{H}\big)/\mathcal{B}\big) = \mathbb{E}\big(X/\mathcal{H}\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}\big)/\mathcal{H}\big)$ *p.s.*

1.3.2 Martingales à temps continu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilite filtré.

Définition 1.3.2.1. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adaptè et intègrable, on dit que X est*

1. *Une* ***martingale*** *si*

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\big(X_t/\mathcal{F}_s\big) = X_s.$$

2. *Une* ***surmartingale*** *si*

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\big(X_t/\mathcal{F}_s\big) \leq X_s.$$

3. *Une* ***sousmartingale*** *si*

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\big(X_t/\mathcal{F}_s\big) \geq X_s.$$

Définition 1.3.2.2. *Un processus aléatoire $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-martingale si*

(i) *X est $\mathcal{F}$-adapté,*

(ii) *$\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, pour tout $t \in [0, T]$,*

(iii) *$\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$ pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$*

Un processus X est une $\mathcal{F}$-surmartingale (resp. une $\mathcal{F}$-sousmartingale) s'il vérifie les propriétés (i) et (ii) et $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s$ (resp. $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s$) pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Remarque 1.3.2.1. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale alors $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.*

Définition 1.3.2.3. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1. *On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformement integrable si :*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t| d\mathbb{P} = 0.$$

2. *Si $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est bornè dans L^p si :*

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty.$$

1.4 Variation totale et quadratique

Définition 1.4.1. *La variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X_t défini sur $[0, \mathrm{T}]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, \cdots, t_n^n)$ est définie par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{p} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^p$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ *a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence* L^p*) lorsque*

$$\pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n} \mid t_{i+1}^n - t_i^n \mid \longrightarrow 0.$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t *sur* $[0,\mathrm{T}]$. *En particulier :*

- *Si* $p = 1$, *la limite s'appelle la variation totale de* X_t *sur* $[0,\mathrm{T}]$,
- *Si* $p = 2$, *la limite s'appelle la variation quadratique de* X_t *sur* $[0,\mathrm{T}]$ *et est notée* $\langle X\rangle_T$.

Remarque 1.4.0.2. *Si la variation totale d'un processus existe presque surement alors elle vaut :*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{p} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^p \qquad p.s.$$

où P est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0,T]$.

Réciproquement, si ce sup est fini, le processus admet une variation totale. Ce résultat est du à la décroissance en Π *de la variation infinitésimale : Si* $\Pi \in \Pi'$ *alors* $V_T^1(\Pi) \geq V_T^1(\Pi')$ *qui vient naturellement de l'inégalité triangulaire :* $\mid x-y \mid\leq\mid x-z \mid + \mid z-y \mid$.

La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.

Proposition 1.4.0.1. *La variation quadratique sur* $[0,T]$ *du mouvement Brownien existe dans* $L^2(\Omega)$ *(la variation infinitésimale converge en* $\| \ . \ \|_2$*) et vaut T. De plus, si la subdivision* Π_n *satisfait* $\Sigma_{n=1}^{\infty}\pi_n \leq \infty$ *on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :*

$$\langle B\rangle_T = T.$$

Preuve.voir [4].

Proposition 1.4.0.2. *Pour toute subdivision* Π_n *satisfaisant* $\Sigma_{n=1}^{\infty}\pi_n \leq \infty$, *la variation infinitésimale d'ordre 1 sur* $[0,T]$ *du mouvement Brownien associée à cette subdivision converge presque sûrement vers* ∞. *Donc, la variation totale du mouvement Brownien vaut* ∞ *p.s. :*

$$V_T^1 = sup_{\Pi_n} V_T^1(\Pi_n) = \infty \qquad p.s.$$

Preuve.

Soit Π_n une suite de subdivision de $[0,T]$ satisfaisant $\Sigma_{n=1}^{\infty}\pi_n \leq \infty$. Alors, sur presque tout chemin ω, on a la relation :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \ sup_{|u-v\leq\pi_n|} \mid B_u(\omega) - B_v(\omega) \mid V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Le terme de gauche tend vers T car on a la convergence p.s. de la variation quadratique. Le premier terme à droite tend vers 0 car le mouvement Brownien a ses trajectoires uniformément continues sur $[0,T]$ en tant que fonctions continues sur un compact. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini.
En conclusion, la variation quadratique du mouvement Brownien est non nulle, elle vaut T dans L^2, mais que sa variation totale est infinie presque surement.

1.4.1 Variation bornée

Définition 1.4.2. *Un processus X est un processus à variation bornée sur $[0,T]$ s'il est variation bornée trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire que :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \mid X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \mid \ < \ \infty \qquad p.s.$$

Remarque 1.4.1.1. *Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement, alors elle vaut*

$$V_T^1 := \sup_{\Pi \in P} \sum_{i=1}^{n} \mid X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \mid$$

où P est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0,T]$.
Réciproquement, si ce supremum est fini, le processus admet une variation totale. La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.

1.4.2 Cas du mouvement Brownien

Soit $(B_t)_{t\in P}$, un mouvement Brownien standard que nous noterons $B(t)$ par la suite.
Pour $t > 0$, nous définissons

$$\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left[B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right]^2.$$

Définition 1.4.3. *Pour $t > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \qquad p.s$$

Nous définissons la variation quadratique du mouvement Brownien standard $\langle B \rangle_t^{(n)}$ comme étant donnée par cette limite et on pose $\langle B \rangle_0 = 0$.

Preuve.
Soient $X_i = B\big(\frac{it}{2^n}\big) - B\big(\frac{(i-1)t}{2^n}\big), 1 \leq i \leq 2^n$ et t, n fixés .

Les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, $X_i \sim \mathcal{N}(0, t/2^n)$ et $\langle B\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} X_i^2$. Nous avons alors

$$\mathbb{E}\Big(\langle B\rangle_t^{(n)}\Big) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}\big(X_i^2\big) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{t}{2^n} = t$$

et

$$\begin{aligned} Var\Big(\langle B\rangle_t^{(n)}\Big) &= \sum_{i=1}^{2^n} Var\big(X_i^2\big) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \Big(\mathbb{E}\big(X_i^4\big) - \mathbb{E}\big(X_i^2\big)^2\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \Big(3\frac{t^2}{4^n} - \frac{t^2}{4^n}\Big) = \frac{t^2}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Chebychev (avec la fonction $x \longmapsto x^2$) il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\mid \langle B\rangle_t^{(n)} - t \mid > \frac{1}{k}\Big) \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} Var\Big(\langle B\rangle_t^{(n)}\Big) = k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^2}{2^{n-1}} < \infty$$

Comme cette somme est finie, nous pouvons utiliser le lemme de BorelCantelli qui nous assure que

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_n \Big(\mid \langle B\rangle_t^{(n)} - t \mid > \frac{1}{k}\Big)\Big] = 0$$

Nous avons ainsi

$$\mathbb{P}\Big[U_{k=1}^{\infty} \limsup_n \Big(\mid \langle B\rangle_t^{(n)} - t \mid > \frac{1}{k}\Big)\Big] = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \langle B\rangle_t^{(n)} = t \qquad p.s$$

ce qui complète la Preuve.

Remarque 1.4.2.1. *La variation totale du mouvement Brownien trajectoire par trajectoire est la longueur de son chemin. Un mouvement Brownien oscille en permanence et donc la longueur de ses trajectoires est infinie. Ceci est également lié au fait que les trajectoires du mouvement Brownien, bien que continues ne sont pas régulières. En d'autres termes, presque toutes les trajectoires du mouvement Brownien ne sont nulle part différentiables sur $\mathbb{R}^+$.*

Proposition 1.4.1. *Si X_t est un processus, alors*

- *Il est à variation bornée si et seulement si il est la différence entre deux processus croissants ;*
- *S'il est à variation bornée et à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque sûrement, c'est-à-dire que $\langle X\rangle_T = 0$.*

1.5 Intégrale stochastique

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dB_s$$

Lorsque l'on intègre une fonction g par rapport à une fonction f dérivable, si g est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \int_0^T g(s)f'(s)ds$$

Si jamais f n'est pas dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \lim_{\Pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

L'intégrale alors définie s'appelle **intégrale de Stieljes**. Dans notre cas, le mouvement Brownien n'est pas à variation bornée donc, on ne peut pas définir cette limite trajectoire par trajectoire. Par contre, comme il est à variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au mouvement Brownien comme une limite dans L^2 de cette variable aléatoire.

$$\int_0^T \theta_s dB_s = \lim_{\Pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

1.5.1 Processus élémentaire

Définition 1.5.1. *Un processus $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ et un processus discret $(\theta_t)_{0\leq i\leq n-1}$ avec θ_i mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_i}$ et dans $L^2(\Omega)$ tel que :*

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

On note E l'ensemble des processus élémentaires.

Définition 1.5.2. *Avec les même notations, l'intégrale stochastique entre 0 et $t \leq T$ d'un processus élémentaire $\theta \in E$ est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s := \sum_{i=0}^{k} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i(B_t - B_{t_k}) \qquad sur \quad]t_k, t_{k+1}],$$

soit

$$\int_0^t \theta_s dB_s := \sum_{i=0}^{n} \theta_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})$$

où $a \wedge b = min(a, b)$.

Proposition 1.5.1. *Pour tout t on a*

$$\int_0^T B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

Preuve.

Par définition

$$\int_0^T B_s dB_s = \lim_n \sum_{i=0}^n B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

L'égalité

$$2\sum_{i=0}^n B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

montre que

$$\int_0^T B_s dB_s = \frac{1}{2}\Big[B_t^2 - \lim_n \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\Big] = \frac{1}{2}[B_s^2 - t].$$

Proposition 1.5.2. *Pour $\theta, \phi \in E$, nous avons*

a) $\mathbb{E}\big(\int_s^t \theta_r dB_r / \mathcal{F}_s\big) = 0.$

b) $\mathbb{E}\big[\big(\int_s^t \theta_r dB_r\big)^2 / \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big(\int_s^t \theta_r^2 dr / \mathcal{F}_s\big).$

c) $\mathbb{E}\big[\big(\int_s^t \theta_r dB_r\big)\big(\int_s^u \phi_r dB_r\big) / \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big(\int_s^{t\wedge u} \theta_r \phi_r dr / \mathcal{F}_s\big).$

1.5.2 Propriétés de l'intégrale Stochastique

Proposition 1.5.3. *Sur l'ensemble des processus élémentaires E, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*

(i) $\theta \longmapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire ;*

(ii) $t \longmapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue presque sûrement et $\mathcal{F}$-adapté ;*

(iii) $\mathbb{E}\big(\int_0^\infty \theta_s dB_s\big) = 0$ *et* $Var\big(\int_0^\infty \theta_s dB_s\big) = \mathbb{E}\big[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\big].$

(iv) $\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big)_{t\geq 0}$ *est une $\mathcal{F}$-martingale ;*

(v) *Le processus* $\Big(\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\Big)_{t\geq 0}$ *est une $\mathcal{F}$-martingale.*

Preuve.

(i) La linéarité de l'intégrale stochastique est immédiate et sa continuité résulte de la continuité des trajectoires du mouvement Brownien ;

(ii) La variable aléatoire $\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big)$ est $\mathcal{F}$-mesurable pour tout t car c'est une somme de variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables ; il s'ensuit que l'intégrale stochastique est un processus $\mathcal{F}$-adapté ;

(iii) On démontre par des calculs directs que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_0^{\infty}\theta_s dB_s\Big) &= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\big]\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[\theta_i E(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i})\big]\\ &= 0.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Var\Big(\int_0^{t}\theta_s dB_s\Big) &= \mathbb{E}\Big(\Big(\int_0^{t}\theta_s dB_s\Big)^2\Big)=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\Big)^2\Big]\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[\theta_i^2\big(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\big)^2\big]\\ &+ 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\big[\theta_i\theta_j\big(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\big)\big(B_{t_{j+1}}-B_{j_i}\big)\big]\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\big[\theta_i^2 E\big(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}^2/\mathcal{F}_{t_i}\big)\big]\\ &+ 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\big[\theta_i\theta_j\big(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\big)\mathbb{E}\big(B_{t_{j+1}}-B_{j_i}/\mathcal{F}_{t_i}\big)\big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i^2\big(t_{i+1}-t_i\big)\Big]+0\\ &= \mathbb{E}\Big(\int_0^{t}\theta_s^2 ds\Big).\end{aligned}$$

(iv) Le processus $\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big)$ est adapté et $\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big) \in L^2$; par conséquent, $\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big) \in L^2$. La proposition (1.5.2) donne la propriété de martingale de l'intégrale stochastique, à savoir que c'est simplement une transformée de martingale ;

(v) Le processus $\Big(\big(\int_0^t \theta_s dB_s\big)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\Big)$ est $\mathcal{F}$-adapté car c'est une somme de processus adaptés. Chacun des processus de cette somme est dans L^1, car c'est la somme de deux éléments de L^1. La proposition (1.5.2) conduit ensuite à la propriété de martingale.

1.6 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 1.6.1. ***(Processus d'Itô)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$\mathbb{P}\,p.s \qquad \forall t \leq T \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Avec :

- X_0 *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable ;*
- $(K_s)_{t\geq 0}$ *et* $(H_s)_{t\geq 0}$ *des processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$ *;*
- $\int_0^t \mid K_s \mid ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\,p.s\,;$
- $\int_0^t \mid H_s \mid^2 ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\,p.s.$

1.6.1 Formule d'Itô

Théorème 1.6.1. *[12] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itô et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

où pour definition

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dB_s$$

De même si $(t, X) \longrightarrow f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'(s, X_s)ds + \int_0^t f'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

Exemple 1.6.1. *Si $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$, On a $K_s = 0$ et $H_s = 1$, donc*

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds.$$

On obtient

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s.$$

Comme $\mathbb{E}\big(\int_0^t B_s^2 ds\big) < \infty$, on retrouve le fait que $B_t^2 - t$ est une martingale.

Proposition 1.6.1. *1. La variation quadratique sur $[0,t]$ d'un processus d'Ito X donné par :*

$$\langle X\rangle_t = \left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

2. La covariation quadratique entre deux processus d'Ito X_1 et X_2 donnés par :

$$dX_t^i = K_t^i dt + H_t^i dB_t$$

vaut :

$$\langle X^1, X^2\rangle_t = \int_0^t \theta_s^1 \theta_s^2 ds$$

Preuve.

Par définition, la covariation quadratique est donnée par :

$$\begin{aligned}
\langle X^1, X^2\rangle_t &:= \frac{1}{2}(\langle X^1 + X^2\rangle_t - \langle X^1\rangle_t - \langle X^2\rangle)_t \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^t (\theta_s^1 + \theta_s^2)^2 ds - \int_0^t (\theta_s^1)^2 ds - \int_0^t (\theta_s^2)^2 ds\right) \\
&= \int_0^t \theta_s^1 \theta_s^2 ds.
\end{aligned}$$

La conclusion est obtenue en notant que $\langle X\rangle_t = \langle X, X\rangle_t$

Proposition 1.6.2. *(**Formule d'intégration par parties**) Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t dY_t + \int_0^t Y_t dX_t + \langle X, Y\rangle_t$$

avec la convention :

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

1.6.2 Formule d'Itô multidimensionnelle

La formule d'Itô multidimensionnelle se généralise aux cas ou la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements Browniens.

Définition 1.6.2. *On appelle $\mathcal{F}$-mouvement Brownien d-dimensionnel un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(B_t)_{t\geq 0}$ adapté à $\mathcal{F}_t$, avec $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$, où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$-mouvements Browniens standards indépendants.*

On généralise la notion de processus d'Itô.

Définition 1.6.3. *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô si :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^i dB_s^i$$

Avec :

- K_t *et les* (H_t^i) *sont adaptés à* $\mathcal{F}_t$ *;*
- $\int_0^t \mid K_s \mid ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\, p.s\,;$
- $\int_0^t \mid H_s^i \mid^2 ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\, p.s.$

La formule d'Itô prend alors la forme suivante :

Proposition 1.6.3. *Soient $X_t^1, \cdots, X_t^n$ n processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,j} dB_s^j$$

alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t,x) :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \cdots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \cdots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n) d\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

où

- $dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} H_s^{i,j} d\mathcal{B}_s^j,$
- $d\langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{m=1}^{p} H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds.$

Chapitre 2

Approximation d'une équation différentielle stochastique

2.1 Équations différentielles stochastiques

2.1.1 Introduction

Les équations différentielles gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des "différentielles stochastiques", ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type :

$$x'(t) = b(t, x(t)) \tag{2.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée x' et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) (seule la dérivée 1 ère est impliquée) avec $b(t, x) = A + cx$ indépendant de t et affine par rapport à x. Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit :

$$dx_t = b(t, x_t)dt. \tag{2.2}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x_t)_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroit, à la date t, selon le taux $b(t, x_t)$. Par exemple, avec $b(t, x_t) = f(t)x_t$, l'équation $dx_t = b(t)x_t dt$ modélise le cours d'un actif financier x_t soumis au taux d'intérêt variable b(t) ou d'une population avec un taux de natalité b(t). Il est bien connu que la solution est

$$x_t = x_0 \exp(\int_0^t b(s)ds)$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2.1) ou la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par un terme aléatoire. On peut considérer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement Brownien B et une intensité de bruit $\sigma(x,t)$:

$$dX_t = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{2.3}$$

Définition 2.1.1. *On appelle équation différentielle stochastique noté (EDS) de condition initiale X_0, de coefficient de diffusion σ et de coefficient de dérive b un processus X tel que pour tout $t \geq 0$,*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{2.4}$$

L'équation (2,4) sera aussi notée

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

2.2 Solution d'une EDS

On note par $(\mathbb{M})_{d\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d \times m$ à coeficients réels.

Définition 2.2.1. *Soient d et m deux entiers positifs et soient σ et b des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et a valeurs respectivement dans $(\mathbb{M})_{d\times m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^d$. On note $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$ et $b = (b_i)_{1\leq i\leq d}$.*
Une solution de l'équation :

$$E(b,\sigma) : \qquad\qquad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

est la donnée de :

- *Un espace de probabilite filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.*
- *Un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien défini sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $B = (B^1, \cdots, B^m)$.*
- *Un processus $\mathcal{F}_t$-adapté continu $X = (X^1, \cdots, X^m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

- *Lorsque $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(b,\sigma)$.*

Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations difiérentielles stochastiques. On les cite dans la définition suivante

Définition 2.2.2. *Pour l'equation $E(b, \sigma)$, on dit qu'il y a :*

- *Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une solution de $E_x(b, \sigma)$.*
- *Existence et unicite faibles si de plus toutes les solutions de $E_x(b, \sigma)$ ont meme loi.*
- *Unicite trajectorielle si l'espace de probabilite filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et le mouvement Brownien B etant fixes, deux solutions X et X' telles que $X_0 = X'_0$ $\mathbb{P}$ p.s. sont indistinguables.*

On dit de plus qu'une solution X de $E_x(b, \sigma)$ est une solution forte si X est adapte par rapport a la filtration canonique de B.

Définition 2.2.3. ***(Solution forte)*** *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé une solution forte de l'EDS $E_x(b, \sigma)$ si :*

- *X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.*
- *On a les conditions de régularité*

$$\mathbb{P}\{\int_0^t \mid b(s, X_s) \mid ds < \infty\} = \mathbb{P}\{\int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty\} = 1.$$

- *Pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

  avec probabilité 1.

Passons a present au théorème d'existence et d'unicité de la solution de $E_x(b, \sigma)$. On designe par $||\ .\ ||$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

2.2.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.2.1. *On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$*

1. *Condition de Lipschitz*

$$\mid b(t, x) - b(t, y) \mid + \mid \sigma(t, x) - \sigma(t, y) \mid \leq K \mid x - y \mid$$

2. *Croissance linéaire*

$$\mid b(t, x) \mid \leq K(1+ \mid x \mid), \qquad \mid \sigma(t, x) \mid \leq K(1+ \mid x \mid)$$

Alors il y a unicite trajectorielle pour $E(b,\sigma)$.

De plus, pour tout espace de probabilite filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement Brownien, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, une (unique) solution forte pour $E_x(b,\sigma)$.

preuve voir[1]

Exemple 2.2.1. *Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions $(S_t)_{t\geq 0}$ de :*

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s) \tag{2.5}$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0 \tag{2.6}$$

Cala signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ et $\int_0^t S_s dB_s$ aient un sens, et qui vérifie pour chaque t :

$$\mathbb{P}_{p.s} \quad S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, posons $Y_t = \log(S_t)$ ou S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$. Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log(x)$ on obtient, en supposant que S_t est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}d\langle S, S\rangle_s$$

en effet :

$$\begin{aligned}\langle S, S\rangle_s &= \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s, \int_0^t \sigma S_s dB_s\rangle = \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s\rangle \\ &= \int_0^t \sigma^2 S_s^2 d\langle B, B\rangle_s = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds\end{aligned}$$

on a : $\quad dS_t = S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$

$$\begin{aligned}\log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \frac{S_s(\mu ds + \sigma dB_s)}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds \\ &= \log(S_0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\sigma^2 ds \\ &= \log(S_0) + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s\end{aligned}$$

Soit en utilisant (2.6) *:*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t.$$

$$\exp\big(\log(S_t)\big) = \exp\big(\log(S_0)\big)\exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\big)$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\big), \quad S_0 = x_0$$

Soit une solution de l'equation (2.5).

Vérifions rigoureusement cela.

$S_t = f(t, B_t)$ *ou :*

$$f(t,x) = x_0 \exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\big)$$

La formule d'Itô donne :

$$S_t = f(t,B_t) = f(0,B_0) + \int_0^t f'(s,B_s)ds + \int_0^t f'(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"_{xx}(s,B_s)d\langle B,B\rangle_s$$

Mais comme la variation quadratique du mouvement Brownnien vaut (s) ($\langle B,B\rangle_s = s$) *on a :*

$$\begin{aligned} S_t &= x_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 S_s ds \\ &= x_0 + \int_0^t \mu S_s ds - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_s ds \end{aligned}$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

On vient donc de démontrer l'existence d'un solution de (2.5). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cela, nous allons utiliser une propriété généralisant "la formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô.

Notons que :

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

est une solution de (2.5) *et suposons que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *en soit une autre.*

On va chercher à exprimer la "differentielle stochastique" $X_t S_t^{-1}$ *.*

Posons :

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = \exp((-\mu + \frac{\sigma^2}{2})t - \sigma B_t)$$

et $\mu' = -\mu + \sigma^2$ *et* $\sigma' = -\sigma$

Alors

$$Z_t = \exp((\mu' - \frac{\sigma'^2}{2})t + \sigma' B_t)$$

et le calcul fait précédemment prouve que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s(\mu' ds + \sigma' dB_s) = 1 + \int_0^t Z_s((-\mu + \sigma^2)ds - \sigma dB_s)$$

On peut alors exprimer la "differentielle" de $X_t Z_t$ *grace à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :*

$$d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d\langle X, Z\rangle_t.$$

Ici on a :

$$\langle X, Z\rangle_t = \langle \int_0^t X_s \sigma dB_s, -\int_0^t Z_s \sigma dB_s\rangle_t = -\int_0^t \sigma^2 X_s Z_s ds$$

On en déduit que :

$$d(X_t Z_t) = X_t Z_t((-\mu + \sigma^2)dt - \sigma dB_t) + X_t Z_t(\mu dt + \sigma dt) - X_t Z_t \sigma^2 dt = 0$$

$X_t Z_t$ *est donc égale à* $X_0 Z_0$*, ce qui entraîne que :*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}\, p.s. \quad X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

Les processus X_t *et* Z_t *étant continus, ceci prouve que :*

$$\mathbb{P}\, p.s. \quad \forall t \geq 0, \quad X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.2. *:[12]* μ, σ *étant deux nombres reels,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *étant un mouvement Brownien et* T *un reel strictement positif, il existe un processus d'Itô unique* $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ *qui verifie pour tout* $t \leq T$ *:*

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

Remarque 2.2.1.1. *: Le processus* S_t *que l'on vien d'expliciter servira de modèle standard pour le prix d'un actif financier. On l'appelle le modèle de Black et Scholes.*

Lorsque $\mu = 0$*,* S_t *est une martingale, ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.*

2.3 Changement de probabilité

Comme vu précedemment, la solution de l'équation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0 \tag{2.7}$$

n'est en général pas une martingale (sous la probabilité $\mathbb{P}$). La question que l'on se pose ici est de savoir s'il existe une autre mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle le processus (X_t) soit une martingale.
L'application en mathématiques financières est la suivante : pour évaluer le prix d'une option sur un actif, on a besoin de la propriété de martingale. Pourtant, le prix d'un actif donné n'est en général pas une martingale, mais affiche une tendance à la hausse ou à la baisse. C'est pourquoi on désire définir une nouvelle probabilité sous laquelle celui soit une martingale, de manière à pouvoir effectuer des calculs.

2.3.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théorème 2.3.1.1. *$\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\Omega) d\mathbb{P}(\Omega).$$

Z est appelée densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ notée $\frac{d(\mathbb{P})}{d(\mathbb{Q})}$.

2.3.2 Théorème de Girsanov

Théorème 2.3.2.1. *[5] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$, et soit $(\theta_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté vérifiant :$\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s tel que le processus $(L_t)_{t\geq 0}$ défini par :*

$$L_t = \exp(-\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds).$$

soit une $\mathcal{F}_t$-martingale, Alors il exist une probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$ de densité L_t équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$B_t = B_t - \int_0^T \theta_s ds.$$

est un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien standard.

2.4 Intégration numérique des EDS

Considérons l'équation différentielle stochastique (2.7). Nous avons vu que si b et σ sont continues en (s,x) et lipschitziennes en x, cette équation possède une unique solution forte $(X_t)_{t\geq 0}$. Cependant, il est parfois difficile d'obtenir une expression analytique pour cette solution. Il est donc important de développer des méthodes numériques afin de simuler des approximations de la solution de telles équations. Les schémas numériques utilisés pour les équations différentielles ordinaires peuvent, en général, être adaptés au cas stochastique.

2.4.1 Méthode d'Euler

En supposant qu'il existe une unique solution forte à l'équation différentielle stochastique (2.7)

on a pour tout $s < t \in [0,T]$ que

$$X_t = X_s + \int_s^t b(r, X_r)dr + \int_s^t \sigma(r, X_r)dB_r. \tag{2.8}$$

pour tout $s \approx t$, nous pouvons utiliser la continuité des fonctions $r \to b(r, X_r)$ et $r \to \sigma(r, X_r)$ afin de déduire une approximation de (2.8), à savoir

$$X_t \simeq X_s + b(s, X_s)(t-s) + \sigma(s, X_s)(B_t - B_s). \tag{2.9}$$

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}$. En posant $s = \frac{nT}{N}$ et $t = \frac{(n+1)T}{N}$, où $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, nous obtenons de (2.9) que

$$X_{\frac{(n+1)T}{N}} \simeq X_{\frac{nT}{N}} + b\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right)\left(B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}\right).$$

À noter que $B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \frac{T}{N})$ et est indépendante de $\mathcal{F}_{\frac{nT}{N}}$, où $\mathcal{F}_t$ est une filtration à laquelle sont adaptés les processus X_t et B_t.

Un algorithme numérique est alors obtenu en posant $X_0^{(N)} = x_0$, et pour $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, ona

$$X^{(N)}_{\frac{(n+1)T}{N}} \simeq X^{(N)}_{\frac{nT}{N}} + b\left(\frac{nT}{N}, X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{nT}{N}, X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\xi_{n+1},$$

où $\xi_1, \cdots, \xi_N$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suit la loi Goussiene $\mathcal{N}(0, \frac{T}{N})$.
Ainsi, le processus X_t est approximé par $X^{(N)}_{\frac{(n+1)T}{N}}$ pour $t \in \left]\frac{nT}{N}, \frac{(n+1)T}{N}\right]$.
L'approximation précédente sera d'autant meilleure que N est choisi suffisamment grand.
En fait , nous pouvons montrer sous certaines hypothèses qu'il existe une constante $C_T \in (0, \infty)$ telle que

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^{(N)} - X_t \mid\right) \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{N\to\infty} E\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^{(N)} - X_t \mid\right) \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}} = 0.$$

L'approximation de X_t par $X^{(N)}_{\frac{(n+1)T}{N}}$ est donc uniformément convergente. Il est intéressante de noter que cette approximation stochastique est d'ordre $1/\sqrt{N}$, alors qu'elle est d'ordre $1/N$ dans le cas d'équations différentielles ordinaires. Cette perte de vitesse de convergence s'explique par l'ajout du facteur $\sqrt{T/N}$ dans l'intégrale d'Itô.

2.4.2 Méthode de Milstein

Il est bien évidemment raisonnable de chercher d'avoir une méthode de résolution allant au cette approximation et dans cet état d'esprit, Milstein a proposé une approximation du second ordre qui utilise à nouveau le calcul stochastique différentiel.
En supposant que la fonction σ est continue et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, nous obtenons de la formule d'Itô ;

$$\begin{aligned}
\sigma(r, X_r) &= \sigma(s, X_s) + \int_s^r \frac{\partial}{\partial s}\sigma(u, X_u)du \\
&+ \int_s^r \frac{\partial}{\partial x}\sigma(u, X_u)dX_u + \frac{1}{2}\int_s^r \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(u, X_u)d\langle X\rangle_u \\
&= \sigma(s, X_s) + \int_s^r \frac{\partial}{\partial s}\sigma(u, X_u)du + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x}\sigma(u, X_u)b(x, X_u)du \\
&+ \int_s^r \frac{\partial}{\partial x}\sigma(u, X_u)\sigma(x, X_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_s^r \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(u, X_u)\sigma(u, X_u)^2du.
\end{aligned}$$

En d'autres termes nous pouvons écrire σ sous la forme

$$\sigma(r, X_r) = \sigma(s, X_s) + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x}\sigma(u, X_u)\sigma(u, X_u)dB_u + \int_s^r G_u du,$$

où G_t est un processus continu. Nous en déduisons l'approximation

$$\sigma(r, X_r) \simeq \sigma(s, X_s) + \frac{\partial}{\partial x}\sigma(s, X_s)\sigma(s, X_s)(B_r - B_s) + G_s(r - s).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} X_t &\simeq X_s + b(s, X_s)(t - s) + \sigma(s, X_s)(B_t - B_s) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\sigma(s, X_s)\sigma(s, X_s)\int_s^t (B_r - B_s)dB_r + G_s\int_s^t (r - s)dB_r. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^t B_r dB_r = (B_t^2 - t)/2,$$

la linéarité de l'intégrale et les propriétés de l'intégrale stochastique, nous pouvons montrer que

$$\int_s^t (B_r - B_s)dB_r = \frac{1}{2}\{(B_t - B_s)^2 + (s - t)\}$$

et

$$\int_s^t (r - s)dB_r \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{s,t}^2),$$

où $\sigma_{s,t}^2 = \int_s^t (r - s)^2 dr = (t - s)^3/3$.

En négligeant le second terme, nous avons

$$\begin{aligned} X_{\frac{(n+1)T}{N}} &\simeq X_{\frac{nT}{N}} + b\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right)\left(B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right)\sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{1}{2}\left\{\left(B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}\right)^2 - \frac{T}{N}\right\}, \end{aligned}$$

L'algorithme consiste à poser $X_0^{(N)} = x_0$, et pour $n \in \{0, 1, ..., N - 1\}$,

$$\begin{aligned} X_{\frac{(n+1)T}{N}}^{(N)} &= X_{\frac{nT}{N}}^{(N)} + b\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right)\frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right)\xi_{n+1} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right)\sigma\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right)\frac{1}{2}\left(\xi_{n+1}^2 - \frac{T}{N}\right), \end{aligned}$$

où $\xi_1, \cdots, \xi_N$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suit la loi Goussiene $\mathcal{N}(0, \frac{T}{N})$.

Sous certaines hypothèses, nous pouvons montrer que l'approximation stochastique de Milstein est d'ordre $1/N$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_T \in (0, \infty)$ telle que :

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_{\frac{nT}{t}}^{(N)} - X_t \mid\right) \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}}.$$

2.4.3 Méthode de Runge-Kutta

Un inconvénient des méthodes de Taylor et qu'elles mettent en oeuvre des dérivées des termes de dérive et de diffusion b_t et σ_t. En fait, il existe des méthodes de type Runge-Kutta, qui ne nécessitent pas d'effectuer de telles dérivations. Indiquons ici sans justification,
pour tout $s \approx t$ on déduire une approximation de (2.8) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5 à savoir

$$X_t \simeq X_s + b(s, X_s)(t-s) + \sigma(s, X_s)(B_t - B_s) + \frac{1}{2}(\sigma X_s' - \sigma X_s)\frac{[(B_t - B_s)^2 - (t-s)]}{\sqrt{(t-s)}}$$

avec

$$X_s' = X_s + bX_s(t-s) + \sigma X_s\sqrt{(t-s)}.$$

On pourra trouver d'autres méthodes d'ordres plus élevés dans [11].
Soit maintenant $N \in \mathbb{N}$. En posant $s = \frac{nT}{N}$ et $t = \frac{(n+1)T}{N}$, où $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, nous obtenons de (2.8) que

$$\begin{aligned} X^{(N)}_{\frac{(n+1)T}{N}} &\simeq X^{(N)}_{\frac{nT}{N}} + b\left(\frac{nT}{N}, X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{nT}{N}, X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\left(B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sigma X'^{(N)}_{\frac{nT}{N}} - \sigma X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{\left[\left(B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}\right)^2 - \frac{T}{N}\right]}{\sqrt{T/N}}, \end{aligned}$$

avec

$$X'^{(N)}_{\frac{nT}{N}} = X^{(N)}_{\frac{nT}{N}} + bX^{(N)}_{\frac{nT}{N}}(T/N) + \sigma X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\sqrt{T/N}.$$

où $B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \frac{T}{N})$ est indépendante.
L'algorithme consiste à poser $X_0^{(N)} = x_0$, et pour $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$,

$$\begin{aligned} X^{(N)}_{\frac{(n+1)T}{N}} &= X^{(N)}_{\frac{nT}{N}} + b\left(\frac{nT}{N}, X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{nT}{N}, X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\xi_{n+1} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sigma X'^{(N)}_{\frac{nT}{N}} - \sigma X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\right)\frac{\left[\xi^2_{n+1} - \frac{T}{N}\right]}{\sqrt{T/N}}, \end{aligned}$$

avec

$$X'^{(N)}_{\frac{nT}{N}} = X^{(N)}_{\frac{nT}{N}} + bX^{(N)}_{\frac{nT}{N}}(T/N) + \sigma X^{(N)}_{\frac{nT}{N}}\sqrt{T/N},$$

où $\xi_1, \cdots, \xi_N$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suit la loi Goussiene $\mathcal{N}(0, \frac{T}{N})$.

Ordre des méthodes numériques

On décrit classiquement les performances d'une méthode au moyen de **l'erreur moyenne absolue** définie par

$$E_{T,h} = \mathbb{E}[\mid X_T - \hat{X}_T \mid].$$

Si $\lim_{h\to 0} E_{T,h} = 0$ on dira que le schéma de discrétisation envisagé **converge fortement**. Cette convergence forte sera dite d'ordre γ si

$$E_{T,h} \leq Ch^{\gamma}$$

pour un certain $C > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$.

On peut démontrer que les trois méthodes numériques appliquée aux EDS sont fortement convergente, et de plus :

- La méthode d'Euler est d'ordre 1/2.
- La méthode de Milstein est d'ordre 1.
- La méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1,5.

Chapitre 3

Étude et Application : Modèle de Black-Scholes

Dans ce chapitre nous allons nous concentrer sur une application des schémas de discrétisation vu dans le chapitre précédent.

3.1 Historique

Le premier modèle d'évolution des actifs financiers a été proposé par Bachelier (1900). Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle est connu sous le nom de Black-Scholes.

3.2 Description du modèle de Black-Scholes

Nous supposons que nous avons un espace de probabilité avec une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ tel que :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \qquad \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T, \qquad T < \infty$$

qui est une filtration naturelle du mouvement Brownien standard B_t.
Le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué S_t à l'instant t et un actif sans risque S_t^0 à l'instant t.

1. On suppose que l'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad et \quad S_0^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_t^0 = e^{rt} \quad pour \quad t \geq 0$$

où r est un constant positif.

2. On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle Stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 > 0 \tag{3.1}$$

Où :

– B_t : un mouvement Brownien standard.

– μ : est un coéfficient de croissance.

– σ : est un coéfficient de volatilité.

– S_0 : est une valeur initiale pour S_t.

Le modèle étudié sur l'intervalle $[0, T]$ ou T est la date d'échèance de l'option à étudier.

La solution de (3.1) est :

$$S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma dB_t)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.

Cette solution est unique mais n'est pas une martingale.

La loi de S_t est une loi log-normale (son logarithme suit une loi normale).

Le processus (S_t) vérifie une équation de type (3.1) sauf si son logarithme est un mouvement Brownien.

Soit un pas de discrétisation h , le schéma d'Euler de l'équation (3.1) est donné par ;

$$S_{n+h} = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \Delta B_n,$$

et celui de Milstein par ;

$$S_{n+h} = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \Delta B_n + \frac{1}{2}\sigma^2 \{(\Delta B_n)^2 - h\},$$

où $\Delta B_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$.

et celui de Runge-Kutta d'ordre 1,5 par ;

$$S_{n+h} = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \Delta B_n + \frac{1}{2}(\sigma S_n' - \sigma S_n) \frac{[(\Delta B_n)^2 - h]}{\sqrt{h}}$$

avec

$$S_n' = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \sqrt{h}.$$

3.3 Applications

3.3.1 Exemples et simulation

L'intérêt pratique de la simulation des équations différentielles stochastiques est trés important, car la résolution analytique n'est pas toujours facile. Cela rend difficile l'étude de l'évolution dynamique d'un phénomène. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des EDS. Nous utilisons dans le paragraphe qui suit le programme de Matleb :

- **Exemples :**

on a l'équation suivante :

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}}dt + 3X_t^{\frac{2}{3}}dB_t \quad X_0 = 1$$

Intégration exacte : formule d'Itô pour $Y_t = g(X_t) = X_t^a$:

$$\begin{aligned} dY_t &= aX_t^{a-1}dX_t + \frac{1}{2}a(a-1)X_t^{a-2+\frac{4}{3}}dt \\ &+ aX_t^{a-1+\frac{2}{3}}dB_t \end{aligned} \tag{3.2}$$

pour $a = \frac{1}{3}$ ona la solution exacte est :

$$X_t = (X_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}B_t)^3$$

- **L'équation de modèle Black-Scholes :**

on a l'équation suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

La solution exacte de cette équation est :

$$X_t = X_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma dB_t)$$

si on a : $\mu = -1; \sigma = 1; X_0 = 1$

donc : la solution exacte de l'équation

$$dX_t = -X_t dt + X_t dB_t \tag{3.3}$$

est :

$$X_t = \exp(\frac{-3}{2}t + dB_t)$$

En Matlab, on peut facilement programmer l'exemple par les trois méthodes avec la fonction suivante :

Détails :

T :Le temps final

n :Le nombre de points dans l'intervalle de temps

$h = T/n$:Le pas de temps

t :Linspace(0,T,n) :l'intervalle dans temps [0,T]

$X(0) = 1$: condition initiale

```
X0=1;
B=cumsum(dB,1);

for i=1:n
for j=1:m
X_exact(i,j)=(X0^(1/3)+1/3*B(i,j))^3;
end
end

X_exact=[ones(1,m) ; X_exact];
X_exact(end,:)=[];


hold on
for i=89:89
 plot(t,X(:,i),t,X_m(:,i),'-+r',t,X_r(:,i),'-*k',t,X_exact(:,i)) %↙
tracer 10 trajectoires du processus X_t pour les trois schemas↙
numeriques
end
xlabel('Temps')
ylabel('Processus X_t')
legend('Euler', 'Milstein', 'Runge-Kutta 1.5','Exacte')
```

```
clear
clc
T=1;  %  temps final
n=50; % le nombre de points dans l intervalle de temps [0, T]
h=T/n; % pas de temps
t=linspace(0,T,n); % l'intervalle dans temps [0,T]

m=150;
X(1,:)=ones(1,m); % Condition initiale X_0=1
X_m(1,:)=ones(1,m);
X_r(1,:)=ones(1,m);
Z=randn(n,m); % variable aleatoire N(0,1) pour simuler le MB
dB=sqrt(h)*Z;

% Simulation de la solution de l EDS : dX_t=b_tdt+Sigma_tdB_t :↙
b_t=1/3*X_t et sigma_t=X_t^(2/3)
%↙
-----------------------------------------------------------------------↙
------------------------
% Trois exemples :
for i=1:n-1
    for j=1:m

     b(i,j)=1/3*X(i,j)^(1/3);
     sigma(i,j)=X(i,j)^(2/3);
     X(i+1,j)=X(i,j)+h*b(i,j)+sigma(i,j)*dB(i,j); % Euler


     b_m(i,j)=1/3*X_m(i,j)^(1/3);
     sigma_m(i,j)=X_m(i,j)^(2/3);
     d_sigma_m(i,j)=2/3*X_m(i,j)^(-1/3);

     X_m(i+1,j)=X_m(i,j)+h*b_m(i,j)+sigma_m(i,j)*dB(i,j)+...
     1/2*sigma_m(i,j)*d_sigma_m(i,j)*(dB(i,j)^2-h); % Milstein

     b_r(i,j)=1/3*X_r(i,j)^(1/3);
     sigma_r(i,j)=X_r(i,j)^(2/3);

    Y(i,j)=X_r(i,j)+h*b_r(i,j)+sigma_r(i,j)*sqrt(h);

    X_r(i+1,j)=X_r(i,j)+h*b_r(i,j)+sigma_r(i,j)*dB(i,j)+...
    1/2*(Y(i,j).^(2/3)-sigma_r(i,j))*(dB(i,j)^2-h)/sqrt(h); % Runge-↙
Kutta 1.5

    end
end
```

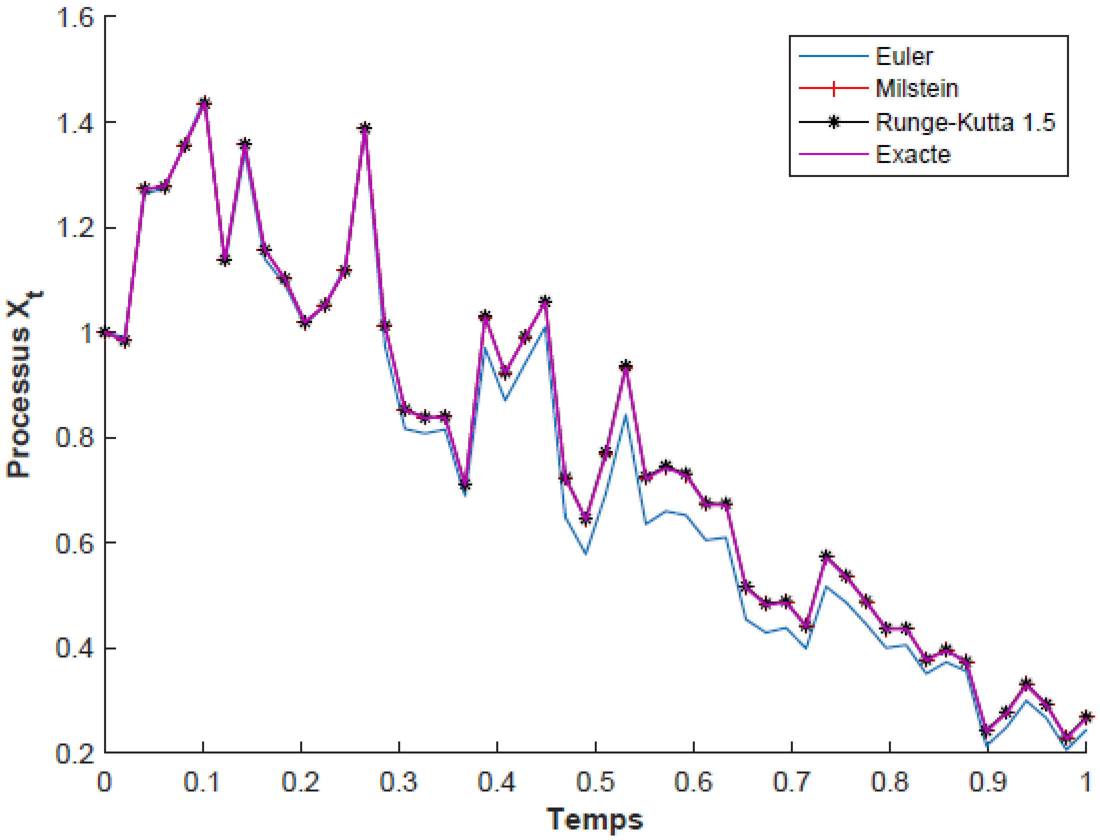

FIGURE 3.1 – Méthodes d'Euler, Milstein et RK 1,5 pour $X_t = (X_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}B_t)^3$

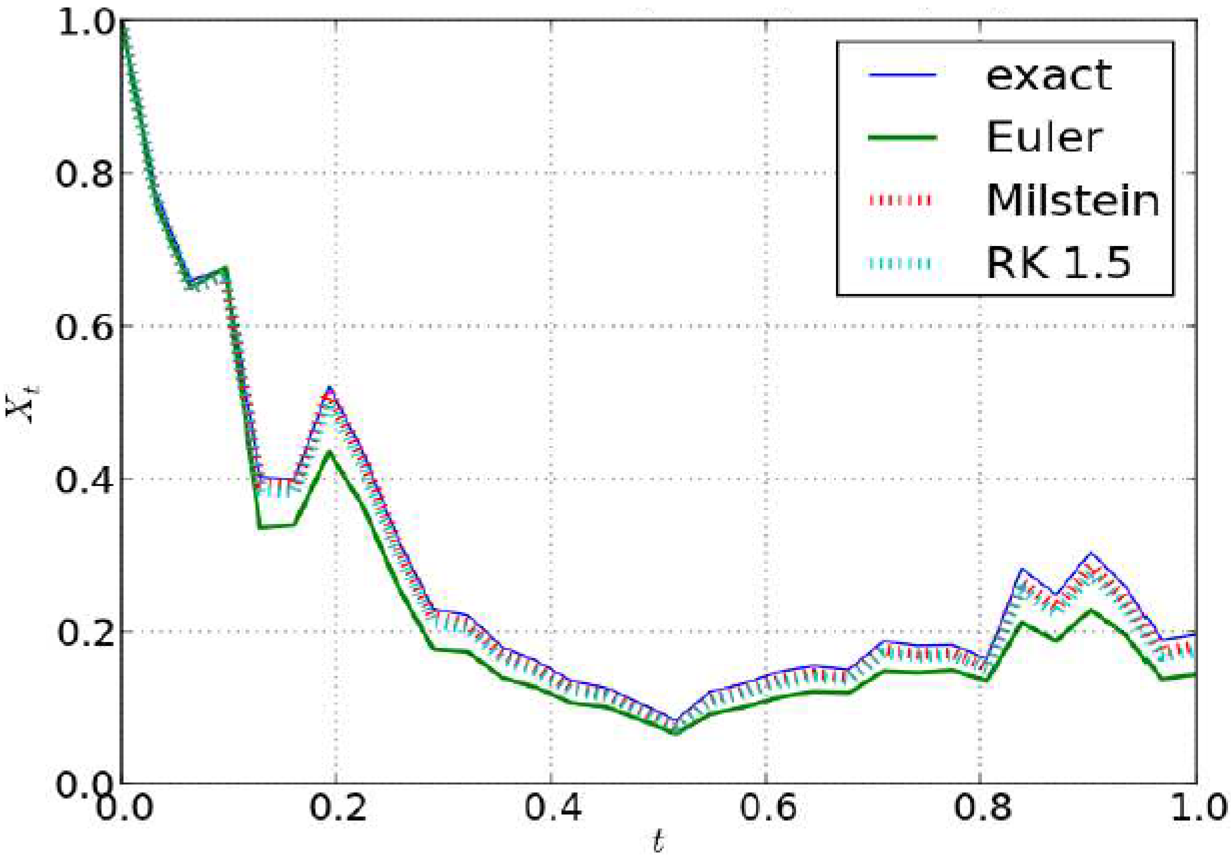

FIGURE 3.2 – Méthodes d'Euler, Milstein et RK 1,5 pour $dX_t = -X_t dt + X_t dB_t$

Conclusion

Dans ce modeste travail, nous avons étudié quelques schémas concernant la résolution numérique des équations différentielles stochastiques. Il pousse cette étude en examinant une application en finance du très important modèle de Black- Scholes. Pour cela, on a commencé par un rappel des outils mathématiques nécessaires, à savoir le mouvement Brownien, les martingale, variation totale et quadratique, l'intégrale stochastique et calcul d'Itô. Ensuite, Nous avons défini la notion de solution d'une EDS ainsi le théorème d'existence et d'unicité, puisque la solution d'une EDS n'est pas en général une martingale, nous avons présenté le Théorème de Girsanov qui permet de définir une nouvelle mesure de probabilité pour laquelle ce processus solution serait une martingale. Enfin, on a vu comment réaliser une simulation des exemples d'application par un programme informatique.

Bibliographie

[1] I. Abi Ayad, Introduction Aux Equations Différentielles Stochastiques, Master Probabilites Et Statistiques, Université Aboubekr Belkaid.

[2] C. Bécaye Ndongo, Processus aléatoires et applications en finance, Université Du Québec, Mars 2012.

[3] T. Chonavel, Équations Différentielles Stochastiques, Notes de cours Filiére 4, Septembre 2013.

[4] R. Elie, I. Kharroubi, Calcul stochastique appliqué à la finance, Avril 2006.

[5] H. Guiol, Calcul Stochastique Avancé, TIMB/TIMC - IMAG 2006.

[6] H, Huynh - V, Lai .Soumaré, I. (2006). Simulations stochastiques et applications en finance avec programmes matlab. Finance (Paris. 2005).Economica.

[7] M. Jeanblanc, Cours de Calcul Stochastique, Master 2IF EVRY, Septembre 2006.

[8] B. Jourdain, B. Lapeyre, Mouvement brownien, Espérance Conditionnelle, Martingale, Intégrale Stochastique, 30 mai 2006.

[9] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] N. Karouzene, Équations Différentielles Stochastiques, Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen Faculté Des Science Departement De Mathématiques, soutenue le 12/11/2015.

[11] P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, Numerical solution of SDE through computer experiments, Springer, 2003.

[12] D. Lamberton - B. Lapeyer , Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance , Edition Marketing , Paris 1997.

[13] J. F. Le Gall. Mouvement Brownien et Calcul Stochastique, Notes de cours de Master 2, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Octobre 2008, 2009.

[14] O. Lévêque, EPFL, Cours de Probabilites et Stochastic Calculus, Semestre d'hiver 2004-2005.

[15] M. Musiela and M. Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, 2005.

[16] D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[17] B. Stout, Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, Université de Provence, Marseille-France, Fevrier 2007.