République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Existence et Unicité des Solutions pour des Équations Différentielles à Retard fini dans des Éspaces de Banach

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES Spécialité : Analyse Mathématique

par

Ahmed **K**oulal [1]

Sous la direction de

Dr.O . Bennihi

Soutenu le 21/06/2018 devant le jury composé de

Dr D. Djebbouri	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Président
Dr O. Bennihi	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Encadreur
Pr.G Djellouli	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Examinateur
Maa B. Saadli	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Examinateur

1. e-mail : ahmedkoulal1993@gmail.com

Dédicaces

Remerciements et louanges à Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail. Prière et Salut soient sur notre Prophète Mohammed, sur sa famille et sur ses fidèles compagnons. Je dédie ce modeste travail à :

–Ma douce mère en reconnaissance des sacrices qu'elle a fait pour nous tracer un chemin dans cette vie. Que vie nous donne temps pour la remercier ! C'est grâce à son amour infini, sa patience, son inestimable aide et ses conseils que ma vie s'est construite !

–Mon formidable frère et guide Mohamed qui m'a ouvert les yeux sur la science et l'histoire et m'a poussé dans le domaine de recherches et du travail et qui n'a pas cessé de m'encourager tout au long de mon parcours.

–Je tiens également à mentionner et à témoigner ma reconnaissance à tous mes amis membres du laboratoire de Mathématiques et particulièrement mes camarades d'études pour leurs encouragements et leur gentillesse envers moi.

–Mes vifs remerciements vont également à tous mes amis intimes pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné et les encouragements qu'ils m'ont effets. Les moments de travail que nous avons passés ensemble sont inoubliables

–Pour terminer, j'adresse mon grand amour à mes chères parents, mes frères et ma chère soeur. C'est grâce à leurs amours et leurs sacrices que ce mémoire a été mené à bout. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit sur eux.

Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près dans la réalisation de ce travail. J'exprime ici ma profonde reconnaissance à l'égard de mon encadreur Bennihi Omar qui a su orienter mon travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseils et encouragements qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer sont inestimables. Sa patience et sa compréhension m'ont permis d'avancer et de terminer ce travail. Que le pr. Djebbouri trouve ici l'expression de mes remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, je le remercie vivement d'avoir accepter d'être le président du jury de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

les équations différentielles à retard interviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est une fonction des temps passés, [1], on peut les rencontrer dans plusieurs domaines d'application, notamment en èconomie, en physique, en médecine ,en biologie en écologie... En effet, dans certains phénomènes, on c'est apereçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrir l'évolution sur un intervalle de temps donnée. Des retard surgissent à cauase du temps nécessaire pour que le systéme réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit ètre atteint avant que le systéme ne soit activé. La signification du retard dans tel ou tel modèle peut être différente : Durée de gestion, période d'incubation d'une maladie contagieuse, temps d'accumulation, temps néécessaire pour la maturation de cellule ou la transformation d'un type de cellule en un autre... Les problèmes démographiques ont été les premiers grands incitateurs à l'introduction des retards dans les modèles mathématiques. citons quelques auteurs qui ont étudié ce type d'équations. [1],[5] [7]
Les équations différentielles à retard ou les équations d'évolution fonctionnelles modélisaient pendant plusieurs années beaucoup de phénomènes scientifiques dont certaines applications de la biologie, la physique, la mécanique et les sciences des matériaux, etc... voir les exemples cités dans l'article [5] et dans les livres de Hale et Verduyn Lunel [17], Kolmanovskii et Myshkis [20]. L'existence et l'unicité des solutions faibles, fortes et classiques des équations semi-linéaires fonctionnelles ont été largement étudié par de nombreux auteurs en utilisant la théorie des semi groupes, l'argument du point fixe, la théorie du degré topologique et les mesures de non compacité ; voir les livres d'Ahmed [3], de Engel et Nagel [16], de Pazy [19] et de [21] .

Chapitre 1

Préliminaires

Notations, Définitions et Théorèmes

Considérons $J := [0, +\infty[$ et $H := [-r, 0]$ pour $r > 0$.
Soit E l'espace de Banach des réels muni de la norme(".").
SoientC(H, E) l'espace de Banach des fonctions continues muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup|y(t)| \qquad t \in H.$$

etB(E) l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans E muni de la norme

$$\|N\|_{B(E)} = \sup|N(y)| \qquad |y| = 1.$$

une fonction mesurable $y : J \longrightarrow E$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si $|y|$ est
intégrable au sens de Lebesgue. Pour plus de détails sur les propriétés de Bochner-intégrabilité voir Yosida [22] .
Soit $L^1(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \longrightarrow E$ qui sont intégrables au sens de Bochner, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^\infty |y(t)|$$

Pour toute fonction continuey défnie sur $[-r, \infty[$ et pour tout $t \in J$, notons par y_t l'élément de $C(H; E)$ déFni par :

$$y_t(\theta) = y(t + \theta) \text{pour} \theta \in H.$$

Ici $y_t(\cdot)$ représente l'historique de l'état à partir du temps $t - r$ jusqu'au temps présent t.

Définitions et Théorèmes

Dans cette sous-section on présentera quelques définitions et théorèmes important pour la compréhension des chapitres qui suivent.

Déftnition 1.2.1. *(Èquation différentielle)*
En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre dune équation différentielle correspond au degré
maximal de dérivation, auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Déftnition 1.2.2. *(Fonction de Classe C^1)*
soit $a \in \mathbf{R}^+$ *et* $\phi : [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}^+$, *une application est de classe* C^1 *si elle est continue et dérivable.*

Déftnition 1.2.3. *(Fonction de Classe C^∞)*
soit $a \in \mathbf{R}^+$ *et* $\phi : [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}^+$, *une application est de classe* C^∞
si elle est continue et infiniment dérivable.

Déftnition 1.2.4. *(équation Différentielle Autonome)*
On appelle équation différentielle autonome, une équation de la forme

$$y^j = g(y)$$

c-à-d que la variable x *n'intervient pas dans l'équation.*

Quelques théorèmes de points fixes

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet -sous certaines conditions- un point fixe. Les théorèmes de points fixes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles. voici à titre d'exemples, quelque théorèmes courament utilisés :

1. Le théorème de point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.
2. Le théorème de point fixe de Brouwer n'est pas constructif, il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne dans elle-même, sans apporter de méthode egénérale pour le trouver.
3. Le théorème de point fixe de Lefschetz est très important en topologie algébrique, car il permet d'une certaine manière, de trouver un moyen de compter les points fixes.
4. Le théorème de Knaster-Tarski est un théorème de point fixe pour une application monotone d'un treillis complet dans lui-même ; il figure parmi les exceptions qui, contrairement aux précédents, ne concerne pas une fonction continue; en revanche, il est très intéressant dans les manipulations de structures d'ordre.

Citons maintenant certains des premiers théorèmes de points fixes. Commençons par donner la définition dé'une application contractante.

Déftnition 1.3.1. *(application contactante)*
Une application P *sur un espace métrique* (X, ρ)
est dite contractante s'il existe $0 < r < 1$ *tel que* $\rho(P\,x, P\,y) \leq \rho(x, y)$.

Théorème 1.3.1. *(Principe de l'application contractante de Banach) Soit* P *une application contractante sur un espace métrique complet* X, *alors il existe un unique point fixe* x *dans* X.

Théorème 1.3.2. *(Théorème de point fixe de brouwer)[10]*
Toute application continue de la boule unité fermée de R^n
dans elle même admet un point fixe.

Théorème 1.3.3. *(Premier théorème de point fixe de Schauder)*
Soit X *un sous ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach* Y *et soit* $P : X \longrightarrow x$ *un opérateur continu. Alors* P *a un point fixe dans* X.

Théorème 1.3.4. *(Second théorème de point fixe de Schauder)*
Soit X *un sous ensemble non vide, convexe et borné d'un espace de Banach* Y *, et soit* $P : X \longrightarrow x$ *un opérateur compact. Alors* P *admet un point fixe dans* X.

Theorem 1.1.?? *[?] soient* E *un espace de banach ,*F *et* G *deux opérateurs de* E *dans* E *satisfait :*

- G *est une contraction.*
- F *est complètement continue.*

  alors : ou bien l'equation $y = F(y) + G(y)$ *a une solution .*
  ou bien l'ensemble

$$H = u \in E : \lambda G(\frac{u}{\lambda}) + \lambda F(u) = u, \lambda \in (0, 1)$$

n'est pas bornné.

Theorem 1.2. *soient* $[a, b]$ *un intervalle ordonnée d'un espace ordonnée de banach* E *et* $P : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *une application croissante . ,* (x_n) *suite monotone dans* $[a, b]$ *alors la suite de la P-iteration de* a *converge vers* x_* *de* P *et la suite de la P-iteration de* b *converge vers* x^* *de* P *. de plus*

$$x_* = \min y \in [a,b] : y \geq P_y \qquad x^* = \max y \in [a,b] : y \leq P_y.$$

comme conséquence ,Dhage et Henderson [13] ont prouvé le thèoreme suivante qui est utilisé pour prouver l'existence de solution extrémales.

Theorem 1.3. *[13] soient* $[a, b]$ *un intervalle ordonnée d'un espace ordonnée de banach*E *et soit* $B_1, B_2 : [a, b] \longrightarrow E$ *deux fonction satisfaisant :*

- B_1 *est une contraction*
- B_2 *est comlètement continu.*
- B_1 *et* B_2 *sont monotones strictement croissantes.*
- $B_1(x) + B_2(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b].$

si le cone dans E *est normale , alors l'équation* $x = B_1(x) + B_2(x)$ *a un plus petit point fixe* x_* *et un plus grande point fixe* x^* *dans* $[a, b]$ *. de plus* $x_* = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ *et* $x^* = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$*, où* (x_n) *et* (y_n) *sont deux suites de* $[a, b]$ *définies par :*

$$x_{n+1} = B_1(x_n) + B_2(x_n), x_0 = a \qquad , y_{n+1} = B_1(y_n) + B_2(y_n), y_0 = b$$

Déftnition 1.3.2. *La fonction* $f : J * E \longrightarrow E$ *est dite* L^1*-Carathéodory si elle satisfait les conditions suivantes :*

–Pour tout $t \in J$ *, la fonction* $f(t, .) : E \longrightarrow E$ *est continue.*

–Pour tout $y \in E$*, la fonction* $f(., y) : J \longrightarrow E$ *est mesurable.*

– $\forall k \in \mathbf{N}$, $\exists h_k \in L^1(J, ., \mathbf{R}^+)$ *tel que :*

$$|f(t, y)| < h_k(t) \qquad \forall |y| < K \qquad p.p.t \in J$$

Déftnition 1.3.3. *Soient* $(X, \| \|)$ *un espace de Banach et* A *un opérateur linéaire sur* X *à domaine* $D(A)$.

l'opérateur A *est dit opérateur de Hille-Yosida s'il existe des constantes* $\omega \in R$ *et* $M \geq 1$ *telles que :*

$]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$

où $\rho(A)$ *est l'ensemble résolvant de* A *et*

$$\| (\lambda I - A)^{-n} \| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall \lambda > \omega, \forall n \in N.$$

Chapitre 2

Équations Differentielles dans des Éspaces de Banach

Équation Différentielle

En mathématiques, une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.
L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Il existe une forme de référence à laquelle on essaie de ramener les équations différentielles par divers procédés mathématiques en l'occurence

$$y^{j}(t) = f(t, y) \tag{2.1}$$

équation d'ordre 1 où y est la fonction inconnue, et t sa variable.
Les équations différentielles représentent un objet d'étude de toute première importance, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.
Elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité, la mécanique céleste ou la dynamique des populations... La variable t représente alors souvent le temps, même si d'autres choix de modélisation

sont possibles. Les objectifs principaux de la théorie des équations différentielles sont la résolution explicite complète quand elle est possible, la résolution approchée par des procédés d'analyse numérique, ou encore l'étude qualitative des solutions. Ce dernier domaine s'est progressivement étoffé et constitue un des composants principaux d'une vaste branche des mathématiques contemporaines , l'étude des systèmes dynamiques.

Quelques modèles mathématiques utilisant des équations différentielles

nous présentons dans cette section trois exemples des modéles structurée. pour d'autres exemples le lecteurs paurra consulter cà :

modèle de Réaction-diffusion

une variété de modéles mathématiques pour la plupart des processus biologiques sont bien encadrés par des équation différentielles partielles fonctionnelles .
par exemple ,l'équation de réaction-diddusion avec retard finie de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d\frac{\partial^2}{\partial^2 x}(t,x) + ru(t,x)[1 - \frac{u(t-\tau,x)}{K}], \qquad t>0, x\in[0,1] \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0 \qquad t>0. \qquad (2.3)$$

ou d, r, τ et K sont des constantes positives. a été utilisé pour modéliser une population à une dimension herbivores. il est bien connu que le retard distribué doit étre utilisé pour décrire l'élément stochas-tique dans la réponse tardive d'un processus biologique.
l'équation suivante de réaction-diffusion avec un retard infinie

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d\frac{\partial^2}{\partial^2 x}(t,x) + ru(t,x)[1 - \frac{1}{K}\int_{-\infty}^{t} K(t-s)u(s,x)ds], \qquad t>0, x\in[0,1] \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0 \qquad t>0. \qquad (2.5)$$

K(s) est une fonction intégrable positive pour $s>0$

$$\int_0^\infty K(s)ds = 1$$

A également été utilisé comme une version modifiée de 2.2.
le modéle à été étudié par plusies auteurs, à savoire Ruan et Wu [21] ,.

le modèle proi-prédateur de lotka-voltrrra

le premier modèle dans la dynamique des population a été développé indépendament par lotka et volterra ,
il est décrit par le système d'équation différentielle ordinaire suivant :

$$P'(t) = aP(t) - bP(t)Q(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.6}$$

$$Q'(t) = -cQ(t) + dP(t)Q(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.7}$$

c'est un système complexe formé de deux espèces ,prois et prédateur. la'effectif de la population de proies et $P(t)$,celui de la la population et $Q(t)$. laquantité $P(t)Q(t)$ est une probabilité de rencontre,qui infue négativement sur une population positivement sur l'autre. A chaque instant,connaissant les population en présence,on peut décrire la tendance.On travaille avec des densité donc $P, Q > 0$. les paramètre a, b, c sont des constantes positives qui peuvent s'interpréter de la manière suivante : a est le taux de croissance malthusien des proies en l'absence des prédateurs.
b est le taux disparition des proies à causes des prédateurs.
c est le taux d'apparition des prédateurs en présence des proies .
d est le taux de décroissance malthusien des prédateurs en l'absence de proies.
Plutard, plusieurs auteurs ont observé qu'il est réaliste de supposer que le taux de croi-ssance dépend aussi du passé ,il peut ètre le résultat de plusieurs causes ,telles que le manque ou l'abandance de nourritur. Dans [12] le modèle s 4.2 4.3 prend la forme suivante :

$$P'(t) = -P(t)a - bQ(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.8}$$

$$Q'(t) = Q(t)(-c + dP(t) + \int_{-r}^{0} K(s)P(t+s)ds), \qquad t \geq 0 \tag{2.9}$$

K est la fonction noyau.Dautre versions de modèles à retard infinie ont été proposé par plusieurs auteurs,on citera à titre d'exemple Brelot[8].

le modèle de proliferation cellulaire

c'est un modèle de production du sang proposé par Rey et Mackey en 1993 ee étudié par Dyson, Villela-Bressan et Webb en 1995.
ce modèle déceit la production des souches prolifératives et le précurseur des cellules dans la moelle osseuse :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(xu(x,t)) = \mu u(\alpha x, t-r)(1-u(\alpha x, t-r)),\ t>0 \text{ et } 0<x<1;$$
$$u(x,\theta)=\varphi(a,\theta), \qquad -r\leq\theta\leq 0 \text{et} x\in[0,1]$$

où $u(x,t)$ est la densité de population des cellules dépendante de la maturité x ,
ou l'âge biologique,et du temps t et μ, α et r des paramètre satisfaisant è $\mu>0, 0<\alpha<1 \text{et} r>0$. la variable de maturité x est à valeurs dans $[0,1]$ et peut étre reliée l'hémoglobine qui se trouve entre les cellules individuelles .
dans le terme de transport $\frac{\partial}{\partial x}(g(x)u(x,t))$,
on suppose que toutes les cellules ont une mème taux maturation $g(x)=x$ le retard r est le facteur de maturité α survinnent lorsqu'on suppose que toutes les cellules se subdivisent exactement en un mème l'âge .
la dependance logistique non linéaire de la densité de population ,dans le terme $\mu u(\alpha x, t-r)(1-u(\alpha x, t-r))$,
sinigfie que le processus de division de cellules n'est pas modélisé directement ,mais il y'aune production de nouvelles cellules de toutes les valeurs de maturité.

Conditions Initialeset et Théorème de Cauchy-Lipschitz

Une condition initiale ou condition de Cauchy, pour une équation d'ordre n d'inconnue y est la donnée d'une valeur x_0 et de n vecteurs $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$. La fonction solution y satisfait ces conditions initiales si

$$y(x_0)=Y_0, \qquad y^{j}(x_0)=Y_1, \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(x_0)=Y_{n-1}$$

. Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation diférentielle avec un jeu de conditions initiales. Pour une équation différentielle sous forme résolue, moyennant une certaine hypothèse de régularité (caractère localement lipschitzien à x fixé, par rapport au bloc des autres variables) le théorème de Cauchy-Lipschitz énonce que, pour chaque condition initiale :

– il existe une solution qui la satisfait et qui est définie sur un intervalle de la forme

– il existe une unique solution maximale qui la satisfait.

Un autre problème classique est celui des conditions aux limites, pour lequel on prescrit les valeurs d'une fonction solution en plusieurs points, voire les valeurs des limites d'une fonction solution aux bornes du domaine. Ainsi le problème :

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Un tel problème, parfois appelé problème de Dirichlet, peut très bien n'avoir aucune solution ou au contraire une infinité de fonctions solutions. Dans l'exemple donné, les solutions sont les fonctions de la forme $x \longrightarrow \sin(x) + k$, pour toute constante k.

équation différentielle à Retard

Dans cette section, nous rappelerons quelques notions de base de la théorie d'existence, d'unicité, et de prolongement des solutions pour les équations différentielles ordinaires et les les équations différentielles à retard. Nous discuterons en particulier le dernier point.

Équations différentielles ordinaires

Soient U un ouvert de $\mathbf{R} * \mathbf{R}$ et $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Déftnition 2.4.1. *Une équation différentielle ordinaire* (EDO) *sur* U *est une relation du type :*

$$\dot{x}(t) = f(t; x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t; x) \tag{2.10}$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Déftnition 2.4.2. *Soit* x *une fonctin d'une partie de* **R** *dans* **R** *La fonction* x *est dite solution de l'équation 2.10 sur un intervalle* $I \subset \mathbf{R}$ *si elle est définie et continûment dérivable sur* I *et si* $(t; x(t)) \in U$ *pour tout* $t \in I$, *et* x *satisfait la relation 2.10 sur* I.

Déftnition 2.4.3. *Soit* $(t_0; x_0) \in U$ *donné. La fonction* x *est dite solution du problème à valeur initiale, associé à l'équation 2.10 s'il existe un intervalle* I *contenant* t_0 *tel que* x *soit solution de l'équation 2.10 sur* I *et vérifie* $x(t_0) = x_0$.

Remarque 2.4.1. *Pour* $(t_0; x_0) \in U$ *donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation 2.10 est généralement exprimé sous l'écriture suivante :*

$$\dot{x} = f(t; x); \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.11}$$

Une solution de 2.11 est également dite solution de l'équation 2.10 à valeur initiale x_0 *à l'instant initial* t_0 *(ou encore, de condition initiale* $(t_0; x_0)$.

Déftnition 2.4.4. *Pour* $(t_0; x_0) \in U$ *donné, une solution du problème 2.11 est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.*

Remarque 2.4.2. *Si le problème 2.11 admet une solution unique, celle-ci est notée par*

$$x = x(t_0; x_0)$$

Proposition 2.4.1. *Pour tout* $(t_0; x_0) \in U$, *le problème 2.10 est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s; x(s))ds \tag{2.12}$$

Remarque 2.4.3. *Pour sa maniabilité, l'équation intégrale 2.12 est souvent utilisée au lieu du problème 2.11, par exemple dans les preuves de résultats d'existence, d'unicité, etc. , des solutions*

Existence, Unicité et Prolongement des Solutions

Theorem 2.1. *(Existence)*
*Soient*U *un ouvert de* $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue. Pour tout* $(t_0; x_0) \in U$ *, le problème 2.11 admet au moins une solution.*

Lemme 2.5.0.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{R} * \mathbf{R}$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue.*
Si $W \subset V \subset U$ *sont tels que* W *est fermé et borné (c.-à-d. compact), et* V *est ouvert avec* $V \subset U$ *, alors il existe* $L > 0$ *tel que, pour toute condition initiale* $(t_0; x_0) \in W$ *, il existe une solution* x *du problème 2.11 définie au moins sur l'intervalle* $[t_0 L; t_0 + L]$

Déftnition 2.5.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{RR}$ *et* $f : U \longrightarrow R^d$ *une fonction. On dit que* $f = f(t; x)$ *est localement lipschitzienne en* x *si pour tout fermé et borné (c.-à-d. compact)* $K \subset U$ *, il existe une constante* $L > 0$ *telle que*

$$|f(t; x_1) - f(t; x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

pour tous $(t; x_1)$ *et* $(t; x_2)$ *dans* K.

Theorem 2.2. *(Unicité)*
Soit U *un ouvert de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. *Si* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *est continue et localement lipschitzienne en* x, *alors pour tout* $(t0; x0) \in U$ *, le problème 2.11 admet une solution unique.*

Déftnition 2.5.2. *Soient* x *une solution de l'équation 2.10 et* $I \subset R$ *un intervalle sur lequel* x *est définie.*

1. *Une fonction* x^j *est appelée prolongement de* x *si elle est définie sur un intervalle* ·I *contenant strictement* I, *et coïncide avec* x *sur* I, *et vérifie la relation 2.10 sur* I.
2. *La solution* x *est dite maximale (on dit aussi non prolongeable) si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que l'intervalle*I *est l'intervalle maximal d'existence de la solution* x.

Remarque 2.5.1. *L'existence d'une solution maximale prolongeant toute solution est une conséquence du Lemme de Zorn. L'intervalle maximal d'existence d'une solution est toujours ouvert.*

Theorem 2.3. *(Prolongement)*

Soit x *une solution maximale de l'équation 2.10 et soit* $I =]a; b[$ *son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout fermé et borné (c.-à-d. compact)* W *dans* U *, il existe* t^1_w *et* t^2_w *tels que* $(t; x(t)) \notin W$ *pour* $t \in]a; t^1_w]$ *et* $t \in [t^2_w; b[$

Lemme 2.5.0.2. *Soient* x *une solution maximale de l'équation 2.10 et* $I =]a; b[$ *son intervalle maximal d'existence. Alors* $(t; x(t))$ *va vers le bord de* U *lorsque* t *tend vers* a *et vers* b.

2.6 Equations Différentielles Fonctionnelles à Retard

Déftnition 2.6.1.

$$C_0 = C([-r, 0]; \mathbf{R})$$

désigne la norme d'un élément φ *de* C_0 *par*

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi(\theta)| \qquad \theta \in [-r, 0]$$

Déftnition 2.6.2. *Soit* $t_0 \in \mathbf{R}$ *et* $r \geq 0$. *Soient* $x \in C([t_0 - r; t_0 + r]; \mathbf{R})$ *et* $t \in [t_0; t_0 + r]$. *On définit une nouvelle fonction* x_t*, élément de* C_0*, par*

$$x_t(\theta) = x(t + \theta); \qquad \theta \in [-r, 0] :$$

Lemme 2.6.0.3. *Pour tout* t *fixé, la fonction* x_t *est obtenue en considérant la restriction de la fonction* x *sur l'intervalle* $[t - rt]$*, translatée sur* $[-r, 0]$.

Déftnition 2.6.3. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{R} * C_0$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue.*
On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard (EDFR) *sur* U *une relation de la forme*

$$x'(t) = f(t; x_t), \; t \in [-r, 0]. \tag{2.13}$$

Lemme 2.6.0.4. *1.Une application telle que* f *, définie sur un ensemble de fonctions, est parfois désignée sous le nom de fonctionnelle au lieu de fonction*

2.La référence à 'équation 2.12, qui est une équation différentielle fonctionnelle, comme étant une EDF R *souligne le fait qu'il n'y a que le présent et le passé de* x *qui interviennent dans la détermination de* x

Déftnition 2.6.4. *Soit* x *une fonction de* $I \subset \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. On dit que x *est solution de l'équation 2.5.1 s'il existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $r > 0$ *telsque*

$$x \in C([t_0 - r, t_0 + r[; \mathbb{R}), (t; x_t) \in U$$

et x *vérifie la relation 2.5.1 pour tout* $t \in [t_0; t_0 + r[$, *s'il existe* $r > 0$ *tel que* x *soit solution de 2.5.1*

$$[t_0 - r, t_0 + r] : x_{t_0} = \varphi$$

données, alors la solution du problème 2.5.2 est dite unique si deux solutions coïncident là où elles sont simultanément définies

Dans le cas où il y a unicité, la solution de 2.12 à valeur initiale càd la solution du problème 2.5.2 est notée par $x(t_0, \varphi$. L'équation 2.12 est du type le plus général, en ce sens qu'elle inclut aussi bien les EDOs

$$x = f_1(t,x),$$

que les équations différentielles à retard(s)

$$x^j(t) = f_2(t, x(t)); x(t, r_1(t)); x(t, r_p(t))$$

avec

$$0 \leq r_i(t) \leq r, \ i = 1, 2, \ldots\ldots.., p$$

, puisqu'il suffit de poser

$$f(t; u) = f_2(t; u(0)); u(r_1(t)); \cdots ; u(r_p(t))$$

Alors, nous avons

$$f(t; x_t) = f_2(t; x_t(0)); x(t, r_1(t)), x_t(r_p(t)) = f_2(t; x(t); x(tr_1(t)); x(tr_p(t)))$$

: De même les équations intégro-différentielles de la forme

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} f_3(t; \theta; x(t + \theta))d\theta$$

. sont du type 2.5.1 pour

$$f(t; u) = \int_{-r}^{0} f_3(t; \theta; u(\theta))d\theta$$

: D'autres types d'équations peuvent également être exprimés par la relation On dit que l'équation 2.5.1 est autonome si la fonction f ne dépend pas de t. On note dans ce cas $f(u)$ au lieu de $f(t; u)$ Une fonction x est solution du problème 2.5.2 si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{0}^{t} f(s; x_s)ds; x_0 = \varphi$$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{0} f(s; x_s)ds; x_0 = \varphi$$

Souvent dans les applications il est plus commode de convertir le problème en l'équation intégrale 2.3 et de travailler avec cette expression de la solution considérée.

2.6.1 Existence, Unicité et Prolongement des solutions

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques résultats de base sur l'existence, l'unicité et le prolongement des solutions de l'équation 2.5.1, en accordant une attention particulière à cette dernière notion.

Theorem 2.4. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{R} * C_0$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue. Si* $(t_0; \varphi) \in U$ *, alors le problème 2.5.1 admet au moins une solution. Plus généralement, si la fonction* f *est continue et* $W \subset U$ *est compact, alors il existe un voisinage* $V \subset U$ *de* W *tel que* $f(V)$ *soit bornée, et il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $(t0; \varphi) \in W$ *, il existe au moins une solution* x *du problème 2.5.1, définie sur l'intervalle* $[t_0 - r; t_0 + r]$.

Theorem 2.5. *(Unicité)*
Soient U *un ouvert de* $\mathbf{R} \times C_0$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^d$ *une fonction continue. On suppose que* $f = f(t, x)$ *est lipschitzienne en* x *dans les compacts de* U *. Si* $(t0; \varphi) \in U$ *, alors le problème 2.11 admet une solution unique. On suppose que la fonction* f *dans l'équation 2.11 est continue. Soit* x *une solution de cette équation, définie sur l'intervalle* $[t_0 - r, a[, a > t_0$.

Déftnition 2.6.5. *On dit que* $\cdot x$ *est un prolongement de* x *s'il existe* $b > a$ *tel que* x *est définie sur* $[t_0 - r; b[$, *coïncide avec* x *sur* $[t_0 - r; a[$, *et vérifie l'équation 2.5.1 sur* $[t_0 - r; b[$.

à droite.

Theorem 2.6. *(Prolongement)*
Soient U *un ouvert de* $\mathbf{R}*\ C_0$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue. Soit* x *une solution maximale de l'équation 2.5.1 et soit* $[t_0 r; b[$ *son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout compact* W *dans* U *, il existe* t_w *tel que* $(t; x_t)$ W *pour* $t \in [t_w; b[$.

Lemme 2.6.1.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{R} * C_0$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue. Soit* x *une solution maximale de l'équation 2.5.1 et soit* $[t_0 - r; b[$ *son intervalle maximal d'existence. Soit* W *l'adhérence de* $f(t; x_t) : t \in [t_0; b[$ *dans* $\mathbf{R} \times C_0$. *Si* W *est compact alors il existe une suite* $f \subset \mathbf{R}$ *telle que* $t_k b_{\dot{}}$ *et* $(t_k; x_{t_k})$ *tend vers le bord de* U *lorsque* $k \longrightarrow \infty$. *Si* $r > 0$, *alors il existe*
$\in C_0$ *tel que* $(b; \psi)$ *appartienne au bord de* U *et* $(t; x_t)(b; \psi)$.*l'orsque* $t \longrightarrow b-$

Commentaire.
Rappelons que le théorème 2.3 affirme que toute solution de l'équation différentielle 2.10 peut être prolongée jusqu'à ce que sa trajectoire atteigne le bord de l'ouvert U (le domaine de définition de l'équation différentielle ordinnaire considérée).
La preuve de ce résultat se base sur la propriété que l'image par une fonction continue d'une partie
fermée et bornée de $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}$, qui est donc compacte. Cette propriété n'est pas vraie pour une fonctionnelle continue. En effet, une partie fermée et bornée de $\mathbf{R} \subset c_0$ n'est pas nécessairement compacte héritant cette propriété de l'espace Co. Ainsi, le résultat du théorème cité plus haut n'est plus vrai dans le cas des équations différentielles ordinaires à retard. Ce qui vient d'être dit justifie la condition de compacité sur l'objet de l'hypothèse dans la 2.6.
Par ailleurs, le corollaire de ce dernier montre qu'en particulier si l'adhérence de la trajectoire $f(t; xt) : t \in [t_0; b[$ d'une solution de équations différentielles ordinaires à retard 2.5.1 est compacte, elle est alors non prolongeable car sa trajectoire aura nécessairement atteint le bord de U (ici, le domaine de

définition de l'equation différentielle fonctionnelle à retard).
Mais en général cette condition de compacité sur la trajectoire d'une solution n'est pas réalisée comme on peut le constater sur l'exemple étudié plus bas.
D'où la nécessite d'introduire sur la fonctionnelle f une hypothèse supplémentaire assurant la prolongeabilité des solutions de 2.5.1 jusqu'à atteinte par leurs trajectoires du bord de U .
Une telle hypothèse est évidemment en rapport avec ce qui vient d'être dit plus haut.
Elle est vérifiée dans la plupart des cas rencontrés dans les applications.

Déftnition 2.6.6. *Soient* U *un ouvert de* $R * C_0$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction. On dit que la fonction* f *est quasi-bornée si l'image par* f *de tout ensemble fermé et borné de* U *est un ensemble borné de* R^d. *Il est facile de vérifier la proposition suivante que nous utiliserons d'ailleurs tout au long de cette thèse en substitution à la définition 2.6.6*

Chapitre 3

Existence et Unicité de Solutions pour des Équations Differentielles à Retard Fini dans un Éspace de Banach

Ce chapitre est consacrè à l'existence de solutions faibles et de solutions extrémales faibles definies sur un intrvalle reél compacte concernant les équations différentielles fonctionelles d'ordre un. Plusieres études ont été faites sur les équations différentielles ordinaires à retard, on citera les travaux de Abbas et Benchohra [1], Belmekki...
le système décrit par l'équation differentelle suivante est un exemple d'equation dfférntielle semi lineaire à retard fini :

$$y'(t) - Ay(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t), ;\ t \in J := [0, b] \tag{3.1}$$

$$y(t) = \Phi(t), ;\quad t \in [-r, 0] \tag{3.2}$$

où $f, g : j \times c([-r, 0], E) \longrightarrow \mathbf{E}$ sont des fonctions données, $A : D(A) \subset E$ est le generateur infinitisimale du C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, $\Phi : [-r, 0] \longrightarrow E$ une fonction continue donneé et (E, ".") un espace de Banach reél.

3.1 Existence de Solutions Faibles

Dans cette section nous donnerons un résultat principal d'existence de solution au problème3.1. Avant de prouvez ce résultat, donnons la définition de sa solution faible.

Déftnition 3.1.1. *On dit que la fonction* $y : [-r, b] \longrightarrow E$ *est solution faible du problème 3.1 si elle satisfait* $y_t = \Phi(t)$, $t \in [-r, 0]$ *et l'équation intégrale*

$$y(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[f(s) + g(s)]ds$$

pour résoudre le problème 3.1 introduisons les hypothèses suivantes :

- (H1) : $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitisimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\in J}$, où J est un compact pour t>0 sur l'espace Banach E, avec
$$M = \sup \|T(t)\|_{B(E)},\ t > 0.$$
- (H2) : La fonction $f : J \times C([-r, 0], E) \longrightarrow E$ est de carathéodory.
- (H3) : il existe une fonction $K \in L^1(J, \mathbf{R}^+$ telle que :
  - $|g(t, u) - g(t, \bar{u})| \leq K(t)\|u - \bar{u}\|$, p.pt $\in$ J et $u, \bar{u} \in C([-r, 0])$.
  - $M\|K\|_{L^1} \leq 1$.
- (H4) : il existe une fonction $p \in L^1(J, \mathbf{R}^+$ et une fonction continue croissante
$$\Psi : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$$
telle que :
$$|f(t,u)| \leq p(t)\Psi(\|u\|), \text{p.pt} \in J \text{ et } u \in C([-r,0],E).$$

Supposons les hypothèses (H1) − (H4) satisfait et si de plus on a :

$$\int_c^\infty \frac{ds}{s + \psi(s)} > \|\gamma\|_{L^1} \tag{3.3}$$

où : $c = M\|\Phi(0)\| + M\int_0^b |g(s, 0)|\,ds$ et $\gamma(t) = \max M K(t), M p(t)$, $t \in J$, alors le problème 3.1admet au moins une solution faible dans l'intervalle $[-r, b]$. ramenons le problème 3.1 à un problème de point fixe, pour cela considérons les deux opérateurs :

$$F, G : C([-r, b], E) \longrightarrow C([-r, b], E)$$

definis par :

$$F(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in [-r,0]; \\ T(t)\Phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds, & \text{si } t \in J. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$G(y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [-r,0]; \\ T(t)\int_0^t T(t-s) \times g(s,y_s)ds & \text{si } t \in J. \end{cases} \quad (3.5)$$

alors le problème qui consiste à trouver une solution au problème 3.1 se ramène au problème consistent à trouver la solution de l'equation d'opérateurs :

$$F(y)(t) + G(y)(t) = y(t), \; ; \; t \in [-r, b]$$

on doit montrer que les opérateurs F et G satisfassent les conditions du Théorème de **Burton et kirk**.

Démonstration. la preuve sera donnée en cinq étapes :

Etape1 :

F est complètement continue.en effet, F est continue car si : (y_n) est une suite de $C([-r, b], E)$ telle que

$$(y_n) \longrightarrow y \text{ et } \eta > 0 \text{ telque } \|y_n\|_\infty \leq \eta$$

alors : |

$$\begin{aligned} |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \left| \int_0^t T(t-s)[f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)]ds \right| \\ &\leq M \int_0^t |f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)|ds \\ &= M\|f(., y_n) - f(., y)\|_{L^1} \end{aligned}$$

puisque f et de carathéodory et en vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue ,on a alors

$$|F(y_n)(t) - F(y)(t)|_\infty \leq M\|f(., y_n) - f(., y)\|_{L^1} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty$$

. **Etape2 :**

l'image par F de tout borné B de $C([-r,b]),E)$ est un borné de $C([-r,b],E)$. soit :

$$B_d = \{y \in C([-r, b], E) : \|y\|_\infty \leq d\} \text{ avec } d \geq 0$$

on a pour tout $t \in [-r, b]$ et $y \in B_d$

$$
\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= |T(t)\Phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, y_s)ds| \\
&= M|\Phi(0)| + M\int_0^t |f(s, y_s)| \\
&\leq M|\Phi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(\|y_s\|)ds, \\
&\leq M|\Phi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(d)ds \\
&= M|\Phi(0)| + M\psi(d)\int_0^t P(s)ds \\
&\leq M\|\Phi\|_\infty + M\psi(d)\|P\|_1 = c
\end{aligned}
$$

donc :

$$\|F(y)\|_\infty \leq c$$

, par suite $F(B_d)$ est borné.

Etape 3 :

F applique des ensembles borné dans des ensembles équicontinus de $C([-r,b],E)$. considérons B_d comme dans l'etape 2 et soient donnés

$$\theta > 0, \tau_1, \tau_2 \in [-r,b]; \text{avec} \tau_2 > \tau_1$$

. premier cas : $\tau_1 > s$, on a :

$$
\begin{aligned}
|F(y)(\tau_1) - F(y)(\tau_2)| &\leq |T(\tau_2)\Phi(0) - T(\tau_1)\Phi(0)| \\
&+ \left|\int_0^{\tau_1 - s} [T(\tau_1 - s) - T(\tau_2 - s)]f(s, y_s)ds\right| \\
&+ \left|\int_{\tau_1 - s}^{\tau_1} [T(\tau_1 - s) - T(\tau_2 - s)]f(s, y_s)ds\right| \\
&+ \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} [T(\tau_2 - s)]f(s, y_s)ds\right| \\
&\leq |T(\tau_1)\Phi(0) - T(\tau_2)\Phi(0)| \\
&+ M\psi(d)\|T(\tau_1 - \tau_2 + s) - T(s)\|_{B(E)}\int_0^{\tau_1 - s} P(s)ds \\
&+ 2M\psi(d)\int_{\tau_1 - s}^{\tau_1} P(s)ds + M\psi(d)\int_{\tau_1}^{\tau_2} P(s)ds
\end{aligned}
$$

deuxieme cas:

$$\tau_1 < s : \text{pour} \tau_1 - \tau_2 < s$$

,on a :

$$|F(y)(\tau_1) - F(y)(\tau_1)| \leq T(\tau_2\Phi(0) - T(\tau_1\Phi(0) + \int_0^{2s} P(s)ds + M\psi(d) \int_0^{s} P(s)ds \quad P(s)ds + M\psi(d) \quad P(s)ds$$

. l'equicontinueté vient du fait que : étape4 $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue. étape5 $T(t)$ est compact pour $t > 0$. soient $0 < t \leq b$ fixé et $0 < s < t$.pour $y \in B_d$ on definit

$$F_s(y)(t) = T(t)\Phi(0) + \int_0^{t-s} T(t-s)f(s, y_s)ds \; T(t-s$$
$$= T(t)\Phi(0) + \int_0^{t-s} -s)f(s, y_s)ds$$

notons que l'ensemble

$$\{ \int_0^{t-s} T(t-s-s)f(s, y_s)ds : y \in B_d\}$$

est borné car :

$$\cdot \int_0^{t-s} T(t-s-s)f(s, y_s)ds \cdot \leq M\psi\psi(d) \int_{t-s}^{t} P(s)ds$$

. et maintenant puisque $T(t)$ est compact pour $t > 0$, l'ensemble

$$Y(t) = \{F_s(y)(t) : y \in B_d\}$$

est relativement compact dans E pour tout $t > 0$.De plus

$$F(y)(t) - F_s(y)(t) \leq M\psi(d) \int_{t-s}^{t} P(s)ds$$

. donc l'ensemble

$$Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_d\}$$

est totalement borné et donc$Y(t)$ est relativement compacte dans E. comme conséquence des étapes 2 et 3 du Théorème d'AscoIl-Arzéla[**?**] .on conclut que l'opérateur

$$F : C([-r, b), E) \longrightarrow C([-r, b), E)$$

est complètement continu.

Etape4 :

G est une contraction .En effet, soient $x, y \in C([-r, b), E)$ alors :

$$\begin{aligned}
|G(x)(t) - G(y)(t)| &= \left|\int_0^t T(t-s)[g(s,x_s) - g(s,y_s)]ds\right| \\
&\quad \int_0^b T(t-s)[g(s,x_s) - g(s,y_s)]ds| \\
&\leq M\left|\int_0^0 T(t-s)[g(s,x_s) - g(s,y_s)]ds\right| \\
&\leq M\int_0^B k(s)\|x_s - y_s\|ds.
\end{aligned}$$

alors :

$$\|G(x)(t) - G(y)(t)\|_\infty \leq M\|k\|_{l^1}\|x-y\|_\infty.$$

or d'aprés de (h_3) , $M\|K\|_{L^1} < 1$, donc G est une contraction.

Etape 5 :

il reste maintenant à montrer que l'ensemble :

$$H = y \in C([-r,b),E) : y = \lambda F(y) + \lambda G(\frac{y}{\lambda}) \text{ pour } 0 < \lambda \leq 1$$

est borné. soit y un élement quelconque de H .pour tout $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda T(t)\Phi(0) + \lambda\int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds + \lambda\int_0^t T(t-s)g(s,\frac{y_s}{\lambda})ds$$

, et

$$\begin{aligned}
&\quad \int_0^t |f(s,y_s| \\
|y(t)| &\leq \lambda M|\Phi(0)| + \lambda M \int_0^t |f(s,y_s| \\
&\quad + M\int_0^t |g(s,\frac{y_s}{\lambda}) - g(s,0)|ds + \lambda M\int_0^t |g(s,0)|ds \\
&\leq M|\varphi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(\|y_s\|ds \\
&\quad + M\int_0^t \quad\quad \int_0^t |g(s,0)|dS. \\
&\quad + M\int_0^t K(s)\|y_s\|ds + M\int_0^t |g(s,0)|dS.
\end{aligned}$$

considerrons maitenant la fonction μ definie par :

$$\mu(t) = \max|y_s| : -r \leq s \leq t, t \in J$$

. soit

$$l^* \in [-r, l] \text{ telque } \mu(l) = |y(l^*)|,$$

si $t^* \in [0,b]$, alors d'aprés l'inegalité précédente on a pour $t \in J$:

$$\mu(t) \leq M\,|\Phi(0)| + M\int_0^t P(s)(\mu(s))ds + M\int_0^t K(s)\mu(t)ds + M\int_0^t |g(s,0)|ds$$

$$\leq M\,|\Phi(0)| + M\int_0^b |g(s,0)|ds + \int_0^t \gamma(s)[\mu(s)\psi(\mu(s)])ds$$

$$= c + \int_0$$

$$= c + \int_0 \gamma(s)[\mu(s)\psi(\mu(s)])ds.$$

si $t^* \in [-r, 0]$ alors $\mu(t) \leq \|\varphi\|$ et l'inegalité précédente est verifiée. soit :

$$m(t) = c + \int_0^t \gamma(s)[\mu(s)\psi(\mu(s)])ds, \qquad t \in J$$

alors on a

$$\mu(t) \leq m(t) \qquad \forall t \in J, m(0) = c$$

et

$$xm'(t) = \gamma(s)[\mu(s)\psi(\mu(s))]ds p.p \qquad t \in J$$

. En utilisant le fait que ψ est croissante on obtient :

$$m'(t) \leq \gamma(s)[\mu(s)\psi(\mu(s))]ds \qquad p.p \qquad t \in J$$

. soit

$$\frac{m'(t)}{m(l) + \psi(m(l))}ds \leq \gamma(t) \qquad p.p \qquad t \in J.$$

parintégration entre 0 et t on obtient :

$$\int_0^{m(t)} \frac{m'(s)}{m(s) + \psi(m(s))}ds \leq \int_0^t \gamma(s)ds$$

par changement de variable on obtient :

$$\int_c^{m(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} \leq \|\gamma\|_{L^1} < \int_c^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}$$

donc il existe une constante l telle que :

$$\mu(t) \leq m(t) \leq l$$

pour tout $t \in J$. la constante l dépend uniquement des constantes M, w, d, K et ψ d'aprés la definition de μ , il vient :

$$\|y\|_\infty = \sup_{t \in J} |y(t)| = \mu(b) \leq m(b) \leq l \qquad \text{pour} \qquad y \in H.$$

Ceci montre que l'ensemble H est borné. d'aprés le theoréme(**??**)**burton et kirk**), l'opérateur F + G admet un point fixe qui solution du probléme (3.1)-(

Remark 3.1.0.1. *34).* □

3.2 Existence des solutions extrémales faibles

dans cette section nous allons prouver l'éxistence de solutions minimale et maximale faibles du problème 3.1 sous les coditions de montonie des fonction qui s'y trouvent .pour cela nous avons besoins des definition suivantes:

Déftnition 3.2.1. *on dit qu'une fonction* $v : [-r, b] \longrightarrow E$ *est une sous solution ,faible du probleme si :*

$$v(t) = \varphi(t), \qquad t \in [-r,0] \text{ et } v(t) \leq T(t)\Phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds, \qquad t \in J.$$

On definit de mème sur solution faible w du problème (3.1.1))3.1.2) *en inversant l'ordre de l'inegalité .*

Déftnition 3.2.2. *une solution* x_M *du problème (3.1)-(*

Remark 3.2.0.2. *34) est dite maximale si pour tout solution* x *sur*J*de se dernier,on a :*

$$x(t) \leq x_M(t) \forall t \in J.$$

on definit de mème une solution minimale en inversant l'ordre de l'inegalité.

Considerons maintenant les hypothèses suivantes :

- (H_5) : Les fonctions $f(t,y), g(t,y)$ sont strictelent croissantes en

$$y \quad p.p \quad t \in J.$$

- (H_6) : T (t) présèrve l'ordre c'est à dire : $T(t) \geq 0$ lorsque $v \geq 0$
- (H_7) : Le problème 3.1 admet une sous solution faible v et une sur solution faible W avec $v \leq W$.

Notre résultat dans cette section est une application du theorème.

Théorème 3.2.1. *Supposons les hypothèses du theorème* **??** *satisfaites ,si de plus les hypothèses* (H5)−)H7) *sont verifiées,alors le problème 3.1 admet une solution minimale faible et une solution maximale faible sur* $[-r, b]$

Démonstration. on peut montrer comme dans la preuve du théorème 1.2 que F est complètement continue et G une contraction sur [v, w]. on doit montrer que F et G sont croissants sur [v, w].
Soient $y, \bar{y} \in [v, w]$ tels que :

$$y \leq \bar{y}, y \neq \bar{y}.$$

d'aprés les hypothèses $(H_6) - (H_7)$, on a pour $t \in J$

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= T(t)\Phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, y_s)ds \\ &\leq T(t)\Phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, \bar{y}_s)ds \\ &= F(\bar{y})(t) \end{aligned}$$

de mème $G(y) \leq G(\bar{y})$ donc F et G sont croissante sur [v, w] , finalement soit l'element $x \in [v, w]$, d'aprés (H7) on deduit que :

$$v \leq F(v) + G(v) \leq F(x) + G(x) \leq F(w) + G(w) \leq w$$

, ce qui montre que :

$$F(x) + G(x) \in [v, w]$$

pour tout $x \in [v, w]$. donc les fonctions F et G satisfont les conditions du théorème 1.3 et donc le problème 3.1 admet une solution minimale et une solution maximale sur $[-r, b]$ □

Chapitre 4

Application aux équations défférentielles à retard

4.1 Application aux équations défférentielles à retard

Dans ce travail, on s'intéresse à résoudre par la méthode d extrapolation 1'équation différentielle à retard suivante :

$$\frac{d}{dt} x(t) = Lx_t \quad + f(t)x_0 \quad = \phi \in C := C([-r, 0]; \mathbb{R}^n), \tag{4.1}$$

ou L est un opérateur linéaire borné de C à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Il a été appliquée pour étudier l'équation différentielle à retard 4.1.

L' équation 4.1aussi étudiée par [2] utilisant la notion des semi-groupes intégrés introduite par [4].

Proposition 4.1.1. *Soit A un opérateur de Hille-Yosida sur* X. *Alors, la partie* $D(A_0)$ *de* $D(A)$ *dans* X_0 *définie par*

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\},\ A_0x = Ax,\ \forall x \in D(A_0),$$

engendre un C_0*-semigroupe* $(T_0(t))_{t\geq 0}$ *sur* X_0. *De plus* $\rho(A) \subset \rho(A_0)$,
et pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda(I - A_0)^{-1}$ *est la restriction de* $\lambda(I - A)^{-1}$ *à* X_0.

Pour définir la notion d 'extrapolation, on suppose sans perdre de généralité que A *est un opérateur de Hille-Yosida de type négatif sur* X.

On munit l'espace X_0d *d'une nouvelle norme définie par*

$\|x\|_{-1} = \|A_0^{-1}x\|$, *pour* $x \in X_0$.

Le complété de $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$ *s'appelle espace d'extrapolation de* X_0 *associé à* A_0 *et sera noté par* $(X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$.

Comme pour tout $x \in X_0$ *et pour chaque* $t \geq 0$, *nous avons*

$$\|T_0(t)\, x\|_{-1} = \|A_0^{-1} T_0(t)\, x\|$$

$$= \|T_0(t)\, A_0^{-1} x\| \leq M\|x\|_{-1},$$

alors l'pérateur $T_0(t)$ *peut étre prolongé d 'une façon unique en un opérateur linéaire borné dans* X_{-1}. *Ce prolongement est un* C_0*-semi-groupe sur* X_{-1} *noté* $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ *et appelée le semi-groupe d' extrapolation de* $(T_0(t))_{t\geq 0}$.

L'espace d 'origine X *est compris entre les espaces* X_0 *et* X_{-1} .

Proposition 4.1.2. *Soit A un opérateur de Hille-Yosida de type négatif sur X. Pour la norme définie sur* X *par*

$$\|x\|_{-1} = \|A^{-1}x\|, \quad \forall x \in X,$$

X_0 *est un sous espace dense dans* $Y = (X, \|\cdot\|_{-1})$.
Donc l'espace d'extrapolation X_{-1} *est aussi le complété de* y *et* x *s'injecte dans* X_{-1}.

De plus A_{-1} *est une extension de* A *sur* X_{-1} *et* $(A_{-1})^{-1}X = D(A)$.

Lemme 4.1.1. *Pour* $f \in L^1(0,+\infty;X)$ *et* $t \geq 0$,
soit

$$(T_{-1} * f)(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)\, f(s)ds,$$

alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $(T_{-1} * f)(t) \in X_0$,

ii) $\|(T_{-1} * f)(t)\| \leq M_1\|f\|_{L^1(0,t;X)}$, M_1 *est independantes de* f *et* t, *iii)* $\lim_{t\to 0} \|(T_{-1} * f)(t)\| = 0.$

Terminons ce paragraphe par un réultat de la perturbation d'un opéateur de Hille-Yosida, par un opéateur linéire borné de X_0 *dans* X .

Proposition 4.1.3. *Soit A un opérateur de Hille-Yosida sur* X *et* $B : X_0 \to X$,
un opérateur linéaire borné. Alors la partie de A + B *dans* X_0 *engendré un* C_0-*semigroupe* $(T_0^B(t))_{t\geq 0}$ *sur* X_0.
De plus, $(T_0^B(t))_{t\geq 0}$ *vérifiée la formule de Duhamel suivante*

$$T_0^B(t) = T_0(t) + \int_0^t T_{-1}(t-s) BT_0^B(t)ds, \ \forall \ t \geq 0.$$

Considérons l'équation différentielles à retard suivante :

$$\frac{d}{x(t)} = Lx_t + f(t), \qquad t \geq 0, \ x_0 = \phi \in C, \tag{4.2}$$

où $L \in \mathcal{L}(C, \mathbb{R}^n)$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ continue.

Soit $(T(t))_{g\geq 0}$ le semi-groupe solution de 1'équation à retard homogéne suivante

$$\frac{d}{dt} x(t) = Lx_t, \qquad t \geq 0, \ x_0 = \phi \in C, \tag{4.3}$$

et de générateur l'opérateur A donné par

$$D(A) = \{\phi \in C^1([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \phi'(0) = L\phi\},$$

$$A\phi = \phi', \ \forall \phi \in D(A)$$

Pour résoudre l'équation 4.2 en particulier 4.3,nous allons lui associer un probléme de Cauchy dans l'espace de Banach $X := \mathbb{R}^n \times C$, muni de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} \eta \\ g \end{pmatrix} \right\| := |\eta| + \|g\|_C, \forall \begin{pmatrix} \eta \\ g \end{pmatrix} \in X,$$

où

$$\|g\|_C := \sup_{-r\leq \tau \leq 0} |g(\tau)|$$

et $|\cdot|$ est la norme euclidienne de R^n. Le probléme de Cauchy associé à l'équation 4.2 dans X est

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}0\\ u(t)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\ u(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f(t)\\ 0\end{pmatrix},\ t\geq 0,\quad \begin{pmatrix}0\\ u(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix},$$

ou A est l'opérateur défini sur X par

$$A = \begin{pmatrix}0 & L-\delta^j_0\\ 0 & \frac{d}{d\tau}\end{pmatrix}, D(A) = \{0\}\times C^1, \tag{4.4}$$

avec δ^j_0 est l'opérateur défini par

$$\delta^j_0\phi := \phi^j(0)$$

, pour tout $\phi \in C^1$ La premiére remarque, qu' on peut faire sur l'opérateur A, est qu' il est à domaine non dense. Plus précisement on a $\overline{D(A)} = \{0\}\times C$. Nous allons montrer que A est un opérateur de Hille-Yosida et nous avons le lemme principal suivant

Lemme 4.1.2. *L'opérateur* A *de résolvante est un opérateur de Hille-Yosida. Et pour tout* $\lambda >$ "L" *on a*

$$(\lambda I - A)^{-n}\begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \phi_n\end{pmatrix},\ \forall \begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix} \in X \text{ et } n \in N, ou$$

$$(\lambda I - A)^{-n}\begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \phi_n\end{pmatrix},\ \forall \begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix} \in X \text{ et } n \in N, ou$$

$$\phi_n = (\lambda I - A)^{-n}\psi + (\lambda I - A)^{-n+1}(e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)\eta)$$

Démonstration. Pour $\lambda >$ "L" et $(_\psi\eta) \in X$, 1'équation

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta\\ \psi\end{pmatrix}$$

admet une solution $\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}$ dans $\{0\}\times C^1$ donnée par

$$\phi(\theta) = e^{\lambda\theta}\phi(0) + \int_\theta^0 e^{\lambda(\theta-s)}\psi(s)ds,\ -r\leq\theta\leq 0,$$

avec

$$\phi(0) = O^{-1}(\lambda)[\psi(0) + L(\int_\cdot^0 e^{\lambda(\cdot-s)}\psi(s)ds)] + O^{-1}(\lambda)\eta.$$

Par suite

$$\phi(\theta) = h(\theta) + e^{\lambda\theta}O^{-1}(\lambda)\eta,\ -r\leq\theta\leq 0,$$

avec

$$h(\theta) := e^{\lambda\theta}O^{-1}(\lambda)[\psi(0) + L(\int_{\cdot}^{0} e^{\lambda(\cdot-s)}\psi(s)ds)] + \int_{\theta}^{0} e^{\lambda(\theta-s)}\psi(s)ds, \ -r\leq$$

$\theta\leq 0$. On peut vérifier facilement que h est continument dérivable sur $[-r, O]$ et en utilisant la définition de $O(\lambda)$, on montre aisément que $h^{j}(O) = Lh$. C est à dire $h \in D(A_L)$. De plus, pour tout $\theta \in [-r, 0]$, on a

$$(\lambda I - \frac{d}{d\tau})h(\theta) = \psi(\theta)$$

d' où

$$\phi = (\lambda I - A)^{-1}\psi + e^{\lambda\cdot}. O^{-1}(\lambda)\eta.$$

Le résultat est obtenu par itérations.

Puisque l'opérateur A est un opérateur de Hille-Yosida alors ; la part $(A)_0$ de A dans $X_0 := \overline{D(A)} = \{0\} \times C$ donnée par

$$(A)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ D((A)_0) = \{0\} \text{ times} \{\varphi \in C^1 : \varphi^{j}(0) = L\varphi\},$$

$$(A)_0 \qquad , \ D((A)_0) = \{0\} \text{ times} \{\varphi \in C^1 : \varphi^{j}(0) = L\varphi\},$$

engendre un C_0-semi-groupe sur $\{0\} \times C$.

De plus, ce semi-groupe est donné explicitement par $\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}\right)_{t\geq 0}$ □

4.2 Equations différentielles à retard homogénes

Dans ce paragraphe, nous appliquons le résultat,pour établir une formule de la variation de la constante qui permet d'exprimer le semi- groupe solution $(T(t))_{t\geq 0}$ de l'équation différentielle à retard homogène

$$(RDE) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Lx_t, \ t \geq 0, \\ x_0 = \phi, \end{cases}$$

comme perturbation du semi-groupe donné explicitement par

$$(T_0(t)\phi)(\tau) = \begin{cases} \phi(t+\tau), & \text{si } t+\tau \leq 0, \\ \phi(0), & \text{si } t+\tau \geq 0, \end{cases}$$

solution de l'équation à retard "triviale" suivante

$$(RDE)_0 \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 0, \ t \geq 0, \\ x_0 = \phi, \end{cases}$$

et dont le générateur est

$D(A_0) = \{\phi \in C^1 : \phi^{j}(0) = 0\}$, $A_0\phi = \phi^{j}$, pour $\phi \in D(A_0)$

Remarquons d'abord que l'opérateur A peut s'écrire sous la forme $A = A_0 + B$, où $B := \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A_0 est l'opérateur défini sur X par

$$(2)\quad A_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\delta' \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix}, \quad D(A_0) = \{0\} \times C^1$$

Autrement dit, l'opérateur A est une perturbation de A_0 par l'opérateur B linéaire borné de

$$X_0 := \overline{D(A)} = \overline{D(A_0)} = \{0\} \times C$$

dans X.

Pour atteindre l'objectif de ce paragraphe, nous avons besoin du résultat suivant :

Corollaire 4.2.1. *L'opérateur* A_0 *définie par (2) est un opérateur de Hille-Yosida. En plus, pour tout* $\lambda > 0$*, on a*

$$(\lambda I - A_0)^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} \in X,$$

où

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda\theta}[\psi(0) + \eta] + \int_\theta^0 e^{\lambda(\theta - s)}\psi(s)ds, \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Il est simple de voir comme pour A que la part $(A_0)_0$ de A_0 dans $X_0 = \{0\} \times C$ est donnée par

$$(A_0)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad D((A_0)_0) = \{0\} \times \{\varphi \in C^1 : \varphi'(0) = 0\},$$

et engendre le C_0-semi-groupe $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_0(t) \end{pmatrix}_{t \geq 0}$ dans $X_0 = \{0\} \times C$.

En notant par $(T_{0,-1}(t))_{t\geq 0}$ le C_0-semi-groupe d'extrapolation de $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_0(t) \end{pmatrix}_{t\geq 0}$, nous avons la formule de Duhamel suivante :

$$(3)\quad \begin{pmatrix} 0 \\ T(t)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_0(t)\phi \end{pmatrix} + \int_0^t T_{0,-1}(t-s) \begin{pmatrix} L(T(s)\phi) \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

$\forall \phi \in C$ et $\forall t \geq 0$.

En utilisant cette formule, nous avons le résultat principal suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit* $\phi \in C$. *Alors on a :*

$$T(t)\phi = T_0(t)\phi + (I - A_0)\int_0^t T_0(t-s)(e(\cdot)L(T(s)\phi))ds, \ \forall t \geq 0,$$

ou $e(\cdot)$ *est la fonction définie sur* $[-r, 0]$ *par*

$$e(\cdot)(\theta) = e^{\theta}, \ \forall \theta \in [-r, 0]$$

Preuve

pour $\lambda = 1$, on a :

$$(I - A_0)^{-1}\begin{pmatrix}\eta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ e(\cdot)\eta\end{pmatrix}, \ \forall \eta \in R^n,$$

Par suite la formule de Duhamel (3) devient

$$\begin{pmatrix}0\\ T(t)\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ T_0(t)\phi\end{pmatrix} + \int_0^t T_{0,-1}(t-s)(I - A_0)\begin{pmatrix}0\\ e(\cdot)LT(s)\phi ds\end{pmatrix}$$

$$(4) = \begin{pmatrix}0\\ T_0(t)\phi\end{pmatrix} + (I - (A_0)_{-1})\left(\int_0^t T_0(t-s)(e(\cdot)LT(s)0\phi)ds\right)$$

Posons, pour tout $\tau \in [-r, 0]$

$$h(t, \tau) := \int_0^t T_0(t-s)\,(e(\cdot)L(T(s)\phi))(\tau)ds, \ \forall t \geq 0.$$

En utilisant la définition du semi-groupe $(T_0(t))_{t\geq 0}$,

pour $\tau \in [-r, 0]$, nous avons

$$h(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^{t+\tau} L(T(s)\phi)ds + \int_{t+\tau}^t e^{t+\tau-s}L(T(s)\phi)ds, & \text{si } t + \tau > 0,\\ \int_0^t e^{t+\tau-s}L(T(s)\phi)ds, & \text{si } t + \tau \leq 0.\end{cases}$$

Par suite, il aisé de voir que

$$h(t, .) \in C^1 \text{ et } \frac{\partial}{\partial\tau}h(t, 0) = 0, \ \forall t \geq 0,$$

i. e.,

$$h(t, \cdot) \in D(A_0), \ \forall t \geq 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix} \in D((A_0), \quad \forall t \geq 0,$$

et donc

$$(I - (A_0)_{-1})\left(\int_0^t T_0(t-s)(e()L(T(s)0.\phi))ds\right) = \tag{4.5}$$

$$= \left(\int_0^{t} (I-A_0)_{,T_0(t-s)} (e(\cdot)L(T(s)\ \phi))ds\right) \tag{4.6}$$

Par conséquent, d'aprés 4.6, on a le résultat du théorème.
Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthode
d extrapolation au problème de Cauchy,
associé à l'équation 4.2 dans $X := R^n \times C$, suivant

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix},$$

pour montrer l'éxistence et la dépendance continue par rapport aux paramètres de la solution de l'équation à retard suivante :

$\frac{d}{dt}x(t) = Lx_t + f(t),\ t \geq 0,\ x_0 = \phi,$
où $L \in L(C, R^n)$ et $f : [0, +\infty[\to R^n$, continue.

Notons par

$$(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$$

le semi-groupe d'extrapolation du semi-groupe $\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}\right)_{t\geq 0}$, engendré par la part de A dans $X_0 = \{0\} \times C$.

La solution forte, pour tout $\phi \in C$
et $f \in C([0, +\infty[, R^n)$,
du problème de Cauchy (NACP) est donnée
par la formule de la variation de la constante suivante .

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T(t)\phi \end{pmatrix} + \int_0^t T_{-1}(t-s)\begin{pmatrix} f(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds, \ t \geq 0.$$

Pour expliciter la deuxième composante de la solution forte du problème de Cauchy (NACP), nous avons besoin du lemme fondamental suivant :

Lemme 4.2.1. *Soient* $\phi \in C$ *et* $f \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$. *Alors, pour tout* $\lambda >$ "L", *on a*

$$g(t, \cdot) := \int_0^t T(t-s)\,(e^{\lambda} O^{-1}(\lambda) f(s))ds \in D(A),\ \forall t \geq 0.$$

preuve

Pour tout $\tau \in [-r, 0]$, on a

$$(T(t)\phi)(\tau) = \begin{cases} \phi(t+\tau), & \text{si } -r \leq t+\tau \leq 0, \\ \phi(0) + \int_0^{t+\tau} L(T(s)\phi)ds, & \text{si } t+\tau \geq 0, \end{cases}$$

ce qui nous permet d'expliciter $g(t, \tau)$, pour tout $\tau \in [-r, 0]$, par

$$g(t,\tau) = (8) \begin{cases} \int_0^{t+\tau} O^{-1}(\lambda)f(s)ds + \int_{t+\tau}^{t} e^{\lambda(t+\tau-s)}O^{-1}(\lambda)f(s)ds + \\ + \int_0^{t+\tau}\int_0^{t+\tau-s} L(T(\sigma)(e^{\lambda}O^{-1}(\lambda)f(s)))d\sigma ds, & \text{si } t+\tau > 0, \\ \int_0^t e^{\lambda(t+\tau-s)}O^{-1}(\lambda)f(s)ds, & \text{si } t+\tau \leq 0. \end{cases}$$

Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$, alors $g(t, \cdot)$ est dérivable sur $[-r, 0]$ et

$$\frac{\partial}{\partial\tau} g(t,\tau) = \begin{cases} \int_0^{t+\tau} L(T(t+\tau-s)(e^{\lambda}\cdot O^{-1}(\lambda)f(s)))ds + \\ +\lambda \int_{t+\tau}^{t} e^{\lambda(t+\tau-s)}O^{-1}(\lambda)f(s)ds, & \text{si } t+\tau > 0, \\ \lambda \int_0^t e^{\lambda(t+\tau-s)}O^{-1}(\lambda)f(s)ds, & \text{if } t+\tau \leq 0. \end{cases}$$

Par suite $g(t, \cdot)$ est continuent dérivable sur$[-r, 0]$ et

$$\frac{\partial}{\partial\tau} g(t, 0) = Lg(t, \cdot),$$

i. e.,

$$g(t, \cdot) \in D(A),\ \forall t \geq 0.$$

Ce qui acheve la demonstration. En utilisant la formule de la variation de la constante et le lemme précedent,

Théorème 4.2.2. *Soient* $\phi \in C$ *et* $f \in C([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$. *Alors, la deuxième composante de la solution forte est donnée,*
pour tout $\lambda >$ "L", *par*

$$(10)\quad u(t) = T(t)\phi + (\lambda I - A)\int_0^t T(t-s)(e^{\lambda}O^{-1}(\lambda)f(s))ds,\ \forall t \geq 0.$$

De plus, u *vérifie la propriété de translation* $u(t)(\tau) = \begin{cases} \phi(t+\tau), & \text{si } -r \leq t+\tau \leq 0, \\ u(t+\tau)(0), & \text{si } t+\tau > 0. \end{cases}$

Preuve :

on a

$$(\lambda I - A)^{-1}\begin{pmatrix}\eta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)\eta\end{pmatrix}, \quad \forall \eta \in R^n \text{ et } \forall \lambda > \|L\|$$

La formule de la variation de la constante (7) devient

$$\begin{pmatrix}0\\ u(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ T(t)\phi\end{pmatrix} + \int_0^t T_{-1}(t-s)(\lambda I - A)\begin{pmatrix}0\\ e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)f(s)\end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix}0\\ T(t)\phi\end{pmatrix} + (\lambda I - (A)_{-1})\left(\int_0^t T(t-s)(e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)f(s))ds\right)$$

D'aprés le lemme précédent, on a

$$\left(\int_0^t T(t-s)(e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)f(s))ds\right) \in D((A)_0), \ \forall t \geq 0,$$

et donc

$$(12)\quad (\lambda I - (A)_{-1})\left(\int_0^t T(t-s)(e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)f(s))ds\right) =$$

$$= \left((\lambda I - A)_0\right)(e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)f(s))ds \, {}^t T(t-s^0 .)$$

Par conséquent

$$(13)\quad u(t) = T(t)\phi + (\lambda I - A)\int_0^t T(t-s)(e^{\lambda\cdot}O^{-1}(\lambda)f(s))ds, \ \forall t \geq 0 .$$

En explicitant $u(t)(\tau)$, pour tout $\tau \in [-r, 0]$, à partir de (13), (8) et (9), la propriété de translation, s'en déduit alors aisément.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 4.2.3. *Soient* $\phi \in C$ *et* $f \in C([0, +\infty[, R^n)$. *Alors, l'équation de reterd homogène admet un*e *solution unique* x *donnée par*

$$x(t) = \begin{cases} u(t)(0), & t > 0,\\ \phi(t), & t \in [-r, 0],\end{cases}$$

où u *est la deuxième composante de la solution forte de (NACP) donnée par la formule (13).*

En plus la solution de l'équation de retard homogène satisfait l'estimation

$$\|x_t\| \leq M_1 e^{\|L\| t}\left[\|\phi\|_C + \int_u^t e^{-\|L\| s}|f(s)|ds\right], \ \forall t \geq 0.$$

Inversement, pour $\phi \in C$ *et* $f \in C([0, +\infty[, R^n)$, *alors la fonction* $\begin{pmatrix}0\\ u\end{pmatrix}$, *définie par* $u(t) = x_t$, $\forall t > 0$, $u(0) = \phi$ *est la solution forte* du *problème de Cauchy (NACP).*

Démonstration. A partir de (13), (8) et (9), on a

$$u(t)(0) = \phi(0) + \int_0^t L(T(s)\phi)ds + \lambda \int_0^t O^{-1}(\lambda)f(s)ds$$
$$+\lambda \int_0^t \int_0^{t-s} L\,(T\,(\sigma)(e^{\lambda \cdot}\, O^{-1}(\lambda)f(s)))d\sigma ds$$
$$- \int_0^t L\,(T\,(t-s)\,(e^{\lambda \cdot}\, O^{-1}(\lambda)f(s)))ds,$$

et en utilisant (8), on montre que

$$\frac{d}{dt} g(t, \cdot) = \frac{d}{d\tau} g(t, \cdot) + e^{\lambda \cdot} O^{-1}(\lambda)f\,(t),\ \forall\, t \geq 0.$$

D'aprés (13) et les deux dernières équations, nous montrons facilement que $u(t)$ est dérivable en 0 et vérifie

$$\frac{d}{dt} u(t)(0) = Lu(t) + f\,(t),\ t \geq 0.$$

Par suite, la propriété de translation (11) implique que la fonction x définie sur $[-r, +\infty[$ par

$$x(t) = \begin{cases} u(t)(O), & \text{si } t \geq 0, \\ \phi(t), & \text{si } t \in [-r,\ 0], \end{cases}$$

vérifie l'égalité suivante

$$x_t = u(t),\ \forall\ t \geq 0.$$

D'où x est l'unique solution de l'quation différentielle à retard non-homogène.

Pour l'estimation, il suffit d'utiliser le fait que $x_t = u(t)$, l'estimation exponentielle satisfaite par $(T\ (t))_{t\geq 0}$.

Inversement, soit x la solution de l'équation à retard.

Nous avons montré ci-dessus que le problème de Cauchy (NACP) admet une solution forte unique u, satisfait l'équation cette équation et la propriété de translation . Alors, par unicité de la solution de l'équation précedend, on conclut que $u(t) = x_t$.

Par conqéuent la fonction $\begin{pmatrix} 0 \\ x_t \end{pmatrix}$ est la solution forte du problème de Cauchy (NACP). □

4.3 Example

Dans cette section nous présentons un exemple, pour illustrer la partie théorique.

Exemple 4.3.1. *Comme application, introduisons l'exemple suivant : Considérons le système*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial}u(t,x) + F(u_t(.,x)), \qquad t \in [0,T],$$

$$u(t,0) = 0, \qquad t \in [0,T],$$

$$u(\theta,x) = \phi(\theta,x), \theta \in [-r,0], ; x \in [0,l]$$

$l > 0, r > 0$, $\phi \in C([-r,0],X)$ *et* $F \in C([-r,0],X)$ *dans* $\mathbf{R}$.
Pour passer à la forme abstraite, posons

$$x = C([0,l],\mathbf{R}), ; \ y^j t) = u(t,.).$$

et

$$f(t,y_t) = F(y_t(.,x);0)$$

et on note $Ay = -y^j$ *avec*

$$D(A) = \{u \in C^1([0,l],\mathbf{R}) : u(0) = 0\},$$

on a alors

$$\overline{D(A)} = \{u \in C([0,l],\mathbf{R})\} = X.$$

L'opérateur A *satisfait les deux propriétés suivates (voir thèse de Belmekki)[6]*

1. $]0,\infty[\subset \rho(A)$
2. $|(\lambda I - A)^{-1} \leq \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0$

Ce qui implique que A *satisfait la condition de Hill Yosida avec* $M = 1$ *et* $\omega = 0$. *Le probleme* '**??** *peut alors s'écrire*

$$y^j(t) = Ay(t) + f(t,y_t);$$

$$y(t) = \phi(t), t \in [-r,0].$$

Donc, sous des conditions appropriées sur la fonction F *, en particulier la condition* F *est de Carathéodori (voir les hypothèses* $(H_1)-(H_8)$ *dans la thèse de Belmekki) [6], le problème* **??** *admet une solution integrale extrémale.*

conclusion

dans ce mémoire nous considéré le problème de l'existence et l'unicité de solutions de divers
classes d'équations différentielles fonctionnelles avec retard fini sur un intervalle réel J=[0,b].
Dans notre exposé nous avons donné des conditions suffisantes d'existence aussi bien de "mild solutions"
que de "mild solutions " intégrales ,alors on peut ajouter d'autres conditions de sorte que ces solutions
passant au rang de solutions strictes .
Dans tout l'exposé ,nous avons considéré une classe de problèmes du premier ordre.

perspectives

comme perspective d'avenir nous souhaitons aborder les thèmes suivantes :

–équations différentielles fonctionnelles à retard infini dans des espaces de banach .
–équations différentielles fonctionnelles à retard dependant de l'état .
–équations différentielles fonctionnelles à retard de type neutre.
–resultas d'une part aux équations différentielles fonctionnelles d'ordre superieur d'autre part aux équations différentielles d'ordre fractionnel.

Bibliographie

[1]S. Abbas and M. Benchohra, *Advanced fractional differential and integral equations*, Nova. Sci. Publs, New York, (2015).

[2]M. Adimy, Integrated semigroups and delay differential equations, *J.M.A.A*, 177 (1993), 321-349.

[3]N.U. Ahmed, *Semigroup theory with applications to systems and control*, Pitman Res. Notes Math. Ser., 246. Longman Scientific & Technical, Harlow John Wiley & Sons, Inc., New York, (1991)

[4]W. Arendt, Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, *Israel Jr . Math.*, 59 (1987), 125-134.

[5]S. Baghli and M. Benchohra, Uniquness results for evolution equations with infinite delay in Frechet spaces.*Fixed point Theory*, 9, 395-406, (2008).

[6]M. Belmekki, Thèse de Doctorat : Equations et Inclusions DIfférentielles Perturbées et Quelques Problèmes de Controle *UDL, Sidi Bel Abbes, (2004).*

[7]M. Benchohra, O. Bennihi and K. Ezzinbi, Semilinear Functional Differential Equation of Fractional Order With State-Dependent Delay, *Comment. Math.* **53**, (1),47-59,(2013).

[8]M.Brelot,sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévo - rante et dévorée,
Annali di mathimatica pura et applicata,9(1931),57-74.

[9]T. A. Burton and C. Kirk, Afixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, *Math. Nachr. 18923-31,() (1998).*

[10]Y. Carrière, *Le Théorème du point fixe de BROUWER*, Dunias Vincent, 2002-2003.

[11]PH. Clement, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. Heijmans, and H.R. Thieme, Perturbation theory for dual semigroups, Part II : Time-dependant perturbations in the sun-reflexive case, *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, 109A (1988), 145-172.

[12]G. Daprato and P. Grisvard, On extrapolation spaces, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, 72 (1982), 330-332.

[13]B.C.Dhuge and J.Henderson ,Existence theory for nonlinear functional boundary
value problems ,Electron.J.Qual.Theory Differ.Equ.2004,No.1,1-15.

[14]J.K. HALE, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1977).

[15]E. Hille and Phillips, *Functional Analysis and Semigroups* Amer. Math. Soc., Providence, (1975).

[16]K.J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, (2000)

[17]J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci., 99, Springer-Verlag, New York, (1993).

[18]M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter.

[19]A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, (1983)

[20]V. Kolmanovskii, and A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional-Differential Equations*. Math. Appl., 463, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999)

[21]J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci. 119, Springer-Verlag, New York, (1996).

[22]K. Yosida, *Functional Analysis* 6^{th} edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.