

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ: 2018/2019

Sur la modélisation de la volatilité stochastique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et
Applications

par

Mekkaoui Khadidja¹

Sous la direction de

Pr A. kandouci

Soutenu le 13/07/2019 devant le jury composé de

Dr. N. Hachemi	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Présidente
Pr. A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Encadreur
Dr. L. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Examinatrice
Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Examinatrice

1. e-mail : mekkaouikhadidja32@gmail.com

Remerciement

Je tiens à remercier "Dieu" de m'avoir donné une bonne santé pour réaliser l'accomplissement de ce travail dans des bonnes conditions.

J'aimerais adresser ma sincère gratitude à mon directeur de mémoire de master 2 "Pr.A.Kandouci". Je le remercie pour n'avoir pas été avare de son temps précieux, pour sa disponibilité et sa générosité intellectuelle.

Je remercie les membres de jury *Dr. N. Hachemi, Dr. L. Bousmaha* et *Dr. F. Benziadi*, de l'honneur qu'ils m'ont fait en examinant ce modeste travail. Leurs avis et leurs remarques ne feront qu'apporter des idées nouvelles pour les études futures.

De même, mes vifs remerciements à tous les enseignants de la filière de Mathématiques de "l'université Dr Moulay Tahar de Saïda" et en particulier ceux membres du laboratoire "*LMSSA*". Sans oublier ma famille en général et ma mère en particulier qui m'a toujours supportée et encouragée.

J'aimerais remercier mes ami-s(e) pour les riches discussions et les entraînements. Je suis redevable à tous ceux qui de près ou de loin, m'ont soutenue ou aidée dans mon travail.

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :
A ma très chère maman "*FATIMA*"

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu m'a données depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A tous mes collègues de la promotion de Master "*A.S.S.P.A*" 2019.

A mes chères amies : Lemya, Khawla, Fatima, Om chahrazad, Sakina, Amria qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.

Table des matières

Introduction	6
1 Généralités sur la volatilité stochastique	8
1.1 Le Mouvement Brownien	8
1.2 Modèle de Black-Scholes	9
1.2.1 Formule de Black-Scholes	11
1.3 Estimation de la volatilité :	11
1.3.1 Estimateurs de la variance réalisée :	12
1.4 Modèle de volatilité stochastique (VS)	13
1.4.1 Modèle de volatilité stochastique à temps discret	14
1.5 Modèle de volatilité stochastique locale (VSL)	15
1.6 Modèles ARCH et GARCH	16
1.7 Modèle de la Volatilité implicite :	16
1.8 Les options	17
1.8.1 La valorisation des options	18
1.9 Modèle de Heston	20
2 Volatilité stochastique dans le cadre fractionnaire	22
2.1 Notions préliminaires	23
2.2 Mouvement brownien fractionnaire	24
2.2.1 Processus stochastique avec longue mémoire :	24
2.2.2 Propriétés du Mouvement brownien fractionnaire	25
2.3 Une transformation intégrale du MBF	25
2.4 Une transformation intégrale du MBF avec dérive	26
2.4.1 Représentation du MBF sur un intervalle	26

2.4.2	Inférence statistique dans le modèle de la Volatilité stochastique fractionnaire (VSF)	28
2.4.3	Extension des méthodes statistiques classiques	29
2.4.4	Extension naturelle dans un modèle VS fractionnaire	29
2.5	Modèle de volatilité stochastique fractionnaire	29
2.5.1	Covariance de la VSF	30
2.5.2	Prix dans les modèles VS classiques	30
2.5.3	Temps discret analogique :	30
2.5.4	Estimation des paramètres du modèle	31
3	Etude de quelques exemples d'applications :	34
3.1	Une formule approximative de tarification des options pour le modèle Heston : .	34
	Conclusion	46

Introduction

Les modèles mathématiques constituent un pilier incontournable de la finance de marché moderne. Pour bien comprendre ces modèles de plus en plus complexe, les spécialistes de la finance utilisent des outils mathématiques tel que le mouvement brownien, les équations différentielles stochastiques,...

Le concept de la volatilité est probablement un des sujets qui suscitent enlever plus de recherches dans le domaine de la finance mathématique. Cet intérêt pour la volatilité est motivé par deux raisons importantes : le nombre de plus en plus grand de compagnies utilisant les outils de gestion de risque et le grand nombre des produits dérivés transignés dans les marchés financiers mondiaux.

L'étude la plus reconnue dans le monde de la finance mathématique est certainement le modèle d'évaluation des options de Black-Scholes (1973)[15], qui a connu un succès immédiat auprès des chercheurs et des professionnels de la finance, tant le besoin était grand d'outil de gestion des risques. Le modèle de Black-Scholes permet d'évaluer le prix d'une option en se basant sur l'hypothèse que l'évolution d'un titre suit un mouvement brownien géométrique et que la volatilité est constante.

Cependant, l'hypothèse de la constance de la volatilité dans la formule de Black-Scholes était rejetée depuis le début tel que démontré dans les travaux de Black (1976)[14], Schmalensee et Trippi (1978) et ceux de Christie (1982)[22], et surtout après lecrash de (1978), qui a mis en évidence l'effet de "smile" qui pourtant ne devrait pas apparaitre sous les hypothèses de Black-Scholes. Ces constatations nous amènent à considerer la volatilité comme processus de diffusion, ce qui a donné naissance aux modèles à volatilité stochastique.

Dans le cadre des problèmes d'évaluation d'option, l'incertitude associée aux prix futur de l'actif sous-jacent est le déterminant le plus important dans la formation des prix varié au cours du temps l'un des outils les plus intéressants apparu pour caractériser de telles variances variables

a été introduit par Engle (1982)[21], il s'agit des modèles (ARCH), depuis leurs apparition des centaines de travaux de recherches se sont attachés à appliquer ce type de modélisation à des séries financières.

Le travail réalisé dans ce mémoire est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre introduit les notions élémentaires sur la volatilité stochastique (Le Mouvement Brownien, Modèle de Black-Scholes, Estimation de la volatilité, Modèle de volatilité stochastique (VS), Modèle de volatilité stochastique locale (VSL), Modèle de la Volatilité implicite, Modèle de Heston) .

Dans le deuxième chapitre, on étudie "la volatilité stochastique dans le cadre fractionnaire". En se basant sur les résultats de Jim Gatheral ([23], on introduit la notion de log-volatilité comme étant un mouvement Brownien fractionnaire (MBF) de paramètre $H < 1/2$. On montre que le modèle de la volatilité stochastique fractionnaire (VSF) est consistant avec les données des séries chronologiques. De plus, on trouve que bien que la volatilité n'est pas à longue mémoire dans les modèles de la VSF, Les procédures statistiques classiques visent à détecter la persistance de la volatilité tendent à conclure à la présence d'une mémoire longue dans les données générées à partir de celle-ci.

Le troisième chapitre est consacré à une application de notre synthèse dans les marchés financiers. Il s'agit d'une formule approximative de tarification des options pour le modèle Heston.

Chapitre 1

Généralités sur la volatilité stochastique

L'estimation de la volatilité est capitale en mathématiques financières pour calculer le prix d'une option. Elle permet de mesurer l'instabilité du cours d'un actif financier. Plus la volatilité est importante plus l'actif est instable, si la volatilité est nulle, on peut connaître de manière exacte la valeur de l'actif dans le futur. En utilisant les données historiques du cours sous-jacent $(S_t)_t$ et des méthodes statistiques d'estimation pour la moyenne et la variance, on en déduit les paramètres de la volatilité. En utilisant les prix observés des options C_t et en inversant la formule de Black-Scholes, on peut retrouver le paramètre σ . Ici, en général, on n'a pas une seule valeur de σ , mais une courbe qui dépend du strike K , c'est le phénomène du "smile de volatilité".

1.1 Le Mouvement Brownien

L'un des processus stochastiques à temps continu les plus importants et les plus utilisés est le mouvement brownien aussi appelé processus de Wiener. C'est un ensemble de particules idéalisées comme des points se déplaçant aléatoirement dans l'espace et dans le temps et qui simultanément se reproduisent et meurent à des taux constants. Le mouvement Brownien est le plus célèbre des processus stochastiques et sans doute le plus central en théorie des probabilités. C'est le premier processus qui ait été introduit pour modéliser un phénomène réel autre qu'un jeu de hasard :

À l'origine, le mouvement brownien a été par le botaniste Robert Brown en 1828, en observant le mouvement des grains de pollen en suspension dans l'eau, il a remarqué que le choc successif entre le pollen et les molécules d'eau, engendre un mouvement de diffusion aléatoire qui prend

la forme de trajectoires irrégulières.

Ces trajectoires sont appliquées ensuite le mouvement brownien et il est modélisé comme une distribution gaussienne depuis, son champ d'application s'est étendu pour servir à modéliser plusieurs phénomènes dynamiques : particules microscopiques en suspension, prix d'action en bourse.

Définition 1.1.1. *On appelle un mouvement brownien (standard) de dimension n et on le note par \mathbf{W}_t ou \mathbf{B}_t , Un processus mesurable adapté à la filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ à valeur dans \mathbb{R}^n , tel que :*

1. $\mathbf{W}_0 = 0$ p.s
2. $t \rightarrow \mathbf{W}_t$ est continue p.s
3. pour $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $\mathbf{W}_t - \mathbf{W}_s$ est indépendant de \mathfrak{F}_s
4. $\forall s, t$, tel que $0 \leq s \leq t$, $\mathbf{W}_t - \mathbf{W}_s$ et \mathbf{W}_{t-s} suivent une loi normale centrée de matrice de covariance $\sqrt{(t-s)}Id_n$.

Pour résumer, il s'agit d'un processus gaussien centré à trajectoires continues et à accroissement indépendants. On montre, dans la suite, qu'il est possible de construire un tel processus par plusieurs manières.

1.2 Modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes est à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué, l'autre pas. Typiquement, l'actif risqué est une action (l'action sous-jacente à l'option) tandis que l'actif non risqué s'apparente à une obligation. À l'instant t , le prix de l'obligation est \mathbf{R}_t et le prix de l'action est \mathbf{S}_t . L'évolution de l'obligation est relativement simple puisque l'on suppose que : $d\mathbf{R}_t = r_t \mathbf{R}_t dt$, soit $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_0 e^{\int_0^t r_s ds}$, où $r_t \geq 0$ représente le taux d'intérêt instantané. Nous supposons toujours que $\mathbf{R}_0 = 1$. Le prix de l'action, $\{\mathbf{S}_t\}_{t \geq 0}$, est régi par l'équation différentielle stochastique (EDS en abrégé)

$$d\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_t(\mu_t dt + \sigma_t d\mathbf{W}_t),$$

$\mathbf{S}_0 > 0$, donné, où μ_t est un paramètre réel, $\sigma_t \geq 0$; le paramètre σ_t s'appelle la volatilité. Bien évidemment $\{\mathbf{W}_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et nous notons $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle augmentée. En ce qui concerne les hypothèses, nous supposons dans la

suite que les processus r , μ et σ sont progressivement mesurables et que, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{P} - p.s., \int_0^T \{r_t + |\mu_t| + \sigma_t^2\} dt < +\infty.$$

Dans le modèle de Black-Scholes originel, les paramètres r , μ et σ sont des constantes. On a dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= e^{rt}, \\ \mathbf{S}_t &= \mathbf{S}_0 e^{\sigma \mathbf{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.1. *Dans le modèle Black-Scholes, le cours de l'action S est un mouvement brownien géométrique décrit par l'équation différentielle stochastique suivante (EDS) :*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1.1)$$

où W est un mouvement brownien standard par rapport à un historique (où un monde réel où physique) mesure de probabilité P . Ici, les paramètres sont le taux de croissance attendu μ et la volatilité σ et les deux supposés constants. La découverte remarquable de Black et Scholes (1973[15]) est que le non-arbitrage du prix d'une option ne dépend pas de μ , et donc, pour tarifier une option, le seul paramètre qu'il faut estimer à partir des données la volatilité σ . Sauf indication contraire, nous assumerons tout au long de ce chapitre, les taux d'intérêt sont nuls. Il sera commode d'introduire la notation suivante : $\tau = T - t$, $x = \log S_t$, $K = \log \mathbf{K}$ où t est l'heure courante et K et T les dates d'effet et d'expiration respectivement d'un appel ou option de vente. Ensuite, pour fixe (t, T, x, k) , la formule de tarification de Black-Scholes pour une option d'achat avec délai d'expiration $\tau > 0$ est donné par :

$$\begin{aligned} u^{\text{BS}}(\sigma) &= e^x \mathcal{N}(d_+(\sigma)) - e^k \mathcal{N}(d_-(\sigma)) \\ d_{\pm}(\sigma) &\doteq \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \left(x - k \pm \frac{\sigma^2 \tau}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où N est le CDF d'une variable aléatoire normale standard et nous avons souligné la volatilité argument σ dans la notation. Il s'avère que le prix Black-Scholes (1.2) peut être exprimé comme le gain attendu d'une option, mais lorsque l'attente est prise par rapport à une mesure de probabilité différente Q sous le cours de l'action est une martingale (c'est-à-dire qu'il s'agit

d'un pure processus de fluctuation sans tendance ni taux de croissance). Cela signifie qu'il existe un monde dit neutre au risque dans lequel le cours de l'action suit la dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dw_t,$$

où $\mathbf{W}^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q} , et que le prix de l'option d'achat (1.2) peut être exprimé comme l'espérance conditionnelle.

$$u^{BS}(\sigma) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \log S_t = x].$$

où $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ indique que l'espérance est prise sous la mesure de probabilité \mathbb{Q} .

1.2.1 Formule de Black-Scholes

Impossible d'introduire le modèle de Black-Scholes sans donner la célèbre formule du même nom qui donne le prix du call européen dans le cas le plus simple, celui des coefficients constants. Si on considère une option européenne d'achat de prix d'exercice K et de maturité T , on a $\xi = (\mathbf{S}_T - \mathbf{k})^+$, D'après ce qui précède, le prix d'une telle option, disons \mathbf{C} , est :

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(\mathbf{S}_T - \mathbf{K})^+] = \mathbb{E}^*[(\mathbf{S}^a(T) - e^{-rT}\mathbf{K})^+]$$

Or, nous avons vu que :

$$\mathbf{S}^a(T) = \mathbf{S}_0 \exp(\sigma \mathbf{B}_T - \sigma^2 T/2) = \mathbf{S}_0 \exp(\sigma \sqrt{T} G - \sigma^2 T/2)$$

où G est une gaussienne centrée réduite. Notant $\alpha = \sigma \sqrt{T}$, on obtient donc

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{S}_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} \geq e^{-rT} K \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\mathbf{S}_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{I}} e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{I}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

si

$$\mathbb{I} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \mathbf{S}_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} \leq e^{-rT} K \right\} = [-d^-, +\infty]$$

1.3 Estimation de la volatilité :

Dans un modèle à volatilité stochastique avec 2 facteurs de risque[4], toute option est répliquée par un portefeuille contenant des actions et un actif risqué additionnel, il faut connaître la

volatilité instantanée σ_t qui n'est pas directement observable. On peut approcher σ_t par la volatilité moyenne sur une période de longueur \mathbf{T} , qui est estimable à partir de données historiques, mais

- La variance de l'estimateur de volatilité moyenne décroît avec \mathbf{T} ;
- Le biais de l'approximation de σ_t par la volatilité moyenne croît avec \mathbf{T} .

En général, même avec des données haute fréquence, on ne peut connaître σ_t qu'avec une précision de 10% au mieux, ce qui introduit un risque supplémentaire (risque de modèle) dans la procédure de couverture. Dans cette section on se propose de regarder les méthodes d'estimation de volatilité moyenne à partir de données historiques.

1.3.1 Estimateurs de la variance réalisée :

Soit (\mathbf{S}_t) un processus de prix avec volatilité stochastique :

$$\frac{d\mathbf{S}_t}{\mathbf{S}_t} = \mu_t dt + \sigma_t d\mathbf{W}_t.$$

Alors :

$$d \log \mathbf{S}_t = \left(\mu_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t d\mathbf{W}_t$$

(1.2) et la variation quadratique de $\log \mathbf{S}_t$ satisfait.

$$\langle \log \mathbf{S} \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

D'un autre côté, la variation quadratique d'une sémimartingale est définie par :

$$\langle \mathbf{X} \rangle_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\mathbf{X}_{i/Nt} - \mathbf{X}_{(i-1)/Nt})^2,$$

où la convergence a lieu presque sûrement. Avec la notation :

$$r(t, h) \equiv \log \frac{\mathbf{S}_{t+h}}{\mathbf{S}_t},$$

pour le log-rendement du processus de prix, on a donc

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N r\left(\frac{i-1}{N}t, t/N\right)^2.$$

Ceci suggère qu'on peut estimer la variance intégrée $\int_0^t \sigma_s^2 ds$ par la variance réalisée

$$VR_t^N \equiv \sum_{i=1}^N r(i-1/Nt, t/N)^2.$$

Pour analyser le comportement de cet estimateur, on fera deux hypothèses simplificatrices :

- La volatilité (σ_t) est indépendante du mouvement brownien qui dirige le sous-jacent (\mathbf{W}_t).
- La dérive μ_t est déterministe.

1.4 Modèle de volatilité stochastique (VS)

Dans un modèle de volatilité stochastique (VS), promu à la fin des années (1980)[17] par Hull et White (1987)[17] Scott (1987)[17] et Wiggins (1987)[17], la volatilité σ_t du sous-jacent est modélisée comme une fonction déterministe $\sigma(\cdot)$ d'un processus auxiliaire Y , qui est généralement modélisé comme une diffusion :

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{2}\sigma^2(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \\ dY_t &= \alpha(Y_t)dt + \beta(Y_t)dB_t^{\mathbb{Q}} \quad (\text{volatilité stochastique}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$d\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t = \rho dt$ avec $|\rho| < 1$. Ici, $B^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien corrélé à $W^{\mathbb{Q}}$. On prend généralement la corrélation négative ρ pour prendre en compte l'observation empirique selon laquelle, Dans un facteur unique, Dans un paramètre de volatilité stochastique à un facteur tel que décrit par (1.3), les dérivés souscrits sur \mathbf{S} ne peuvent pas être parfaitement couverts en négociant en continu une obligation et le sous-jacent seul. Toutefois, un dérivé libellé sur \mathbf{S} peut être parfaitement répliqué en négociant en continu une obligation, le \mathbf{S} sous-jacent et une option unique sur \mathbf{S} . Ainsi, en supposant que les options puissent être négociées en continu, elles peuvent compléter le marché. Toutefois, comme les coûts de transaction sur les options sont beaucoup plus élevés que sur les actions et que leur liquidité est généralement inférieure, cette hypothèse n'est généralement pas faite. Contrairement au cas de la volatilité locale, il n'existe pas de formule explicite pour construire la dynamique \mathbf{Y} et une fonction de volatilité $\sigma(\cdot)$, de sorte que les prix des options induites par le modèle correspondent exactement aux prix du marché observés.

Proposition 1.4.1. *Les propriétés suivantes du modèle (VS) sont valables même si ε_t et η_t sont corrélés simultanément. Premièrement comme indiqué, il s'agit d'une différence de martingales. Deuxièmement, la stationnarité de h_1 implique la stationnarité de y_t . Troisièmement, si η_t est normalement distribué, il découle des propriétés de la distribution :*

$$\mathbb{E}[\exp(ah_t)] = \exp(a^2\sigma_h^2/2),$$

où a est une constante et σ_h^2 est la variance de h_t . Par conséquent, si ε_t a une variance finie, la variance de y_t est donnée par :

$$\text{var}(y_t) = \sigma^2\sigma_\varepsilon^2 \exp(\sigma_h^2/2),$$

où σ_h^2 est la variance de h_t . De même, si le quatrième moment de ε_t existe, le kurtosis de y_t est $\kappa \exp(\sigma_h^2)$, où κ est le kurtosis de ε_t ; donc y_t présente plus de kurtosis que ε_t , tous les moments impairs sont nuls. À de nombreuses fins, nous devons considérer les moments de pouvoir des valeurs absolues. Encore une fois, η_t est supposé être normalement distribué. On a donc, pour ε_1 ayant une distribution normale standard, les expressions suivantes sont dérivés dans Harvey (1993)[?] :

$$\mathbb{E}|y_t|^c = \sigma^c 2^{c/2} \frac{\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} \exp\left(\frac{c^2}{8} \sigma_h^2\right), c > 1, c \neq 0$$

et

$$\text{var}|y_t|^c = \sigma^{2c} 2^c \exp\left(\frac{c^2}{2} \sigma_h^2\right) \left\{ \frac{\left(c + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \left[\frac{\left(c + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} \right]^2 \right\}, \quad c > -0.5, c \neq 0.$$

Les expressions correspondantes peuvent être calculées pour d'autres distributions, de ε_t compris Student's t et le générale erreur dis Enfin, le carré du coefficient de variation de σ_t^2 est souvent utilisé comme mesure de la force relative du processus de (VS). C'est :

$$\text{var}(\sigma^2 / [\mathbb{E}(\sigma_1^2)]^2) = \exp(\sigma_h^2) - 1.$$

Jacquier, Polson et Rossi (1994)[?] soutiennent que c'est plus facile à interpréter que σ_η^2 Dans les études empiriques citées, il est rarement inférieur à 0, 1 ou plus de 2.

1.4.1 Modèle de volatilité stochastique à temps discret

Le modèle VS à temps discret peut être écrit comme suit :

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, t = 0, 1, \dots, T$$

où y_t désigne le processus de retour dégradé

$$y_t = \log(S_t/S_{t-1}) - \mu$$

et $\log \sigma_t^2$ suit un processus AR (1). On supposera que ε_t est une série de perturbations aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. Habituellement ε_t est spécifié pour avoir une distribution standard donc sa variance, σ_ε^2 est inconnue. Ainsi pour une distribution normale, σ_ε^2 est l'unité, alors que pour une distribution σ_ε^2 à degrés de liberté ce sera $v/(v-2)$ Suite à une convention souvent adopté dans la littérature nous écrivons :

$$y_t = \sigma \varepsilon_t e^{0.5\lambda t}$$

où σ est un paramètre d'échelle, qui supprime la nécessité d'un terme constant dans le processus autorégressif stationnaire de premier ordre.

$$h_{t+1} = \phi h_t + \eta_t, \eta_t \sim IID(0, \sigma_\eta^2) \mid \phi < 1$$

Il a été noté précédemment que si ε_t et η_t sont autorisés à être corrélés entre eux, le modèle peut choisir le type de comportement asymétrique que l'on retrouve souvent dans les cours des actions. En effet une corrélation négative entre ε_t et η_t induit un effet de levier, la synchronisation de la perturbation assure que les observations sont toujours une différence de martingale, l'équation étant écrite de cette manière avec la littérature de l'espace d'état. Il convient de souligner que le modèle ci-dessus n'est qu'une approximation du modèle en temps continu observée à intervalles discrets. L'exactitude de l'approximation est examinée dans Dassios (1995)[6], en utilisant Edgeworth expansio.

Remarque 1.4.1.1. Si $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu qui vérifie les conditions :

1. (\mathbf{W}_t) est à accroissement indépendants et stationnaires ie pour tout $0 \leq r \leq s \leq t \leq u$, $\mathbf{W}_u - \mathbf{W}_t$, $\mathbf{W}_s - \mathbf{W}_r$, sont indépendants et la loi de $\mathbf{W}_u - \mathbf{W}_t$ ne dépend que de $u - t$
2. $\mathbf{W}_t = \mathbf{W}_t - \mathbf{W}_0$ suit une loi gaussienne centrée, de matrice de covariance $\sqrt{(t\mathbf{Id}_k)}$. Alors avec la tribu engendrée par (\mathbf{W}_t) , $(\mathfrak{F}_t^\beta)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien où $(\mathfrak{F}_t^\beta)_{t \geq 0} = \sigma((\mathbf{W}_t)_{t \geq 0})$.

Propriété Soit (\mathbf{W}_t) un M.B alors on a :

1. \mathbb{P} p.s la trajectoire d'un M.B (\mathbf{W}_t) passe une infinité de fois par tout point et (\mathbf{W}_t) n'est pas dérivable ni à gauche ni à droite ;
2. les trajectoires du M.B sont localement holdérienne -continues d'ordre α , $\alpha < \frac{1}{2}$.

Rappelons qu'une fonction f à valeur réelles et définie sur \mathbb{R}^+ est localement hölderienne d'ordre α ; s'il existe une constante C tel que : pour tout $a \geq 0$, $\forall (x, y) \in [0, a]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$.

1.5 Modèle de volatilité stochastique locale (VSL)

Les modèles de volatilité stochastique locale (VSL) combinent les caractéristiques de la volatilité locale et modèles de volatilité stochastique en modélisant la volatilité σ_t en fonction de

$\sigma(.,.,.)$ du temps t , le X sous-jacent et un processus auxiliaire Y (éventuellement multidimensionnel). Par exemple :

$$\begin{aligned}dX_t &= -1/2\sigma^2(t, X_t, Y_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \\dY_t &= f(t, X_t, Y_t)dt + \beta(t, X_t, Y_t)dB_t^{\mathbb{Q}}\end{aligned}\tag{1.4}$$

$d\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t = \rho dt$ (volatilité stochastique locale),

où $|\rho| < 1$. Notez que la classe de modèles décrite par (1.4) généralise tous les modèles VSL et tous (un facteur) modèles VS. Cependant, alors que les modèles VSL offrent plus de flexibilité de modélisation que VSL ou VS modèles séparément, ces modèles présentent également de nouveaux défis informatiques. En effet, alors que là il existe des modèles VSL et VS pour lesquels les prix des options peuvent être calculés sous forme fermée (ou semi-fermée). par exemple, jusqu'à (l'inversion de Fourier), des formules explicites de prix d'option sont disponibles dans un Réglage VSL uniquement lorsque $\rho = 0$. Nous remarquons qu'une formule de forme fermée ou une approximation rapide est crucial pour le problème inverse de la calibration d'un modèle VSL à partir des prix d'option observés.

1.6 Modèles ARCH et GARCH

Bien que l'accent soit mis sur les modèles à temps continu, il convient de mentionner que les temps discrets des modèles de rendement des stocks sont largement étudiés dans la littérature économétrique. Une grande classe de discrétion des modèles sont les processus d'hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH) autorégressifs introduits par Engle (1982)[?], plus tard généralisé sous le nom de GARCH. Les modèles à temps discret qui sont plus proches du type de modèles de volatilité stochastique en temps continu (3.6) basés sur les diffusions sont les Modèles EGARCH développés à Nelson (1991, 1990)[21].

1.7 Modèle de la Volatilité implicite :

Les praticiens sont habitués au calcul de la volatilité implicite dite de Black-Scholes par inversion de la formule de tarification des options de Black-Scholes sur les prix des options observés, la volatilité implicite de Black-Scholes semble être une prévision de la volatilité moyenne

$\sigma_{t,T}$, sur la durée de vie de l'option.

$$(\sigma_{t,T}^2 = (T - t)^{-1} \mathbf{U}_{t,T}^2).$$

Pour décrire la dynamique de cette "volatilité implicite", nous commençons par analyser les lois conditionnelles et les moments de σ :

$$\mathbb{E}(\sigma(t+h)|\mathcal{F}_t) = \exp(g(t+h) + \int_0^t a(t+h-s)dw^2(s) + 1/2 \int_0^h a^2(x)dx)$$

pour

$$x(t) = \ln \sigma(t) = g(t) + \int_0^t a(t-s)dw^2(s),$$

$g(t) = x(0) + (1 - e^{-kt})\theta$, et $a(x)$ comme d'habitude. si nous travaillons avec la version stationnaire de σ :

$$\mathbb{E}(\sigma(t+h)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(\int_{-\infty}^t a(t+h-s)dw^{(2)}(s) + 1/2 \int_0^h a^2(x)dx\right).$$

Pour avoir une idée du comportement de la volatilité implicite, voici le figure ci-dessous. La Moneyness représente le rapport entre \mathbf{S}_0 et \mathbf{K} . Sur les marchés, les agents (surtout les traders) regardent en permanence les surfaces de volatilité implicite. Au vu des formules décrites ci-dessus, il existe une relation de bijection entre les volatilités implicites et les prix des options (quand on connaît l'une on connaît l'autre via 1.2).

1.8 Les options

Définition 1.8.0.1. *Une option est un titre financier conditionnel qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix déterminé à l'avance et pendant une période donnée. Pour exercer ce droit, l'acheteur de l'option doit verser une prime au vendeur. Cette option peut être exercée soit à l'échéance (option européenne), soit pendant la durée d'exercice (option américaine).*

Prix des options : Dans la pratique, nous avons accès à des observations discrètes d'historiques cours des actions, tandis que la volatilité est non observée. Deux étapes :

- Estimez la distribution empirique de la volatilité stochastique par des algorithmes de filtrage de particules ajustés.
- Construire un arbre de recombinaison multinomial pour calculer l'option des prix.

Remarque 1.8.0.2. *À la différence des contrats à terme, une option ne constitue pas une obligation pour son détenteur. L'option peut être levée si le détenteur décide d'exercer son*

droit. Ce droit peut également être revendu à un tiers (option négociable). Parmi les options classiques, on distingue, les options d'achat (call) et les options de vente (put). Un call donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix d'exercice défini dans le contrat. Le vendeur du call a l'obligation de livrer l'actif sous-jacent dès lors que l'acheteur décide d'exercer son option. Un put donne à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix d'exercice défini dans le contrat. Le vendeur du put a l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice dès lors que le détenteur du put décide d'exercer son option

Definition de CAC 40 : C'est un panier composé de 40 valeurs de sociétés françaises. Ces sociétés sont choisies parmi les 100 sociétés françaises dont les volumes d'échanges de titres sont les plus importants. Chaque société a un poids déterminé par rapport à sa capitalisation sur NYSE Euronext.

Exemples 1.8.1. *L'acheteur d'un call sur l'indice CAC 40 a tout intérêt à exercer son option si la valeur finale de l'indice, qui constitue ici l'actif sous-jacent, est supérieure au prix d'exercice. Par exemple, si le prix d'exercice est de 5050 points et que l'indice CAC 40 vaut 5100 points, l'investisseur peut exercer son option en achetant la contrepartie au prix de 5050 points (il prend livraison d'un tracker sur l'indice CAC 40) et revendre directement l'actif sur le marché au prix de 5100 points. Il empochera la différence, c'est-à-dire 50 points. Il devra cependant retirer le montant de la prime payée pour déterminer la rentabilité de son investissement. Dans le cadre d'un put, la logique est exactement opposée. L'acheteur du contrat a acquis un droit de vendre. Ainsi, il peut livrer le sous-jacent, ici le tracker sur l'indice CAC 40, à la contrepartie vendeuse du contrat dès lors que le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option à l'échéance. Par exemple, si le prix d'exercice est de 5000 points et que l'indice CAC 40 vaut 4900 points, l'investisseur peut exercer son option. Pour cela, il achète la contrepartie au prix de 4900 points (il en prend livraison) et revend directement l'actif au prix de 5000 points. Il empêche ainsi la différence, c'est-à-dire 100 points. Il devra également retirer le montant de la prime du put payée pour déterminer la rentabilité de son investissement*

1.8.1 La valorisation des options

Les composantes de la valeur d'une option La valeur d'une option correspond à la prime qu'un investisseur doit payer pour acquérir le droit d'acquérir ou de vendre l'actif sous-jacent. Cette valeur est déterminée lors de son émission. Si l'option est négociable sur un marché,

cette valeur va fluctuer en fonction de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent. Cette valeur se décompose en deux éléments :

- la valeur intrinsèque (VI) ;
- la valeur temps (VT).

La prime payée est donc égale à la somme de ces deux valeurs :

$$\text{Prime} = VI + VT$$

La valeur intrinsèque correspond à l'écart entre la valeur de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice de l'option. La (VI) d'un call augmente avec la valeur de l'actif sous-jacent. Elle est nulle tant que le prix de l'actif sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option. Inversement, la (VI) d'un put est nulle tant que le prix de l'actif sous-jacent est supérieur au prix d'exercice de l'option. La valeur-temps est égale à la différence entre la prime de l'option et la valeur intrinsèque. C'est en quelque sorte la valeur spéculative de l'option. La valeur-temps est d'autant plus forte que la date d'échéance de l'option est lointaine ; elle diminue au fur et à mesure que la date d'échéance se rapproche.

Les déterminants de la valeur d'une option La valeur d'une option dépend fondamentalement de cinq facteurs :

- le prix de l'actif sous-jacent : plus le prix de l'actif sous-jacent s'accroît, plus la valeur du call augmente ;
- le prix d'exercice de l'option : plus le prix d'exercice est élevé, plus la prime du call est faible (la probabilité d'exercer l'option diminue) ;
- la date d'échéance : le prix du call est d'autant plus faible que la date d'échéance est lointaine ;
- la volatilité du prix de l'actif sous-jacent : plus la volatilité est forte, plus la prime est élevée ;
- le taux d'intérêt : plus les taux sont élevés, plus la prime est forte.

1.9 Modèle de Heston

Le modèle de Heston populaire est un modèle de (VS) couramment utilisé, dans lequel le caractère aléatoire du processus de variance varie en tant que racine carrée de la variance.

Exemples 1.9.1. *Considérons le modèle de Heston (1993)[20] selon lequel la dynamique de X en risque neutre est donnée par :*

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{2}e^{Y_t}dt + e^{Y_t/2}d\mathbf{W}_t^{\mathbb{Q}} \\ dY_t &= ((\kappa\theta - 1/2\delta^2)e^{-Y_t} - \kappa)dt + \delta e^{-Y_t/2}d\mathbf{B}_t^{\mathbb{Q}} \\ d\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t &= \rho dt \end{aligned}$$

Le générateur de (X, Y) est donné par :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}e^y(\partial_x^2 - \partial_x) + ((\kappa\theta - \frac{1}{2}\delta^2)e^{-y} - \kappa)\partial_y + \frac{1}{2}\delta^2 e^{-y}\partial_y^2 + \rho\delta\partial_x\partial_y.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \frac{1}{2}e^y \\ b(x, y) &= \frac{1}{2}\delta^2 e^{-y} \\ c(x, y) &= \rho\delta \\ f(x, y) &= ((\kappa\theta - \frac{1}{2}\delta^2)e^{-y} - \kappa) \end{aligned}$$

Nous fixons un délai de maturité τ et log-strike k . En supposant une extension de la série de Taylor des coefficients de \mathcal{A} avec $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$, les niveaux de temps t de (X, Y) , on calcule :

$$\mathbf{I}_0 = e^{y/2}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{8}e^{-y/2}\tau(-\delta^2 + 2(-e^y + \theta)\kappa + e^y\delta\rho) + \frac{1}{4}e^{-y/2}\delta\rho(\kappa - x)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{e^{-3y/2}}{128}\tau^2(\delta^2 - 2\theta\kappa)^2 + \frac{e^{y/2}}{96}\tau^2(5\kappa^2 - 5\delta\kappa\rho + \delta^2(-1 + 2\rho^2)) + \frac{e^{-y/2}}{192}\tau(-4\tau\theta\kappa^2 - \tau\delta^2\rho + 2\tau\delta\theta\kappa\rho + 2\delta^2(8 + \tau\kappa + \rho^2))$$

L'expression pour \mathbf{I}_3 est également explicite, mais omise pour des raisons de brièveté, nous traçons l'approximatif la volatilité implicite $(\mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3)$ ainsi que la volatilité implicite exacte I , qui peut être calculée en utilisant la formule de tarification donnée dans Heston (1993)[?] puis en inversant la formule de Black-Scholes numériquement.

Théorème 1.9.1. (La théorie financière) *La grande partie de la théorie financière actuelle est fondée sur l'hypothèse d'efficience du marché (HEM) selon laquelle le cours d'une action reflète entièrement toute l'information disponible. Cette théorie est basée d'abord sur les travaux de Bachelier (1900) [22] ensuite Fama (1970)[12]. De nombreuses recherches ont été ensuite développées et pour enrichir cette théorie. Cette hypothèse se présente sous deux formes :*

- la forme forte indique que le cours réagit immédiatement et correctement à l'arrivée de toute nouvelle information ;*
- la forme faible est souvent associée à la marche aléatoire, selon laquelle les cours n'ont pas de mémoire ; dans ces conditions, les cours passés ne peuvent pas servir pour prévoir les cours futurs.*

Chapitre 2

Volatilité stochastique dans le cadre fractionnaire

Pour des applications sur les phénomènes avec longue mémoire, Comte et Renault (1996)[16] ont utilisé des processus fractionnaires pour généraliser la notion d'équation différentielle stochastique (EDS) d'ordre p . Nous considérons ici une équation différentielle stochastique fractionnaire de premier ordre :

$$dx(t) = -kx(t)dt + \sigma dw_\alpha(t), \quad x(0) = 0, \quad k > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

La solution peut être écrite (voir Comte et Renault (1996) [16] sous la forme $x(t) = \int_0^t \exp^{-k(t-s)} \sigma dw_\sigma(s)$. L'intégration vis-à-vis de w_α n'est définie que dans le sens de Wiener L^2 et pour l'intégration des fonctions déterministes seulement. Nous obtenons ainsi des familles de processus gaussiens. Le processus $x(t)$ peut aussi être écrit comme $\int_0^t a(t-s)dw(s)$, avec

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\sigma}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-ku} (x-u)^\alpha du \\ &= \frac{\sigma}{\Gamma(1+\alpha)} \left(x^\alpha - k e^{-kx} \int_0^x e^{ku} u^\alpha du \right) \end{aligned}$$

On note $y(t)$ la "version stationnaire" de $x(t)$, $y(t) = \int_{-\infty}^t a(t-s)dw(s)$ Donc, la solution x de l'EDS fractionnaire est donnée par : $x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} dx^{(\alpha)}(s)$ où sa dérivée d'ordre α est la solution :

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \int_0^t e^{-k(t-s)} \sigma dw(s) \end{aligned}$$

de la norme (EDS) associée. On peut aussi donner la densité spectrale générale (temps continu) des processus qui sont solutions de (2.1) :

$$f^c(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\Gamma(1+\alpha)^2 \lambda^{2\alpha}} \frac{1}{\lambda^2 + k^2}. \quad (2.2)$$

Enfin, il semble intéressant de noter que les processus fractionnaires à mémoire longue considérés dans Comte et Renault (1996)[16] et les solutions de (2.1) en particulier ont les propriétés suivantes prouvées dans Comte (1996)[16] :

- i. La fonction de covariance $\gamma = \gamma_y$ associée à x satisfait pour $h \rightarrow 0$ et ψ constant :

$$\gamma(h) = \gamma(0) + 1/2\psi \cdot |h|^{2\alpha+1} + o(|h|^{2\alpha+1}).$$
- ii. x est ergodique au sens de L^2 : $\frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{m.s.} 0$.

Pourquoi le cadre fractionnaire ? Notons l'opérateur de différenciation $\frac{d}{dt}$ par D . Alors :

$$D^{-1}f(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

La formule de Cauchy pour une intégration répétée donne pour tout entier $n > 0$,

$$D^{-n}f(t) = \int_0^t \frac{1}{n!} (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

La généralisation de cette formule au réel ν donne la définition de l'intégrale fractionnaire :

$$D^{-\nu}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s) ds.$$

Notons en particulier que $D^0 f(t) = f(t)$.

2.1 Notions préliminaires

Le mouvement Brownien fractionnaire (MBF) $(W_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ avec le paramètre de Hurst H , introduit en [22] est un processus gaussien centré auto-similaire avec des incréments stationnaires satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}, \Delta \geq 0, q > 0$:

$$\mathbb{E}[|W_{t+\Delta}^H - W_t^H|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

avec K_q le moment d'ordre q de la valeur absolue d'une variable gaussienne standard.

- Pour $H = 1/2$ on récupère le mouvement brownien classique. Les trajectoires de W^H sont Hôlder-continues avec l'exposant r , pour tout $r < H$.

- lorsque $H > 1/2$, les incréments du MBF sont positivement corrélés et présentent une mémoire longue dans le sens suivant :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Cov[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H] = +\infty.$$

En effet, $Cov[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H]$ est à l'ordre de k^{2H-2} lorsque $k \rightarrow \infty$. Notons que dans le cas du MBF, il existe une correspondance biunivoque entre la régularité et la propriété de longue mémoire à travers le paramètre de Hurst H .

2.2 Mouvement brownien fractionnaire

Définition 2.2.0.1. *Un processus gaussien centré $\mathbf{B}^H = \{\mathbf{B}_t^H, t \geq 0\}$ est appelé Mouvement Brownien fractionnaire (MBF) avec le paramètre d'auto-similitude $\mathbf{H} \in (0, 1)$ s'il a la fonction de covariance suivante :*

$$\mathbb{E}(\mathbf{B}_t^H \mathbf{B}_s^H) = \frac{1}{2} \{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\},$$

et p.s, à trajectoires continues, quand $H = \frac{1}{2}$, \mathbf{B}^H est un mouvement brownien standard.

2.2.1 Processus stochastique avec longue mémoire :

Les processus à longue mémoire sont caractérisés par la présence de corrélations à long terme, autrement dit, la dépendance entre des observations largement séparées dans le temps reste forte. Les caractéristiques de possession de longue mémoire de séries chronologiques surgissent dans des domaines aussi divers que les sciences économiques, géophysiques,...etc. $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus stationnaire et il existe $\mathbf{H} \in (1/2, 1)$. tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{corr(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t)}{ct^{2-2H}} = 1$$

$\{\mathbf{X}_t\}$ a une mémoire longue (dépendance à longue mémoire).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mémoire longue : } \sum_{t=1}^{\infty} corr(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_1) = \infty, \quad \text{avec } \mathbf{H} > 1/2; \\ \text{Anti-persistence : } \sum_{t=1}^{\infty} corr(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_1) < \infty, \quad \text{avec } \mathbf{H} < 1/2. \end{array} \right.$$

2.2.2 Propriétés du Mouvement brownien fractionnaire

Les incréments du MBF, $\{\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, sont :

1) stationnaires, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[(\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1})(\mathbf{B}_{n+h} - \mathbf{B}_{n+h-1})] = \gamma(h)$$

2) H -similaires, c'est-à-dire :

$$c^{-H}(\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}) \sim^{\mathcal{D}} (\mathbf{B}_{cn} - \mathbf{B}_{c(n-1)}),$$

3) dépendants, comme suit :

– quand $H > \frac{1}{2}$, les incréments présentent une mémoire longue, c'est-à-dire :

$$\sum \mathbb{E}[\mathbf{B}_1(\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1})] = +\infty,$$

– quand $H < \frac{1}{2}$, les incréments présentent une antipersistance, c'est-à-dire :

$$\sum \mathbb{E}[\mathbf{B}_1(\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1})] < +\infty,$$

Remarque 2.2.1. 1. Les trajectoires sont p.s. continues de tout ordre $\gamma < H$.

2. la $\frac{1}{H}$ -variation sur $[0, t]$ est finie. En particulier, le MBF a une variation quadratique infinie pour $H < \frac{1}{2}$. Ouand $H \neq \frac{1}{2}$, \mathbf{B}_t^H n'est pas une semi-martingale.

Définition 2.2.1. Intégrale stochastique : On définit l'intégrale stochastique d'un processus élémentaire \mathbf{H} , comme étant le processus continu $(\mathbf{I}(\mathbf{H})_t)_{0 \leq t \leq T}$, défini pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$ par :

$$\mathbf{I}(\mathbf{H})_t = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(\mathbf{B}_{t_i} - \mathbf{B}_{t_{i-1}}) + \mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{B}_{t_i} - \mathbf{B}_{t_k}).$$

Notons que $\mathbf{I}(\mathbf{H})_t$ peut s'écrire :

$$\mathbf{I}(\mathbf{H})_t = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(\mathbf{B}_{t \wedge t_i} - \mathbf{B}_{t \wedge t_{i-1}}).$$

Ce qui prouve la continuité de la fonction $t \mapsto \mathbf{I}(\mathbf{H})_t$. On notera $\int_0^t \mathbf{H}_s d\mathbf{B}_s$ pour $\mathbf{I}(\mathbf{H})_t$.

2.3 Une transformation intégrale du MBF

Considérons le processus observé : $\mathbf{X}_t = \mathbf{B}_t^H, t \geq 0$. On a donc la transformation intégrale suivante :

$$\mathbf{Z}_t := \int_0^t k_H(t, s) d\mathbf{X}_s, t \geq 0,$$

où $k_H(t, s) := c_H^{-1} s^{1/2-H} (t-s)^{1/2-H}$ et $c_H := 2H\Gamma(3/2-H)\Gamma(H+1/2)$. avec $K_H(t, s)$ est un noyau non aléatoire s'écrit :

$$K^H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du.$$

2.4 Une transformation intégrale du MBF avec dérive

Dans le cas d'un processus observé de la forme : $\mathbf{X}_t = \mathbf{B}_t + \int_0^t \theta_s ds, t \geq 0$, la décomposition de \mathbf{Z}_t est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{Z}_t = \int_0^t \mathbf{K}_H(t, s) d\mathbf{B}_s + \int_0^t \mathbf{Q}_s dm_s,$$

avec

$$\mathbf{Q}_t := \frac{d}{dm_t} \int_0^t \mathbf{K}_H(t, s) \theta_s ds, t \geq 0.$$

- La filtration générée par \mathbf{X}_t et la filtration générée par \mathbf{Z}_t coïncident. En effet \mathbf{Z}_t est une martingale.
- La filtration générée par \mathbf{X}_t et la filtration générée par \mathbf{Z}_t coïncident. En effet \mathbf{Z}_t est une semimartingale.

2.4.1 Représentation du MBF sur un intervalle

Il y a beaucoup de représentations du mouvement Brownien fractionnaire en terme du mouvement brownien. Le MBF est un processus de Volterra avec le noyau suivant :

$$K_H(t, s) = C_H F\left(\gamma, -\gamma, 1-\gamma, 1-\frac{t}{s}\right) \frac{1}{(t-s)^\gamma}.$$

où $F(\cdot)$ est la fonction hypergéométrique de Gauss. On a donc, le MBF peut être également représenté comme :

$$W_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s.$$

- La représentation de Mandelbrot-Van Ness utilise l'ensemble des histoires du mouvement brownien $\{W_s; s \leq t\}$.
- La représentation de Molchan-Golosov n'utilise que l'histoire du mouvement brownien à partir du temps 0.

Transformation discrète :

$$\mathbf{Z}_n = \sum_{m=1}^n k(n, m) X_m, t \geq 0,$$

où : $k(n, m)$ est un noyau déterministe. $k(n, m)$ est inversible avec $K(n, m)$ son inverse. Les deux matrices sont obtenues à partir de la décomposition de Choleski de la covariance et inverse des matrices de covariance du processus, c'est-à-dire :

$$\Gamma_n = K_n^T D_n K_n, \Gamma^{-1} = k_n^T D_n^{-1} k_n.$$

Considérons le modèle suivant

$$X_t = \nu dW_t^H - \alpha(X_t - m)dt \quad (2.3)$$

Proposition 2.4.1. Soit W^H un MBF et X^α défini par (2.3) pour un $\alpha > 0$. Alors lorsque α tend vers à zéro,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^\alpha - X_0^\alpha - \nu W_t^H| \right] \rightarrow 0.$$

Preuve : à partir de l'équation suivante :

$$X_t = \nu dW_t^H - \alpha(X_t - m)dt$$

et en appliquant l'intégration par parties, on obtient

$$X_t^\alpha = \nu W_t^H - \int_{-\infty}^t \nu \alpha e^{-\alpha(t-s)} W_s^H ds + m.$$

Alors,

$$(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu W_t^H = - \int_0^t \nu \alpha e^{-\alpha(t-s)} W_s^H ds - \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha s}) W_s^H ds.$$

Par conséquent,

$$\sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu W_t^H| \leq \nu \alpha T \hat{W}_T^H + \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (e^{\alpha s} - e^{-\alpha(T-s)}) \hat{W}_s^H ds,$$

où $\hat{W}_t^H = \sup_{s \in [0, t]} |W_s^H|$. On utilise l'inégalité de maximum dans [1], on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu W_t^H| \right] \leq c(\nu \alpha T T^H + \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (T \alpha e^{\alpha s}) |s|^H ds),$$

où c est une constante. Le terme à droite de cette inégalité tend vers 0 quand α tend vers 0. Cette proposition implique que dans le modèle (VSF), si $\alpha \ll 1/T$, et que nous nous limitons à l'intervalle d'intérêt $[0, T]$, nous pouvons procéder comme si le processus de log-volatilité

était un MBF. En effet, régler simplement $\alpha = 0$ dans (2.3) donne (au moins formellement) $X_t - X_s = \nu(W_t^H - W_s^H)$ et nous récupérons immédiatement notre modèle du MBF simple non stationnaire, ce qui donne

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \nu(W_{t+\Delta}^H - W_t^H).$$

Corollaire 2.4.1. *Soit $q > 0, t > 0, \Delta > 0$. pour α tend vers zéro, nous avons*

$$\mathbb{E}[|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q] \rightarrow \nu^q K_q \Delta^{qH}.$$

Preuve : On se rappelle d'abord l'équation (2.2) dans [22] s'écrit :

$$Cov[X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\Delta x} \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2} dx,$$

avec $K = \nu^2 \Gamma(2H + 1) \sin(\pi H) / (2\pi)^{15}$. Remarquons que

$$\mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2] = 2Var[X_t^\alpha] - 2Cov[X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha].$$

Donc,

$$\mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2] = 2K \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\Delta x}) \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

cela implique que pour Δ fixé, $\mathbb{E}[|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^2]$ est uniformément bornée par

$$2K \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\Delta x}) \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

De plus, $X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha$ est une variable aléatoire gaussienne et donc pour tout q , son moment $(q+1)^{th}$ est uniformément borné (en α), de sorte que la famille $|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q$ est uniformément intégrable. Donc, par la proposition (2.3)

$$|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q \rightarrow \nu^q |W_{t+\Delta}^H - W_t^H|^q,$$

en loi, on obtient la convergence de la suite des espérances.

2.4.2 Inférence statistique dans le modèle de la Volatilité stochastique fractionnaire (VSF)

Comte et Renault (1996) [16] proposent plusieurs méthodes pour estimer les paramètres d'un processus Ornstein -Uhlenbeck de longue mémoire, qui est l'ensemble de paramètres $(\alpha, k, \theta, \gamma)$

impliqués par l'équation du premier ordre remplie par le processus de la log-volatilité. Ces méthodes sont bien sûr toutes basées sur un échantillon temporel d'observations d'une trajectoire de $\ln \sigma$. Une telle trajectoire n'est pas disponible ici. L'idée est alors de trouver des approximations du chemin déduites de la $S(ti)$ observée et pour remplacer les vraies observations habituellement utilisées par leurs approximations dans la procédure d'estimation. Rappelons brièvement que ces procédures sont les suivantes :

$$\begin{cases} d\mathbf{Y}_t = (\mu - \frac{\sigma^2(X_t)}{2})dt + \sigma(\mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t, \\ d\mathbf{X}_t = \alpha(m - \mathbf{X}_t)dt + \beta d\mathbf{B}_t^H. \end{cases}$$

On peut aussi supposer que $Corr(\mathbf{B}_t^H, \mathbf{W}_t) = \rho$.

et les paramètres à estimer $\theta = (\alpha, m, \beta, \mu, \rho)$ et H .

Remarque 2.4.2.1. *L'estimation de \mathbf{H} est découplée de l'estimation des composantes de la dérive, mais pas de l'estimation des termes "diffusion".*

2.4.3 Extension des méthodes statistiques classiques

1. **Pour \mathbf{H} connu :** μ, m, α et β peuvent être estimés à l'aide de techniques standard fouque, papanicolaou et sircau (2000) à l'aide de données à haute fréquence.
2. **Pour \mathbf{H} inconnu :** rendements au carré, logarithme des rendements au carré, utilise une méthode non paramétrique pour estimer \mathbf{H} par le carré, puis revenez aux techniques classiques et estimez les paramètres restants.

2.4.4 Extension naturelle dans un modèle VS fractionnaire

pour $x_t = \ln(\mathbf{S}_t/\mathbf{K}e^{-r(T-t)})$ défini comme avant : Conditionnellement sur \mathcal{F}_t (c'est-à-dire la filtration générée par \mathbf{W}_t et \mathbf{B}_t^H jusqu'à t) et conditionnellement sur le chemin de volatilité $\{\sigma_t; 0 \leq t \leq T\}$, on peut calculer :

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{S}_t \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} \left[\phi \left(\frac{x_t}{\mathbf{U}_{t,T}} + \frac{\mathbf{U}_{t,T}}{2} \right) \right] - e^{-x_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} \left[\left(\phi \left(\frac{x_t}{\mathbf{U}_{t,T}} + \frac{\mathbf{U}_{t,T}}{2} \right) \right) \right] \right\}$$

où : $\mathbf{U}_{t,T} = \sqrt{\int_t^T \sigma_u^2 du}$. (Comte-Renault (1998)[16])

2.5 Modèle de volatilité stochastique fractionnaire

Considérons le modèle de la (VSF) noté $(\mathbf{Y}_t)_{t \in [0, T]}$ et défini par :

$$d\mathbf{Y}_t = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt + \sigma_t d\mathbf{W}_t,$$

où $\sigma_t = \sigma(\mathbf{X}_t)$, et \mathbf{X}_t est décrit par : $d\mathbf{X}_t = \alpha(m - \mathbf{X}_t)dt + \beta d\mathbf{B}_t^H$.

1. \mathbf{B}_t^H est un mouvement brownien fractionnaire avec le paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$
2. \mathbf{X}_t est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire (OUF).

2.5.1 Covariance de la VSF

On a $y_t = \log \sigma_t$. Donc :

$$\text{cov}(y_t, y_{t+\Delta}) \propto \int_{-\infty}^0 e^{\kappa s} ds \int_{-\infty}^{\Delta} e^{\kappa(s' - \Delta)} ds' |s - s'|^{2H-2}.$$

Alors :

$$\mathbb{E}[(y_{t+\Delta} - y_t)^2] = 2\text{var}[y_t] - 2\text{cov}(y_t, y_{t+\Delta}).$$

Où

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, y_{t+\Delta}) & \propto \frac{e^{-k\Delta}}{2k^{2H}} \int_0^{k\Delta} \frac{e^u du}{u^{2-2H}} + \frac{e^{-k\Delta}}{2k^{2H}} \Gamma(2H - 1) + \frac{e^{k\Delta}}{2k^{2H}} \int_{k\Delta}^{+\infty} \frac{e^{-u} du}{u^{2-2H}}. \end{aligned}$$

(\propto : *Asymptotiquement équivalent*)

2.5.2 Prix dans les modèles VS classiques

Soit $X_t = \ln(\mathbf{S}_t / \mathbf{K} e^{-r(T-t)})$ conditionnellement à \mathcal{F}_t (c'est-à-dire la filtration générée par \mathbf{W}_t et \mathbf{Z}_t jusqu'à t) et conditionnellement aux trajectoires de la volatilité $\{\sigma_t; 0 \leq t \leq T\}$, on peut calculer :

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{S}_t \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} \left[\phi \left(\frac{x_t}{\mathbf{U}_{t,T}} + \frac{\mathbf{U}_{t,T}}{2} \right) \right] - e^{-x_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} \left[\left(\phi \left(\frac{x_t}{\mathbf{U}_{t,T}} + \frac{\mathbf{U}_{t,T}}{2} \right) \right) \right] \right\}$$

où : $\mathbf{U}_{t,T} = \sqrt{\int_t^T \sigma_u^2 du}$.

2.5.3 Temps discret analogique :

Considérons les observations : X_1, X_2, \dots , on a donc la transformation discrète suivante :

$$\mathbf{Z}_n = \sum_{m=1}^n k(n, m) \mathbf{X}_m, \quad t \geq 0,$$

où $k(n, m)$ est inversible avec $K(n, m)$ son inverse.

Les deux matrices sont obtenues à partir de la décomposition de Choleski de la covariance et inverse des matrices de covariance du processus, c'est-à-dire :

$$\Gamma_n = K_n^T D_n K_n, \Gamma^{-1} = k_n^T D_n^{-1} k_n.$$

2.5.4 Estimation des paramètres du modèle

Considérons le modèle de la VSF suivant :

$$\begin{cases} d\mathbf{Y}_t = (\mu - \frac{\sigma^2(x_t)}{2})dt + \sigma(\mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t & ; \\ d\mathbf{Y}_t = \alpha(m - \mathbf{X}_t)dt + \beta d\mathbf{B}_t^H, \end{cases}$$

Remarque 2.5.4.1. *L'estimation de H est découplée de l'estimation de la dérive composants, mais pas de l'estimation des termes de "diffusion".*

Pour estimer les paramètres donnant H , on utilise les méthodes suivantes :

1. Méthode de Monte Carlo séquentielle.
2. Filtrage de Kalman à temps discret.

Apprendre θ hors ligne :

La stratégie se fait en deux étapes :

- Approximation de $f(\theta|\mathbf{Y})$ par :

$$f^N(\theta|\mathbf{Y}) = \frac{f^N(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)}{p(y)} \propto f^N(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)$$

où $f^N(\mathbf{Y}|\theta)$ est une approximation SMC de $f(\mathbf{Y}|\theta)$.

- échantillon θ via un schéma MCMC ou un schéma SIR.

Désavantages :

- SMC perd sa nature séquentielle attrayante.
- Le schéma d'échantillonnage global est sensible à $f^N(\mathbf{Y}|\theta)$.

Apprendre θ séquentiellement : Le filtrage des états et des paramètres : apprendre \mathbf{X}_t et θ séquentiellement.

$$\text{postérieur } t : f(\mathbf{X}_t|\theta, \mathbf{Y}_t)f(\theta|\mathbf{Y}_t)$$

↓

$$\text{Avant } t + 1 : f(\mathbf{X}_{t+1}|\theta, \mathbf{Y}_t)f(\theta|\mathbf{Y}_t)$$

↓

$$\text{Postrieur } t+1 : f(\mathbf{X}_{t+1}|\theta, \mathbf{Y}_{t+1})f(\theta|\mathbf{Y}_{t+1}).$$

Avantages :

- Mises à jour séquentielles de $f(\theta|\mathbf{Y}_t)$, $f(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_t)$ et $f(\theta, \mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_t)$;
- Prévisions séquentielles h-step ahead $f(\mathbf{Y}_{t+h}|\mathbf{Y}_t)$;
- Approximations séquentielles pour $f(\mathbf{Y}_t|\mathbf{Y}_{t-1})$.

Evolution artificielle de θ : On cite les résultats suivants

- 1) Gordon et al (1993) : l'évolution est donné par :

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \zeta_{t+1}$$

$$\zeta_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W}_{t+1})$$

- 2) West et al (1993,1998) : l'évolution de θ a été faite comme suite : on définit $f(\theta|\mathbf{Y}_t)$, pour tout t .

On Calcule une approximation de Monte Carlo de $f(\theta|\mathbf{Y}_t)$, en utilisant des échantillons $\theta_t^{(j)}$ et poids $w_t^{(j)}$, Approximation de densité de noyau lisse :

$$f(\theta|\mathbf{Y}_t) \approx \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_t^{(j)} \mathcal{N}(\theta|m_t^{(j)}, h^2\mathbf{V}_t).$$

Un problème de modélisation : Nous voulons construire des modèles de prix d'actions reproduisant les propriétés empiriques de la surface de volatilité implicite.

Stock : Apple, Expiration : 16/4/2010. Données : courtoisie de Rafael De Santiago (IESE, Barcelone).

Peut-on déterminer la classe de modèles de volatilité stochastique qui peut reproduire ce comportement biaisé ?

Essayons de déterminer cette classe de volatilité stochastique Notre objectif sera de calculer le biais par rapport à l'argent, comme le dérivé de la volatilité implicite en fonction du prix du log. Ensuite, nous allons calculer sa limite de court terme des modèles. Nous ferons ces calculs non pas pour un modèle concret, mais pour un classe de modèles de volatilité stochastique qui comprendra à la fois le classique volatilités de diffusion et les volatilités de temps périodiques introduites par Fouque, Papanicolaou, Sircar et Solna.

Pourquoi le calcul de Malliavin ? En raison de la formule Clark-Ocone, sous certaines hypothèses générales.

$$F = E(F) + \int_0^t E_r(D_r F) dW_r,$$

où \mathbf{D} désigne l'opérateur dérivé de Malliavin. Ensuite, tous les informations pertinentes sont incluses dans le dérivé de Malliavin de F . Parce que la volatilité moyenne future.

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds$$

est un processus non adapté. Et la formule d'Itô anticipée est un outil naturel pour travailler avec des processus d'anticipation.

Notations : Nous examinerons le modèle suivant pour le log du prix d'un stock sous une mesure de probabilité neutre au risque \mathbf{Q} :

$$X_t = x + rt - 1/2 \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s (\rho dW_s + \sqrt{1-\rho^2} dB_s), t \in [0, T].$$

Ici, x est le logarithme du prix actuel. r est le taux d'intérêt instantané. W et B sont des mouvements browniens standard indépendants, $\rho \in (-1, 1)$ Ici, le processus de volatilité σ est un processus stochastique de carré intégrable, avec trajectoires continues droites, adaptées à la filtration générée par W .

Notons que le prix d'un appel européen avec le prix de grève K est donné par :

$$V_t = e^{-r(T-t)} E[(e^{X_T} - K)_+ | \mathcal{F}_t],$$

où E est l'espérance sous Q et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W \vee \mathcal{F}^B$. Notons que $BS(t, x, \sigma)$ désigne le prix d'une option d'achat européenne sous le modèle classique de Black-Scholes à volatilité constante σ , le logarithme du prix de stock actuel x , avec la durée d'échéance $T - t$, prix d'exercice K et taux d'intérêt r

$$BS(t, x, \sigma) = e^x N(d_+) - K e^{-r(T-t)} N(d_-),$$

où N désigne la fonction de probabilité cumulée de la loi normale standard et :

$$d_{\pm} = \frac{x - x_t^*}{\sigma \sqrt{T-t}} \pm \frac{\sigma}{2} \sqrt{T-t},$$

avec : $x_t^* = \ln K - r(T-t)$.

Chapitre 3

Etude de quelques exemples d'applications :

3.1 Une formule approximative de tarification des options pour le modèle Heston :

Considérons le modèle de volatilité stochastique de Heston avec corrélation ρ , lequel consiste une action, un compte de marché monétaire à taux d'intérêt déterministe r et le processus de volatilité v_t satisfaisant les équations suivants :

$$d\mathbf{X}_t = \beta(\mathbf{X}_t, t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t, t)d\mathbb{W}_t \quad (3.1)$$

$$d\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_t(bdt + \sqrt{v_t}d\mathbf{B}_t), \quad (3.2)$$

où nous supposons que $d\mathbf{B}_t \cdot d\mathbf{W}_t = \rho dt$, avec $\rho \in (-1, 1)$. Il est bien connu qu'il existe un mouvement brownien à 2-dimensions $(\mathbf{Z}_t, \mathbf{W}_t)^T$, sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. tels que, $\mathbf{B}_t = \rho\mathbf{W}_t + \sqrt{1 - \rho^2}\mathbf{Z}_t$. Dans la suite, il est utile de penser à la dynamique décrite par (3.1) et (3.2) comme étant dirigée par $(\mathbf{Z}_t, \mathbf{W}_t)^T$ plutôt que $(\mathbf{B}_t, \mathbf{W}_t)^T$. Nous supposons également que la dynamique est satisfaite dans le cadre du principe de neutralité vis-à-vis du risque. mesure choisie par le marché et que cette mesure neutre du risque est donnée par \mathbb{P} . Cela implique que $b = r$, Dans la suite nous travaillons avec le prix logarithmique $\mathbf{X}_t = \ln(\mathbf{S}_t)$ plutôt que le prix réel, Le prix d'une créance éventuelle $h(\mathbf{X}_T)$ à l'instant t peut ensuite être calculé via la formule $V_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}(h(\mathbf{X}_T)|\mathcal{F}_t)$. Dans la suite, fixons une fonction payoff h et notons par $BS(t, x, \sigma)$ le prix à Moment t de la créance éventuelle

correspondante dans le modèle standard de Black-Scholes avec une volatilité constante σ , étant donné que le prix du log au moment t est x . Nous supposons que cette fonction de paiement $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et différentiable de façon continue, De plus on note avec $\vartheta_t = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds}$ la volatilité future moyenne de Heston à partir de l'instant t et avec \mathbf{D} l'opérateur de dérivé de Malliavin en ce qui concerne le mouvement brownien \mathbf{W} , La proposition suivante est en ligne avec Théorème 3 dans [13] et théorème 3 dans [13].

Théorème : Supposons que le modèle suivant :

$$\mathbf{X}_t = x + (r - \lambda k)t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s (\rho d\mathbf{W}_s + \sqrt{1 - \rho^2} d\mathbf{B}_s) + \mathbf{Z}_t, t \in [0, T].$$

soit valable avec $\sigma \in \mathbb{L}^{1,2}$. Alors il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t &= \mathbf{E}(BS(t, \mathbf{X}_t, v_t) | \mathcal{F}_t) + \rho/2 \mathbf{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \partial_x \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s, v_t) \wedge_s ds | \mathcal{F}_t \right) \\ &+ \mathbf{E} \left(\int_t^T \int_{\mathbb{R}} e^{-r(s-t)} (BS(s, \mathbf{X}_t + y, v_s) - BS(s, \mathbf{X}_t, v_t)) \nu(dy) ds | \mathcal{F}_t \right) \\ &- \lambda k \mathbf{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \partial_x BS(s, \mathbf{X}_s, v_s) ds | \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1. En supposant que $4\kappa\theta \geq 3\nu^2$, nous avons $\sigma \in \mathbb{D}^{1,2}$. et pour $r \leq t$

$$\begin{aligned} D_\tau D_r \sigma_t &= \frac{\nu^2}{2} \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\nu^2}{8} \right) \exp \left\{ \int_{\tau \vee r}^t \left[-\frac{\kappa}{2} - \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\nu^2}{8} \right) \frac{1}{\sigma_s^2} \right] ds \right\} \\ &\times \int_{\tau \vee r}^t \exp \left\{ \int_{\tau \vee r}^s \left[-\frac{\kappa}{2} - \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\nu^2}{8} \right) \frac{1}{\sigma_u^2} \right] \frac{1}{\sigma_s^3} ds \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

pour $\tau < t$ et 0 sinon. De plus si $2\kappa\theta > 3\nu^2$ on a $\sigma_t \in \mathbb{L}^{2,2}$ et :

$$\mathbb{E} | \mathbf{D}_\tau \mathbf{D}_r \sigma_t |^2 \leq \mathbf{C}(n, \sigma_0, T) \nu^2 (t - r) (\ln t - \ln r)$$

où $\mathbf{C}(n, \sigma_0, T)$ est une constante est une constante dépendant de n, σ_0 et T mais pas de t, τ où ν .

Lemme 3.1.2. Supposons que : $2\kappa\theta > \nu^2$, alors $\sigma_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ et pour $r < t$

$$\mathbf{D}_r \sigma_t = \frac{\nu}{2} \exp \left\{ \int_r^t \left[-\frac{\kappa}{2} - \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\nu^2}{8} \right) \frac{1}{\sigma_s^2} \right] ds \right\} \quad (3.4)$$

Proposition 3.1.1. Considérons le modèle de Heston et supposons que $2\kappa\theta \geq 3\nu^2$. pour $t \in [0, T]$ il existe une constante $\mathbf{C}(\sigma_t)$ qui ne dépend pas explicitement de t, v et ρ , tel que :

$$\left| \mathbf{V}_t - \mathbb{E} \left(BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) + \frac{\rho}{2} \mathbf{H}(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) \left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right| \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \nu^2 \rho^2 (T - t).$$

Proposition 3.1.2. *Considérons le modèle de Heston et supposons que $2\kappa\theta \geq v^2$. Alors :*

$$\mathbf{V}_t = \mathbb{E}(BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) | \mathcal{F}_t) + \rho/2 \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} H(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \wedge_s ds | \mathcal{F}_t \right). \quad (3.5)$$

$$H(s, x, \sigma) = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) BS(s, x, \sigma) \text{ avec } : \wedge_s = \left(\int_s^T \mathbf{D}_s \sigma_s^2 dr \right) \sigma_s.$$

Preuve Il découle de la proposition 3.1.2, que :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{V}_t - \mathbb{E} \left(BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) + \frac{\rho}{2} \mathbf{H}(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) \left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left(\frac{\rho}{2} \int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{H}(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \wedge_s ds - \frac{\rho}{2} \mathbf{H}(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) \left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right|. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le processus $\rho/2 e^{-rt} \mathbf{H}(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \left(\int_t^T \wedge_u du \right)$. Évidemment ce processus s'annule à $t = T$ et il découle de la proposition 3.1. comme dans la preuve de Proposition 7 dans [13] que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \frac{\rho}{2} \int_t^T e^{-r(s-t)} H(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \wedge_s ds - \frac{\rho}{2} H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) \left(\int_t^T \wedge_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\rho^2}{8} \int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \left(\int_s^T \wedge_r dr \right) \wedge_s ds \right. \\ &+ \left. \frac{\rho^2}{4} \int_t^T e^{-r(s-t)} \frac{\partial H}{\partial x}(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \left(\int_t^T D_s \wedge_r dr \right) \sigma_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

avec $G(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathbf{H}(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s)$ et A_1 resp A_2 le correspondant Summands ci-dessus. Soit \mathcal{G}_t la σ - Algèbre générée par le mouvement brownien (\mathbf{W}_t) qui entraîne la volatilité de Heston Maintenant, la preuve sera décomposée en deux étapes ;

– **Etape 1 :** Etudions le terme A_1 . D'après le lemme 2 de [?], nous concluons que :

$$\left| \mathbb{E} \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) BS(s, \mathbf{X}_s, \vartheta_s) \middle| \mathcal{G}_t \right) \right| \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \rho \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{\frac{-1}{2}(n+1)} \quad (3.6)$$

Ici $\mathbf{C}(\sigma_t)$ est une constante dont la valeur dépend du courant σ_t . Le fait que $\mathbf{D}_r \sigma_\theta^2 = 2\sigma_\theta \mathbf{D}_r \sigma_\theta$ et l'inégalité de Hölder nous permettent d'écrire :

$$\int_t^T \left(\int_s^T \wedge_r dr \right) \wedge_s ds \leq \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^2 \left(\int_t^T \left(\int_r^T (\mathbf{D}_r \sigma_\theta)^2 d\theta \right) dr \right) \quad (3.7)$$

Alors, 3.6 et 3.7 donnent :

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \mathbf{C} \frac{\rho^2}{8} \mathbb{E} \left[\left(\left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{-5/2} + \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{-2} + \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{-3/2} \right) \int_t^T \left(\int_s^T \wedge_r dr \right) \wedge_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\leq \mathbf{C} \rho^2 / 8 \mathbb{E} \left[\left(1 + \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{-1/2} + \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{1/2} \right) \left(\int_t^T \left(\int_r^T (\mathbf{D}_r \sigma_\theta)^2 dr \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

et maintenant, en utilisant le fait que $(\mathbf{D}_r \sigma_\theta)^2$ est limité par ν^2 il s'ensuit que :

$$A_1 \leq \mathbf{C} \nu^2 \rho^2 (T-t)^2 \mathbb{E} \left[\left(1 + \left(\int_t^T \sigma_s^2 \right)^{-1/2} + \left(\int_t^T \sigma_s^2 \right)^{1/2} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Le fait que $\mathbb{E}(\int_t^T \sigma_s^2 ds)^2$ est fini et Lemme 5.1, ainsi que $T-t < 1$ maintenant implique que $A_1 \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \nu^2 \rho^2 (T-t)$.

- **Etape 2 :** Etudions le terme A_2 . En utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(\int_s^T \mathbf{D}_s \wedge_r dr \right) \sigma_s ds &\leq \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right) \int_t^T \int_r^T (\mathbf{D}_r \sigma_\alpha)^2 d\alpha dr \\ &+ \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{3/2} \left(\int_t^T \left(\int_s^T \left(\int_r^T (\mathbf{D}_s \mathbf{D}_r \sigma_\alpha)^2 d\alpha \right) dr \right) ds \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Alors, en utilisant 3.6 et 3.8 de la même manière qu'à l'étape 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \frac{\rho^2}{2} \mathbb{E} \left[\left(1 + \left(\int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{1/2} \right) \left(\int_t^T \int_r^T (\mathbf{D}_r \sigma_\alpha)^2 d\alpha dr \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &+ \mathbf{C}(\sigma_t) \frac{\rho^2}{4} \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\int_s^T \left(\int_r^T (\mathbf{D}_s \mathbf{D}_r \sigma_\alpha)^2 d\alpha \right) dr \right) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Maintenant, le lemme 3.4, le lemme 3.3. et notre hypothèse $T-t < 1$ nous permet de déduire que $A_2 \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \nu^2 \rho^2 (T-t)$.

Lemme 3.1.3. Soit $BS(t, x, \sigma)$ le prix Black-Scholes dans le prix du log-stock x Alors, il existe une constante telle que, pour tous les temps jusqu'à la maturité, $T-t < 1$ on a :

$$\left| \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 BS(t, x, \sigma) \right| \leq \mathbf{C} \sigma^{-2} (T-t)^{-3/2}$$

Preuve : En appliquant la règle de la chaîne du calcul différentiel avec $\mathbf{S} = e^x$, le bien connu les formules pour les grecs delta et vega peuvent être utilisées pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial x} BS(t, x, \sigma) = \mathbf{N}(d_1) e^x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} BS(t, x, \sigma) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{N}(d_1)) + \mathbf{N}(d_1) \right) e^x = \left(\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \mathbf{N}(d_1) \right) e^x.$$

où d_1 désigne le paramètre classique de Black-Scholes. Donc :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) BS(t, x, \sigma) = \frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}} e^x$$

une différenciation plus poussée montre maintenant que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 BS(t, x, \sigma) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}} e^x \right) \\ &= \left(\frac{N'''(d_1)}{\sigma^2(T-t)^{3/2}} + \frac{N''(d_1)}{\sigma(T-t)} \right) e^x. \end{aligned}$$

Le résultat suit alors, puisque tous les dérivés de la distribution normale standard la fonction $\mathbf{N}(x)$ est bornée et de plus $(T-t)^{3/2}$ domine $(T-t)$ pour $T-t < 1$.

Remarque : Illustrons brièvement le résultat de la proposition 5.2. devrait être interprété dans un cadre dynamique Comme on peut évidemment le voir, l'approximation s'améliore avec un taux quadratique, à mesure que le facteur ν diminue. La situation est similaire pour ρ . Comme la constante $\mathbf{C}(\sigma_t)$ dépend cependant implicitement de t à σ_t , à mesure que le temps jusqu'à la maturité diminue, notre approximation s'améliore en général. En fait, une variation importante de la volatilité au cours d'une journée de négociation peut entraîner au résultat que notre rapprochement demain est en fait pire qu'actuellement. Ce L'effet est cependant entièrement causé par la volatilité aléatoire. Mettre de côté et fixer artificiellement la volatilité dans le temps, alors la précision de l'approximation augmente le moins linéairement avec le temps décroissant jusqu'à la maturité. Considérons maintenant l'approximation suivante pour la corrélation effect :

$$\frac{\rho}{2} \mathbf{H}(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \mathbb{E} \left(\int_t^T \wedge_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

avec $\vartheta_t^* = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \mathbb{E}(\sigma_s^2 | \mathcal{F}_t) ds}$ et à titre d'approximation du prix de l'option.

$BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) + \frac{\sigma}{2} H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \mathbb{E} \left(\left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right)$ Nous aurons besoin plus tard du lemme suivant, lié à l'équation 3.6, mais pour le cas spécifique que considéré ici donne une approximation légèrement meilleure.

Proposition 3.1.3. *Supposons que $2\kappa\theta \geq 3\nu^2$ et notons :*

$$\vartheta_t^* = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \mathbb{E}(\sigma_s^2 | \mathcal{F}_t) ds.}$$

pour $t \in [0, T]$. Il existe alors une constante $\mathbf{C}(\sigma_t)$ qui ne dépend pas explicitement de t et de ν tels que :

$$\left| \mathbf{V}_t - BS(t, \mathbf{X}_t; \vartheta_t^*) \frac{\rho}{2} H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \mathbb{E} \left(\left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right| \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \nu^2 (T-t)$$

Preuve : Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{V}_t - BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) - \frac{\rho}{2} H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \mathbb{E} \left(\left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right| \leq \left| \mathbf{V}_t - \mathbb{E} \left((t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\rho}{2} H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \left(\int_t^T \left(\wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right) \right| \\ & + \left| \mathbb{E}(BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) | \mathcal{F}_t) - BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \right| \\ & + \frac{\rho}{2} \left| \mathbb{E} \left((H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) - H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*)) \left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \right| \\ & = B_1 + B_2 + B_3. \end{aligned}$$

avec B_1 , B_2 et B_3 les sommands correspondants d'en haut. Nous concluons de la dernière proposition que $B_1 \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \nu^2 \rho^2 (T-t)$ et nous restons avec les expressions B_2 et B_3 . Étudions l'expression B_2 d'abord :

$$\begin{aligned} \vartheta_t^* &= \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_t - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)}, \\ \vartheta_t &= \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_t - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)} \end{aligned}$$

où $\mathbf{M}_t = \int_0^T \mathbb{E}(\sigma_s^2 | \mathcal{F}_t) ds$. Il n'est pas difficile de vérifier les points suivants :

$$\mathbf{M}_t = \int_t^T [\sigma_t^2 e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)})] ds + \int_0^t \sigma_s^2 ds \quad (3.9)$$

$$d\mathbf{M}_t = \int_t^T [\kappa \sigma_t^2 e^{-\kappa(s-t)} dt + e^{-\kappa(s-t)} d\sigma_t^2 - \kappa \theta e^{-\kappa(s-t)}] ds = \nu \sigma_t \left(\int_t^T e^{-\kappa(s-t)} ds \right) d\mathbf{W}_t$$

Utilisation de la formule classique Itô et la relation entre les grecs :

$$\frac{\partial BS}{\partial \sigma}(s, x, \sigma) \frac{1}{\sigma(T-s)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) BS(s, x, \sigma) \quad (3.10)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
B_2 &= \mathbb{E}(BS(t, \mathbf{X}_t; \vartheta_t) | \mathcal{F}_t) - BS(t, \mathbf{X}_t; \vartheta_t^*) \\
&= \mathbb{E}\left(BS\left(t, \mathbf{X}_t; \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_T - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&\quad - \mathbb{E}\left(BS\left(t, \mathbf{X}_t; \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_t - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= \nu^2 \mathbb{E}\left(\int_t^T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 BS\left(t, \mathbf{X}_t, \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_u - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^2 \sigma_u^2 du \middle| \mathcal{F}_t \right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant conclure du lemme 5.2. que :

$$\begin{aligned}
B_2 &\leq \nu^2 \mathbb{E}\left(\int_t^T \mathbf{C} \left[\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_u - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \right]^{-1} \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^2 \sigma_u^2 du \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= \mathbf{C} \nu^2 (T-t) \mathbb{E}\left(\int_t^T \left[\int_t^T \mathbb{E}(\sigma_s^2 | \mathcal{F}_u) ds \right]^{-1} \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^2 \sigma_u^2 du \middle| \mathcal{F}_t \right).
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que $t < u$, la définition de \mathbf{M}_t et l'équation 3.9 nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left[\int_t^T \mathbb{E}(\sigma_s^2 | \mathcal{F}_u) ds \right]^{-1} &\leq \left[\int_u^T \mathbb{E}(\sigma_s^2 | \mathcal{F}_u) ds \right]^{-1} \\
&= \left[\int_u^T (\sigma_u^2 e^{-\kappa(s-u)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-u)})) \right]^{-1} \\
&\leq \sigma_u^{-2} \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^{-1}
\end{aligned}$$

avec $\theta(1 - e^{-\kappa(s-u)}) \geq 0$ pour tout $s \geq u$. Back-substitution donne :

$$\begin{aligned}
B_2 &\leq \mathbf{C} \nu^2 (T-t) \mathbb{E}\left(\int_t^T \sigma_u^{-2} \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^{-1} \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^2 \sigma_u^2 du \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&\leq \mathbf{C} \nu^2 (T-t) \int_t^T \int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds du \leq \frac{\mathbf{C}}{\kappa} \nu^2 (T-t)^2.
\end{aligned}$$

Ce dernier est majoré par $\frac{\mathbf{C}}{\kappa} (T-t)$ pour tout $T-t < 1$. Considérons enfin le terme B_3 . Les

propositions 3.1 et [13] impliquent que :

$$\begin{aligned}
B_3 &= \mathbb{E} \left((H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) - H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*)) \left(\int_t^T \wedge_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right) \right) \\
&= \nu \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) H \left(t, \mathbf{X}_t, \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_u - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\mathbf{D}_u \int_t^T \wedge_s ds \right) \sigma_u \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right) du \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&+ \nu \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 H \left(t, \mathbf{X}_t, \sqrt{\frac{1}{T-t} \left(\mathbf{M}_u - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_t^T \wedge_s ds \right) \sigma_u \left(\int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds \right)^2 du \middle| \mathcal{F}_t \right].
\end{aligned}$$

Maintenant, des arguments similaires à ceux utilisés pour B_2 nous donnent que $B_3 \leq \mathbf{C}(\sigma_t) \nu^2 (T-t)$. Rendons maintenant les choses plus transparentes en évaluant l'expression :

$$\frac{1}{2} H(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*) \mathbb{E} \left(\int_t^T \wedge_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

qui détermine l'effet de corrélation sur les prix des options dans le modèle de Heston. Nous devons évaluer ϑ_t^* et $\mathbb{E} \left(\int_t^T \wedge_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right)$. Comme le cadre est Markovien, on peut supposer sans perte de généralité que $t = 0$. Dans ce cas, nous devons évaluer les quantités $\vartheta_0^* = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^T \mathbb{E}(\sigma_s^2) ds}$ et $\mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{E}(\wedge_s ds) \right)$. Commençons par le calcul de ϑ_0^* . Il découle de $\sigma_s = \sqrt{v_t}$ et de la dynamique de (v_t) en prenant les espérances et en résolvant l'EDO ordinaire correspondant pour l'espérance.

$$\mathbb{E}(\sigma_s^2) = \mathbb{E}(v_s) = \theta + (v_0 - \theta) e^{-\kappa s}.$$

Il en résulte que :

$$(\vartheta_0^*)^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(\sigma_s^2) ds = \theta + \frac{v_0}{T} \int_0^T e^{-\kappa s} ds = \theta + \frac{(v_0 - \theta)(1 - e^{-\kappa T})}{\kappa T}.$$

Considérons maintenant l'expression $\mathbb{E} \left(\int_0^T \wedge_s ds \right)$. Par définition de \wedge_s nous avons que :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \wedge_s ds \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(\int_s^T \mathbb{E}(\mathbf{D}_s \sigma_r^2 | \mathcal{F}_s) dr \right) \sigma_s ds \right).$$

Lemme 3.1.4. *Supposons que $2\kappa\theta \geq \nu^2$ donc $\mathbb{E}(\mathbf{D}_s \sigma_r^2 | \mathcal{F}_s) = \nu \exp(-\kappa(r-s)) \sqrt{v_s}$.*

Preuve : Notons que le corollaire (4.2)[13] et la formule Clark-Ocone qui :

$$v_r = \sigma_r^2 = \mathbb{E}(\sigma_r^2) + \int_0^r \mathbb{E}(\mathbf{D}_s \sigma_r^2 | \mathcal{F}_s) d\mathbf{W}_s$$

D'autre part, considérons le processus défini par l'équation intégrale stochastique :

$\tilde{v}_r = \theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa r} + \nu \int_0^r \exp(-\kappa(r-s))\sqrt{\tilde{v}_s}d\mathbf{W}_s$. Prendre des différentiels de \tilde{v}_r conduit à :

$$\begin{aligned} d\tilde{v}_r &= -\kappa \left[(v_0 - \theta)e^{-\kappa r} + \nu \int_0^r \exp(-\kappa(r-s))\sqrt{\tilde{v}_s}d\mathbf{W}_s \right] dr + \nu\sqrt{\tilde{v}_r}d\mathbf{W}_r \\ &= \kappa(\theta - \tilde{v}_r) + \nu\sqrt{\tilde{v}_r}d\mathbf{W}_r \end{aligned}$$

On voit donc que (\tilde{v}_r) a le même différentiel que (v_r) et que puisque $\mathbb{E}(\tilde{v}_r) = \mathbf{E}(v_r)$ nous avons $\tilde{v}_r = v_r$. Cela mène à :

$\mathbb{E}(\sigma_r^2) + \int_0^t \mathbb{E}(\mathbf{D}_s \sigma_r^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(v_r) + \nu \int_0^r \exp(-\kappa(r-s))\sqrt{v_s}d\mathbf{W}_s$ et puisque $\mathbf{E}(\sigma_r^2) = \mathbb{E}_{(v_r)}$, découle de l'unicité de cette représentation , En appliquant le lemme 5.2 on obtient maintenant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T \wedge_s ds \right) &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(\int_s^T \mathbb{E}(\mathbf{D}_s \sigma_r^2 | \mathcal{F}_s) dr \right) \sigma_s ds \right) \\ &= \nu \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(\int_s^T \exp(-\kappa(r-s)) dr \right) \sigma_s^2 ds \right) = \nu \int_0^T \left(\int_s^T \exp(-\kappa(r-s)) dr \right) \mathbb{E}(\sigma_s^2) ds \\ &= \nu \int_0^T \left(\int_s^T \exp(-\kappa(r-s)) dr \right) (\theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa s}) ds \end{aligned}$$

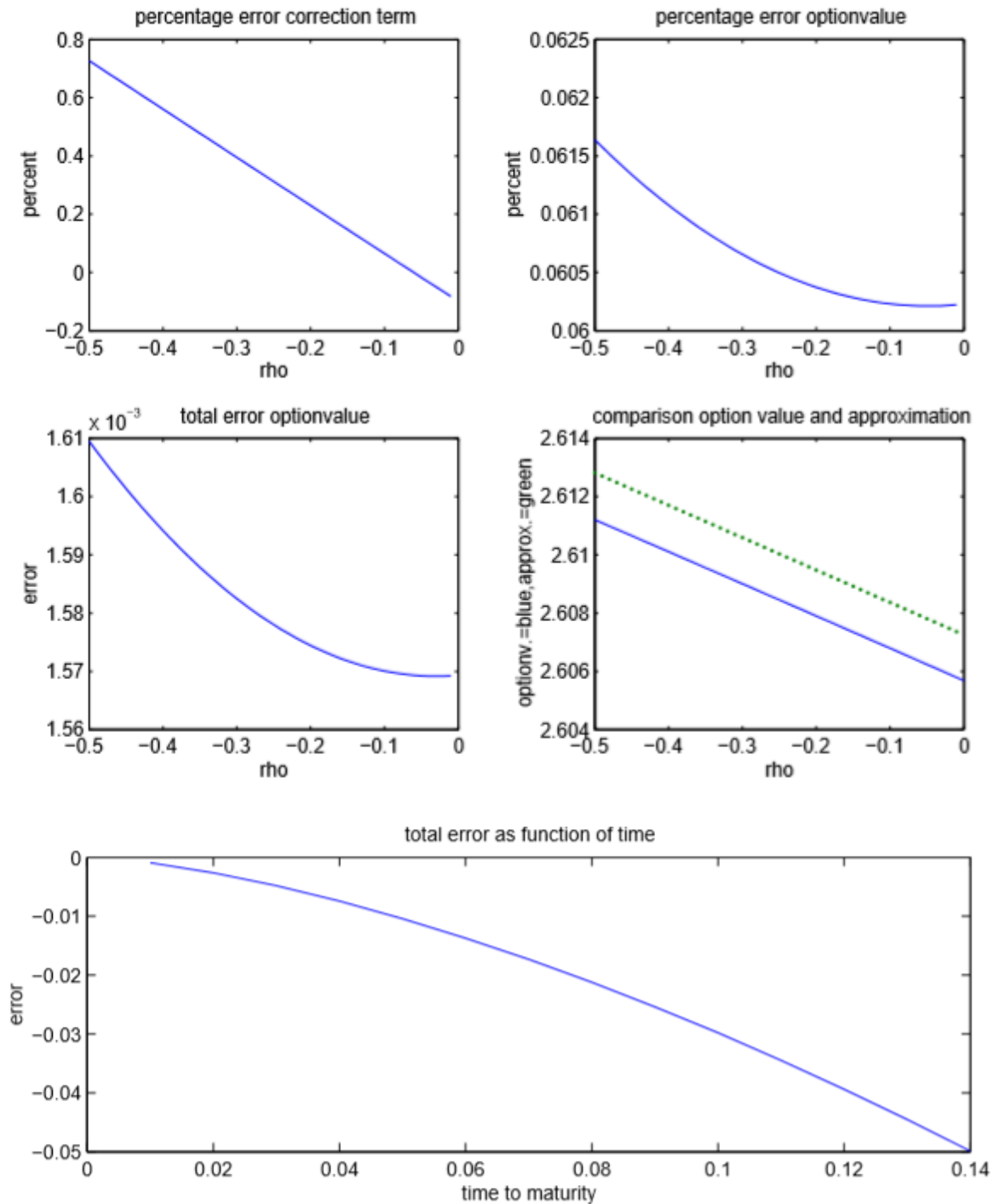
Ces intégrales peuvent être facilement évaluées et nous obtenons :

$\mathbb{E} \left(\int_0^T \wedge_s ds \right) = \frac{\nu}{\kappa^2} \cdot [\theta(\kappa-2) + v_0 + e^{-\kappa T}(\kappa T(\theta - v_0) + 2\theta - v_0)]$ Avec ces expressions explicites pour v_0^* et $\mathbb{E}(\int_0^T \wedge_s ds)$ l'expression (14) qui par la discussion précédente, se rapproche de l'effet de la corrélation sur les prix d'action devient semi-explicite, en fonction de la formule d'évaluation d'option correspondante dans le Modèle de Black-Scholes. Si cette valeur n'admet pas une expression explicite, on peut utiliser la méthode de Monte Carlo pour le calculer. Cependant, pour une option d'achat européenne standard nous dérivons une expression totalement explicite, où H est donné par :

$$\frac{1}{2}H(0, x, \sigma) = \frac{e^x}{2\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp \left(-\frac{d_1^2}{2} \right) \left(1 - \frac{d_1}{\sigma\sqrt{T}} \right),$$

avec $d_1 = \frac{x - \ln K + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$. L'effet de corrélation sur les prix des options à l'aide de notre approximation peut alors être obtenu sous forme explicite en substituant les expressions ci-dessus. Le cas d'un appel européen est important, pas comme une application particulière de notre méthode dans la pratique, mais afin de tester sa qualité, par rapport à la référence [13]. Les figures suivantes illustrent les bonté de notre approximation.

Commentaire : Les paramètres du modèle ont été choisis comme suit : $\kappa = 8$, $\theta = 0.04$, $\nu = 0.1$, $r = 0.0953$, $\sigma_0^2 = 0.0225$ $\mathbf{S}_0 = 100$, $T = 0.1$ et $K = 100$. La figure (3.1) montre que

FIGURE 3.1 – Erreur d'env. de la prop 3.1.3 en fonction de $T - t$. avec ρ

notre approximation est assez précise La figure dans le coin inférieur gauche indique que la plus grande partie de l'erreur est générée en remplaçant $\mathbb{E}(BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t) | \mathcal{F}_t)$ dans la proposition (5.1) [13] par $BS(t, \mathbf{X}_t, \vartheta_t^*)$ dans la proposition 3.1.3, tandis que l'erreur contribuait par notre approximation de la corrélation σ et diminue à zéro lorsque la corrélation ρ diminue à zéro. La figure (3.2) montre la dépendance de l'exactitude de notre approximation sur le délai de

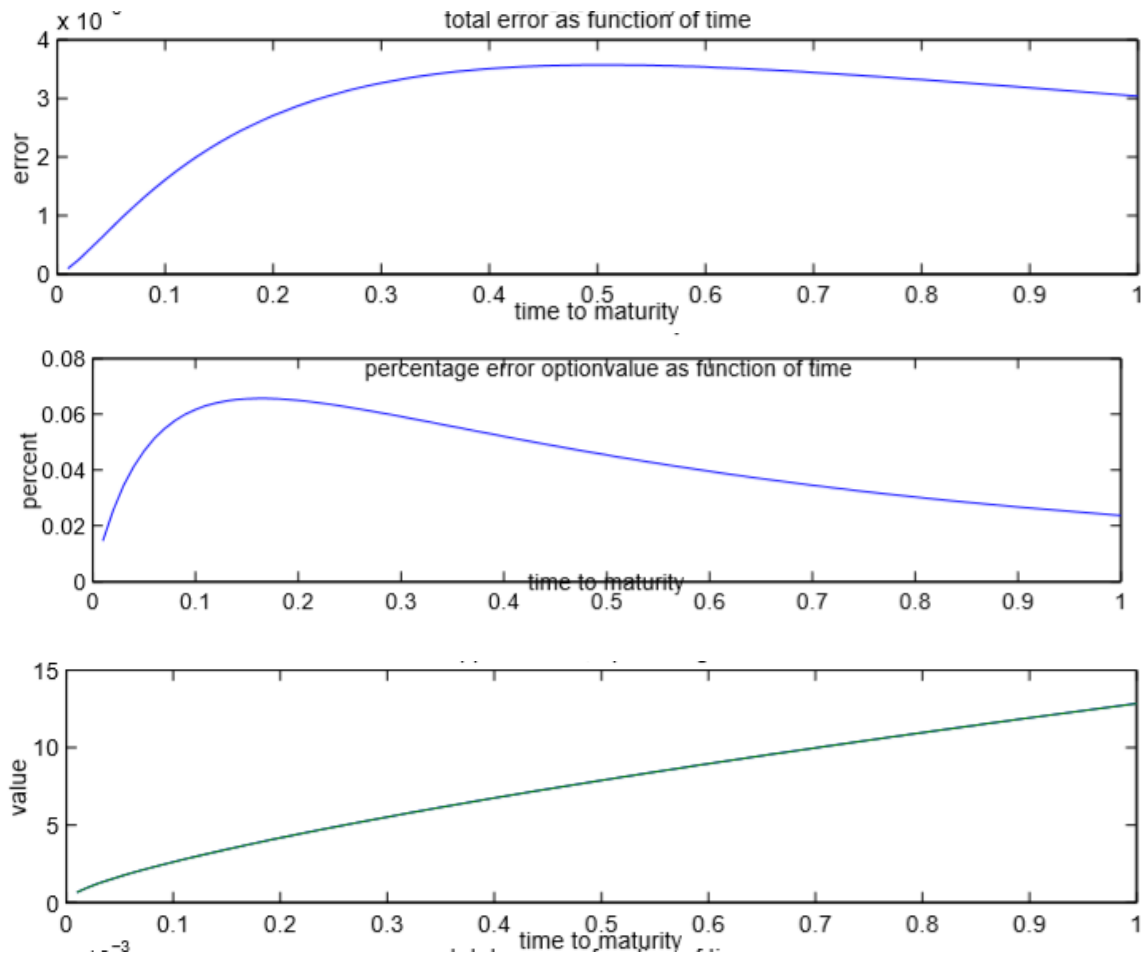


FIGURE 3.2 – :Erreur d'env.de la prop 3.1.3 en fonction de $T - t$.

maturité $T - t$. Le deuxième graphique en particulier montre une relation linéaire pour les petits délais d'échéance, telle que prédite par Proposition 3.1.3. La figure (3.3) montre l'erreur totale et le pourcentage d'erreur en fonction du temps jusqu'à maturité, lorsque les paramètres sont passés à $\kappa = 2$, $\theta = 0.015$, $\nu = 0.2$, ce qui viole l'hypothèse des coefficients forts $2\kappa\theta \geq 3\nu^2$ dans la proposition 3.1.3. En comparant avec la figure 2, nous constatons que les erreurs absolues et en pourcentage sont nettement plus élevées et ne semblent pas disparaître dans l'intervalle de temps observé.

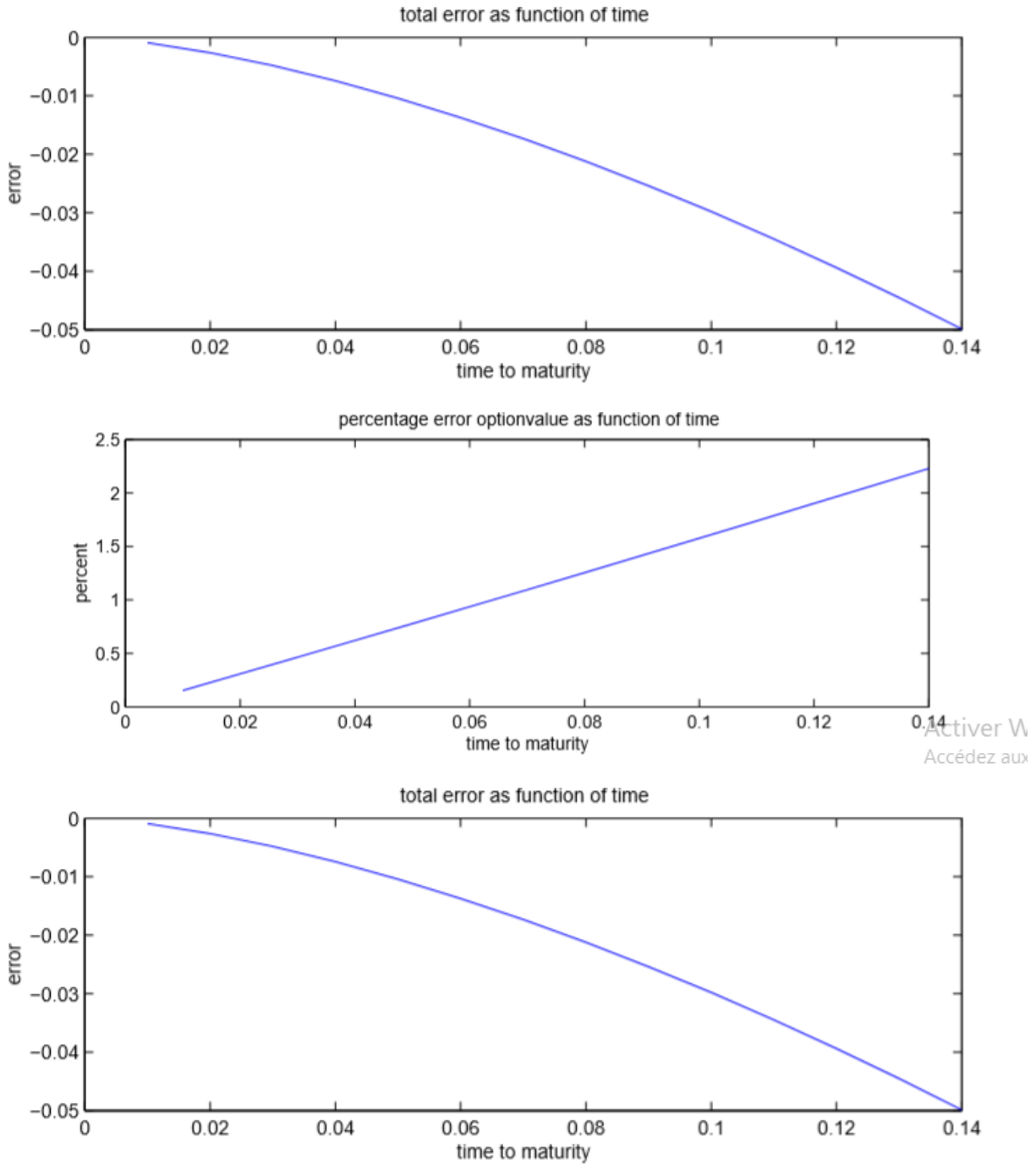


FIGURE 3.3 – Erreur d'env.de la prop 3.1.3 en fonction de $T - t$. avec $2\kappa\theta < 3\nu^2$

Conclusion

Le sujet de la volatilité stochastique, notamment la volatilité stochastique fractionnaire est devenu un de sujets qui suscitent enlever plus de recherches dans le domaine de finance mathématique.

Dans ce mémoire, on a fait une synthèse sur tous les travaux de recherche effectués sur la volatilité stochastique fractionnaire ([16]), ([12]), ([2]), ([5]) et([9]). et on présenté avec détails un exemple d'application sur le modèle de Heston à partir du papier de Elisa ALos et al. [13], les résultats nous ont garantit l'applicabilité des calculs de Malliavin pour les modèles de la volatilité stochastique de Heston. On a dérivé des conditions sur les paramètres pour assurer l'existence de la dérivée seconde de la volatilité de Heston, cela nous a permis d'appliquer les résultats récents dans le but de présenter les formules de l'option approximative du prix dans le contexte du modèle de Heston.

Une question importante dans un travail futur pourrait considérer le même modèle de Heston, mais dans un cadre un peu plus compliqué, c'est ce qu'on a étudié dans le deuxième chapitre concernant la volatilité stochastique fractionnaire.

Bibliographie

- [1] A. Dassios, *Asymptotic expressions for approximations to stochastic variance models mimeo, London School of Economics*,(1995)
- [2] A.C. Harvey and N.Shephard,*Estimation of Testing of Stochastic Variance Models, STI-CERD Econometrics, Discussion paper, EM93/268, London School of Economics, (1993)*
- [3] B.B Mandelbrot and J. W. Van Ness. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM review, 10(4), 422-437,(1968)*
- [4] B.Cornell *Using the Options Pricing Model to Measure the Uncertainty Producing Effect of Major announcements, Financial Management 7, 54-59, (1980).*
- [5] D.B. Nelson, *ARCH Models as Dikusion Approximations, Journal of Econometrics ,45,7-39, (1990)*
- [6] D.B.Nelson, *Conditional Heteroskedasticity in Asset returns A New Approach, Econometrica,59, 347-370, (1991) 6(2), 327-343, (1993)*
- [7] E. Valkeila and Novikov *On some maximal inequalities for fractional Brownian motions. Statistics-Probability Letters, 44(1), 47-54,(1999)*
- [8] E.Ruiz (1994),*Quasi-maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models, Journal of Econometrics ,63, 289-306*
- [9] E. ALOS,*epartment of Economics, University Pompeu Fabra Barcelona CHRISTIAN-OLIVER EWALD, School of Economics and Finance, University of St.Andrews Preprints, 14 May (2007)*
- [10] E. Alos *An extension of the Hull and White formula with applications to option pricing approximation. Finance and Stochastics, volume 10(3), pg,353-365 (2006)*
- [11] E. Alos Leon, J.A Vives, J. *On the shorttime behavior of the implied volatility for jump-diffusion models with stochastic volatility. UPF working paper,(2006)*

-
- [12] E.F Fama, *The Behavior of Stock Market Prices*, *Journal of Business*, **38**, 34-105, (1970). R. Cont, J. da Fonseca, *Dynamics of Implied Volatility Surface*, *Quantitative Finance*, Volume **2**, Pages 45-60, (2002)
- [13] E. ALOS, *Malliavin differentiability of the Heston volatility and applications to option pricing*, University of St. Andrews Economics Preprints (14 May 2007)
- [14] F.Black(1976) *Studies of Stock Market Volatility Changes. Proceedings of the American Statistical Association. Business and Economic Statistics Section*, 177-181
- [15] F. and M.Black Scholes .*The pricing of options and corporate liabilities. The journal of political economy* **81(3)**, 637-654,(1973)
- [16] F.COMTE and E. RENAULT :*Long Memory Continuous Time Models*, *J. Econometrics*, **73**, 101-149, (1996).
- [17] J.Hull and A.White).*The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. Journal of Finance*, **42(2)**, 281-30,(1987,June)
- [18] L.Bachelier, *Théorie de la spéculation*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, *On the Random Character of Stock Market Prices*(Paul H. Cootner ed)*The MIT Press, Cambridge, Mass.* **17**, 21-86 (1964 -1900)
- [19] S.Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Rev. Financ. Stud*
- [20] S.L, Heston *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options ; Review of Financial Studies*, Vol.6, Issue 2 (1993)
- [21] R.F Engle, *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom In ation*, *Econometrica* **50**,987-1007,(1982)
- [22] P. Cheridito and M. Maejima. *Fractional OrnsteinUhlenbeck processes. Electron. J. Probab*, **8(3)**, 14, (2003)
- [23] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, Mathieu Rosenbaum. *Volatility is rough* October 13, 2014.arxiv :1410.3394v1[q-fin.ST]