République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Itroduction aux Fonctions Spéciales

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Mahdjouba Noufel [1]

Sous la direction de

Dr Mlle H. Abbas

Soutenue le 14/07/2019 devant le jury composé de

Pr. S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. M. H. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : noufel.saida@gmail.com

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.
En effet, je voudrai remercier mon université, ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de mon mémoire.
Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à **Mlle H.Abbras** , qui m'a encadrée, tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilitée et l'intérêt que vous avez manifestée pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodiguée tout au long de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.
Je désire aussi remercier les professeurs, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.
Je tiens à remercier spécialement **Mr.S.Abbes** de m'avoir honoré en acceptant de présider le jury, je tiens aussi à remercier **Mr. H.M.Dida** et **Mr.A.Zeglaoui** qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Enfin,mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes proches et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mes trés chers parents :Mon père Youcef et ma mère Kaltouma qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.

A mes Fréres : Marzouk,Nabil et Rabeh.

A ma soeur : Linda.

A Ma grande mère maternelle Faroudja, que mon Dieu la préserve.

A toute ma famille et spécialement à mes cousiners.

Une spéciale dédicace à mes adorables amies Rabab,Aicha et Imene qui m'ont encouragé le long de mon parcours universitaire.

Toutes mes chers amis(es) et mes camarades de la promotion de A.M (2018 /2019), chacun à son nom.

A tous mes enseignants.

Table des matières

Introduction

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre de fonctions qui sont des solutions d'équations différentielles du second ordre, sans que cette propriété soit exclusive. Ces fonctions sont toutefois trés utiles, car elles apparaissent trés souvent, dés que l'on cherche à résoudre des équations différentielles du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants. Les fonctions spéciales sont disponibles en programmation sous la forme de bibliothèques. Elles sont aussi définies pour un grand nombre d'entre elles dans les logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica,...).
Le calcul fractionnaire est un champ des Mathématiques, qui consiste à généraliser les opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre entier. En particulier, la question sur la dérivation non entiére remonte à la fin du 17^{me} siécle. Cette élégante théorie a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches récents ou anciens. L'histoire affirme que la théorie de la dérivation fractionnaire est née le 30 Septembre 1695, toutefois elle reste encore mystérieuse ! En effet, il n'y avait pas d'interprétations géométrique et physique acceptables de ces opérateurs. En fait la question sur la signification géométrique du concept de la dérivation non entiére, a été posé à plusieurs reprises. Plus précisément, cela figurait en tant que probléme ouvert, lors de la clôture de la première Conférence Internationnale sur le Calcul Fractionnaire à New Haven(USA), en 1974. Récemment, en 1996, la conférence sur les méthodes des transformées et les fonctions spéciales dans la ville de Varna(Bulgarie) a montré que le probléme était encore

irrésolu ! Ce qui rend ce domaine trés interessant en terme de matiére de recherche.

Ce mémoire est partagé en trois chapitres.

Le premier chapitre est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : quelques rappels sur l'Analyse complexe, Fonctions spéciales (Fonction Gamma, Fonction Bèta, Fonction Error) et Analyse et calcul fractionnaire (intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo).

Le deuxième chapitre a pour sujet les fonctions hypergéométriques de Gauss. On rappelle quelques définitions, propriétés, ect....., sur les fonctions spéciales et précisément les fonctions hypergéométriques qui seront utilisées dans la suite.

Dans le troisième chapitre : Nous introduisons de nouvelles fonctions comme généralisation des fonctions gamma incomplètes [13], les fonctions s'avèrent utiles dans la théorie des probabilités de conduction thermique et dans l'étude des transformées de Fourier et de Laplace. Quelques propriétés importantes de la fonction sont étudiées. Nous avons étudié le comportement asymptotique, cas spéciaux, formule de décomposition, représentations intégrales, convolutions, relations de récurrence et formule de différenciation de ces fonctions.

en utilisant la fonction bêta généralisée definie dans [13], nous élargissons la définition de dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville et nous en discutons les propriétés [8]. de plus, nous établissons les relations avec des fonctions spéciales étendues de deux et trois variables via des fonctions génératrices.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels Sur Analyse Complexe

L'analyse complexe est un domaine des mathématiques traitant des fonctions á valeurs complexes (ou plus généralement, á valeurs dans un C-espace vectoriel) et qui sont dérivables par rapport á une ou plusieurs variables complexes. Les fonctions dérivables sur un ouvert du plan complexe sont appelées holomorphes et satisfont de nombreuses propriétés plus fortes que celles vérifiées par les fonctions dérivables en analyse réelle.

Définition 1.1.1. *une fonction f de la variable complexe z, dèfinie dans un ouvert $G \in \mathbb{C}$ est holomorphe au point $z_0 \in G$ si elle est dérivable par rapport à z au point z_0*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.
La limite se note $f'(z_0)$ et s'appelle la dérivée de $f(z)$.

Remarque 1.1.1. *la fonction $z \longrightarrow z_0$ (application identique) sont holomorphes de dèrivèes respectives* 0 *et* 1.

Proposition 1.1.1. *la fonction $z \longrightarrow \bar{z}$ (conjugué) n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$ cela s'écrie aussi*

$$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + |h|\epsilon(h), avec \quad \epsilon(h) \longrightarrow 0 \quad quand \quad h \longrightarrow 0.$$

ce qui est à rapprocher de la définition différentiabilité usuelle par rapport aux variables réelles $x = Rez$ et $y = Imz$

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2 + |h|\epsilon(h), avec \quad \epsilon(h) \longrightarrow 0 \quad quand \quad h \longrightarrow 0$$

Proposition 1.1.2. *Toute fonction holomorphe est différentiable au sens des variables réelles et on' a*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

ce que l'on appelle les relations de cauchy. Inversement si f est différentiable et satisfait ces relations en z_0, alors f est holomorphe en z_0.

Résultats

1. Une fonction f est holomorphe dans G si elle est holomorphe en tout point de G.
2. Il est claire que la somme, le produit, la composée de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe. En particulier les polynômes, les fonctions rationnelles sont holomorphes (hors de leurs pôles).

Considérons la forme différentielle $f(z)dz = Pdx + Qdy$ où $P = f(z), Q = if(z)$. on constate que :

$$Q'_x - P'_y = if'(z) - if'(z) = 0$$

De sorte que si f' est continue, la formule de Green-riemann s'applique. on' a donc :

Théorème 1.1.1. *si f holomorphe dans un ouvert G, alors pour tout triangle T inclus dans G, on'a*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

où ∂T est le bord orienté du triangle T.

Preuve. on applique donc la formule de Green-riemann

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int\int_T [Q'_x - P'_y]dxdy = o$$

si f' est continue. ■

Théorème 1.1.2. *si f est holomorphe dans un ouvert étoilé G, alors f possé une primitive dans G. Cela signifie qu'il existe une fonction F holomorphe dans G, et telle que $F' = f$. Cette primitive est alors déterminée à une constante prés.*

Preuve.

si G étoilé par rapport à 0, on peut poser

$$F(z) = \int_0^z f(u)du$$

oû le chemin d'intégration est le segment orionté de 0 vert z. on'a

$$F(z+h) - F(z) - hf(z) = \int_z^{z+h} [f(u) - f(z)]du = |h|\epsilon(h)$$

oû l'intégrale est calculée cette fois sur le segment $[z, z+h]$. Comme f est continue au point z, on voit que $\epsilon(h)$ tend vers 0 avec h. Ainsi F est holomorphe de dérivée f. Naturellement, si ϕ est une autre primitive, $\phi - F$ est à dérivée nulle, c'est une constante (appliquer le théoréme des accroissements finis sur le segment $[0, z]$). ■

Corollaire 1.1.1. *si f est holomorphe dans un ouvert étoilé G, alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

pour tout chemin fermé γ inclus dans G.(Naturellement γ est supposé de classe C^1 par morceaux).

Preuve. En effet cette intégrale vaut la variation d'une primitive F le long de γ, donc 0 puisque le chemin est fermé. ∎

1.1.1 Formules De Cauchy

Soient D un disque de rayon R, et a un point de D. soit γ un cercle concentrique à D, de rayon r tel que $|a| < r < R$. soit aussi γ_ϵ un cercle centré en a, de rayon $\epsilon < r - |a|$. Soit f une fonction holomorphe dans D. alors $f(z)/(z-a)$ est holomorphe dans $D - \{a\}$.
L'ouvert $D - \{a\}$ n'est pas étoilé, mais c'est la réunion de deux ouverts étoilés convenables. Il existe donc deux chemins fermés γ_i (i=1,2) pour chacun desquels $\int_{\gamma_i} f(z)dz = 0$. On en déduit la formule :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

On paramètre γ_ϵ par la formule $z = a + \epsilon \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$, d'où

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) id\theta \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 2i\pi f(a)$$

Théorème 1.1.3. ***(Formule De Cauchy)***
Soit a un point d'un disque ouvert D. Soit f une fonction holomorphe sur D et continue sur l'adhérence $\bar{D}$. On'a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{z-a}$$

oû ∂D le bord de D, orienté positivement.

Preuve. Pour $r \in]|a|, R]$, on note

$$I_r = \frac{1}{2i\pi} \int_{c(0,r)} \frac{f(z)dz}{z-a}$$

Et on remarque que $I_r = f(a)$ si $|a| < R$ d'après la formule de cauchy, Il s'agit donc de prouver que I_r converge vers I_R lorsque r tend vers R. mais

$$2\pi(I_r - I_R) = \int_0^{2\pi} \frac{r\mathbf{e^{it}} f(r\mathbf{e^{i}t})}{r\mathbf{e^{it}} - a} - \frac{R\mathbf{e^{it}} f(R\mathbf{e^{i}t})}{R\mathbf{e^{it}} - a} dt$$

On peut conclure de plusieurs façons, par exemple en appliquant le théorème de convergence dominée, en notant M un majorant de $|f|$ sur $D(\bar{0}, R)$ et en supposant $r \geq r_0 \geq | a | + \alpha$ avec $\alpha > 0$, on'a :

$$\left| \frac{r\mathbf{e^{it}} f(r\mathbf{e^{i}t})}{r\mathbf{e^{it}} - a} - \frac{R\mathbf{e^{it}} f(R\mathbf{e^{i}t})}{R\mathbf{e^{it}} - a} \right| \leq \frac{2RM}{\alpha}$$

qui est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$. Puisque la fonction à intégrer tend vers 0 lorsque r tend vers R ■

Exemple 1.1.1. *calculer*

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 - 4z + 1}{z + i}$$

Solution :

Soit $f(z) = z^2 - 4z + 1, z_0 = -i$ et notons que f est analytique dans $|z| \leq 2$ et que z_0 est à l'intèrieur du disque $|z| \leq 2$.

D'après la formule de cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{z^2 - 4z + 1}{z + i} dz &= 2i\pi f(-i) \\ &= 2i\pi \times 4i \\ &= -8\pi. \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.2. *La fonction f est indéfiniment dérivable (indéfiniment holomorphe) dans D, et c'est la somme de sa série de taylor de centre 0, cette dérniére ayant un rayon de convergence au moins égale au rayon R de D.*

Preuve. le second membre de la formule de cauchy est évidement dérivable par rapport à a, donc le premier membre aussi, et

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

puis par récurrence

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

Ce qui prouve que f est indéfiniment holomorphe dans D. Ensuite on écrit :

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{z^{n+1}}$$

La converge uniforme par rapport à $|z| = R > |a|$ entraîne :

$$f(a) = \sum_{n\geq 0} c_n a^n$$

où

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

Cette s'érie entiére converge pour tout $|a| < R$, donc son rayon est au moins R. enfin on constate que :

$$c_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

$\blacksquare$

Corollaire 1.1.3. ***(Inègalitès de cauchy)***

Posons $M(r) = \sup_{z|=r} |f(z)|$. *Appliquant la formule donnant* c_n *au cercle de rayon* $r \leq R$, *on obtient :*

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

Définition 1.1.2. *(Théoreme de Fubini pour les rectangles fermés)*

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$ *un rectangle fermé du plan* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : R \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors* f *est intégrable sur* R *et on'a :*

$$\int\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Rècapitulation

Une fonction f holomorphe à les propriétés suivantes :

(a) $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans l'ouvert d'holomorphie.

(b) f à une primitive dans tout ouvert étoilé oú elle est holomorphe.

(c) La formule de cauchy à lieu dans tout disque d'holomorphie.

(d) f indéfiniment holomorphe.

(e) f est développable en série entière (série de taylor) dans tout disque d'holomorphie.

Inversement : Chacune de ces propriétés caractérise les fonctions holomorphes. En effet, si f est continue, on'a les implications :

1. $(c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow$ holomorphie.
2. $(e) \Longrightarrow (a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow$ holomorphie

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction gamma d'euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$, et permet à n de prendre des valeurs réelles ou complexes.

Définition 1.2.1. *La fonction gamma est dèfinie par l'intégrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}dt \tag{1.1}$$

qui converge sur le demi-plan complexe $R(x) > 0$.

Propriétés 1.2.1. *: La fonction Gamma à les propriétes suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\Gamma(x+n+1) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n)\Gamma(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
6. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}t^{1-1}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\mathbf{t}}dt \\ &= [-\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-t}} t^{x+1-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-t}} t^{x} dt\end{aligned}$$

on intègre par partie :

$$U = t^x \longrightarrow U' = xt^{x-1}$$

$$V' = \mathbf{e^{-t}}dt \longrightarrow V = -\mathbf{e^{-t}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-t}} t^{x} dt &= [-\mathbf{e^{-t}t^x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t} x t^{x-1} dt \\ &= x\int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-t}} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+n+1) \quad &= \quad ? \\ \textit{pour} \quad n=0 &\Longrightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \textit{pour} \quad n=1 &\Longrightarrow \Gamma(x+2) = (x+1)x\Gamma(x) \\ \textit{pour} \quad n=2 &\Longrightarrow \Gamma(x+3) = (x+2)(x+1)x\Gamma(x) \\ &\vdots \\ \textit{pour} \quad n=n &\Longrightarrow \Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n+1)\ldots(x+2)(x+1)x\Gamma(x)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \ ? \\
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \qquad \textit{pour} \quad x = n \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(x) \\
&= n\Gamma((n-1)+1) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \\
&\vdots \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-3)\ldots\Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}? \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-t}} t^{\frac{1}{2}-1} dt
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
t = y^2 &\implies dt = 2ydt \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e^{-y^2}}}{y} 2ydy \\
&= 2\int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-y^2}} dy \\
&= \frac{2\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

6.

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \quad ? \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}-1+1\right) \\
&= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right) \\
&\vdots \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{k}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Si k impaire $k = 2n-1$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{2n-1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{2n}{2n}(2n-1)\frac{2n-2}{2n-2}(2n-3)\frac{2n-4}{2n-4}(2n-5)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\sqrt{\pi}}{2^n n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 1} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n 2^n n!}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

■

1.2.2 Fonction Bèta

Parmi les fonction de base du calcul fractionnaire la fonction béta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans certaine combinaison avec la fonction gamma.

Définition 1.2.2. *la fonction béta est définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \tag{1.2}$$

$p, q \in \mathbb{C}$ *l'intégrale converge pour* $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$

Propriétés 1.2.2. *Soient* $p, q \in \mathbb{C}$.

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta$
3. $B(p,q) = (-1)^q \int_0^{+\infty} \frac{U^{p-1}}{(U-1)^{p+q}}$

Preuve.

1. $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

   On pose : $y = 1 - t \quad \Longrightarrow t = 1 - y \quad et \quad dt = -dy$

$$\begin{aligned} B(p,q) &= -\int_1^0 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dy \\ &= \int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy \\ &= B(q,p). \end{aligned}$$

2. $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta?$

   On pose : $t = \sin^2\theta \Longrightarrow dt = 2\cos\theta\sin\theta d\theta$

   $t \longrightarrow 0 \Longrightarrow \theta \longrightarrow 0$

   $t \longrightarrow 1 \Longrightarrow \theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{p-1}(1-\sin^2\theta)^{q-1} 2\cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\theta\cos^{2q-2}\theta\cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta
\end{aligned}$$

3. $B(p,q) = (-1)^q \int_0^{+\infty} \frac{U^{p-1}}{(U-1)^{p+q}} du$?

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

on pose : $x = \frac{u}{u-1} \Longrightarrow dx = \frac{-1}{(u-1)^2} du$

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \int_0^1 \frac{u}{u-1}^{p-1} \left(1 - \frac{u}{u-1}\right)^{q-1} \frac{-du}{(u-1)^2} \\
&= \frac{u^{p-1}}{(u-1)^{p-1}} . \frac{(-1)^{q-1}}{(u-1)^{q-1}} . \frac{-1}{(u-1)^2} du \\
&= (-1)^q \int_0^{+\infty} u^{p-1}(u-1)^{-p-q} du \\
&= (-1)^q \int_0^{+\infty} \frac{U^{p-1}}{(U-1)^{p+q}} du
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.1. *La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante :* $\forall p, q > 0,$ *on' a :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.3}$$

1.2.3 fonction Error

Définition 1.2.3. *La définition de la fonction Error est donnée par :*

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

La fonction complémentaire d'erreur (Erfc) est une fonction étroitement liée qui peut être écrite en termes de la fonction d'erreur comme :

$$Erfc(x) = 1 - Erf(x)$$

En conséquence de (1.4) on remarque que $Erf(0) = 0$ et $Erf(\infty) = 1$.

1.3 Analyse et calcul fractionnaire

On va commencer par introduire une des plus importantes approches de calcul fractionnaire : au sens de Riemann-liouville . Y comprie, quelques une de ses propriétés .

1.3.1 intégrale fractionnaire au sens de Riemann-liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$, selon l'approche de riemann-liouville. généralise la célèbre formule (attribuée à cauchy)d'intégrale répété n-fois :

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Définition 1.3.1. *Soit $f \in L^1([a,b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ notée $(I_a^n f)$ est définie par :*

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-1)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x > a \tag{1.5}$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma donnée par (1.1).

Théorème 1.3.1. *Si $f \in L^1[(a,b)]$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1[(a,b)]$.*

Preuve. En introduisant la définition (1.3.1) puis en utilisant le théorème de fubini, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)|dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t)|dtdx\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f(t)|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dxdt\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(t)|(b-1)^\alpha dt\\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(t)|dt
\end{aligned}
$$

puisque $f \in L^1([a,b])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat désiré. ■

Exemple 1.3.1. *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$, alors :*

$$
(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \tag{1.6}
$$

En effectuant le changement de variable : $t = a + (x-a)y \qquad (0 \leq y \leq 1)$

alors (1.6)devient :

$$
\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta (x-a)dy\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1}y^\beta dy\\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy\\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{(\beta+1)-1}dy
\end{aligned}
$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.2) *puis de la relation (1.3)on arrive à :*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.7}$$

Exemple 1.3.2. *Soit $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > -1$ on'a*

$$(I_a^\alpha f)(x) = I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1}dt \tag{1.8}$$

En posant : $t = xu$, (1.8)devient :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{\alpha-1}xdu \tag{1.9}$$

En utilisant la fonction bêta (1.2) *puis de la relation (1.3) on arrive à :*

$$\begin{aligned}I^\alpha f(x) &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (u)^\beta (1-u)^{\alpha-1}du\\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha)\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Proposition 1.3.1. *. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(\alpha),\Re(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on'a :*

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta(I_a^\alpha f)$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. Si de plus $f \in \mathbf{C}([a,b])$, alors cette identité est vraie $\forall x \in [a,b]$.

Preuve. Supposons d'abord que $f \in L^1([a,b])$, on'a :

$$\begin{aligned}
[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-a)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-a)^{\alpha-1}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dtds
\end{aligned}$$

En vertu de théorème (1.3.1), les intégrales figurant dant l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a,b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)[\int_t^x (x-a)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds]dt \tag{1.10}$$

En effectuant le changement de variable : $s = t + (x-t)y \quad 0 \leq y \leq 1$ On obtient :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dydt \tag{1.11}$$

Enfin,en tenant de la définition (1.3.1) puis de la relation (1.3) on obtient :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt = (I_a^{\alpha+\beta})f(x)$$

Supposons maintenant que $f \in \mathbf{C}([a,b])$, alors (d'aprés les théorème sur les intégrales dépendant de paramétres)$I_a^\beta f \in \mathbf{C}([a,b])$, et par suite :

$$I_a^{\alpha+\beta}f, I_a^\alpha I_a^\beta f \in \mathbf{C}([a,b])$$

Ainsi, d'aprés ce qui précède, les deux fonctions continues $I_a^{\alpha+\beta}f, I_a^\alpha I_a^\beta f$ coincident presque partout sur $[a,b]$, elles doivent donc coincider partout sur $[a,b]$. ■

le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 1.3.2. *Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a,b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-liouville et le signe limite comme suit :*

$$\left[I_a^\alpha \left(\lim_{k\longrightarrow+\infty} f_k\right)\right](x) = \lim_{k\longrightarrow+\infty}(I_a^\alpha f_k)(x)$$

Preuve. soit$f_k \longrightarrow f$ simplement convergente et

$$\begin{aligned}
|I_a^\alpha f_k(x) - (I_a^\alpha f(x)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x |f_k(t)-f(t)|(x-t)^{\alpha-1}dt\right| \\
&\leq \frac{\| f_k - f \|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&\leq \frac{\| f_k - f \|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha}(x-a)^\alpha \\
&\leq \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \| f_k - f \|_\infty \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \| f_k - f \|_\infty (b-a)^\alpha \rightarrow_{k\longrightarrow+\infty} 0
\end{aligned}$$

■

1.3.2 la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville

Définition 1.3.2. *Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville de la fonction f d'ordre*
$\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \tag{1.12}$$

oû :

$$n-1 < [\Re(\alpha)] < n \quad et \quad x > a$$

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on'a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{1.13}$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \tag{1.14}$$

par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$

Remarque 1.3.1.

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x)$$

tel que : $n = [\Re(\alpha)] + 1, x > a$

Exemple 1.3.3. *1. Soit $f(x) = (x-\alpha)^\beta$ avec $\beta \geq -1$ pour $\beta \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$. on'a d'aprés la remarque (1.3.1) puis l'exemple (1.3.3) :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}$$

Alors, pour $(\alpha - \beta) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on'a :

$$D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = 0 \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.15}$$

Par ailleurs si $(\alpha - \beta) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on trouve :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.16}$$

2. En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-liouville d'une *fonction constante $f(x) = C$ est non nulle, sa valeur est :*

$$D_a^\alpha C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

La proposition suivante établie une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.3.2. *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n(a,b]$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$ existe presque partout sur [a,b] et de plus,elle est donnée par :*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=o}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt$$

1.3.3 Propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par analogie avec la dérivation usuelle, et comme conséquence directe de la relation (1.5), l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-liouville est linéaire.

Théorème 1.3.3. *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on'a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x)$$

Lemme 1.3.1. *Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et f est une fonction vérifiant $D_a^\alpha f = 0$ alors :*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}$$

Preuve. Soit

$$(D_a^\alpha f)(x) = 0$$

En tenant compte de la remarque (1.3.1) on'a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$$

et par suite :

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$$

Maintenant, l'application de l'opérateur I_a^α à l'équation précédente donne :

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^\alpha((x-a)^j)$$

En utilisant la relation (1.7)on obtient ainsi :

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m .(x-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} (x-a)^{\alpha-m}$$

établit le résultat désiré. ∎

L'opérateur de la dérivation au sens de Riemann-liouville posséde les propriétés résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.3. *Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n, m-1 \leq \beta \leq m$.*

1. *Pour $f \in L^1([a,b])$, l'égalité :*

$$D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t)$$

est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$

2. *Si* $\alpha > \beta > 0$*, alors pour* $f \in L^1([a,b])$*, la relation :*

$$D_a^{\alpha}(D_a^{\alpha} f)(t) = (I^{\alpha-\beta} f)(x)$$

est vrai presque prtout sur $[a,b]$*.*

3. *Si* $\beta \geq \alpha > 0$ *et la dérivée fractionnaire* $D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe,alors on'a :*

$$D_{\alpha}^{\beta}(I^{\alpha} f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x)$$

4. *Si* $f \in L^1([a,b])$ *et* $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$ *avec* $n = [\Re(\alpha)+1]$*, alors :*

$$[I_a^{\alpha}(D_a^{\alpha} f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \longrightarrow a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x)$$

1.3.4 la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-liouville a jouée un rôle important dant le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs Y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit étre révisé, car les problémes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivée fractionnaire.

Définition 1.3.3. *Soient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(\alpha) > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n-1 < \Re(\alpha) < n$ *et* $f \in C^n([a,b])$

la dérivée fractionnaire d'ordre α *au sens de Caputo de la fonction* f *notée* ${}^cD_a^{\alpha} f$ *est définie* *par :*

$$\begin{aligned} {}^{c}D_a^{\alpha} f &:= I^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m-\alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre m, alors que la dérivée fractonnaire au sens de caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 1.3.4. *Pour $f(x) = (x-a)^{\beta}$ avec $\beta \geq 0$, on'a*

$$ {}^{c}D_a^{\alpha} f(x) = \begin{cases} 0, & si \quad \beta \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\} \\ \frac{\beta+1}{\beta+1-\alpha}(x-\alpha)^{\beta-\alpha}, & si \quad \beta > n-1 \end{cases} \tag{1.17}$$

En particulier,si f est constante sur [a,b], alors :

$$ {}^{c}D_a^{\alpha} f = 0$$

Chapitre 2

Fonction Hypergéométrique

2.1 Introduction

Le terme de fonction hypergéométrique, parfois sous le nom "fonction hypergéométrique de Gauss", désigne généralement une fonction spéciale particulière, dépendant de trois paramètres a, b, c, notée ${}_2F_1 = (a, b, c; z)$, parfois notée sans indice quand il n'y a pas d'ambigüïté, et qui s'exprime sous la forme de la série hypergéométrique (lorsque celle-ci converge). Selon les valeurs prises par les paramètres, cette fonction correspond à de nombreuses fonctions usuelles ou spéciales. La fonction hypergéométrique est également solution d'une équation différentielle complexe linéaire du second ordre, dite hypergéométrique. Toute équation différentielle linéaire du second ordre comprenant également trois points singuliers réguliers peut se ramener à cette équation.

2.2 Fonction de Appell

Une extension formelle de la fonction hypergéométrique à deux variables, aboutissant à quatre types de fonctions (Appell 1925 ; Picard 1880 ; Goursat 1882 ; Whittaker et Watson 1990).

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{m!n!(\gamma)_{m+n}}x^m y^n \\
F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{m!n!(\gamma)_m(\gamma')_n}x^m y^n \\
F_3(\alpha,\alpha';\beta,\beta';\gamma;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{m!n!(\gamma)_{m+n}}x^m y^n \\
F_4(\alpha;\beta;\gamma;\gamma';x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{m!n!(\gamma)_m(\gamma')_n}x^m y^n
\end{aligned}$$

Ces doubles séries sont absolument convergentes pour :

$$\begin{cases}
F_1 & pour|x| < 1, |y| < 1 \\
F_2 & pour|x| + |y| < 1 \\
F_3 & pour|x| < 1, |y| < 1 \\
F_4 & pour|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} < 1
\end{cases}$$

2.3 fonction de Lauricella

En 1893, Giuseppe Lauricella a défini et étudié quatre séries hypergéométriques F_A,F_B,F_C,F_D de trois variables.

$$F_A^{(3)}(a,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}\frac{(a)_{i_1+i_2+i_3}(b_1)_{i_1}(b_2)_{i_2}(b_3)_{i_3}}{(c_1)_{i_1}(c_2)_{i_2}(c_3)_{i_3}i_1!i_2!i_3!}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$$

pour

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| < 1$$

$$F_B^{(3)}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c;x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{i_1}(a_2)_{i_2}(a_3)_{i_3}(b_1)_{i_1}(b_2)_{i_2}(b_3)_{i_3}}{(c_1)_{i_1+i_2+i_3}i_1!i_2!i_3!}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$$

pour

$$|x_1|<1,|x_2|<1,|x_3|<1$$

$$F_C^{(3)}(a,b,c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}\frac{(a)_{i_1+i_2+i_3}(b_1)_{i_1+i_2+i_3}}{(c_1)_{i_1}(c_2)_{i_2}(c_3)_{i_3}i_1!i_2!i_3!}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$$

pour

$$|x_1|^{\frac{1}{2}}+|x_2|^{\frac{1}{2}}+|x_3|^{\frac{1}{2}}<1$$

$$F_D^{(3)}(a,b_1,b_2,b_3,c;x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{i_1+i_2+i_3}(b_1)_{i_1}(b_2)_{i_2}(b_3)_{i_3}}{(c_1)_{i_1+i_2+i_3}i_1!i_2!i_3!}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$$

pour

$$|x_1|<1,|x_2|<1,|x_3|<1$$

Ces fonctions peuvent être étendues à d'autres valeurs des variables x_1, x_2, x_3 par la suite analytique.

2.4 Fonction de Bessel

2.4.1 Fonction de Bessel de premiére espéce :

Définition 2.4.1. *L'équation différentielle de Bessel est définie par :*

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y=0 \tag{2.1}$$

La solution de cette équation s'appelle fonction de Bessel.

Proposition 2.4.1. *L'équation différentielle de Bessel est une équation linéaire d'ordre deux. La solution générale a la forme :*

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes, et y_1 et y_2 sont les solutions linéaires et indépendantes de l'équation.

Probléme :

On va chercher la solution de l'équation sous la forme de la série :

$$y = x^p(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p}$$

On posant $a_0 \neq 0$. Le probléme sera de trouver les coefficients $a_i, i = 1, 2, \ldots$ et le nombre p, de la fonction :

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p}$$

Sera induite dans l'équation. Trouvons les dérivées :

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p) x^{i+p-1} \\ y'' &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p)(i+p-1) x^{i+p-2} \end{aligned}$$

En les remplaçant dant l'équation, on trouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p)(i+p-1) x^{i+p-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p) x^{i+p-2} + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p} = 0$$

L'identité peut étre écrite sous forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i [(i+p)^2 - v^2] x^{i+p-2} = -\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p}$$

On peut déduire que :

$$a_i = -\frac{a_{i-2}}{i(2p+i)}$$

En tenant compte que :

$a_1 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0, \dots a_{2k+1} = 0$, c'est-à-dire que les coefficients ayant des indices impairs sont nuls, sur la base de la formule de récurrence, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2(2p+2)} = -\frac{a_0}{2^2(p+1)} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4(2p+4)} = (-1)^2\frac{a_0}{2^4 2(p+1)(p+2)} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6(2p+6)} = (-1)^3\frac{a_0}{2^6 2\cdot 3(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&\vdots \\
a_{2k} &= (-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\dots(p+k)}
\end{aligned}$$

On remarque que tous les coefficients pairs sont exprimés en fonction a_0, on peut écrire alors :

$$a_0 = -\frac{1}{2^2\Gamma(p+1)}$$

En tenant compte de :

$$\Gamma(p+1)(p+1) = \Gamma(p+2), \Gamma(p+2)(p+2) = \Gamma(p+3), ect\dots, \Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\dots(p+k) = \Gamma(p+k+1)$$

On peut écrire pour simplifier que :

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{1}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

Résultat :

la solution de l'équation peut être représentée sous forme :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)}$$

où $p = \pm v$, la solution de l'équation pour $p = v$ est notée par $J_v(x)$ et elle est appelée équation de Bessel de premiére espéce d'ordre v. La solution pour $p = -v$ est notée par $J_{-v}(x)$ et elle est appelée équation de Bessel de première espèce d'ordre $-v$. Par conséquent :

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+v}}{k!\Gamma(p+v+1)}$$

$$J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k-v}}{k!\Gamma(p-v+1)}$$

Pour v non entier $J_v(x), J_{-v}(x)$ sont des fonctions linéairement indépendantes et par conséquent :

$$y = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$$

est la solution générale de l'équation de Bessel.

Corollaire 2.4.1. *Si v est un etier égale à n, $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ seront linéairement dépendantes. Pour confirmer celui-ci, considérons la série pour $J_{-n}(x)$, et transformons la :*

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\Gamma(p-n+1)}$$

On connaît que la fonction gamma pour les nombres entiers négatifs et nuls elle est égale à l'infini. Par conséquent, pour $k \leq n-1, \Gamma(-n+k+1) = \infty$ et la série sera nulle.
La sommation peut être débutée de $k = n$:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\Gamma(p-n+1)}$$

Si $m = k - n$*, on aura :*

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{(x/2)^{2m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \\ &= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{2m+n}}{m!\Gamma(m+n+1)} \end{aligned}$$

Etant donné que $\Gamma(m+1)! = m!$*, alors* $\Gamma(m+n+1)! = (m+n)!$*. La derniére série détermine la fonction* $J_n(x)$*. Par conséquent :*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

donc $J_n(x)$ *et* $J_{-n}(x)$ *sont linéairement dépendantes :*

Considérons $J_0(x)$ *et* $J_1(x)$ *:*

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 2!^2} - \frac{x^6}{2^6 3!^2} + \frac{x^8}{2^8 4!^2} - \frac{x^{10}}{2^{10} 5!^2} + \ldots \end{aligned}$$

(avec $0! = 1$*)*

Par conséquent :

$J_0(-x) = J_0(x)$ *et la fonction est paire. Pour* $x = 0, J_0(x) = 1$*. Si pour* $J_0(x)$*, on prend la somme des cinq membres de la série :*

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 2!^2} - \frac{x^6}{2^6 3!^2} + \frac{x^8}{2^8 4!^2}$$

L'erreur sera inférieure à $\frac{x^{10}}{2^{10}5!^2} < \frac{x^{10}}{10^7}$ *la série converge alors principalememt pour* $x < 1$.

$$
\begin{aligned}
J_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{2k+1}}{k!\Gamma(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)} \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 3} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + \dots
\end{aligned}
$$

Pour $x = 0, J_1(x) = 0$. *De plus, on a* $J_1(-x) = -J_1(x)$ *et par conséquent* $J_1(x)$ *est impaire. La relation* $J_0(-x) = J_0(x)$ *et* $J_1(-x) = -J_1(x)$ *permet de dresser la table pour* $x > 0$.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	*1.0000*	*0.0000*
0.5	*0.9385*	*0.2423*
1.0	*0.7652*	*0.4401*
1.5	*0.5118*	*0.5579*
2.00	*0.2239*	*0.5767*
2.5	*-0.0484*	*0.4971*
3.0	*-0.2601*	*0.3391*

2.4.2 Fonction de Bessel de deuxième espéce

Probléme : En qualité de deuxième solution on prend :

$$Y_n(x) = \lim_{v \longrightarrow n} \frac{\cos \pi v J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin \pi v}$$

Pour $v = n$: $\sin \pi n = 0, \cos n\pi = (-1)^n$ et $(-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x)$ et on obtient une indétermination $0/0$.

Utilisons la règle de l'Hospital :

$$Y_n(x) = \lim_{v \longrightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial v}[\cos \pi v J_v(x) - J_{-v}(x)]}{\frac{\partial}{\partial v} \sin \pi v}$$

On obtient :

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left[\ln \frac{x}{2} + c\right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left[\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}\right]$$

Où C est la constante d'Euler.

Résultat : La solution générale est :

$$C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

La fonction $Y_n(x)$ s'appelle équation de Bessel de deuxième espèce d'ordre n ou fonction de Neumann.

Corollaire 2.4.2. *Ecrivons la série pour $Y_0(x)$*

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \left[\ln \frac{x}{2} + c\right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{n+2k}}{(k!)^2} \times 2 \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \\ &= \frac{2}{m} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + c\right) - 1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots \right] \end{aligned}$$

donc :

$$Y_0(x) \longrightarrow \infty \quad pour \quad x \longrightarrow 0$$

2.4.3 Equation différentielle conduisant à l'équation de Bessel. Fonction de Bessel de troisième espèce

Soit l'équation :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\lambda^2 - \frac{v^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{2.2}$$

Transformons cette équation en introduisant une nouvelle variable $t = \lambda x$. Exprimons la dérivée de y en fonction de t :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt} \\ y'' &= \lambda \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \lambda \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

Les expressions trouvées sont remplacées dans (2.2) :

$$\lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda}{t} \lambda \frac{dy}{dt} + \left(\lambda^2 - \frac{\lambda^2 v^2}{t^2} \right) y = 0$$

Simplifions par λ^2

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) y = 0$$

C'est donc l'équation de Bessel.

Ses solutions seront : J_v et J_{-v} ou $J_v(\lambda x)$ et $J_{-v}(\lambda x)$

Probléme : Considérons l'équation :

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0 \tag{2.3}$$

Si l'on introduit le signe (-) sous la parenthèse et l'on pose $i^2 = -1$, l'équation (2.3) devient :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(i^2 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0$$

qui est un cas particulier de l'équation (2.2), quand $\lambda = i$. La solution de l'équation (2.2) sera : $J_v(xi)$ et $J_{-v}(xi)$

$$\begin{aligned} J_v(xi) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v} i^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \\ &= i^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \\ J_{-v}(xi) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v} i^{2k-v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)} \\ &= i^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)} \end{aligned}$$

On'a utilisé $i^{2k} = (-1)^k$ et $(-1)^{2k} = 1$

Proposition 2.4.2. *Etant donné que l'équation différentielle est homogène, donc quelque soit C_1 et quelque soit C_2 les fonctions $C_1 J_v(xi)$ et $C_2 J_{-v}(xi)$ seront ses solutions. En posant $C_1 = i^{-v}$ et $C_2 = i^v$, on obtient la solution sous forme :*

$$\begin{aligned} i^{-v} J_v(xi) &= i^{-v} i^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \end{aligned}$$

$$i^v J_{-v}(xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)}$$

Résultat1 : Posons :

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}$$

$$I_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)}$$

Les fonctions $I_v(x)$ et $I_{-v}(x)$ sont les fonctions de Bessel du troisième espèce. Dans le cas de v fractionnel, $I_v(x)$ et $I_{-v}(x)$ sont linéairement dépendants et $y = C_1 I_v(x) + C_2 I_{-v}(x)$ sera la solution générale de (2.3).

Résultat2 : dans le cas $v = n$(entier), $I_v(x) = I_n(x)$

Vérifions :

$$I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}$$

Etant donné que $k \leq n-1$ le nombre $k-n+1 \leq 0$ et par conséquent $\Gamma(k-n+1) = \infty$, et les membres correspondants de la série sont nuls.

Introduisons un nouveau indice de sommation m, en posant $k = m+n$. D'où :

$$I_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{\Gamma(m+n+1)m!} = I_n(x)$$

Dans le cas où v est un entier, la nouvelle solution linéairement indépendante avec $I_n(x)$:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin \pi n}$$

et la solution générale de (2.3) s'écrira sous forme :

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x)$$

2.4.4 Fonction génératrice de la fonction Bessel

Considérons la fonction $u(z,t) = \mathbf{e}^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ qu'on décompose en série :

$$u(z,t) = \mathbf{e}^{\frac{zt}{2}} \mathbf{e}^{\frac{-z}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{zt}{2})^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{2t})^m}{m!}$$

On peut écrire, que :

$$u(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{z}{2})^{k+m}t^{k-m}}{k!m!}$$

Ou :

$$u(z,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n t^n$$

Le coefficient A_n est :

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\frac{z}{2})^{2m+n}}{(m+n)!m!} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\frac{z}{2})^{2m+n}}{\Gamma(m+n+1)m!}$$

Pour $z = x$, le coefficient A_n devient $J_n(x)$ et

$$u(x,t) = \mathbf{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n \tag{2.4}$$

La fonction $u(x,t)$ s'appelle la fonction génératrice de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre entier n.

Si l'on pose $z = ix$, on'a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}i^{2m+n}}{\Gamma(m+n+1)m!} &(2.5)\\ &= i^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{\Gamma(m+n+1)m!} &(2.6)\\ &= i^n I_n(x) &(2.7)\end{aligned}$$

et

$$u(ix,t) = \mathbf{e}^{\frac{ix}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I_n(x)$$

La fonction $u(ix,t)$ s'appelle la fonction génératrice de la fonction de Bessel de troisième espèce.

2.4.5 Propriétés de la fonction de Bessel de première et troisième espèces

1. **Formule de récurrence** :

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

Cette formule joue un rôle important dans la théorie des fonctions de Bessel. Elle permet de réduire le calcul des fonctions d'ordre supérieur à des fonctions de premier et deuxième ordre, c'est à dire : $J_1(x)$ et $J_0(x)$.

Exemple 2.4.1.

$$\begin{aligned} J_4(x) = J_{3+1}(x) &= \frac{6}{x} J_3(x) - J_2(x) \\ &= \frac{6}{x}\left[\frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x)\right] - \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] \\ &= \frac{24}{x^2}\left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] - \frac{6}{x} J_1(x) - \frac{2}{x} J_1(x) + J_0(x) \\ &= \frac{48}{x^3} J_1(x) - \frac{24}{x^2} J_0(x) - \frac{8}{x} J_1(x) + J_0(x) \\ &= \left[\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\right] J_1(x) - \left[\frac{24}{x^2} - 1\right] J_0(x) \end{aligned}$$

La formule de récurrence permet pour la fonction de Bessel d'ordre entier de se limiter à l'établissement des tables pour $J_0(x)$ et $J_1(x)$

Preuve. Prenons la relation (2.4) et calculons $\frac{\partial u}{\partial t}$ par deux méthodes :

(a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{e}^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{x}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n + \frac{x}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^{n-2}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) n t^{n-1}$

Les deux parties droites des deux différentes expressions doivent être égales pour $\frac{\partial u}{\partial t}$. Egalisons les coefficients pour t^{n-1}.

On obtient :

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2}J_{n-1}(x) + \frac{x}{2}J_{n+1}(x)$$

D'où :

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x), etc\dots$$

■

2. **Formule pour la dérivée** :

$$J_n'(x) = 2[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

Pour la démonstration calculons par deux méthodes :
(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\mathbf{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^{n+1} - \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^{n-1}\right]$
(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n'(x)t^n$
égalisons les coefficients pour t^n. On obtient :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)], etc\dots$$

La formule montre, que par les tables $J_0(x)$ et $J_1(x)$, on peut calculer $J_n'(x)$. Dans le cas particulier pour $n = 0$, on obtient :

$$J_0'(x) = \frac{1}{2}[J_{-1}(x) - J_1(x)] = \frac{1}{2}[-J_1(x) - J_1(x)] = -J_1(x)$$

3. Prenons la formule (2.6). Dérivons par rapport à t comme fonction exponentielle d'abord puis comme série :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{xi}{2}e^{\left(t-\frac{1}{t}\right)}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I_n(x)t^n + \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I_n(x)t^{n-2}\right]\frac{xi}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I_n(x) n t^{n-1}$$

Egalisons les coefficients pour t^{n-1}. On obtient :

$$\begin{aligned} i^n I_n(x) n &= \frac{xi}{2}[i^{n-1} I_{n-1}(x) + i^{n+1} I_{n+1}(x)] \\ &= \frac{xi^n}{2}[I_{n-1}(x) + i^2 I_{n+1}(x)] \end{aligned}$$

ou :

$$I_n(x) n = \frac{x}{2}[I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)]$$

D'où :

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x)$$

La formule récurrente pour la fonction de Bessel de troisième espèce.

4. Si l'on calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la formule (2.6) par deux méthodes et on égalise les coefficients dans les deux expressions trouvées pour t^n, on obtiendra la dérivée de la fonction de Bessel du troisième espèce :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{e}^{\frac{xi}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \frac{i}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{i}{2}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I_n(x) t^{n+1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I_n(x) t^{n-1}\right]$$

D'une autre part :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n I'_n(x) t^n$$

$$\begin{aligned} i^n I'_n(x) &= \frac{i}{2}[i^{n-1} I_{n-1}(x) - i^{n+1} I_{n+1}(x)] \\ &= \frac{i^n}{2}[I_{n-1}(x) - i^2 I_{n+1}(x)] \end{aligned}$$

où :

$$I'_n(x) = \frac{1}{2}[I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)] \quad etc$$

pour $n = 0$:

$$I_0'(x) = \frac{1}{2}[I_{-1}(x) - I_1(x)] = I_1(x)$$

avec :

$$I_{-n}(x) = I_n(x)$$

Des formules analogues peuvent être obtenues pour $Y_n(x)$ et $K_n(x)$

2.5 Fonctions de whittaker

2.5.1 Fonctions de Kummer $M_{k,m}(z)$

Considérons l'équation :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left\{\frac{k}{z} + \frac{1/4 + m^2}{z^2}\right\} u = 0 \tag{2.8}$$

Probléme(1) : On va chercher une solution sous une forme :

$$u(z) = z^{m+\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

On aura :

$$u'(z) = \left(m + \frac{1}{2}\right) z^{m-\frac{1}{2}} \sum a_i z^i + z^{m+\frac{1}{2}} \sum_{i\geq 0} i a_i z^{i-1}$$

où

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) z^{m-\frac{1}{2}} \sum a_i z^i = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{u(z)}{z}$$

et

$$z^{m+\frac{1}{2}} \sum_{i\geq 0} i a_i z^{i-1} = z^{m-\frac{1}{2}} \sum_{i\geq 0} i a_i z^i = z^{m+\frac{1}{2}} \sum_{i\geq 0} (i+1) a_{i+1} z^i$$

de là

$$\begin{aligned}
u''(z) &= -\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{u(z)}{z^2}+\frac{m+\frac{1}{2}}{z}\left[\frac{m+\frac{1}{2}}{z}u(z)+z^{m+\frac{1}{2}}\sum_{i\geq 0}(i+1)a_{i+1}z^i\right]\\
&+ \left(m+\frac{1}{2}\right)z^{m-\frac{1}{2}}\sum_{i\geq 0}(i+1)a_{i+1}z^i+z^{m-\frac{1}{2}}\sum_{i\geq 0}(i+1)ia_{i+1}z^i\\
&= \frac{m^2+\frac{1}{4}}{z^2}u(z)+(2m+1)z^{m-\frac{1}{2}}\sum(i+1)a_{i+1}z^i+z^{m-\frac{1}{2}}\sum(i+1)ia_{i+1}z^i\\
&= \frac{m^2+\frac{1}{4}}{z^2}u(z)+z^{m-\frac{1}{2}}\sum(i+1)[2m+1+i]a_{i+1}z^i
\end{aligned}$$

donc (2.8)fournit la relation de récurrence :

$$\left(m+k+i+\frac{1}{2}\right)a_i+(i+1)[2m+1+i]a_{i+1}=0$$

ou

$$a_{i+1}=-\frac{m+k+i+\frac{1}{2}}{(i+1)(2m+1+i)}a_i$$

En posant a_i, on obtient pour a_i la valeur

$$\begin{aligned}
a_i &= (-1)^i\frac{(m+k+i+\frac{1}{2})(m+k+i+\frac{3}{2})\dots(m+k+i+\frac{1}{2}+i-1)}{i!(2m+1)(2m+2)\dots(2m+i)}\\
&= (-1)^i\frac{\Gamma(2m+1)\Gamma(m+k+\frac{1}{2}+i)}{i!\Gamma(m+k+\frac{1}{2})\Gamma(2m+i+1)}
\end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned}
u(z) &= z^{m+\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{m+k+\frac{1}{2}}{1!(2m+1)}z+\frac{(m+k+\frac{1}{2})(m+k+\frac{3}{2})}{2!(2m+1)(2m+2)}z^2-\dots\right\}\\
&= z^{m+\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(2m+1)\Gamma(m+k+\frac{1}{2}+i)}{i!\Gamma(m+k+\frac{1}{2})\Gamma(2m+i+1)}
\end{aligned}$$

Exemple 2.5.1. *Posons* $u(z)=\mathbf{e}^{-z}v(z)$. *Alors*

$$u'(z)=\mathbf{e}^{-z}\{-v(z)+v'(z)\}$$

et

$$u''(z) = \mathbf{e}^{-z}\{v(z) - 2v'(z) + v''(z)\}$$

Il s'en suit que $v(z)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{dv}{dz} + \left\{\frac{k}{z} + \frac{1/4 + m^2}{z^2}\right\} v = 0 \tag{2.9}$$

Cherchons une solution sous une forme $v(z) = z^{m+\frac{1}{2}} \sum_{i\geq 0} b_i z^i$. Les formules de Probléme(1) impliquent la relation de récurrence :

$$(-m - \frac{1}{2} - i + k)b_i + (i+1)(2m+i+1)b_{i+1} = 0$$

i.e :

$$b_{i+1} = \frac{m - k + i + \frac{1}{2}}{(i+1)(2m+i+1)} b_i$$

d'où, en posant $b_0 = 0$:

$$v(z) = z^{m+\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{m+k+\frac{1}{2}}{1!(2m+1)} z + \frac{(m+k+\frac{1}{2})(m+k+\frac{3}{2})}{2!(2m+1)(2m+2)} z^2 + \ldots\right\}$$

Exemple 2.5.2. *En faisant la substitution $u(z) = \mathbf{e}^{-z/2} W(z)$ on obtient pour la fonction $W(z)$ l'équation différentielle :*

$$\frac{d^2W}{dz^2} \left\{-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 + m^2}{z^2}\right\} W = 0 \tag{2.10}$$

Il découle de exemple (2.2.1) *que la fonction :*

$$M_{k,m}(z) = z^{m+\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{-z/2} \left\{1 + \frac{m+k+\frac{1}{2}}{1!(2m+1)} z + \frac{(m+k+\frac{1}{2})(m+k+\frac{3}{2})}{2!(2m+1)(2m+2)} z^2 + \ldots\right\}$$

est une solution de (2.10). L'autre solution est $M_{k,-m}(z)$.

Corollaire 2.5.1. *La premiére formule de Kummer :*

$$z^{-\frac{1}{2}-m}M_{k,m}(z) = (-z)^{-\frac{1}{2}-m}M_{-k,m}(-z)$$

2.5.2 Fonctions de whittaker $W_{k,m}(z)$:

Définition 2.5.1. *(Forme intégrale) :*

Considérons une intégrale (une forme limite de l'intégrale hypergéométrique)

$$v(z) = v_{k,m}(z) = \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{\frac{-k-1}{2+m}} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\frac{k-1}{2+m}} \mathbf{e}^{-t} dt$$

Théorème 2.5.1. *$v(z)$ satisfait à l'équation différentielle :*

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \left(\frac{2k}{z} - 1\right)\frac{dv}{dz} + \frac{1/4 - m^2 + k(k-1)}{z^2}v = 0$$

Preuve. *si l'on pose :*

$$f_{k,m}(t,z) = (-t)^{\frac{-k-1}{2+m}} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\frac{k-1}{2+m}} \mathbf{e}^{-t}$$

et

$$D_z = \left(\frac{d}{dz}\right)^2 + \left(\frac{2k}{z} - 1\right)\frac{d}{dz} + \frac{1/4 - m^2 + k(k-1)}{z^2}$$

alors :

$$D_z f_{k,m}(t,z) = \frac{-k + 1/2 - m}{z^2} \frac{df_{k-1,m}(t,z)}{dt}$$

■ *le théorème s'en suit :*

Définition 2.5.2. *On définit la fonction de Whittaker $W_{k,m}(z)$ par :*

$$W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma(k + 1/2 - m)z^k \mathbf{e}^{\frac{-z}{2}}}{2\pi i} v_{k,m}(z) \tag{2.11}$$

cette expression est bient définit si $k + 1/2 - m \notin \mathbb{Z}^-$. *elle satisfait á l'équation différentielle de Whittaker :*

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{k} + \frac{k}{2} + \frac{1/4 - m^2}{z^2}\right\} W = 0 \tag{2.12}$$

Proposition 2.5.1. *Soit* $\Re(k - 1/2 - m) \leq 0$, *alors :*

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^k \mathbf{e}^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(1/2 - k + m)} \int_0^\infty t^{\frac{-k-1}{2-m}} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\frac{k-1}{2+m}} \mathbf{e}^{-t} dt$$

Ceci définit $W_{k,m}(z)$ *pour tous* k, m.

Corollaire 2.5.2. *les fonctions ci-dessous fournissent des exemples de fonctions de Whittaker :*

(a) Fonction de distribution des erreurs :

$$Erfc(x) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-t^2} dt = 2x^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{\frac{x^2}{2}} W_{-1/4,1/4}(x^2)$$

(b) Fonction Γ *incompléte :*

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} \mathbf{e}^{-t} dt = \Gamma(s) - x^{(s-1)/2} \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}} W_{(s-1)/2,s/2}(x)$$

Théorème 2.5.2.

$$W_{k,m} = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2 - m - k)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2 + m - k)} M_{k,-m}(z)$$

2.6 Fonction de Macdonald $K_s(z)$

Définition 2.6.1. *On définit :*

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$, si $s \in \mathbb{C}$ on définit :

$$I_s(z) = i^{-s} J_s(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{s+2r}}{r!\Gamma(s+r+1)!}$$

ces fonctions satisfont à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 I_s(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_s(z)}{dz} - \left(1 + \frac{s^2}{z^2}\right) I_s(z) = 0$$

Proposition 2.6.1. *Les relations de récurrence sont donnée par :*

$$I_{s-1}(z) - I_{s+1}(z) = \frac{2s}{z} I_s(z)$$

$$\frac{d}{dz}\{z^s I_s(z)\} = z^s I_{s-1}(z); \frac{d}{dz}\{z^{-s} I_s(z)\} = z^{-s} I_{s+1}(z)$$

Définition 2.6.2. *On définie la forme intégrale par :*

$$I_s(z) = \frac{(z/2)^s}{\Gamma(1/2)\Gamma(s+1/2)} \int_0^{\pi} \cosh(z\cos\phi) \sin^{2s}\phi d\phi$$

Si $\Re(s+1/2) > 0$

Définition 2.6.3. *L'intégrale de hankel est définie par :*

$$\begin{aligned} I_s(z) &= \frac{(z/2)^s}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} t^{-s-1} \mathbf{e}^{\frac{t+z^2}{4t}} dt \\ &= \frac{(z/2)^s}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} u^{-s-1} \mathbf{e}^{\frac{z(u+u^{-1})}{2}} du \end{aligned}$$

Proposition 2.6.2. *Le développement asymptotique est présenter par :*

$$I_s(z) \sim \frac{\mathbf{e}^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left\{ 1 + \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(4s^2 - (2i+1)^2)}{r! 2^{3r} z^r} \right\}$$

Si $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$

Définition 2.6.4. *(fonctions $K_s(z)$)*

On définit la fonction de Macdonald :

$$K_s(z) = (\frac{\pi}{2z})^{1/2} W_{0,s}(2z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi s}(I_{-s}(z) - I_s(z))$$

Propriétés 2.6.1. *Les forme intégrales :*

1.

$$\begin{aligned} K_s(z) &= \frac{\Gamma(1/2)(z/2)^s}{\Gamma(s+1/2)} \int_1^{\infty} \mathbf{e}^{-zt}(t^2-1)^{\frac{s-1}{2}} dt \\ &= \frac{\Gamma(1/2)(z/2)^s}{\Gamma(s+1/2)} \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-z \cosh \theta} \sinh^{2s} \theta d\theta \end{aligned}$$

Si $\Re(s+1/2) > 0$ *et* $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$.

2.

$$K_s(xz) = \frac{\Gamma(s+1/2)(2z)^s}{x^s \Gamma(1/2)} \int_0^{\infty} \frac{\cos xu}{(u^2+z^2)^{s+1/2}}$$

Si $\Re(s+1/2) \geq 0, x > 0$ *et* $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$

3.

$$K_s(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{-z \cosh t - st} dt$$

$(\tau = z\mathbf{e}^t/2)$

$$K_s(z) = \frac{1}{2}(z/2)^s \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{\frac{-\tau - z^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{s+1}}$$

Si $\Re(z^2) > 0$

4. *un développement asymptotique :*

$$K_s(z) \sim (\frac{\pi}{z})^{1/2}\mathbf{e}^{-z}\left\{1 + \frac{4s^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4s^2 - 1^2)(4s^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \dots\right\}$$

Si $\mid \arg z \mid < \frac{3\pi}{2}$

Chapitre 3

Extension de Fonction Gamma

3.1 Extension De Fonction Gamma(Schaudry-Zubair)

3.1.1 Introduction

A un nombre considérable des problèmes en mathématiques appliquées, en astro-physique, en physique nucléaire, en statistique et en ingénierie peuvent être exprimées en termes de fonctions gamma incomplètes[5].

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}dt, \quad \Re(\alpha) > 0 \tag{3.1}$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}dt \tag{3.2}$$

Ces fonctions ont été d'abord examinées en réel x par legendre [4]. Le comportement fonctionnel de ces fonctions et la formule de décomposition :

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x) \tag{3.3}$$

Ont été étudiés par prym [5]. La théorie plus ancienne des fonctions gamma incomplètes et *des références à la littérature sont données dans [15]. Récemment, les auteurs [14] ont montré que les solutions de plusieurs problèmes de conduction thermique peuvent être exprimées en termes de représentation généralisée des fonctions gamma incomplètes.*

$$\gamma(\alpha, x; b) = \int_0^x t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}-\mathbf{bt}^{-1}}dt, \quad \Re(\alpha) > 0 \tag{3.4}$$

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \int_x^\infty t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}-\mathbf{bt}^{-1}}dt \tag{3.5}$$

Il convient de noter que si nous prenons $b = 0$ dans (3.4) et (3.5) , nous obtenons

$$\gamma(\alpha, x; b) = \gamma(\alpha, x) \tag{3.6}$$

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \Gamma(\alpha, x) \tag{3.7}$$

Sans perte de généralité, nous supposerons que $b \neq 0$

3.1.2 Principaux résultats et application

Théorème 3.1.1. *(Théorème de décomposition)*

$$\gamma(\alpha, x; b) + \Gamma(\alpha, x; b) = 2b^{\alpha/2}K_\alpha(2\sqrt{b}), b > 0 \tag{3.8}$$

Preuve. *Ceci découle des définitions (3.4)et(3.5) des fonctions gamma incomplètes généralisées et de [[3], p.82 (23)]. Au vu de la formule de décomposition (3.8), il suffit d'étudier les propriétés de la fonction $\gamma(\alpha, x; b)$.* ■

Théorème 3.1.2.

$$\int_x^\infty t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{at}-\mathbf{bt}^{-1}}dt = a^{-\alpha}\gamma(\alpha, ax; ab), \quad a > 0 \tag{3.9}$$

Preuve. *Le côté gauche est égal à :*

$$\int_{x}^{\infty} t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{at}-\mathbf{bt}^{-1}}dt$$

en substituant $t = \xi/a$ et $dt = d\xi/a$,$a > 0$, nous obtenons que le côté gauche est égal à :

$$a^{-\alpha}\int_{ax}^{\infty} \xi^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\xi-\mathbf{abt}^{-1}}d\xi = a^{-\alpha}\gamma(\alpha, ax; ab)$$

qui est le côté droit. ■

Théorème 3.1.3. *(Relation de récurrence) :*

$$\Gamma(\alpha+1, x; b) = \alpha\Gamma(\alpha, x; b) + b\Gamma(\alpha-1, x; b) + x^{\alpha}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}-\mathbf{bx}^{-1}} \tag{3.10}$$

Preuve.

$$\frac{d}{dx}(x^{\alpha}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}-\mathbf{bx}^{-1}}) = (\alpha x^{\alpha-1} + bx^{\alpha-2} - x^{\alpha})\mathbf{e}^{-\mathbf{x}-\mathbf{bx}^{-1}} \tag{3.11}$$

En intégrant les deux côtés dans (3.11) par rapport à x de x à ∞ et en utilisant (3.5), on obtient :

$$-x^{\alpha}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}-\mathbf{bx}^{-1}} = \alpha\Gamma(\alpha, x; b) + b\Gamma(\alpha-1, x; b) - \Gamma(\alpha+1, x; b) \tag{3.12}$$

La réorganisation des termes en (3.12) donne la preuve. ■

Corollaire 3.1.1.

$$\Gamma(\alpha+1, x) = \alpha\Gamma(\alpha, x) + x^{\alpha}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}} \tag{3.13}$$

Preuve. *Cela découle de (3.10) quand on prend $b = 0$* ■

Théorème 3.1.4. *(Formule de différenciation) :*

$$\frac{d}{dx}(\Gamma(\alpha, x; b)) = -x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}-\mathbf{bx}^{-1}} \tag{3.14}$$

Preuve. *Cela découle de (3.5) quand on différencie par rapport à x* ■

Corollaire 3.1.2.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma(\alpha+1,x)) = -x^{\alpha-1}\mathbf{e^{-x}} \tag{3.15}$$

Preuve. *Cela découle de (3.14) quand on prend* $b = 0$ ■

Théorème 3.1.5. *(Différenciation paramétrique) :*

$$\frac{\partial}{\partial b}(\Gamma(\alpha,x;b)) = -\Gamma(\alpha-1,x;b) \tag{3.16}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b}(\Gamma(\alpha,x;b)) &= \frac{\partial}{\partial b}(\int_x^\infty t^{\alpha-1}\mathbf{e^{-t-bt^{-1}}}dt) && (3.17)\\ &= -\int_x^\infty t^{\alpha-2}\mathbf{e^{-t-bt^{-1}}}dt && (3.18)\\ &= -\Gamma(\alpha-1,x;b) && (3.19)\end{aligned}$$

Il convient de noter que le processus de différenciation en ce qui concerne le paramètre b sous le signe intégral de (3.19) est justifié [7, p427-448] ■

Théorème 3.1.6. *(Connexion avec d'autres fonctions spéciales) :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2},x;b\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[\mathbf{e^{-2\sqrt{b}}}Erfc\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)+\mathbf{e^{2\sqrt{b}}}Erfc\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)\right] \tag{3.20}$$

Preuve. *Il découle de (3.5) que :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{x};b\right) = \int_{1/x}^\infty \tau^{-\frac{1}{2}}\mathbf{e^{-\tau-b\tau^{-1}}}d\tau \tag{3.21}$$

en remplaçant $\tau = 1/t$ *en (3.21) , on obtient :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{x};b\right) = \mathbf{e^{-bx}}\left(\left\{\mathbf{e^{bx}}\right\} * \left\{x^{-3/2\mathbf{e^{-1/x}}}\right\}\right) \tag{3.22}$$

où " $*$ " est l'opérateur de convolution défini par :

$$a(x) * b(x) = \int_0^x a(x-1)b(t)dt \tag{3.23}$$

on peut écrire (3.22) sous la forme opérationnelle [[2], p.131 (20) et p.246 (10)]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{x}; b\right) = \mathbf{e^{-bx}} L^{-1}\left\{\frac{1}{p-b}\mathbf{e^{-2\sqrt{p}}}; x\right\} \tag{3.24}$$

En remplaçant x par $1/x$ dans (3.24) et en utilisant l'identité [[2], p.246 (10)], nous obtenons la preuve de (3.24). ∎

Corollaire 3.1.3.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x; b\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}\left[\mathbf{e^{-2\sqrt{b}}} Erfc\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right) - \mathbf{e^{-2\sqrt{b}}} Erfc\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)\right] \tag{3.25}$$

Preuve. *Cela découle de (3.20) lorsque nous utilisons la formule de différenciation paramétrique (3.19).* ∎

Remarque 3.1.1. *Il convient de noter que les fonctions $\Gamma(\frac{1}{2}, x; b)$ et $\Gamma(-\frac{1}{2}, x; b)$ peuvent être exprimées en fonction des fonctions gamma incomplètes et des fonctions hypergéométriques confluentes en utilisant les relations [[3], p.133 (42)] et [[9], p.940 (8-351) (4)] et les équations (3.20) et (3.25). Nous avons les représentations suivantes :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x; b\right) = \mathbf{e^{-x-bx^{-1}}}\left[\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; u\right) + \psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; v\right)\right] \tag{3.26}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x; b\right) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{e^{-2\sqrt{b}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, u\right) + \mathbf{e^{2\sqrt{b}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, v\right)\right] \tag{3.27}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}, x; b\right) = \frac{1}{2\sqrt{b}}\mathbf{e^{-x-bx^{-1}}}\left[\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; u\right) - \psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; v\right)\right] \tag{3.28}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}, x; b\right) = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\mathbf{e^{-2\sqrt{b}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, u\right) - \mathbf{e^{2\sqrt{b}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, v\right)\right] \tag{3.29}$$

où :

$$u = x + \frac{b}{x} + 2\sqrt{b} \tag{3.30}$$

and

$$v = x + \frac{b}{x} - 2\sqrt{b} \tag{3.31}$$

Théorème 3.1.7. *Pour $\alpha \leq -1$ et $b < 0$:*

$$\Gamma(\alpha, x; b) < \mathbf{e^b}\Gamma(\alpha, b + x), \quad x > 0 \tag{3.32}$$

Preuve. *Soit $f(x) = \mathbf{e^x}\Gamma(\alpha, x)$. Alors, selon [[3], p.135 (12)]*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (1 - \alpha)_n \mathbf{e^x}\Gamma(\alpha - n, x), n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.33}$$

En utilisant le théorème d'expansion de Taylor et (3.33), nous obtenons :

$$\mathbf{e^{b+x}}\Gamma(\alpha, b + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!}(1 - \alpha)_n \mathbf{e^x}\Gamma(\alpha - n, x)$$

Or

$$\mathbf{e^b}\Gamma(\alpha, b + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!}(1 - \alpha)_n \Gamma(\alpha - n, x) \tag{3.34}$$

En utilisant l'extension en série de $\mathbf{e^{-b/t}}$ dans (3.5), on peut écrire :

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!}\Gamma(\alpha - n, x) \tag{3.35}$$

En comparant (3.34) et (3.35), on obtient la preuve de (3.32).

Il est supposé que l'inégalité (3.32) peut être améliorée. ∎

Théorème 3.1.8. *(formule Asymptotique) : pour fixe $b > 0$ et α*

$$\Gamma(\alpha, x; b) \sim 2b^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{b}) - x^\alpha \mathbf{e^{-x-bx^{-1}}}, x \longrightarrow 0^+ \tag{3.36}$$

Preuve. *Il découle de (3.5) que pour* $b > 0$

$$\Gamma(\alpha, x; b) = 2b^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{b}) - \int_0^x t^{\alpha-1} \mathbf{e}^{-\mathbf{t}-\mathbf{b}\mathbf{t}^{-1}} dt, \quad b > 0 \tag{3.37}$$

Cependant, pour les fixes $b > 0$ *et* α

$$\int_0^x t^{\alpha-1} \mathbf{e}^{-\mathbf{t}-\mathbf{b}\mathbf{t}^{-1}} dt \longrightarrow x^\alpha \mathbf{e}^{-\mathbf{x}-\mathbf{b}\mathbf{x}^{-1}}, x \longrightarrow 0^+ \tag{3.38}$$

En laissant $x \longrightarrow 0$ *dans (3.37) et en utilisant (3.38), on obtient la preuve de (3.36).* ■

3.2 Extension de dérivé fractionnaire au sens de Riemann-liouville

3.2.1 Introduction

Ces dernières années, les opérateurs de dérivés fractionnaires et leurs extensions ont fait l'objet d'une attention considérable. Il existe de nombreuses définitions des dérivés fractionnaires généralisés impliquant des fonctions bêta étendues et hypergéométriques [[12],[17]]. En outre, Ozarslan et Ozrgin [16] ont été introduits et étudié l'opérateur dérivé fractionné étendu.

Définition 3.2.1. *L'opérateur dérivé fractionnaire étendu défini par :*

$$D_z^{\eta,p}\{f(z)\} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^z (z-t)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{\left(\frac{-\mathbf{p}\mathbf{z}^2}{(\mathbf{z}-\mathbf{t})\mathbf{t}}\right)} f(t)dt, & (\Re(\eta) < 0) \\ \frac{d^m}{dz^m}\{D_z^{\eta-m}\{f(z)\}\}, & (m-1 \leq \Re(\eta) < m(m \in \mathbb{N})) \end{cases} \tag{3.39}$$

Il est clair que le cas particulier de (3.39) , lorsque $p = 0$*, se réduit immédiatement en dérivée fractionnelle de Reimann-Liouville. Au cours des dernières années, de nombreux chercheurs ont étudié systématiquement les opérateurs de dérivés fractionnaires étendus et ont examiné leurs applications dans différents domaines (voir [[12],[16],[17]]). Au vu de l'effica-*

cité des travaux susmentionnés, fonction bêta généralisée due à choi et al [7], nous étendons la définition de l'opérateur de dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville et discutons de ses différentes propriétés. En outre, nous établissons certaines relations avec des fonctions spéciales étendues de deux et trois variables via des fonctions génératrices. Pour notre propos, nous rappelons quelques travaux et définitions antérieurs.

Définition 3.2.2. *La fonction bêta généralisée définie par [voir choi [7]]*

$$B_{p,q}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})}dt \tag{3.40}$$

$$(\min\{\Re(x),\Re(y)\} > 0; \min\{\Re(p),\Re(q)\} \geq 0)$$

Définition 3.2.3. *La fonction hypergéométrique généralisée définie par [voir choi [7]] :*

$$_2F_{1;p,q}(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a)_n \frac{B_{p,q}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{3.41}$$

$$(p \geq 0, q \geq 0; |z| < 1; \Re(c) > \Re(b) > 0)$$

3.2.2 Extension des fonctions hypergéométriques et des représentations intégrales :

En utilisant (3.40), nous considérons une autre extension des fonctions de Appell et Lauricella à une, deux et trois variables

Définition 3.2.4. *L'extension des fonctions hypergéométriques de deux et trois variables sont définies comme suit :*

$$F_1(a,b,c,d;x,y;p,q) = \sum_{m,n=0}^{\infty}(b)_m(c)_n \frac{B_{p,q}(a+m+n,d-a)}{B(a,d-a)}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{3.42}$$

$$(\Re(p) > 0, \Re(q) > 0; |x| < 1, |y| < 1)$$

$$F_2(a,b,c,d,e;x,y;p,q) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (a)_{m+n} \frac{B_{p,q}(b+m,d-b)B_{p,q}(c+n,e-c)}{B(b,d-b)B(c,e-c)} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{3.43}$$

$$(\Re(p) > 0, \Re(q) > 0; |x| < 1 + |y| < 1)$$

$$F_D^3(a,b,c,d,e;x,y,z;p,q) = \sum_{m,n,r=0}^{\infty} \frac{B_{p,q}(a+m+n+r,e-a)(b)_m(c)_n(d)_r}{B(a,e-a)} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^r}{r!} \tag{3.44}$$

$$(\Re(p) > 0, \Re(q) > 0; |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1)$$

Remarque 3.2.1. *Pour $p = q$, les définitions ci-dessus sont similaires à Ozarslan et Ozergin [16] et pour $p = 0 = q$, semblables à [18].*

Théorème 3.2.1. *L'intégrale suivante est vraie pour (3.42) :*

$$F_1(a,b,c,d;x,y;p,q) = \frac{1}{B(a,d-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{d-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-c} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})} dt \tag{3.45}$$

Preuve. *Pour prouver le théorème ci-dessus, nous commençons par supposer que :*

$$J = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{d-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-c} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})} dt$$

En utilisant l'extension en série binomiale pour $(1-xt)^{-b}$ et $(1-yt)^{-c}$ et interchanger l'ordre de sommation et d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{d-a-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (b)_n \frac{(xt)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} (c)_m \frac{(yt)^m}{m!} \right\} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (b)_n (c)_m \left\{ \int_0^1 t^{a+m+n-1}(1-t)^{d-a-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})} \right\} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \end{aligned}$$

En appliquant les (3.40) et (3.42), on obtient la représentation souhaitée. ■

Théorème 3.2.2. *L'intégrale suivante est vraie pour (3.43) :*

$$\begin{aligned} F_2(a,b,c,d,e;x,y;p,q) &= \frac{1}{B(b,d-b)B(c,e-c)} \int_0^1\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}}{(1-xt-ys)^a} \\ &\times \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}} - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})} dtds \end{aligned}$$

Preuve. *:Nous commençons par élargir* $(1-xt-ys)^{-a}$ *nous avons :*

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}}{(1-xt-ys)^a}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}}-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})}dtds \tag{3.46}$$

$$(3.46)=\int_0^1\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{s}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})}\sum_{N=0}^{\infty}(a)_N\frac{(xt-ys)^N}{N!}dtds$$

En utilisant la formule de sommation :

$$\sum_{N=0}^{\infty} f(N)\frac{(x-y)^N}{N!}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} f(l+r)\frac{x^r}{r!}\frac{y^l}{l!}$$

On obtient :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}}{(1-xt-ys)^a}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}}-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})}dtds \tag{3.47}$$

$$(3.47)=\int_0^1\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{s}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(a)_{r+l}\frac{(xt)^r}{r!}\frac{(yt)^l}{l!}dtds$$

Ici, impliquant des séries et les intégrales sont convergentes, puis en intervertissant l'ordre de sommation et d'intégration, on obtient :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}}{(1-xt-ys)^a}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}}-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})}dtds \tag{3.48}$$

$$(3.48)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(a)_{r+l}\frac{x^r}{r!}\frac{y^l}{l!}\int_0^1 t^{b+r-1}(1-t)^{d-b-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})}dt\int_0^1 s^{c+l-1}(1-s)^{e-c-1}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{s}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-s}})}ds$$

En appliquant (3.40) et (3.43), on obtient la représentation souhaitée. ■

Théorème 3.2.3. *L'intégrale suivante est vraie pour (3.44) :*

$$F_D^3(a,b,c,d,e;x,y,z;p,q)=\frac{\Gamma(e)}{\Gamma(a)\Gamma(e-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{e-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-c}(1-zt)^{-d}\mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{t}}-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-t}})}dt$$

Preuve. *La preuve du théorème* (3.2.3) *est aussi similaire à la preuve du théorème* (3.2.1). *Par conséquent, nous omettons ses détails ici.* ∎

3.2.3 La dérivé Fractionnaire au sens de Riemann-liouville étendu

Ici, nous introduisons un nouvel opérateur de dérivé fractionné de type Riemann-liouville étendu comme suit :

Définition 3.2.5. *l'opérateur dérivé fractionné de type Riemann-liouville étendu défini par :*

$$D_z^{\eta}\{f(z);p,q\} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^z (z-t)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{pz}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{qz}}{\mathbf{z-t}})} f(t)dt, & (\Re(\eta) < 0) \\ \frac{d^m}{dz^m}\{D_z^{\eta-m}\{f(z)\}\}, & (m-1 \leq \Re(\eta) < m(m \in \mathbb{N})) \end{cases} \tag{3.49}$$

Où $\Re(p) > 0, \Re(q) > 0$ *et le chemin d'intégration est une ligne de* 0 *à* z *dans le plan* t *complexe.*

Clairement pour $p = q$, *(3.49) se réduit à (3.39) et pour* $p = 0 = q$, *on obtient sa forme classique (voir, pour plus de détails [[11],[18], [19]]) Maintenant, nous établissons des théorèmes impliquant les dérivés fractionnaires étendus :*

Théorème 3.2.4. *La représentation suivante pour (3.49) est vraie :*

$$D_z^{\eta}\{z^{\lambda};p,q\} = \frac{B_{p,q}(\lambda+1,-\eta)}{\Gamma(-\eta)} z^{\lambda-\eta} \quad (\Re(\eta) < 0) \tag{3.50}$$

Preuve. *En utilisant (3.49) et (3.40), on obtient :*

$$D_z^{\eta}[z^{\lambda};p,q] = \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^z t^{\lambda}(z-t)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{pz}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{qz}}{\mathbf{z-t}})} f(t)dt$$

En remplaçant $t = uz$*, nous avons :*

$$D_z^\eta[z^\lambda; p, q] = \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 (uz)^\lambda (z - uz)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{pz}}{\mathbf{uz}} - \frac{\mathbf{qz}}{\mathbf{z-uz}})} z du \tag{3.51}$$

$$= \frac{z^{\lambda-\eta}}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 u^\lambda (1 - u)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-u}})} du \tag{3.52}$$

On appliquant la definition (3.40)on aura le résultat . ■

Théorème 3.2.5. *Soit* $\Re(\eta) < 0$ *et supposons qu'une fonction* $f(z)$ *soit analytique à l'origine avec son expansion de Maclaurin donnée par :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n (|z| < \rho)$$

pour quelque $\rho \in \mathbb{R}^+$*. puis nous avons :*

$$D_z^\eta[f(z); p, q] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^\eta[z^n; p, q] \tag{3.53}$$

Preuve. *nous commençons de la définition* (3.2.5) *à la fonction* $f(z)$ *avec son expansion en série, nous obtenons :*

$$D_z^\eta\{f(z); p, q\} = \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n (z - t)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{pz}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{qz}}{\mathbf{z-t}})} dt$$

Puisque la série puissance converge uniformément sur tout disque fermé centré sur l'origine et dont le rayon est inférieur à ρ*, la série sur le segment de droite allant de* 0 *à un* z *fixé pour* $|z| < \rho$*. garantit une intégration terme par terme comme suit :*

$$D_z^\eta\{f(z); p, q\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^z t^n (z - t)^{-\eta-1} \mathbf{e}^{(\frac{-\mathbf{pz}}{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{qz}}{\mathbf{z-t}})} dt \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^\eta[z^n; p, q]$$

■

Théorème 3.2.6. *la représentation suivante est vraie :*

$$D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha};p,q] = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\eta)} z_2^{\eta-1} F_{1;p,q}(\alpha,\lambda;\eta;z) \tag{3.54}$$

$$(\Re(\eta) > \Re(\lambda) > 0 et |z| < 1)$$

Preuve. *Calculs directs :*

$$\begin{aligned} D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha};p,q] &= \frac{1}{\Gamma(\eta-\lambda)} \int_0^z t^{\lambda-1}(1-t)^{-\alpha} e^{(-\frac{pz}{t}-\frac{qz}{z-t})}(z-t)^{\eta-\lambda-1}dt \\ &= \frac{z^{\eta-\lambda-1}}{\Gamma(\eta-\lambda)} \int_0^z t^{\lambda-1}(1-t)^{-\alpha}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\eta-\lambda-1} e^{(-\frac{pz}{t}-\frac{qz}{z-t})}dt \\ &= \frac{z^{\eta-\lambda-1}z^{\lambda}}{\Gamma(\eta-\lambda)} \int_0^1 u^{\lambda-1}(1-uz)^{-\alpha}(1-u)^{\eta-\lambda-1} e^{(-\frac{p}{u}-\frac{q}{1-u})} \end{aligned}$$

En utilisant (3.49) et après une petite simplification, nous avons le (3.54). Ceci complète la preuve. ■

Théorème 3.2.7. *la représentation suivante pour est vraie*

$$D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};p,q] = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\eta)} z^{\eta-1} F_1(\lambda,\alpha,\beta;\eta;az,bz;p,q) \tag{3.55}$$

$$(\Re(\eta) > \Re(\lambda) > 0, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0, |az| < 1 \quad et \quad |bz| < 1)$$

plus généralement, nous avons :

$$D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}(1-cz)^{-\gamma};p,q] = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\eta)} z^{\eta-1} F_D^3(\lambda,\alpha,\beta,\gamma;\eta;az,bz,cz;p,q) \tag{3.56}$$

$$(\Re(\eta) > \Re(\lambda) > 0, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0, \Re(\gamma) > 0, |az| < 1, |bz| < 1 \quad et \quad |cz| < 1)$$

Preuve. *à prouver (3.55) :*

En utilisant les séries d'expansion suivantes pour $(1-az)^{-\alpha}$ *et* $(1-bz)^{-\beta}$

$$(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha)_l(\beta)_k\frac{(az)^l}{l!}\frac{(bz)^k}{k!}$$

En appliquant ensuite le théorème (3.2.4)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};p,q] &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha)_l(\beta)_k\frac{(a)^l}{l!}\frac{(b)^k}{k!}D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda+l+k-1};p,q]\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha)_l(\beta)_k\frac{(a)^l}{l!}\frac{(b)^k}{k!}\frac{B_{p,q}(\lambda+l+k,\eta-\lambda}{\Gamma(\eta-\lambda)}z^{l+k+\eta-1}\end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant (3.42) , nous obtenons :

$$D_z^{\lambda-\eta}[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};p,q]=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\eta)}z^{\eta-1}F_1(\lambda,\alpha,\beta;\eta;az,bz;p,q)$$

De même, comme dans la preuve de (3.55), en prenant le théorème binomial pour

$(1-az)^{-\alpha}, (1-bz)^{-\beta}$ *et* $(1-cz)^{-\gamma}$*, puis en appliquant les théorèmes* (3.2.4) *et (3.44) , on peut facilement prouver (3.56). Par conséquent, nous omettons les détails de sa preuve. cela complète la preuve.* ∎

Théorème 3.2.8. *la représentation suivante est vraie :*

$$D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}F_{p,q}\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z}\right);p,q\right]=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)\Gamma(\eta-\lambda)}z^{\eta-1}F_2(\alpha,\beta,\lambda;\gamma,\eta;x,z;p,q) \tag{3.58}$$

$$\left(\Re(\eta)>\Re(\lambda)>0,\Re(\alpha)>0,\Re(\beta)>0,\Re(\gamma)>0;\left|\frac{x}{1-z}\right|<1 \quad et \quad |x|+|z|<1\right)$$

Preuve. *En appliquant (3.43) sur le LHS de (3.58), nous obtenons :*

$$D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}F_{p,q}\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z}\right);p,q\right] \tag{3.59}$$

$$
\begin{aligned}
(3.59) \quad &= D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n B_{p,q}(\beta+\eta,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)n!}\left(\frac{x}{1-z}\right)^n\right\};p,q\right]\\
&= \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n B_{p,q}(\beta+\eta,\gamma-\beta)\frac{x^n}{n!}\{(1-z)^{-\alpha-n}\};p,q\right]
\end{aligned}
$$

En utilisant l'expansion de la série de puissance pour $(1-z)^{-\alpha-n}$*, en appliquant les théorèmes* (3.2.4) *et (3.43), nous obtenons :*

$$
D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}F_{p,q}\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z};p,q\right)\right] \tag{3.60}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.60) \quad &= D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n B_{p,q}(\beta+\eta,\gamma-\beta}{B(\beta,\gamma-\beta)n!}\left(\frac{x}{1-z}\right)^n\right\};p,q\right]\\
&= \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}D_z^{\lambda-\eta}\left[z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n B_{p,q}(\beta+\eta,\gamma-\beta)\frac{x^n}{n!}\{(1-z)^{-\alpha-n}\};p,q\right]
\end{aligned}
$$

Cela complète la preuve ■

Bibliographie

[1] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill, New York (1954)

[3] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi Higher Transcendental Functions, Vol. II, McGraw-Hill, New York (1953)

[4] A.M. Legendre Memoire sur les integrations par arcs d'ellipse Hist. Acad. Roy. Sci. avec Mém. Math. Phys. (1786), pp. 616-643

[5] B. Spain, M.G.Smith Functions of Mathematical Physics Van Nostrand Reinhold, Princeton, NJ (1970)

[6] B.M. Budak, S.V. Fomin Multiple Integrals, Field Theory and Series Mir, Moscow (1978)

[7] Choi J., Rathie A.K.and Parmar R.K.,Extension of extended beta,hypergeometric and confluent hypergeometric function,Honam Ma 36(2)(2014)339367.

[8] D.Baleau, P.Agarwal, R.K Parmar, M.AL. Quraschi and S.salahshour Extension of the fractional derivative of the riemann-liouville 2010 Mathematics Subject Clafication.

[9] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik Tables of Integrals, Series, and Products Academic Press, New York (1980)

[10] Joseph M. Kimeu Fractional Calculus : Definitions and Applications. http ://digitalcommons.wku.edu/theses

[11] Kilbas,A.A Srivastava,H.M., Trujillo,J.J. Theory and Applications of Frational Differential Eqiuatons.Noth-Holland Mathematical studies ;Elsevier (Noth-Holland)Science Publishers :Amsterdam,The Netherlands,2006 ;Volume204.

[12] Luo M.J., Milovanovic G.V. and Agarwal P., Some results on the extended beta and extended hypergeometric functions, App. Math. Comput. 248(2014), 631-651.

[13] M.A. Chaudhry, S.M. Zubair Generalized incomplete gamma function with application Journal of Computational and Applied Mathematics $55(1994)99-124$.

[14] M.A. Chaudhry, S.M. Zubair Heat conduction in a semi-infinite solid subject to time-dependent boundary conditions Fundamental Problems in Conduction Heat Transfer, ASME, New York (1992), pp. 77-83

[15] N. Nielsen Handbuch der Theorie der Gamma Funktion Teubner, Leipzig (1906)

[16] Özarslan M.A., Özergin E., Some generating relations for extended hypergeometric function via generalized fractional derevative operator,Math. Comput. Modelling 52(2010),1825-1833.

[17] Parmar R.K., Some generating relations for generalized extended hypergeometric functions invloving generalized fractional derivative operator, J.Concr. App. Math. 12(2014),217-228.

[18] Srivastava H.M.and Karlsson P.W., Multiple Gaussian Hypergeometric series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited,Chcheester), John Wiley and Sons,New york,Chichester,Brisbane and Toronto, 1985.

[19] Srivastava H.M. and Manocha H.L., A Treatise on Generating Functions,Halsted Press(Ellis Horwood Limited,Chcheester),John Wiley and Sons,New york,Chichester,Brisbane and Toronto,1984.

[20] Vadim Schechtman Introduction aux Fonctions Spéciales. Notes du cours. Automne 2006.

[21] La théorie de Cauchy . http ://www.maths.univ-evry.fr/pages-perso/feyel/M67-suite pdf

[22] http ://www.academia.edu/31432364/Chapitre I Fonctions Gamma et fonctions de Bessel