République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

La richesse optimale d'investissement et consommation avec contrainte

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Fatima **Z**ohra **B**oudia [1]

Sous la direction de

Dr. N. Ait **O**uali

Soutenu le 13/07/2019 devant le jury composé de

Pr. T. Guendouzi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. W.Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail :farheddineboudia@gmail.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents sans leurs présences je ne serais jamais arrivée à ce stade.

À mes frères Sofiane et Rafik qui ont été toujours là pour moi à chaque occasion.

À mes sœurs karima, Madjda, Hanan et Nourhan avec les petites filles Douaa, Marame et Chahinez.

À celui qui m'a encouragé et qui m'a appris la volonté : mon cher mari.

À mes grands parents pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

À mes amies Aicha, Farida et les autres qui j'ai passé de bons moments.

À toutes les familles Boudia,Benatta, Bendenoune, Deraouche et Deghem.

Remerciements

✓ *Je tien à remercier* **ALLAH** *qui m'a donné la force de terminer ce modeste travail.*

✓ *Je tien à remercier mon encadreuse Mme N. Ait Ouali pour son aide durant la période de travail.*

✓ *Je remercie également les membres de jury* **Pr. T. Guendouzi, Dr. F. Benziadi** *et* **Dr. W .Benzatout** *pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche.*

✓ *Un merci spécial à l'enseignant L. Mimoun pour les efforts qu'il a déployés pour faire de ce travail un succès.*

✓ *Je remercie toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce travail.*

Table des matières

Introduction

Depuis la création des marchés financiers, les économistes observent que ces marchés connaissent une alternance de phase d'euphorie et de dépression. La question qu'ils se posent est celle de savoir comment "battre le marché".

Depuis longtemps, Les mathématiciens ont essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de finance. L'une des caractéristiques de ces questions est qu'elles font apparaître des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation.

L'idée remonte en 1900 par la thèse de Louis Bachelier [2] "Théorie des spéculations", qui propose l'utilisation, sans le nommer, du mouvement Brownien pour décrire les cours boursiers et en déduire le prix des options.

En 1944, Kiyoshi Itô a publié la célèbre formule qui prend son nom. le calcul stochastique ou calcul d'Itô est en effet un calcul d'intégrale par rapport au mouvement Brownien, cette notion d'intégrale n'est pas usuelle.

Après, en 1973 Fischer Black et Myron Scholes [6] ont utilisé la formule d'Itô qui l'ont permis de représenter de façons explicites les prix des options en fonction de la volatilité. Le modèle de Black Scholes devient le paradigme de référence pour la valorisation des produits dérivés et vaudra à leurs auteurs le prix Nobel en 1997. La théorie des processus stochastiques semble maintenant dépasser largement le cadre de la finance, dans un monde où le hasard fait la loi !

Ce travail comporte trois chapitres dont le but est la recherche de la stratégie optimale dans un marché financier régie par le modèle de Black-Scholes multidimensionnel à coefficients déterministes. Nous considérons un problème d'investissement et consommation optimal visant la consommation attendue sur l'intervalle de temps [0, T] et la richesse terminale à la date T avec la mesure du risque limitée uniformément sur [0,T]. L'approche classique à ce problème est dû à Merton, qui consiste à optimiser une fonctionnelle sous certaines contraintes. Ce problème d'optimisation a été étudié par Pergamenchtchikov et Klüppelberg avec VaR limitée pour une classe de stratégies financières non aléatoires et dans le cas où la fonction d'utilité est puissance. Notre travail, considère le problème d'investissement et consommation optimal avec contrainte liée à la mesure de risque "value-at-risk" VaR limitée uniformément sur [0,T] pour des stratégies financières admissible et des fonctions d'utilité logarithmique.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions essentielles concernant les processus stochastiques, la théorie des martingales, le mouvement brownien et le calcul d'Itô par la construction de l'intégrale stochastique. La formule d'Itô multidimensionnelle ainsi que les équations différentielles stochastiques sont aussi évoqués dans ce chapitre.

Dans le second chapitre, on étudiée les principes fondamentaux de modèles de marchés financiers dont le modèle de Black-Scholes est une référence standard.

Le dernier chapitre, porte sur le vif du sujet, concernant la consommation et l'investissement optimal dans le cas où la fonction d'utilité de type logarithmique dans un marché financier de type de Black-Scholes multidimensionnel. En utilisant le calcul stochastiques nous étudions la fonction de coût puis nous donnons une solution optimale sans contrainte et avec contrainte liée à la mesure du risque "Value at risk" VaR.

Finalement, une conclusion et bibliographie présente des compléments au mémoire.

Chapitre 1

Notions préliminaires sur calcul stochastique

Le but de ce chapitre est d'introduire le mouvement Brownien et les outils de base du calcul stochastique essentiels pour comprendre et formuler le modèle de Black-Merton-Scholes :

- Après une présentation générale des processus en temps continu, une section est consacrée aux martingales continues.
- Nous présentons ensuite le mouvement Brownien et étudions quelques propriétés importantes de ce processus.
- Nous introduisons la notion d'intégrale stochastique qui nous servira par la suite à modéliser l'évolution du processus de richesse dans un modèle financier où les transactions se déroulent de manière continue dans le temps.
- Enfin, nous présentons les processus d'Itô, le lemme d'Itô et les équations différentielles stochastiques.

1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps.

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires*

$$X = \{X_t, \quad 0 \leq t < +\infty\} = (X_t)_{t \geq 0}$$

sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, à valeurs dans* $(S, \mathcal{S})$*, appelé espace d'états. Dans ce cas,* $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$*.*
La fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ *est une trajectoire (ou réalisation) du processus* X *associée à* $\omega \in \Omega$*.*

Remarque 1.1.1 *Un processus* X *est :*

- *continu si presque toutes ses trajectoires sont continues de* $[0, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}^d$*,*
- *continu à droite avec limite à gauche (cadlàg) si presque toutes ses trajectoires sont continues à droite avec limites à gauche en tout point.*

Définition 1.1.2 *(processus adapté)*
Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$*,* X_t *est mesurable par rapport à la tribu* $\mathcal{F}_t$*.*

Définition 1.1.3 *(Processus stationnaire)*
Un processus X *est dit stationnaire si pour tout* $h \geq 0$ *le processus* $(X_{t+h} - X_t)_{t\geq 0}$ *est équivalent à* X*.*

Définition 1.1.4 *(Processus équivalente)*
Soient X *et* Y *deux processus.* X *est une modification de* Y *si, pour tout* $t \geq 0$*, les variables aléatoires* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P} - p.s$ *:*

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

On dit que X *et* Y *sont indistinguables si,* $\mathbb{P} - p.s$*, les trajectoires de* X *et de* Y *sont les mêmes. c'est-à-dire*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \quad \forall t \geq 0) = 1.$$

1.1.1 Filtration

Définition 1.1.5 *Une filtration (un flot d'informations) de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribu de* $\mathcal{F}$*.*
C'est à dire :

$$\forall s \leq t, \quad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est appelé espace de probabilité filtré et noté* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$*.*

Définition 1.1.6 *(Filtration naturelle)*
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *.*
Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, on appelle filtration naturelle relative à X, la filtration* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ *définie par :*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t, s \geq 0).$$

Pour tout $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t^X$ *est la plus petite sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *qui rend mesurables toutes les application* $\omega \mapsto X_s(\omega)$ *pour tout* $s \leq t$, $s \geq 0$.
La tribu $\mathcal{F}_t^X$ *représente tout les informations dans on dispose jusqu'à la date t.*

Définition 1.1.7 *(Filtration complète)*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré.*
On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est complète si l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est complète et* $\mathcal{F}_0$ *contient tout les ensembles* $\mathbb{P}-$*négligeables de* $\mathcal{F}$*.*

Définition 1.1.8 *(Progressivement mesurable)*
On dit qu'un processus X est "progressivement mesurable" pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* $\forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *:*

$$\{(s, \omega)/0 \leq s \leq t, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$$

c'est à dire que l'application sur $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]^d) \otimes \mathcal{F}_t)$ *:* $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ *est mesurable.*

1.1.2 Mouvement Brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement Brownien. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition 1.1.9 *(Mouvement Brownien Standard)*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Un processus* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien standard si :*

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ *ie : le mouvement Brownien est issu de l'origine.*

2. *$(W_t)_{t\geq 0}$ a trajectoire continue.*
3. *$\forall s \leq t,\ W_t - W_s$ est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne, centrée et de variance $(t-s)$.*
4. *$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t_i \in \mathbb{R}^+ \ : 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, les variables aléatoires $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}), \cdots, (W_{t_1} - W_{t_0}), W_{t_0}$ sont indépendantes.*

-Le mouvement Brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues.
-Le processus $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$mouvement Brownien standard si W est un mouvement Brownien standard adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.1.10 ***(Mouvement Brownien multidimensionnel)***
Soit $W = (W_t)_{t\geq 0} = (W_t^1, W_t^2, \cdots, W_t^n)^T_{t\geq 0}$ un processus d-dimensionnel. On dit que W est un mouvement Brownien multidimensionnel de dimension d si tout les processus $(W_t^i)_{t\geq 0}, \quad i = 1, \cdots, n)$ sont des Browniens indépendants.

Définition 1.1.11 ***(Mouvement Brownien géométrique)***
Soit W un mouvement Brownien, b et σ deux constantes. Le processus X défini par

$$\forall t \geq 0, \quad X_t = X_0 \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}$$

est un mouvement Brownien appelé mouvement Brownien géométrique.
Ce processus est aussi appelé "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \{b - \frac{1}{2}\sigma^2\}t + \sigma W_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

1.1.3 Quelques propriétés du mouvement brownien

Les propriétés suivantes sont classiques et très utiles pour les calculs.

Propriété de symétrie : Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, il en est de même de $(-W_t)_{t\geq 0}$.

Propriété d'échelle : Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, alors pour tout $c \geq 0$, il en est de même du processus $(W_t^c)_{t\geq 0}$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$W_t^c = \frac{1}{c} W_{c^2 t}.$$

Invariance par translation : Le mouvement Brownien translaté de $h \geq 0$, $(\widetilde{W}_t^h)_{t\geq 0} = (W_{t+h} - W_h)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, indépendant du mouvement Brownien arrêté en h $(W_s)_{0\leq s\leq h}$.

Retournement du temps : Le processus retourné à l'instant T, $\widehat{W}_t^T = W_T - W_{T-t}$ est un mouvement brownien sur [0, T].

1.1.4 Espérance conditionnelle

Définition 1.1.12 *Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B})$, et $A \in \mathcal{B}$ un évènement non-négligeable. Nous pouvons donc considérer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$. L'espérance de Y sachant A, notée $\mathbb{E}(Y/A)$, est l'espérance de Y pour cette probabilité $\mathbb{P}_A$, c'est-à-dire le nombre*

$$\mathbb{E}(Y \setminus A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} A(Y) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}\{Y = y\} \cap A.$$

C'est donc la moyenne des valeurs de Y pondérée par la probabilité qu'ont ces valeurs lorsque l'évènement A est supposé assuré.

Propriétés : Les égalités suivantes entre variable aléatoire s'entendent presque sûrement.

- $\mathbb{E}(1/\mathcal{B}) = 1$.
- ***Linéarité*** : $\mathbb{E}(aX + bY/\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$.
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$.

- Si Y est $\mathcal{B}$-mesurable alors $\mathbb{E}(Y.X/\mathcal{B}) = Y.\mathbb{E}(X \setminus \mathcal{B})$.
- Si X est indépendant de $\mathcal{B}$ alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$.

1.1.5 Martingale

Définition 1.1.13 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.*
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté tel que : $\mathbb{E}|X_t| < \infty, \quad \forall t \geq 0$.
On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est :

1. *une martingale si $\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E}(X_t \setminus \mathcal{F}_s) = X_s$,*
2. *une sur martingale si $\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$,*
3. *une sous-martingale si $\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$.*

Remarque : On déduit de cette définition que, si le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. Alors, pour tout t

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0).$$

Proposition 1.1.1 *[21] Si $(X_t)_{t\geq O}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard, alors*

1. *(X_t) est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
2. *$(X_t^2 - t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
3. *$\big(\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)\big)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t\geq o}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Nous allons donner un sens à $\int_0^t f(s,\omega)dW_s$ pour une classe de processus $f(s,\omega)$ adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires. Dans toute la suite, on fixe T un réel strictement positif et fini.

Définition 1.2.1 *(Processus élémentaire)*
Un processus réel $H = \{H_t,\ t \geq 0\}$ défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé élémentaire s'il peut s'écrire comme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}, \forall t \in [0, T],$$

où $t_0 \leq \cdots \leq t_n = T$ une subdivision de $[0, T]$ et $(\theta_i)_{0\leq i\leq n}$ est une suite de variables aléatoires telles que θ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et la variable aléatoire $\sup_i |\theta|_i$ est bornée. Dans toute la suite on note $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ l'ensemble des processus élémentaires définis sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.

Proposition 1.2.1 *[21] L'intégrale stochastique du processus élémentaire H contre le mouvement Brownien, satisfait les propriétés :*

1. *Le processus $\{\int_0^t H_u dW_u,\ 0 \leq t \leq T\}$ est $\mathbb{F}$- adapté et à trajectoires continues.*
2. *Le processus $\{\int_0^t H_u dW_u,\ 0 \leq t \leq T\}$est une $\mathbb{F}$-martingale qui démarre à zéro.*
3. *Le processus $\{\int_0^t H_u dW_u,\ 0 \leq t \leq T\}$ vérifie la propriété disométrie :*

$$\mathbb{E}[(\int_0^t H_u dW_u)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_u^2 du].$$

4. *Si K est un processus élémentaire, alors*

$$\mathbb{E}[(\int_s^t H_u dW_u)(\int_s^\tau K_u dW_u)] = \mathbb{E}[\int_s^{\min(t,\tau)} H_u K_u du \setminus \mathcal{F}_s].$$

5. *Le processus $\{\int_0^t H_u dW_u)^2 - \int_0^t H_u^2 du,\ 0 \leq t \leq T\}$ est une $\mathbb{F}$-martingale qui démarre à zéro.*
6. $\mathbb{E}\big(\sup_{t\leq T} | \int_0^t H_s dW_s |^2 \big) \leq 4\mathbb{E}\big(\int_0^T H_s^2 ds\big).$

On vient de définir et de donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à la classe de processus adaptés

$$\mathcal{H} = \big\{(H_t)_{O\leq t\leq T},\ \text{processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \ \mathbb{E}\big(\int_0^t H_s^2 ds\big) < \infty\big\}.$$

Proposition 1.2.2 *[21]*

Soit $(W_t)_{t\geq O}$ un $\mathcal{F}_t$-brownien. Alors il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{H}$ dans l'espace des $\mathcal{F}_t$-martingales continues définies sur $[0,T]$, telle que :

1. *Si $(H_t)_{t\leq T}$ est un processus élémentaire, $\mathbb{P}$ p.s. pour tout $0 \leq t \leq T$ $J(H)_t = I(H)_t$.*
2. *Si $t \leq T$, $\mathbb{E}\big(J(H)_t^2\big) = \mathbb{E}\big(\int_0^t H_s^2 ds\big)$.*

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si J et J' sont deux prolongements linéaires vérifiant les propriétés précédentes, alors

$$\mathbb{P}p.s. \qquad \forall 0 \leq t \leq T,\ \ J(H)_t = J'(H)_t$$

On note, si

$$H \in \mathcal{H},\ \ \int_0^t H_s dW_s = J(H)_t.$$

De plus cette intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.2.3 *[21] Si $(H_t)0 \leq t \leq T$ un processus de $\mathcal{H}$ alors :*

1. *on a*

$$\mathbb{E}\big(\sup_{t\leq T} \mid \int_0^t H_s dW_s \mid^2 \big) \leq 4\mathbb{E}\big(\int_0^T H_s^2 ds\big).$$

2. *Si τ est un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt :*

$$\int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^\tau \mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}} H_s dW_s.$$

Proposition 1.2.4 *(Intégrale de Wiener)*
Soit $f : [0,T] \longrightarrow R$ *une fonction dans* L^2. *Le processus* $\int_0^t f(s)dW_s, \quad t \in [0,T]$ *est appelé intégrale de Wiener et vérifie*

$$\int_0^t f(s)dW_s \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t f^2(s)ds).$$

1.2.2 Processus d'Itô

Définition 1.2.2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré muni d'une filtration et* W *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-mouvement Brownien. On appelle processus d'Itô un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\mathbb{P}$ *p.s*

$$\forall t \leq T \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

avec
- X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,*
- $K = (K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ *sont des processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$*adaptés tels que*

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_0^t |K_s| ds < \infty \quad \mathbb{P}p.s \qquad et \qquad \int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}p.s.$$

On note également sous forme différentielle :

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t.$$

1.2.3 Variation quadratique d'un processus d'Itô

Pour un processus d'Itô tel que défini plus haut, on pose : pour tout $t \in [0,T]$,

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Proposition 1.2.5 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus d'Itô. Alors*

1. *le processus* $(< X, X >_t)_{t\geq 0}$ *est un processus croissant (donc à variation finie).*

2. *Soit* $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{pn}^n = T$ *avec* $T \geq 0$ *fixé, une suite de subdivisions de* $[0,T]$ *telles que* $\sup_{0 \leq i \leq pn} \mid t_i^n - t_{i-1}^n \mid \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. *Alors, quand* n *tend vers l'infini,* $\sum_{i=1}^{pn}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$ *converge en probabilité vers* $< X, X >_T$.

1.2.4 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de d semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Théorème 1.2.1 *[21]* ***(Formule d'Itô unidimensionnel)***
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus d'Itô de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \qquad t \geq 0$$

et f une fonction deux fois continûment différentiablede classe sur $\mathbb{R}$. *Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)H_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s) d < X, X >_s,$$

où

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2 ds \quad et \quad \int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s)K_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s)H_s dW_s.$$

De même si $(t,x) \longmapsto f(t,x)$ *est une fonction deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en* t, *ces dérivées étant continues en* (t,x) (f *est de classe* $\mathcal{C}^{1,2}$), *on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s) d < X, X >_s .$$

Définition 1.2.3 ***(Formule d'Itô multidimensionnel)***
Soit W un mouvement Brownien standard d-dimensionnel.

Un processus stochastique $X = \{X_t, \quad t \in \mathbb{R}_+\}$ est appelé processus d'Itó d-dimensionnel s'il s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t H_s^k dW_s^k,$$

oú X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, $K = \{K_s, s \in \mathbb{R}_+\}$ et $\{H_s^k, s \in \mathbb{R}_+\}$, $k = 1, \cdots, d$ sont des processus $\mathcal{F}$-adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^t |K_s ds| < \infty \qquad et \qquad \int_0^t |H_s^k ds| < \infty \ \mathbb{P}p.s.$$

Nous notons également sous forme différentielle :

$$dX_t = K_s ds + \sum_{k=1}^{d} H_s^k dW_s^k$$

La classe des processus d'Itô multidimensionnelle sera notée toujours par $\beth$.

Proposition 1.2.6 *[21] Soient $(X_t^1, \cdots, X_t^n)$ n processus d'Itô de la forme :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} H_s^{i,j} dW_s^j$$

alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, x), on a

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \cdots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \cdots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(s, X_s^1, \cdots, X_s^n) d < X^i, X^j >_s \end{aligned}$$

où

$$dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} H_s^{i,j} dW_s^j \quad et \quad d < X^i, X^j >_s = \sum_{m=1}^{p} H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds.$$

1.2.5 Intégration par partie

Soient X,Y deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s.$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t < X, Y >_s$$

avec la notation

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

L'équation différentielle de cet intégration s'écrit de la forme :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X, Y >_t .$$

Démonstration : On a d'après la formule d'Itô,

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s H'_s)^2 ds.$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds.$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 ds.$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes,

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$$

1.3 Equation différentielle stochastique

On peut voir une équation différentielle stochastique comme une perturbation aléatoire rajoutée à une équation différentielle ordinaire.

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t & t \in \mathbb{R}^+ \\ X_0 = Z, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

- $X_0 = Z \in \mathbb{R}^d$ *est la valeur initiale de l'équation,*
- b *est une fonction mesurable de* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^d$,
- σ *est une fonction mesurable de* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^{d\times d'}$,
- *et* $\{W_t,\ t \geq 0\}$ *désigne le mouvement Brownien standard dans* $\mathbb{R}^{d'}$.

Le coefficient b *s'appelle la dérive et la matrice* $\sigma\sigma^*$ *est dite matrice de diffusion.*

Remarque *On ré-écrit formellement l'équation* (1.1) *sous la forme*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Définition 1.3.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *Un espace de probabilité filtré. On considère deux fonctions mesurables* b *et* σ, $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *et* $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d'}$, Z *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-mouvement brownien. Une solution à l'équation* (1.1) *est un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *continu* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté, qui vérifie :*

– *Pour tout* $t \geq 0$, *les intégrales* $\int_0^t b(s, X_s)ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ *ont un sens*

$$\int_0^t b \mid (s, X_s) \mid ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \mid \sigma(s, X_s) \mid^2 ds < +\infty \qquad \mathbb{P}p.s.$$

– $(X_t)_{t \geq 0}$ *vérifie l'équation* (1.1) *c'est-à-dire :*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

soit satisfaite pour tout t $\mathbb{P}$ *p.s.*

1.3.2 Solutions fortes

Définition 1.3.3 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t \in [0,T]}$ *est appelé une solution forte de l'EDS avec condition initiale* X_0 *si*

– X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \in [0, T]$,
– *on a les conditions de régularité*

$$\mathbb{P}\left\{ \int_0^T |b(s, X_s)|ds < \infty \right\} = \mathbb{P}\left\{ \int_0^T \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty \right\} = 1,$$

– *pour tout* $t \in [0, T]$, *on a*

$$X_t = X_0 + \int_0^T b(s, X_s)ds + \int_0^T \sigma(s, X_s)dW_s$$

avec probabilité 1.

1.3.3 Existence et unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique

Le caractère des EDS impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. On dit qu'il y'a :

Existence d'une solution faible si l'EDS (1.1) admet une solution X.

Existence d'une solution forte si l'EDS (1.1) admet une solution X qui soit adaptée à la filtration Brownien.

Unicité faible si tous les processus X solution de l'EDS (1.1) ont même loi.

Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité et le Brownien étant fixés, deux solutions quelconques X et X' de l'EDS (1.1) sont indistinguables au sens où

$$\mathbb{P}[\exists t \in \mathbb{R} \setminus X_t \neq X'_{t}] = 0.$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (1.1).

Théorème 1.3.1 *[21] Si b et σ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $K < +\infty$, avec*

1. $\mid b(t,x) - b(t,y) \mid + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid \leq K \mid x - y \mid$,
2. $\mid b(t,x) \mid + \mid \sigma(t,x) \mid \leq K(1+ \mid x \mid)$,
3. $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$,

alors, pour tout $T \geq 0$, l'équation (1.1) *admet une solution unique dans l'intervalle* $[0,T]$. *De plus cette solution $(X_s)_{0\leq s\leq T}$ vérifie*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s \mid^2\Big) < +\infty.$$

L'unicité signifie que si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ sont deux solutions de l'équation (1.1), alors

$$\mathbb{P}\ p.s. \qquad \forall\ 0 \leq t \leq T,\ \ X_t = Y_t.$$

1.3.4 Exponentielle stochastique

On fixe un horizon fini $T > 0$ et on suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$.

Définition 1.3.4 *Une exponentielle stochastique est un processus $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par*

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t(\beta) = e^{\int_0^t \beta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds}$$

où $\beta = (\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus stochastique adapté tel que $\mathbb{P}(\int_0^T \beta_t^2 dt < \infty) = 1$.

Proposition 1.3.1 *[17] Soit $\beta = (\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus stochastique adapté càdlàg tel que $\mathbb{E}(\int_0^t \beta_t^2 dt) < \infty$. La solution de l'équation différentielle stochastique*

$$d\mathcal{E}_t = \beta_t \mathcal{E}_t dW_t, \quad \mathcal{E}_0 = 1$$

est l'exponentielle stochastique $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t(\beta) = e^{\int_0^t \beta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds}.$$

De plus, si $\mathbb{E}(\exp[\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt]) < \infty$, alors le processus $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale d'espérance 1.

1.4 Changement de probabilité, théorème de Girsanov, théorème de représentation des martingales

1.4.1 Changement de probabilité

Définition 1.4.1 *Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ définit un changement de probabilité (par rapport à $\mathbb{P}$), s'il existe une variable aléatoire Y positive, tel que :*

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Y.\mathbb{1}_A] \quad si \quad A \in \mathcal{F}$$

La variable aléatoire Y s'appelle la densité ou la vraisemblance de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.
On note en général

$$\mathbb{Q} = Y.\mathbb{P}, \quad ou \quad d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}, \quad ou \quad \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y.$$

1.4.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\ T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard $(W_t)_{0\leq t\leq\ T}$ indexé par l'intervalle de temps $[0, T]$.

Théorème 1.4.1 *[20](Théorème de Girsanov)*
Soit (θ_t) un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s et tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq\ T}$ défini par

$$L_t = \exp(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}^L$ de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(W_t)_{0\leq t\leq\ T}$ défini par :

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est un mouvement Brownien standard par rapport la filtration $\mathcal{F}_t$.

1.4.3 Théorème de représentation des martingales Browniennes

Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement Brownien standard, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle. Soit $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$, le processus $(\int_0^t H_s dW_s)$ est une martingale de carré intégrable nulle en 0.
Le théorème suivant montre que toutes les martingales Browniens peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

Théorème 1.4.2 *[20] Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration Brownienne $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que*

$$\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty,$$

et

$$\forall t \in [0, T] \qquad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad p.s.$$

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Il résulte du théorème que si U est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable, on peut écrire

$$U = \mathbb{E}(U) + \int_0^T H_s dW_s \;\; p.s$$

où (H_t) est un processus adapté tel que

$$\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 ds) < +\infty.$$

Il suffit, pour montrer cela, de considérer la martingale $M_t = \mathbb{E}(U/\mathcal{F}_t)$. On démontre aussi que si $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale (non nécessairement de carré intégrable), il existe une représentation de la forme $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad p.s.$, mais avec un processus H vérifiant seulement $\int_0^T H_t^2 ds < \infty \qquad p.s.$

Chapitre 2

Marché financier en temps continu

2.1 Marché financier

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (***corporate finance***) et la finance de marché (***market finance***).

Définition 2.1.1 *Un marché financier est un marché sur lequel des personnes, des sociétés privées et des institution publiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande.*

2.1.1 Vocabulaire des marchés financiers

Un titre financier : est un contrat où les parties s'échangent des flux d'argent.

La valeur d'un titre financier : est un montant positif ou négatif qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs.

Le prix d'un titre : est un montant convenu entre deux parties en échange du titre le plus souvent c'est l'acheteur qui verse ce montant.

2.1.2 Rôle des marchés financiers

Les principales caractéristiques d'un marché financier sont :

– La rencontre de deux contre parties (vendeur et acheteur).

- La cotation continue des produits financiers.
- L'élaboration de bonnes conditions pour les transactions en prenant en compte les objectifs opposés des acteurs du marché.

2.2 Les actifs financiers

Sur les marchés financiers les intervenants achètent et vendent des biens divers à un prix qui la plus part du temps semble varier de manière assez aléatoire de l'offre et la demande.
On a deux catégories des actifs financiers : actif risqué et actif non risqué.

Actif risqué : Un actif risqué est un actif qui ne peut garantir, de manière certaine, les flux de rémunération et de remboursement d'un investisseur (particuliers ou institutionnels).
Un actif risqué est donc considéré comme ayant un risque de défaut. Une valeur mobilière de type action ou un produit dérivé (contrats ou options) correspond à un actif risqué.
L'actif risqué a néanmoins comme avantage de proposer des taux de rendement plus élevé.

Actif sans risque : Actif qui ne comporte pas de risque de non-remboursement et dont la rentabilité est garantie. Les emprunts d'Etat font figure de référence en matière d'actifs sans risque.

2.3 Modélisations probabilistes d'un marché financier

Dans le cadre probabiliste, nous réalisons la modélisation des aléas du marché financier via un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$, où

- Ω est l'ensemble de tous les scénarii de marché possibles,
- $\mathcal{F}$ est la tribu qui représente la structure d'information global disponible sur le marché,
- les aléas sont générés par un mouvement Brownien réel $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, qui engendre une filtration croissante $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, décrivant l'information disponible pour tous les

acteurs du marché au fil du temps (tout le monde a la même information, pas de délit d'identité),

– la probabilité $\mathbb{P}$ est appelée ***probabilité historique ou objectif***.

2.3.1 Les actifs présents sur le marché

On se place dans le cadre d'un marché financier constitué d'un actif sans risque et d actif risqués.

L'actif sans risque : Dans cet actif le taux sans risque est modélisé par un processus $\mathcal{F}_t-$mesurable $(r_t)_{t\in[0,T]}$ peut être supposé constant (appelé le taux d'intérêt). Un dinars placé sur une intervalle de temps $[0, dt]$ rapporte un rendement $r_t dt$. Autrement dit, un dinars placé à la date s rapporte à la date $t > s$ la somme $e^{\int_s^t r_u du}$. On note par S_t^0 la valeur de prix de cet actif à l'instant t.

Les actifs risqués : Si on notera par S_t la valeur (aléatoire) de prix d'un actif risqué à l'instant $t \in [0, T]$, alors cet actif risqué est modélisé par un processus stochastique $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ qu' on supposera continu et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ avec la tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible sur le marché à la date t.

La dynamique de l'évolution des prix des actifs financiers est donnée par un modèle financier appelé modèle de Black-Scholes qui sera présenté par :
On suppose que le marché financier est formé par un actif sans risque de prix S_t^0 et un actif risqué de prix S_t, alors

– le prix S_t^0 est regie par l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} dS_t^0 = r_t S_t^0 dt \\ S_0^0 = 1, \end{cases}$$

où r_t est le taux d'intérêt et la solution de cette équation est définie par

$$S_t^0 = S_0^0 e^{\int_0^t r_u du}, \qquad t \in [0, T] \text{ avec } T \text{ la date d'échéance.}$$

– La dynamique du prix S_t est donnée par l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ S_0 = s > 0 \end{cases}$$

où
- $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
- μ_t est le rendement instantané de S_0 est appelée la "tendance",
- σ_t est appelée "volatilité" de S, elle mesure la taille de l'incertitude.

Remarque : On peut considérer des modèles où les coefficients μ et σ sont déterministes : $\mu = \mu(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, sont des fonctions du temps et du prix : $\mu = \mu(t, s), \sigma = \sigma(t, s)$, on parle alors de modèle de diffusion avec volatilité locale, ou encore des processus aléatoires.

Définition 2.3.1 *Un **portefeuille autofinançant** est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. On notera X_t la valeur en t du portefeuille X.*

Définition 2.3.2 *Un **arbitrage** sur la période $[0, T]$ est un portefeuille autofinançant X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive.*

$$X_0 = 0, \quad X_T \geq 0 \quad et \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$$

La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit.
On imagine sans peine que les gens qui tentent de réguler le marché cherchent à tout prix à proscrire les opportunités d'arbitrage. En effet, si de telles opportunités sont admises le marché ne tarde pas à "exploser". Une hypothèse communément faite est donc celle d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA, no free lunch) entre tout instant 0 et T.

$$\{X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_T \geq 0\} \Longrightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

Hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée absence d'opportunités d'arbitrage. Elle est justifiée théoriquement par l'unicité des prix caractérisant un marché en concurrence pure et parfaite. Pratiquement, il existe des arbitrages qui disparaissent très rapidement du fait de l'existence d'arbitragistes, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter. Ces acteurs créent alors normalement une force qui tend à faire évoluer le prix de l'actif vers son prix de non-arbitrage. Ces opérations d'arbitrage sont effectuées instantanément et ne doivent pas être confondues avec des opérations par lesquelles un investisseur joue le retour à moyen ou long terme d'un actif vers des fondamentaux historiques. En conséquence, l'existence de bulles et de krachs ne remet pas en cause cette hypothèse (mais elle remet en revanche en cause l'hypothèse d'efficience des marchés).

2.4 Complétude du marché

Pour l'évaluation des prix, il est primordial de pouvoir dupliquer le produit financier étudié.
Un modèle de marché est dit complet si tout portefeuille X peut être généré par une stratégie d'investissement. Sinon le modèle est dit incomplet.

En toute généralité, il n'est pas possible de déterminer le prix dans un marché incomplet. On ne peut déterminer qu'une fourchette de prix.

Définition 2.4.1 *(Probabilité risque-neutre)*
Une mesure de probabilité risque neutre (ou mesure martingale) est une probabilité $\mathbb{Q}$ telle que

- $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ *pour tout scenario* $\omega \in \Omega$.
- *tous les processus* $(S_t^*)_{t\in[0,T]}$ *de prix actualisés sont des martingales sous* $\mathbb{Q}$ *avec*

$$S_t^* = \frac{S_t}{S_t^0} \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,T].$$

Remarque : *Le modèle de marché financier est complet, si et seulement si, il existe une unique probabilité risque neutre.*

2.5 Investissement et consommation en temps continu

2.6 Le modèle de marché financier

On considère un marché financier de type de black-scholes consiste $(d+1)$ actifs financiers, l'un sans risque (obligation) de prix S_t^0 et les d autres sont risqués (actions) de prix $S_t^1, S_t^2, \cdots, S_t^d$.

- Le prix de l'actif sans risque S_t^0 régie par l'équation différentielle ordinaire suivant :

$$dS_t^0 = S_0 r_t dt \qquad S_0^0 = 1,$$

  où r_t est le taux d'intérêt.
- L'évolution du cours des d actifs risqués est regie par le système des équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dS_t^i = S_t^i(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j), \quad i = 1, \cdots, d \\ \\ S_0^i > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- $(W_t)_t = (W_t^1, \cdots, W_t^d)$ est un mouvement brownien d-dimensionnel,
- $\mu_t = (\mu_t^1, \cdots, \mu_t^d)'$ est le vecteur de taux de rendement,
- $\sigma_t = (\sigma_t^{ij})_t$ est la matrice de volatilité.

L'incertitude de ce marché financier est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\ s \leq t\},\ t \geq 0$ est la tribu engendrée par le mouvement Brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ augmentée par les ensembles négligeables et on travail sur l'intervalle du temps $[0, T]$ avec $T > 0$ est la date d'échéance.

Les coefficients r_t, μ_t et σ_t sont des fonctions déterministes continues à droite admet des limites à gauche (cadlàg), de plus la matrice σ_t est non singulier.

2.6.1 Stratégie d'investissement et processus de richesse

On considère un agent investi dans ce marché la quantité (ϕ_t, ψ_t), où
- ϕ_t est la quantité détenue dans l'actif sans risque,
- $\psi_t = (\psi_t^1, \cdots, \psi_t^d)$ est le vecteur des quantités détenues d'actif risqué respectivement.

Alors, on a la définition suivante :

Définition 2.6.1 *Une stratégie financière est un processus stochastique $H = (\phi_t, \psi_t)_{t\in[0,T]}$ avec $(\phi_t, \psi_t) = (\phi_t, \psi_t^1, \cdots, \psi_t^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}-$progressivement mesurable, et tel que les intégrales*

$$\int_0^T \phi_t dS_t^0 \quad et \quad \int_0^T \psi_t^i dS_t^i \qquad 1 \leq i \leq d$$

aient un sens et la valeur à $t \in [0,T]$ du portefeuille est donnée par

$$X_t = \phi_t S_0(t) + \sum_{i=1}^d \psi_t^i S_t^i.$$

Le processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est appelé aussi processus de richesse.

2.6.2 Stratégie de consommation

On considère que cet agent est consomme à chaque instant $t \in [0,T]$ une quantité de sa richesse.
Soit c_t la quantité du consommation de l'agent à l'instant $t \in [0,T]$ alors, le processus du consommation $(c_t)_{0\leq t\leq T}$ est une vitesse de la consommation sur l'intervalle $[0,T]$, c'est-à-dire que c'est un processus non négatif progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ et presque sûrement intégrable sur l'intervalle $[0,T]$

$$\int_0^T c_t dt < \infty \quad p.s.$$

et de plus la valeur de richesse est donnée par

$$X_t = \phi_t S_0(t) + \sum_{i=1}^d \psi_t^i S_t^i - \int_0^t c_u du.$$

2.6.3 Stratégie financière avec consommation autofinancée

Définition 2.6.2 *Une stratégie financière* $((\phi_t, \psi_t))_{t\geq 0}$ *avec une consommation* $(c_t)_{t\geq 0}$ *est dite autofinancée si la valeur de portefeuille associée à l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$X_t = x + \int_0^t \phi_u dS_0(u) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \psi^i(u) dS^i(u) - \int_0^t c_u du, \quad t \geq 0,$$

où

- $x > 0$ *est la richesse initiale,*
- $\int_0^t c_u du$ *représente le montant consommé sur l'intervalle* $[0, t]$.

Les changements de valeur du portefeuille proviennent uniquement des changements de valeur des actifs. Il n'y a ni retrait ni injection de cash entre 0 *et* T. *Une stratégie autofinancée est donc une stratégie où la seule marge de manœuvre est de pouvoir réagencer les actifs en permanence.*

2.6.4 La dynamique de l'évolution de la richesse

Pour l'écriture de l'équation différentielle stochastique de la richesse dans un état simple, on va travailler dans tout la suite sur les quantités relatives par rapport à la richesse, donc pour $i = 1, \cdots, d$, on définit :

$$\begin{aligned} \pi_t^i &= \frac{\psi_t^i S^i(t)}{\phi_t S_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \psi_i(t) S_i(t)} \\ &= \frac{\psi_t^i S^i(t)}{X_t}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

où $\pi(t) = (\pi_1(t), \cdots, \pi_d(t))'$, $t \geq 0$ est un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vérifie pour l'horizon d'investissement fixé $T > 0$

$$\| \pi_t \|_T^2 = \int_0^T | \pi_t |^2 \, dt < \infty.$$

On pose aussi

$$\upsilon_t = \frac{c_t}{X_t},$$

où υ_t est le rapport de la consommation par rapport à la richesse. De plus, si on définit avec $\mathbb{1} = (1, \cdots, 1)' \in \mathbb{R}^d$ les quantités :

$$y_t = \sigma_t^{'}\pi_t \qquad \text{et} \qquad \theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t\mathbb{1}) \tag{2.2}$$

où

$$\| \theta \|_T^2 = \int_0^T \mid \theta_t \mid^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \| y \|_T^2 = \int_0^T \mid y_t \mid^2 dt < \infty. \tag{2.3}$$

Alors, à partir de ce changement, l'équation différentielle stochastique de la richesse est donnée par :

$$dX_t = X_t(r_t + y_t^{'}\theta_t - \upsilon_t)dt + X_t y_t^{'} dW_t, \qquad X_0 = x > 0. \tag{2.4}$$

Proposition 2.6.1 *Sous les hypothèses et les définitions précédentes, l'équation différentielle stochastique* (2.4) *admet une unique solution forte définie pour tout* $t \in [0, T]$ *par*

$$X_t = x \exp\big(R_t - V_t + (y, \theta)_t\big)\xi_t(y)$$

où

$$R_t = \int_0^t r_u du, \qquad (y, \theta)_t = \int_0^t y_u' \theta_u du \quad \textit{et} \quad V_t = \int_0^t \upsilon_u du \tag{2.5}$$

et $(\xi_t(y))_{t \geq 0}$ *indique l'exponentiel stochastique défini comme suit :*

$$\xi_t(y) = \exp(\textstyle\int_0^t y_u' dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t |y_u|^2 du), \qquad t \geq 0.$$

Preuve : L'équation différentielle stochastique (2.4) est linéaire donc, admet une unique solution forte. On utilise la formule d'Itô à la fonction de classe C^2 définie par $f(x) = ln(x)$, pour l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = X_t(r_t - \upsilon_t + y_t'\theta_t)dt + X_t y_t' dW_t$$

On pose :

- $K_t = X_t(r_t - v_t + y_t'\theta_t)$
- $H_t = X_t y_t'$
- $f'(X_u) = \frac{1}{X_u}$
- $f''(X_u) = \frac{-1}{X_u^2}$
- $f(X_0) = ln(X_0)$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t f'(X_u)dX_u &= \int_0^t f'(X_u)K_u du + \int_0^t f'(X_u)H_u dW_u \\
&= \int_0^t \frac{1}{X_u} \times X_u(r_u - v_u + y_u'\theta_u)ds + \int_0^t \frac{1}{X_u} \times X_u y_s' dW_u \\
&= \int_0^t (r_u - v_u + y_u'\theta_u)du + \int_0^t y_s' dW_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< X, X >_t &= \int_0^t H_s^2 du \\
&= \int_0^t X_u^2 y_u^2 du
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)dX_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_u)d < X, X >_u \\
&= ln(X_0) + \int_0^t (r_u - v_u + y_u'\theta_u)du + \int_0^t y_u' dW_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{X_u^2} \times X_u^2 y_u^2 du \\
&= ln(X_0) + \int_0^t (r_u - v_u + y_u'\theta_u)du + \int_0^t y_u' dW_u - \int_0^t \frac{1}{2} y_u^2 du,
\end{aligned}$$

et comme $f(x) = ln(x)$, on obtient

$$ln(X_t) = ln(X_0) + \int_0^t (r_u - v_u + y_u'\theta_u)du + \big(\int_0^t y_u' dW_u - \int_0^t \frac{1}{2} y_u^2 du\big).$$

Et on déduit que :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 \exp\left(\int_0^t r_u - \upsilon_u + y'_u \theta_u du\right) \exp\left(\int_0^t y'_u dW_u - \int_0^t \frac{1}{2} y_u^2 du\right) \\ &= x \exp\left(\int_0^t r_u - \upsilon_u + y'_u \theta_u ds\right) \xi_t(y) \end{aligned}$$

avec

$$\xi_t(y) = \exp\left(\int_0^t y'_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t y_u^2 ds\right).$$

■

2.7 L'ensemble des contrôles et la fonction de coût

2.7.1 Processus de contrôle

La dynamique de l'évolution de la richesse qui donnée par l'équation différentielle stochastique (2.4) est influencée par un contrôle ν depend de la stratégie d'investissement y_t et le rapport de la consommation υ_t, donc on a la définition suivante de processus de contrôle.

Définition 2.7.1 *Un processus de contrôle $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0}$ est définit par $\nu_t = (y_t, \upsilon_t)$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ tel que*

$$y_t = \sigma'_t \pi_t \qquad et \qquad \upsilon_t = \frac{c_t}{X_t} \tag{2.6}$$

$$\| y \|_T^2 = \int_0^T |y_t|^2 dt < \infty \qquad et \qquad \int_0^T \upsilon_t dt < +\infty. \tag{2.7}$$

Définition 2.7.2 *Un processus de contrôle $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0} = (y_t, \upsilon_t)_{t \geq 0}$ est dit admissible s'il est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\| y \|_T^2 = \int_0^T | y_t |^2 dt < \infty \quad et \quad \int_0^T \upsilon_t dt < \infty.$$

- *De plus, l'équation différentielle stochastique* (2.4) *admet une unique solution forte presque sûrement positive sur l'intervalle* $[0, T]$.

Nous désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les processus de contrôle admissible et on note par X_t^ν la valeur de richesse corespendant à un contrôle admissible ν.

Définition 2.7.3 *(Fonction de coût)*
Pour une richesse initiale $x > 0$ *et pour un processus de contrôle* $(\nu_t)_{t\geq 0}$ *dans* $\mathcal{V}$, *on introduit une fonction appelée fonction de coût (fonction objectif) définie par*

$$J(x,\nu) = \mathbb{E}_x\Big(\int_0^T U(c_t)dt + h(X_T^\nu)\Big) \tag{2.8}$$

où

- $\mathbb{E}_x$ *est l'espérance conditionnelle sachant que* $X_0^\nu = x$,
- $U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction d'utilité,*
- $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction d'héritage.*

Remarque 2.7.1

- *La fonction d'utilité* U *représente la satisfaction liée directement à la consommation.*
- *La fonction d'héritage* h *est croissante ce qui exprime l'amour de la richesse de l'individu.*
- *La fonction d'utilité* U *et la fonction d'héritage* h *sont supposées usuellement concaves pour formaliser l'aversion pour le risque de l'individu.*

Dans notre travaille, on suppose que la fonction d'utilité U et la fonction d'héritage h sont des fonctions logarithmique c'est-à-dire :

$$U(z) = h(z) = \ln(z),$$

et dans ce cas la fonction de coût définie par

$$\begin{aligned} J(x,\nu) &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^T \ln c_t dt + \ln X_T^\nu\Big) \\ &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^T \ln(\upsilon_t X_t)dt + \ln X_T^\nu\Big). \end{aligned}$$

2.7.2 Investissement et consommation optimale sans contrainte

L'étude de la consommation et l'investissement optimaux est basés sur la résolution du problème d'optimisation stochastique sans contrainte suivant :

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(X, \nu). \tag{2.9}$$

Pour formuler la solution de ce problème, on pose :

$$w(t) = T - t + 1$$

et

$$\widehat{r}_t = r_t + \frac{\mid \theta_t \mid^2}{2}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

et le résultat de la solution est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.7.1 *[17] La valeur optimale de $J(x, \nu)$ est donnée par*

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = (T+1) \ln \frac{x}{T+1} + \int_0^T \widehat{r}_t dt.$$

Le processus de contrôle optimal $\nu^* = (y_t^*, \upsilon_t^*)_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{V}$ est de la forme

$$y_t^* = \theta_t \qquad \text{et} \qquad \upsilon_t^* = \frac{1}{w(t)} \tag{2.10}$$

où le processus optimal de richesse $(X)_{0 \leq t \leq T}$ est donné comme solution pour

$$dX_t^* = X_t^*(r_t + \mid \theta_t \mid^2 - \upsilon_t^*)dt + X_t^* \theta_t^{'} dW_t, \qquad X_0^* = x, \tag{2.11}$$

qui est

$$X_t^* = x \frac{T+1-t}{T+1} \exp\left(\int_0^t \widehat{r}_u du + \int_0^t \theta_u^{'} dW_u \right).$$

Démonstration : Voir (Karatzas and Shreve [17], Example 6.6, p.104).

Remarque : On note que la solution optimale (2.10) du problème (2.9) est déterministe, et on note dans la suite par $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions déterministes satisfaisant les conditions

$$\int_0^T |y_t|^2 dt < \infty \qquad\qquad \int_0^T \upsilon_t dt < \infty,$$

et

$$\int_0^T (\ln \upsilon_t)_- dt < \infty.$$

Pour le résultat ci-dessus, nous pouvons affirmer que

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu) = \max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu)$$

Intuitivement, il est clair que pour construire des portefeuilles financiers sur le modèle de marché, l'investisseur ne peut invoquer que les informations fournies par les coefficients $(r_t)_{0 \le t \le T}$, $(\mu_t)_{0 \le t \le T}$ qui sont des fonctions déterministes.

Alors pour $\nu \in \mathcal{U}$, selon la formule d'Itô, l'équation (2.3) a la solution

$$X_t^\nu = x\xi_t(y)e^{R_t - V_t + (y,\theta)_t}.$$

Par conséquent, pour $\nu \in \mathcal{U}$, le processus $(X_t^\nu)_{0 \le t \le T}$ est positif, continu et satisfait

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E} \mid \ln X_t^\nu \mid < \infty.$$

Cela implique que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. De plus, pour $\nu \in \mathcal{U}$, nous pouvons calculer la fonction de coût(2.8) explicitement comme

$$J(x, \nu) = (T+1)\ln x + \int_0^T w(t)\big(r_t + y_t^{'}\theta_t - \frac{1}{2} \mid y_t \mid^2 \big)dt + \int_0^T \big(\ln \upsilon_t - V_t\big)dt - V_T. \quad (2.12)$$

Chapitre 3

Investissement et consommation optimale avec contrainte

Pour la gestion d'un portefeuille d'un agent dans le marché financier défini dans le chapitre précédent, on suppose que l'agent cherche à déterminer la stratégie financière optimale qui maximise l'utilité de la consommation attendue sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et la richesse terminale à la date d'échéance T et satisfait à une contrainte basée sur la mesure de risque VaR "Value-at-risk". En utilisant des fonctions d'utilités logarithmiques, et après la définition de la valeur à risque VaR et formulation de la condition de contrainte, on va déterminer cette stratégie optimale par résolution d'un problème d'optimisation stochastique avec contrainte et décrire la dynamique de l'évolution de la richesse optimale de cet agent.

3.1 Valeur à risque VaR "Value at Risk"

La Value at Risk ou plus simplement VaR, est un outil de gestion de risque utilisé dans les institutions financières. C'est une mesure de risque représentant la perte potentielle maximale que peut subir un portefeuille à un niveau de probabilité préalablement fixé sur une période de temps bien déterminée. Cet outil correspond aux recommandations des organismes régulateurs. Il dépend de la loi de distribution des rendements financiers.

Quantiles : Nous allons très souvent utiliser la notion du quantile dans la suite pour définir la mesure de risque valeur à risque VaR parce que les quantiles sont la base de la modélisation financière du risque. Ils représentent le rendement potentiel des actifs à une probabilité donnée sur un intervalle de temps déterminé.

Définition 3.1.1 *Soit $\alpha \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire continue. On appelle quantile de X, la valeur que prend la fonction de répartition inverse associée à cette dernière pour une probabilité α donnée. On note ce quantile q_α tel que :*

$$\begin{aligned} q_\alpha(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\} \\ &= F_X^{-1}(\alpha), \end{aligned}$$

où F_X^{-1} X est la fonction de répartition inverse associée à X si elle existe.

Remarque : Pour α proche de 1, le quantile $q_\alpha(X)$ représente le gain maximal (par rapport au prix ou au rendement) que peut avoir un investisseur sur un horizon bien déterminé et à un seuil α préalablement fixé. Les économistes, gestionnaires de risque et les financiers s'intéressent généralement à l'opposé de ce quantile afin de prédire la perte maximale qu'ils peuvent subir. Ils visent ainsi à déterminer les dépassements potentiels par rapport au seuil α que leurs portefeuilles sont susceptibles de subir sur un intervalle de temps donné.

Définition 3.1.2 *Soit X une variable aléatoire représentant le rendement d'un instrument financier. Elle est considérée en tant que gain si elle est positive et perte si elle est négative. Soit $\alpha \in [0, 1]$ le seuil par rapport auquel on souhaite déterminer la perte potentielle (Si a est proche de 1 c'est un seuil de confiance sinon il s'agit d'un niveau de risque). La Value-at-Risk est donnée par :*

$$VaR_\alpha^+(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\} = q_{1-\alpha}(-X).$$

Ici, VaR^+ est par définition une quantité positive. Il est parfois naturel et pratique d'utiliser $VaR = -VaR^+$, qui sera donc négative et qui peut se comparer aux pertes (signées).

À la situation de notre modèle dans le chapitre précédent, la mesure de risque VaR est définie comme suit :

Définition 3.1.3 *La valeur à risque VaR est définie pour une dotation initiale $x > 0$, un processus de contrôle $\nu \in \mathcal{U}$ et $0 \leq \alpha \leq 1/2$ par*

$$VaR_t(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t} - Q_t, \qquad t \geq 0,$$

où $Q_t = Q_t(x, \nu, \alpha)$ est le α-quantile de X_t^ν, c'est-à-dire

$$Q_t = \inf\{z \geq 0 : \mathbb{P}(X_t^\nu \leq z) \geq \alpha\}.$$

Corollaire 3.1.1 *[10]Dans la situation de la définition 3.1.3 précédente, pour tout $\nu \in \mathcal{U}$ le α-quantile Q_t est donné par*

$$Q_t = x \exp\left(R_t - V_t + (y, \theta)_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t\right), \qquad t \geq 0,$$

où q_α est le α-quantile de la distribution normale standard, et les autres grandeurs sont définies dans (2.2) et (2.5).

On définit la fonction de niveau de risque "*level risk function*" pour un certain coefficient $0 < \zeta < 1$ par

$$\zeta_t(x) = \zeta x e^{R_t}, \qquad t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

On ne considère que les contrôles $\nu \in \mathcal{U}$ pour lesquels la valeur à risque VaR est bornée par la fonction de niveau de risque (3.1) sur l'intervalle $[0, T]$; c'est-à-dire on exige

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{VaR_t(x, \nu, \alpha)}{\zeta_t(x)} \leq 1. \tag{3.2}$$

Remarques :

1. Le coefficient ζ introduit une certaine aversion pour le risque de comportement dans le modèle. En ce sens, il agit de même comme une fonction l'utilité fait. La différence, toute fois, c'est que ζ a une interprétation claire, et tout les investisseurs peuvent choisir et comprendre l'influence de ζ à l'égard du risque correspondant.

2. Si $\|y\|_t = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, alors

$$VaR_t(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t}(1 - e^{-V_t}), \qquad 0 \le t \le T.$$

   En revanche, si $\|y\|_t > 0$ pour $t \in [0, T]$, alors

$$\underset{\alpha \longrightarrow 0}{lim} VaR_t(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t}.$$

   Cela signifie que le choix de α influence sur la borne de risque (3.2). On note, toutefois, que α est choisie par les autorités de réglementation et non par l'investisseur. L'investisseur choisit seulement la valeur ζ. Si ζ est proche de 0, le niveau de risque est plutôt faible, alors que pour ζ proche de 1, le niveau de risque est assez élevé, en effet, dans ce cas, les bornes de risque ne devraient pas être restrictif du tout.

3. Comme la borne de risque (3.2) implique tout le chemin échantillon de la $(X_t^\nu)_{0 \le t \le T}$, alors on ne peut que considérer les problèmes d'optimisation de contrainte dans l'ensemble des stratégies $\mathcal{U}$.

3.2 Problème et solution

On considère maintenant un problème d'optimisation stochastique qui concerne les bornes sur les valeurs à risque "Value-at-Risk". Donc nous nous intéressons à résoudre le problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) \quad \text{sous la contrainte} \quad \sup_{0 \le t \le T} \frac{VaR_t(x, \nu, \alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1. \tag{3.3}$$

Avant de formuler la solution de ce problème, on définit d'abord des fonctions et prouver des lemmes qui sont intéréssants dans la suite. Donc pour $u \ge 0, \lambda \ge 0$

$$G(u, \lambda) = \int_0^T \frac{(\omega(t) + \lambda)^2}{(\lambda |q_\alpha| + u(\omega(t) + \lambda))^2} |\theta_t|^2 dt, \tag{3.4}$$

et pour $\lambda > 0$ fixé, on définit $\rho(\lambda)$ par

$$\begin{cases} \rho(\lambda) = \inf\{u \ge 0 : G(u, \lambda) \le 1\}, & \text{s'il existe} \\ \\ \rho(\lambda) = +\infty & \text{si non.} \end{cases} \tag{3.5}$$

De plus, on définit la fonction de poids τ_λ par :

$$\tau_\lambda(t) = \frac{\rho(\lambda)(\omega(t)+\lambda)}{\lambda \mid q_\alpha \mid + \rho(\lambda)(\omega(t)+\lambda)} \qquad \text{avec } \lambda \geq 0 \text{ est fixé et } \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.6}$$

et on pose $\tau_\lambda(.) \equiv 1$ pour tout $\rho(\lambda) = \infty$.
Il est clair que pour chaque $\lambda \geq 0$ fixé et pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$0 \leq \tau_\lambda(T) \leq \tau_\lambda(t) \leq 1. \tag{3.7}$$

Pour prendre en compte la contrainte VaR, on défine une fonction Φ par

$$\Phi(\lambda) = \mid q_\alpha \mid \| \tau_\lambda \theta \|_T + \frac{1}{2} - \| \sqrt{\tau_\lambda \theta} \|_T^2.$$

L'existance de l'inverse quelque propriétés de cette fonction sont prouvés par les deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1 *Pour tout $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, la fonction $\tau_\lambda(t)$ est continuement différentiable par rapport à λ et sa dérivée partielle est donnée par :*

$$\tau_1(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \tau_\lambda(t) < 0, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

De plus, pour tout

$$\mid q_\alpha \mid \geq 2(T+1) \| \theta \|_T,$$

la dérivée $\dot{\Phi}(\lambda)$ est strictement négative pour tout $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$.

Preuve : Tout d'abord, on note que

$$\tau_1(t, \lambda) = - \mid q_\alpha \mid \frac{(\rho(\lambda)\omega(t) - \lambda \dot{\rho}(\lambda)(\omega(t)+\lambda))}{(\lambda \mid q_\alpha \mid + \rho(\lambda)(\omega(t)+\lambda))^2},$$

et par la définition de $\rho(\lambda)$, on obtient :

$$G(\rho(\lambda), \lambda) = 1, \qquad 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

Donc :

$$\dot{\rho}(\lambda) = -\frac{G_2(\rho(\lambda), \lambda)}{G_1(\rho(\lambda), \lambda)},$$

avec

$$G_1(u, \lambda) = \frac{\partial G(u, \lambda)}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad G_2(u, \lambda) = \frac{\partial G(u, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

On utilisant la définition (3.4) de la fonction G, on obtient

$$G_1(u, \lambda) = -2 \int_0^T \frac{(\omega(t) + \lambda)^3}{\lambda \mid q_\alpha \mid + u(\omega(t) + \lambda)^3} \mid \theta_t \mid^2 dt$$

et

$$G_2(u, \lambda) = -2 \mid q_\alpha \mid \int_0^T \frac{\omega(t)(\omega(t) + \lambda)}{\lambda \mid q_\alpha \mid + u(\omega(t) + \lambda)^3} \mid \theta_t \mid^2 dt.$$

Par conséquent, pour tout $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ et $0 \leq t \leq T$

$$\dot{\rho}(\lambda) < 0 \qquad \text{et} \qquad \tau_1(t, \lambda) < 0.$$

Maintenant, on calcule la dérivée de Φ par rapport à λ :

$$\dot{\Phi}(\lambda) = \int_0^T \widehat{\tau}(t, \lambda) \tau_1(t, \lambda) \mid \theta_t \mid^2 dt \tag{3.8}$$

où

$$\widehat{\tau}(t, \lambda) = \frac{\mid q_\alpha \mid \tau(t, \lambda)}{\parallel \tau_\lambda \theta \parallel_T} - 1 + \tau(t, \lambda).$$

Pour estimer le terme $\widehat{\tau}(t, \lambda)$, on note que par les inégalités (3.7) :

$$\frac{\tau(t, \lambda)}{\parallel \tau_\lambda \theta \parallel_T} \geq \frac{\tau(T, \lambda)}{\tau(0, \lambda) \parallel \theta \parallel_T} \geq \frac{1}{(T+1) \parallel \theta \parallel_T}.$$

et celà implique que

$$\widehat{\tau}(t, \lambda) \geq \frac{\mid q_\alpha \mid}{(T+1) \parallel \theta \parallel_T} - 1, \tag{3.9}$$

et pour $\mid q_\alpha \mid \geq 2(T+1) \parallel \theta \parallel_T$, on en déduit que pour tout $0 \leq t \leq T$ et $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ on a : $\widehat{\tau}(t,\lambda) > 0$ c'est à dire : $\dot{\Phi}(\lambda) < 0$.

■

Lemme 3.2.2 *On suppose que* $\|\theta\|_T > 0$ *et*

$$0 < \zeta < 1 - e^{-|q_\alpha|\|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2}. \tag{3.10}$$

Alors, pour tout $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$ *l'inverse* $\Phi^{-1}(a)$ *existe et on a*

$$\begin{cases} 0 \leq \Phi^{-1}(a) < \lambda_{\max} \quad \textit{pour} \qquad 0 < a \leq -\ln(1-\zeta) \\ \\ \Phi^{-1}(0) = \lambda_{\max}. \end{cases}$$

Preuve : En prenant que $\tau_0(.) \equiv 1$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \mid q_\alpha \mid\mid \tau_0\theta \parallel_T + \frac{1}{2} \parallel \tau_0\theta \parallel_T^2 - \parallel \sqrt{\tau_0}\theta \parallel_T^2 \\ &= \mid q_\alpha \mid\mid \theta \parallel_T - \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel_T^2 . \end{aligned}$$

De plus, pour $0 < \zeta < 1 - e^{-|q_\alpha|\|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2}$ on a

$$\begin{aligned} e^{-|q_\alpha|\|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2} < 1 - \zeta &\iff -|q_\alpha|\|\theta\|_T + \frac{1}{2}\|\theta\|_T^2 < \ln(1-\zeta) \\ &\iff \Phi(0) > -\ln(1-\zeta). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (3.10) et Lemme 3.2.1 nous obtenons que l'inverse $\Phi^{-1}(a)$ existe pour $0 < a \leq -\ln(1-\zeta)$ avec $0 \leq \Phi^{-1}(a) < \lambda_{\max}$ et $\Phi^{-1}(0) = \lambda_{\max}$.

■

Maintenant, on va prouver le lemme suivant :

Lemme 3.2.3 *On considère la fonction* G *définie dans* (3.4) *et on suppose que*

$$\mid q_\alpha \mid > \parallel \theta \parallel_T > 0 \qquad \textit{et} \qquad 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = \frac{\kappa_1 + \sqrt{\kappa_2(q_\alpha^2 - \parallel \theta \parallel_T^2) + \kappa_1^2}}{q_\alpha^2 - \parallel \theta \parallel_T^2},$$

où $\kappa_1 = \| \sqrt{w\theta} \|_T^2$ *et* $\kappa_2 = \| w\theta \|_T^2$. *Alors, l'équation* $G(.,\lambda) = 1$ *admet une unique solution positive* $\rho(\lambda)$. *De plus, pour tout* $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$

$$\rho(\lambda) < \infty \qquad et \qquad \rho(\lambda_{\max}) = 0.$$

Preuve. Pour λ fixé, la fonction $G(.,\lambda)$ est décroissante vers 0, donc l'équation $G(u,\lambda) = 1$ a une solution positive si et seulement si $G(0,\lambda) \geq 1$.
Mais cela signifie que

$$\kappa_2 + 2\lambda\kappa_1 - \lambda^2(\mid q_\alpha \mid^2 - \| \theta \|_T^2) \geq 0,$$

ce qui donne la borne supérieure pour λ.
De plus, en tenant compte du fait que $G(0,\lambda_{\max}) = 1$, On obtient à travers la définition (3.5), $\rho(\lambda_{\max}) = 0$.

■

Maintenant, on considère des problèmes de maximisation avec des contraintes pour les deux termes :

$$I(V) = \int_0^T (\ln v_t - V_t)dt \qquad \text{et} \qquad H(y) = \int_0^T w(t)\left(y_t^{'}\theta_t - \frac{1}{2} \mid y_t \mid^2\right)dt, \tag{3.11}$$

de la fonction de coût $J(x,\nu)$ et on commence avec un résultat concernant l'optimisation de $I(\cdot)$, qui sera nécessaire pour prouver les résultats de solution de notre problème (3.3).
Soit $W[0,T]$ l'ensemble des fonctions $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables ayant des dérivées $\dot{f}$ càdlags, positives et satisfaites les conditions

$$\int_0^T \big(\ln \dot{f}(t)\big)\_dt < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^T \dot{f}(t)dt < \infty.$$

De plus, pour $b > 0$ on définit :

$$W_{0,b}[0,T] = \{f \in W[0,T] : \quad f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(T) = b\}, \tag{3.12}$$

et on a le lemme suivant qui donne la solution de l'un de ces problèmes :

Lemme 3.2.4 *Considérons le problème d'optimisation*

$$\max_{f \in W_{0,b}[0,T]} I(f). \tag{3.13}$$

La valeur optimale de I est donnée par :

$$I^*(b) = \max_{f \in W_{0,b}[0,T]} I(f) = I(f^*) = -T \ln T - T \ln \frac{e^b}{e^b - 1}, \tag{3.14}$$

et la solution optimale corespendant est donnée par :

$$f^*(t) = \ln \frac{Te^b}{Te^b - t(e^b - 1)}, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.15}$$

Preuve : Tout d'abord, on considère le problème d'optimisation (3.13) dans $C^2[0,T]$ l'espace des fonctions deux fois continuellement différentiables sur $[0,T]$:

$$\max_{f \in W_{0,b}[0,T] \cap C^2[0,T]} I(f).$$

Par l'application du méthodes de calcul variationnel, on trouve qu'il y a une solution donnée par (3.14) de ce problème, c'est à dire :

$$\max_{f \in W_{0,b}[0,T] \cap C^2[0,T]} I(f) = I(f^*),$$

où la solution optimale f^* est donné dans (3.15).
Prenons maintenant $f \in W_{0,b}[0,T]$ et supposons d'abord que sa dérivée est :

$$\dot{f}_{\min} = \inf_{0 \leq t \leq T} \dot{f}(t) > 0.$$

Soit Υ une fonction positive deux fois différentiable sur l'intervalle $[-1,1]$ telle que $\int_{-1}^{1} \Upsilon(z)dz = 1$, et $\Upsilon(z) = 0$ pour $\mid z \mid \geq 1$. On peut prendre, par exemple,

$$\Upsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{-1}^{1} \exp(-\frac{1}{1-v^2})dv} \exp(-\frac{1}{1-z^2}) & si \mid z \mid \leq 1, \\ 0 & si \mid z \mid > 1. \end{cases}$$

En mettant

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = \dot{f}(0), & \text{pour tout} \quad t \leq 0, \\ \dot{f}(t) = \dot{f}(T), & \text{pour tout} \quad t \geq T. \end{cases}$$

On définit une suite approximative de fonctions par :

$$\upsilon_n(t) = n \int_{\mathbb{R}} \Upsilon(n(u-t))\dot{f}(u)du.$$

Il est clair que $(\upsilon_n)_{n\geq 1} \in C^2[0,T]$.

De plus, on rappele que $\dot{f}$ est càdlag, ce qui implique qu'il est borné sur $[0,T]$, c'est à dire.

$$\sup_{0\leq t\leq T} \dot{f}(t) = \dot{f}_{\max} < \infty.$$

et son ensemble de discontinuités est nul par la mesure de Lebesgue. Par conséquent, la suite $(\upsilon_n)_{n\geq 1}$ est délimité plus précisément,

$$0 < \dot{f}_{\min} \leq \upsilon_n(t) \leq \dot{f}_{\max} < \infty, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.16}$$

et $\upsilon_n \to \dot{f}$ quand $n \to \infty$ pour Lebesgue presque tout $t \in [0,T]$. Par conséquent, par le théorème de Lebesgue de la convergence, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mid \upsilon_n(t) - \dot{f}(t) \mid dt = 0.$$

De plus, les inégalités (3.16) impliquent :

$$\mid \ln \upsilon_n \mid \leq \ln\big(\max(\dot{f}_{\max}, 1)\big) + \mid \ln\big(\min(\dot{f}_{\min}, 1)\big) \mid .$$

Par conséquent, $f_n(t) = \int_0^t \upsilon_n(u)du$ appartient à $\Gamma_{b_n} \cap C^2[0,T]$ pour $b_n = \int_0^T \upsilon_n(u)du$.
Il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

cela implique que :

$$I(f) \leq I^*(b),$$

où $I^*(b)$ est défini en (3.14).
On considère maintenant le cas où $\inf\limits_{0\leq t\leq T} \dot{f}(t) = 0$. alors pour $0 < \delta < 1$, on considère la séquence d'approximation de fonctions :

$$\widetilde{f}_\delta(t) = \max(\delta, \dot{f}(t)) \qquad \text{et} \qquad f_\delta(t) = \int_0^t \widetilde{f}_\delta(u)du, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Il est clair que

$$f_\delta \in \Gamma_{b_\delta} = \int_0^T \widetilde{f}_\delta(t)dt.$$

Par conséquent,

$$I(f_\delta) \leq I^*(b_\delta).$$

De plus, dans vue de la convergence

$$\lim_{\delta\to 0} \int_0^T \left(\widetilde{f}_\delta(t) - \dot{f}(t)\right)dt = 0.$$

On obtient

$$\limsup_{\delta\to 0} I(f_\delta) \leq I^*(b).$$

De plus, notez que :

$$\begin{aligned} \mid I(f_\delta) - I(f) \mid &\leq \int_{A_\delta} (\ln\delta - \ln\dot{f}(t))dt + T\int_{A_\delta}(\delta - \dot{f}(t))dt \\ &\leq \int_{A_\delta} (\ln\dot{f}(t))dt + \delta T\Lambda(A_\delta), \end{aligned}$$

où $A_\delta = \{t \in [0,T] : \quad 0 \leq \dot{f}(t) \leq \delta\}$ et $\Lambda(A_\delta)$ est la mesure de Lebesgue de A_δ.
De plus, par la définition de $W[0,T]$ dans (3.12), la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{t \in [0,T] : \quad \dot{f}(t) = 0\}$ est égal à zéro et $\int_0^T (\ln\dot{f}_t)_- dt < \infty$.
Cela implique que

$$\lim_{\delta\to 0} \Lambda(A_\delta) = 0,$$

et donc

$$\underset{\delta \to 0}{lim}\, I(f_\delta) = I(f),$$

c'est-à-dire

$$I(f) \leq I^*(b).$$

$\blacksquare$

Maintenant, on va donner la solution d'un problème avec contrainte dépend de la fonction H défini dans (3.11) et pour cela on a besoin à des résultats préliminaires.
On note par $\mathcal{L}_2[0,T]$ l'espace de Hilbert des fonctions y satisfaisant la condition de carré d'intégrabilité $\int_0^T |y_t|dt < \infty$.
Pour $y \in \mathcal{L}_2[0,T]$ avec $\parallel y \parallel_T > 0$, on définit

$$\overline{y}_t = y_t / \parallel y \parallel_T \qquad \text{et} \qquad l_y(h) = \parallel y + h \parallel_T - \parallel y \parallel_T - (\overline{y}, h)_T. \tag{3.17}$$

Alors on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.5 *On suppose que $y \in \mathcal{L}_2[0,T]$ et $\parallel y \parallel_T > 0$. Alors la fonction $l_y(.)$ est positive i.e. pour tout $h \in \mathcal{L}_2[0,T]$*

$$l_y(h) \geq 0.$$

Preuve : évidemment, si $h \equiv ay$ pour certain $a \in \mathbb{R}$, alors

$$l_y(h) = (\mid 1 + a \mid -1 - a) \parallel y \parallel_T \geq 0.$$

Laissons maintenant pour tous $a \in \mathbb{R}$, $h \neq ay$. Alors

$$l_y(h) = \frac{2(y,h)_T + \parallel h \parallel_T^2}{\parallel y + h \parallel_T + \parallel y \parallel_T} - (\overline{y}, h)_T = \frac{\parallel h \parallel_T^2 - ((\overline{y}, h)_T + l_y(h))}{\parallel y + h \parallel_T + \parallel y \parallel_T}$$

Il est facile de montrer directement que pour tout h

$$\parallel y + h \parallel_T + \parallel y \parallel_T + (\overline{y}, h)_T \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $h \equiv ay$ pour certains $a \leq -1$.
Donc, si $h \neq ay$, on obtient simplement :

$$l_y(h) = \frac{\| h \|_t^2 - (\overline{y}, h)_T^2}{\| y + h \|_T + \| y \|_T + (\overline{y}, h)_T} \geq 0.$$

■

On introduit maintenant la contrainte $K : \mathcal{L}_2[0,T] \to \mathbb{R}$ comme :

$$K(y) = \frac{1}{2} \| y \|_T^2 + | q_\alpha | \| y \|_T - (y, \theta)_T \tag{3.18}$$

d'aprés l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$(y, \theta)_T \leq \| y \|_T \| \theta \|_T$$

et cela implique

$$\frac{1}{2} \| y \|_T^2 + | q_\alpha | \| y \|_T - (y, \theta)_T \geq \frac{1}{2} \| y \|_T^2 + | q_\alpha | \| y \|_T - \| y \|_T \| \theta \|_T$$

i.e.

$$K(y) \geq \| y \|_T [| q_\alpha | - \| \theta \|_T] + \frac{1}{2} \| y \|_T^2 .$$

D'où on a le problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\max_{y \in \mathcal{L}_2[0,T]} H(y) \qquad \text{sous la condition} \qquad K(y) = a \tag{3.19}$$

avec

$$0 \leq a \leq -\ln(1 - \zeta).$$

Proposition 3.2.1 *On suppose que* $\|\theta\|_T > 0$ *et*

$$0 < \zeta < 1 - e^{-|q_\alpha| \|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2 / 2}.$$

Alors le problème d'optimisation (3.19) *a une unique solution donnée par le contrôle optimal suivant :*

$$y^* = \widetilde{y}^a = \theta_t \tau_{\lambda_a} \qquad \textit{avec} \qquad \lambda_a = \phi^{-1}(a).$$

Preuve : Selon la méthode de Lagrange, nous considérons le problème sans contrainte suivant :

$$\max_{y\in\mathcal{L}_2[0,T]} \Psi(y,\lambda), \tag{3.20}$$

où $\Psi(y,\lambda) = H(y) - \lambda K(y)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange.
Maintenant, on va trouver des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels le problème (3.20) a une solution qui satisfaite la contrainte de (3.19).
et pour celà en effet : $\forall y \in \mathcal{L}_2[0,T]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Psi(y,\lambda) &= H(y) - \lambda K(y) \\
&= \int_0^T \omega(t)\Big(y_t^{'}\theta_t - \frac{1}{2} \mid y \mid_t^2\Big)dt - \lambda\Big(\frac{1}{2} \parallel y \parallel_T^2 + \mid q_\alpha \mid\parallel y \parallel_T - (y,\theta)_T\Big) \\
&= \int_0^T \omega(t)\Big(y_t^{'}\theta_t - \frac{1}{2} \mid y \mid_t^2\Big)dt - \int_0^T \Big(\frac{1}{2}\lambda \mid y \mid_t^2 + \lambda y_t^{'}\theta_t\Big)dt - \lambda \mid q_\alpha \mid\parallel y \parallel_T \\
&= \int_0^T (\omega(t)+\lambda)\Big(y_t^{'}\theta_t - \frac{1}{2} \mid y \mid_t^2\Big)dt - \lambda \mid q_\alpha \mid\parallel y \parallel_T .
\end{aligned}$$

Il est facile d'avoir que si $\lambda < 0$ le maximum dans le problème (3.20) est égale à $+\infty$. Et dans ce cas le problème d'optimisation (3.19) n' admet pas de solution.
Par conséquent, on suppose que $\lambda \geq 0$ dans tout la suite et on calcul premièrement la dérivée de Fréchet $D_y(\cdot,\lambda)$, donc on a pour tout $h \in \mathcal{L}_2([0,T])$.

$$D_y(h,\lambda) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\Psi(y+\delta h,\lambda) - \Psi(y,\lambda)}{\delta}$$

avec $D_y(.,\lambda) : \mathcal{L}_2[0,T] \to \mathbb{R}$ est une opérateur linéaire.
Pour $\| y \|_T > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\Psi(y+\delta h,\lambda) - \Psi(y,\lambda) &= \int_0^T (\omega(t)+\lambda)\Big((y_t+\delta h_t)'\theta_t - \frac{1}{2} \| y_t+\delta h_t \|^2 \Big)dt - \lambda \mid q_\alpha \mid\| y+\delta h \|_T \\
&- \int_0^T (\omega(t)+\lambda)\Big(y_t'\theta_t - \frac{1}{2} \| y_t \|^2 \Big)dt - \lambda \mid q_\alpha \mid\| y \|_T \\
&= \int_0^T (\omega(t)+\lambda)\Big[\Big((y_t+\delta h_t)' - y_t'\Big)\theta_t - \frac{1}{2}\Big(\| y+\delta h \|_t^2 - \| y \|_t^2 \Big)\Big]dt \\
&-\lambda \mid q_\alpha \mid \Big[\| y+\delta h \|_T - \| y \|_T \Big]
\end{aligned}$$

et cela implique que :

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi(y+\delta h,\lambda) - \Psi(y,\lambda)}{\delta} &= \int_0^T (\omega(t)+\lambda)\Big(\frac{y_t+\delta h_t - y_t'}{\delta}\Big)'\theta_t - \frac{1}{2}\Big[\frac{\| y+\delta h \|_t^2 - \| y \|_t^2}{\delta}\Big]dt \\
&- \lambda \mid q_\alpha \mid \Big[\frac{\| y+\delta h \|_T - \| y \|_T}{\delta}\Big]dt
\end{aligned}$$

lorsque : $\delta \to 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
D_y(h,\lambda) &= \int_0^T (\omega(t)+\lambda)(\theta_t - y_t)h_t - \lambda \mid q_\alpha \mid \overline{y}_t h_t dt \\
&= \int_0^T \big(d_y(t,\lambda)\big)' h_t dt
\end{aligned}$$

où

$$dy(t,\lambda) = (\omega(t)+\lambda)(\theta_t - y_t) - \lambda \mid q_\alpha \mid \overline{y} \qquad \text{avec} \qquad \overline{y_t} = y_t / \| y \|_T .$$

Maintenant, on définie l'opérateur Δ_y dans $\mathcal{L}_2[0,T]$ par :

$$\Delta_y(h,\lambda) = \Psi(y+h,\lambda) - \Psi(y,\lambda) - D_y(h,\lambda). \tag{3.21}$$

Par conséquent $\forall y, h \in \mathcal{L}_2[0,T]$, on a $\Delta_y(h,\lambda) \leq 0$ car :
si $\| y \|_T = 0$, on a

$$\Delta_y(h,\lambda) = -\frac{1}{2}\int_0^T (\omega(t)+\lambda) \mid h_t \mid^2 dt \leq 0.$$

Et si $\| y \|_T > 0$, alors $\forall \lambda \geq 0$, $\forall y, h \in \mathcal{L}_2[0,T]$ et par le lemme 3.2.5 on a

$$\Delta_y(h,\lambda) = -\frac{1}{2}\int_0^T (\omega(t)+\lambda) \mid h_t \mid^2 - \lambda \mid q_\alpha \mid l_y(h) \leq 0.$$

Pour trouver la solution du problème d'optimisation stochastique (3.20), il suffit de trouver $y \in \mathcal{L}_2[0,T]$ tel que :

$$D_y(h,\lambda) = 0 \qquad \text{pour tous} \qquad h \in \mathcal{L}_2[0,T]. \tag{3.22}$$

D'abord, on remarque que pour $\|\theta\|_T > 0$, la solution de (3.22) n'est pas nulle, car pour $y = 0$ on obtient

$$D_y(h,\lambda) < 0 \qquad \text{pour} \qquad h = -\theta.$$

Par conséquent, nous devons trouver une solution optimale pour (3.22) pour y satisfaisant $\|y\|_T > 0$. Cela signifie que nous devons trouver $y \in \mathcal{L}_2[0,T]$ non nul tel que

$$d_y(t,\lambda) = 0.$$

On peut montrer directement que pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ la solution de cette équation est unique et donnée par :

$$y_t^\lambda = \theta_t \tau_\lambda(t), \tag{3.23}$$

où $\tau_\lambda(t)$ est défini dans (3.6). Reste à choisir le multiplicateur de Lagrange λ qu'il satisfait la contrainte de (3.19). Donc, on pose

$$K(y^\lambda) = \Phi(\lambda).$$

D'après les conditions de lemme 3.2.2, l'inverse de Φ est existe. Ainsi la fonction $y^{\lambda_a} \neq 0$ avec $\lambda_a = \Phi^{-1}(a)$ est la solution du problème d'optimisation (3.19).

$\blacksquare$

Maintenant, on pose

$$\phi(\kappa) = \Phi^{-1}\left(\ln \frac{1-\kappa}{1-\zeta}\right), \qquad 0 \leq \kappa \leq \zeta,$$

et on défine la stratégie d'investissement par

$$\tilde{y}_t^\kappa = \theta_t \tau_{\phi(\kappa)}(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Pour introduire le taux de consommation optimal, nous définissons

$$v_t^\kappa = \frac{\kappa}{T - t\kappa}$$

et on rappelle que pour

$$\kappa = \kappa_0 = \frac{T}{T+1}$$

la fonction v_t^κ coïncide avec le taux de consommation optimal sans contrainte $1/\omega(t)$ défini en (2.10).
Reste à fixer le paramètre κ. Pour cela, on introduit une fonction de coût définie par

$$\Gamma(\kappa) = \ln(1-\kappa) + T\ln\kappa + \int_0^T \omega(t)|\theta|_t\left(\tau_{\phi(\kappa)}(t) - \frac{1}{2}\tau^2_{\phi(\kappa)}(t)\right)dt,$$

et pour choisir le paramètre κ on maximise Γ :

$$\gamma = \gamma(\zeta) = \arg\max_{0\leq\kappa\leq\zeta} \Gamma(\kappa).$$

Avec cette notation, nous pouvons formuler le résultat principal de la solution de notre problème d'optimisation stochastique (3.3) dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *On considère le problème* (3.3) *et on suppose que* $\|\theta\|_T > 0$. *Alors pour tout* $\zeta > 0$ *et pour tout* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *tels que*

$$0 < \zeta < 1 - e^{-|q_\alpha|\|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2} \quad et \quad |q_\alpha| \geq 2(T+1)\|\theta\|_T,$$

la valeur optimale de la fonction $J(x,\nu)$ est donnée par

$$J(x,\nu^*) = \max_{\nu\in\mathcal{U}} J(x,\nu) = A(x) + \Gamma(\gamma(\zeta)),$$

avec

$$A(x) = (T+1)\ln x + \int_0^T \omega(t) r_t dt - T\ln T$$

et le contrôle optimal $\nu^* = (y_t^*, \upsilon_t^*)$ est pour tout $t \in [0,T]$ de la forme

$$y_t^* = \tilde{y}_t^\gamma \qquad et \qquad \upsilon_t^* = \upsilon_t^\gamma.$$

Le processus de richesse optimal $(X_t^*)_{0\leq t\leq T}$ est satisfait à l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t^* = X_t^*\big(r_t - \upsilon_t^* + (y_t^*)'\theta_t\big)dt + X_t^*(y_t^*)'dW_t, \qquad X_0^* = x$$

et est donné par

$$X_t^* = x\xi_t(y^*)\frac{T-\gamma(\zeta)t}{T}e^{R_t - V_t + (y^*,\theta)_t}.$$

Démonstration : En vue que la fonction de coût $J(x,\nu)$ est représentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} J(x,\nu) &= (T+1)\ln x + \int_0^T \omega(t)\Big(r_t + y_t'\theta_t - \frac{1}{2}|y_t|^2\Big)dt + \int_0^T \big(\ln\upsilon_t - V_t\big)dt - V_T \\ &= (T+1)\ln x + I(V) + H(y) - V_T, \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec

$$I(V) = \int_0^T \big(\ln\upsilon_t - V_t\big)dt \qquad \text{et} \qquad H(y) = \int_0^T \omega(t)\Big(r_t + y_t'\theta_t - \frac{1}{2}|y_t|^2\Big)dt.$$

Pour maximiser la fonction $J(x,\nu)$, on commence à maximiser I sur toutes les fonctions V. Pour cela, nous fixons la dernière valeur du processus de consommation, en définissant

$$\kappa = 1 - e^{-V_T}.$$

D'après le lemme 3.2.4, nous constatons que

$$\begin{aligned}
I(V) &\leq -TlnT - Tln\frac{e^{V_T}}{e^{V_T}-1} \\
&\leq -TlnT + Tln\frac{e^{V_T}-1}{e^{V_T}} \\
&\leq -TlnT + Tln(1-e^{-V_T}) \\
&\leq -TlnT + Tln\kappa = I(V^{\kappa}),
\end{aligned}$$

où

$$V_t^{\kappa} = \int_0^t v^{\kappa}(t)dt = \ln\frac{T}{T-\kappa t}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Maintenant, on va démontrer que pour tout contrôle ν, la condition de la contrainte de notre problème $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \dfrac{VaR_t(x,\nu,\alpha)}{\zeta_t(x)} \leq 1$ est équivalente à

$$\inf_{0\leq t\leq T} L_t(\nu) \geq \ln(1-\zeta), \tag{3.25}$$

avec

$$L_t(\nu) =< y,\theta >_t - V_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t. \tag{3.26}$$

En effet : pour tout $\nu \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T} \frac{VaR_t(x,\nu,\alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T} \frac{xe^{R_t} - xe^{R_t - V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t}}{\zeta x e^{R_t}} \le 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T} \frac{1 - e^{-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t}}{\zeta} \le 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T} \left(1 - e^{-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t}\right) \le \zeta \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 - \inf_{0\le t\le T} \left(e^{-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t}\right) \le \zeta \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 - e^{\inf_{0\le t\le T}\left(-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t\right)} \le \zeta \\
&\Longleftrightarrow \quad \inf_{0\le t\le T} \big(- V_t + < y,\theta >_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |q_\alpha|\|y\|_t\big) \ge \ln(1-\zeta) \\
&\Longleftrightarrow \quad \inf_{0\le t\le T} L_t(\nu) \ge \ln(1-\zeta).
\end{aligned}$$

À l'instant $t = T$, on en déduit que

$$L_T(\nu) \ge \ln(1-\zeta),$$

et ceci implque que

$$K(y) \le \ln\Big(\frac{1-\kappa}{1-\zeta}\Big), \qquad 0 \le \kappa \le \zeta,$$

où

$$K(y) = \frac{1}{2}\|y\|_T^2 + |q_\alpha|\|y\|_T - (y,\theta)_T \quad \text{et} \quad V_T^\kappa = V_T = \ln\frac{T}{T-\kappa T}.$$

Pour trouver la stratégie d'investissement optimale, il suffit de résoudre le problème d'optimisation (3.19) pour $0 \le a \le \ln(\frac{(1-\kappa)}{(1-\zeta)})$, donc d'après la proposition 3.2.1 et pour $0 < a \le -\ln(1-\zeta)$ on a

$$\max_{y\in \updownarrow_2[0,T],K(y)=a} H(y) = H(\widetilde{y}^a) = C(a), \tag{3.27}$$

où la solution optimale $\widetilde{y}^a$ est définie par

$$\widetilde{y}^a = y* = \theta_t \tau_{\lambda_a}(t), \quad \text{avec} \quad \lambda_a = \Phi^{-1}(a).$$

et

$$\begin{aligned} C(a) &= H(\widetilde{y}^a) \\ &= \int_0^T \omega(t)\Big(\widetilde{y}^a\theta_t - \frac{1}{2} \mid \widetilde{y}^a \mid^2 \Big)dt \\ &= \int_0^T \omega(t)\Big(\theta_t\tau_{\lambda_a}(t)\theta_t - \frac{1}{2} \mid \theta_t\tau_{\lambda_a}(t) \mid^2 \Big)dt \\ &= \int_0^T \omega(t)\Big(\tau_{\lambda_a}(t) - \frac{1}{2}\tau^2_{\lambda_a}(t)\Big) \mid \theta_t \mid^2 dt. \end{aligned}$$

Pour $a = 0$ le problème d'optimisation (3.19) implique que

$$K(y) \geq \parallel y \parallel_T \big(\mid q_\alpha \mid - \parallel \theta \parallel_T \big) + \frac{1}{2} \parallel y \parallel_T^2 \geq 0 \qquad \text{avec} \qquad \mid q_\alpha \mid > \parallel \theta \parallel_T$$

Ainsi, il n'existe qu'une fonction pour laquelle $K(y) = 0$, à savoir $y = 0$.
De plus, d'après le lemme 3.2.3, on déduit que $\rho(\lambda_{max}) = 0$ et la définition (3.6) implique

$$\tau_{\lambda_{max}}(\cdot) \equiv 0, \quad y^{\lambda_{max}} \equiv 0 \quad \text{et} \quad \Phi(\lambda_{max}) = 0. \tag{3.28}$$

Cela signifie que $\lambda_{max} = \Phi^{-1}(0)$ et $y^{\Phi^{-1}(0)} = 0$, c'est-à-dire y^{λ_a} avec $\lambda_a = \Phi^{-1}(a)$ est la solution du problème d'optimisation (3.19) pour tout $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$.
Maintenant, on calcul la dérivée de $C(a)$:

$$\frac{d}{da}\mathcal{C}(a) = \dot{\lambda}_a \int_0^T \omega(t)\big(1 - \tau_{\lambda_a}(t)\big)|\theta_t|^2 \Big(\frac{\partial \tau_\lambda(t)}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_a}\Big)dt,$$

Depuis $\dot{\lambda}_a = 1/\dot{\Phi}(\lambda_a)$, et d'après le lemme 3.2.1, la dérivée de $C(a)$ est positive.
Donc

$$\max_{0\leq a\leq \ln((1-\kappa)/(1-\zeta))} C(a) = C\bigg(\ln\frac{1-\kappa}{1-\zeta}\bigg),$$

et nous choisissons $a = \ln((1-\kappa)/(1-\zeta)$ dans (3.27). On rappel maintenant pour tout $0 \leq t \leq T$, les définitions $\widetilde{y}_t^\kappa = \theta_t \tau_{\phi(\kappa)}(t)$ et $\upsilon_t^\kappa = \frac{\kappa}{T-t\kappa}$ et on fixe $\nu^\kappa = (\widetilde{y}_t^\kappa, \upsilon_t^\kappa)_{0\leq t\leq T}$. Ainsi pour $\nu \in \mathcal{U}$ avec $V_T = -\ln(1-\kappa)$ on a

$$J(x,\nu) \leq J(x,\nu^\kappa) = A(x) + \Gamma(\kappa).$$

Il est clair que $\gamma = \gamma(\kappa) = arg \max_{0\leq\kappa\leq\zeta} \Gamma(\kappa)$ donne la valeur optimale pour le paramètre κ.

Pour terminer la preuve, il suffit de vérifier la condition (3.25) pour la stratégie optimale ν^* défini par

$$y_t^* = \widetilde{y}_t^\gamma \qquad \text{et} \qquad \upsilon_t^* = \upsilon_t^\gamma.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} L_t(\nu^*) &= (y^*,\theta)_t - \frac{1}{2} \parallel y^* \parallel_t^2 - \mid q_\alpha \mid\parallel y^* \parallel_t - \int_0^t \upsilon_s^* ds \\ &= -\int_0^t g(u)du - \int_0^t \upsilon_s^* ds, \end{aligned}$$

où

$$g(t) = \tau_t^* \mid \theta_t \mid^2 \left(\mid q_\alpha \mid \mathcal{X}(t) - 1 + \frac{\tau_t^*}{2} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{X}(t) = \frac{\tau_t^*}{2\sqrt{\int_0^t (\tau_t^*)^2 \mid \theta_s \mid^2 ds}}.$$

D'après les définitions de $\phi(\kappa)$ et κ_1 donnée par

$$\phi(\kappa) = \Phi^{-1}\left(\ln \frac{1-\kappa}{1-\zeta} \right) \qquad 0 \leq \kappa \leq \zeta,$$

et

$$\gamma = \gamma(\zeta) = argmax_{0\leq\kappa\leq\zeta}\Gamma(\kappa)$$

respectivement, puis

$$\tau_t^* = \tau_{\upsilon_1}(t) \qquad \text{avec} \qquad \upsilon_1 = \phi(\gamma).$$

La définition (3.6) implique

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(t) &\geq \frac{\tau_{\upsilon_1}(T)}{2\tau_{\upsilon_1}(T)(0) \parallel \theta \parallel_T} \\ &\geq \frac{1+\upsilon_1}{2 \parallel \theta \parallel_T (1+T+\upsilon_1)} \\ &\geq \frac{1}{2 \parallel \theta \parallel_T (1+T)}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|q_\alpha| \geq 2(T+1) \parallel \theta \parallel_T$$

garantit que $g(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$, ce qui implique

$$L_t(\nu^*) \geq L_T(\nu^*) = \ln(1-\zeta).$$

■

Corollaire 3.2.1 *[16] Si $\|\theta\|_T = 0$, alors pour tout $0 < \zeta < 1$ et pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ le contrôle optimal $\nu^* = (y_t^*, v_t^*)$ est pour tout $t \in [0,T]$ de la forme*

$$y_t^* = 0 \qquad et \qquad v_t^* = v_t^\gamma,$$

avec

$$\gamma = arg \max_{0 \leq \kappa \leq \zeta} \ln(1-\kappa+T\ln\kappa) = \min(\kappa_0, \zeta).$$

De plus, le processus de richesse optimal $(X_t^*)_{0\leq t\leq T}$ est une fonction déterministe définie par

$$X_t^* = x\frac{T-\min(\kappa_0,\zeta)t}{T}e^{R_t}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Démonstration : La preuve de ce corollaire est une conséquence du théorème 2.7.1 et la définition (2.12).

■

Nous donnons quelques conditions suffisantes pour lesquelles la solution du problème d'optimisation (3.3) coïncide avec la solution du problème sans contrainte (2.9).

Corollaire 3.2.2 *Supposons que* $\| \theta \|_T > 0$ *et que pour tout* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *tels que*

$$0 < \zeta < 1 - e^{-|q_\alpha| \|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2} \quad et \quad |q_\alpha| \geq 2(T+1)\|\theta\|_T.$$

On définit

$$| \theta |_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} | \theta_t | < \infty.$$

Si $0 < \zeta < \kappa_0$ *et*

$$| q_\alpha | \geq (1+T) \| \theta \|_T \left(1 + \frac{\zeta(T+1) \mid \theta \mid_\infty^2}{(1-\zeta)T - \zeta} \right), \tag{3.29}$$

alors, $\gamma = \zeta$ *et la solution optimale* $\nu^* = (y_t^*, \upsilon_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ *est de la forme :*

$$y_t^* = 0 \qquad et \qquad \upsilon_t^* = \upsilon_t^\zeta.$$

De plus, le processus optimal de la richesse est la fonction déterministe ci-dessous :

$$X_t^* = x \frac{T - \zeta t}{T} e^{R_t}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Démonstration : On considère le problème d'optimisation $\gamma = \gamma(\zeta) = arg \max_{0 \leq \kappa \leq \zeta} \Gamma(\kappa)$. Pour le résoudre nous devons trouver la dérivée de l'intégrale

$$\Gamma(\kappa) = \ln(1-\kappa) + T \ln \kappa + \int_0^T \omega(t) |\theta_t|^2 \left(\tau_{\phi_{(\kappa)}}(t) - \frac{1}{2} \tau_{\phi_{(\kappa)}}^2(t) \right) dt$$

$$E(\kappa) = \int_0^T \omega(t) \mid \theta_t \mid^2 \left(\tau_{\phi(\kappa)}(t) - \frac{1}{2} \tau_{\phi(\kappa)}^2(t) \right).$$

En effet, pour $\upsilon(\kappa)$ donnée dans $\phi(\kappa) = \Phi^{-1}\big(\ln \frac{1-\kappa}{1-\zeta} \big)$, on obtient

$$\dot{E}(\kappa) = \int_0^T \omega(t) \mid \theta_t \mid^2 \left(1 - \tau_{\phi(\kappa)}(t) \right) \frac{\partial}{\partial \kappa} \tau_{\phi(\kappa)}(t) dt.$$

On définit $\tau_1(t, \phi(\kappa)) = \frac{\partial \tau_\lambda(t)}{\partial \lambda} \mid_{\lambda = \phi(\kappa)}$ et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \tau_{\phi(\kappa)}(t) = \tau_1(t, \phi(\kappa)) \frac{d}{d\kappa} \phi(\kappa). \tag{3.30}$$

Donc,

$$\dot{E}(\kappa) = \frac{1}{1-\kappa} B(\phi(\kappa))$$

avec

$$B(\lambda) = \frac{\int_0^T \omega(t) \mid \theta_t \mid^2 (1-\tau_\lambda(t))\tau_1(t,\lambda)dt}{\dot{\phi}(\lambda)}.$$

Définir $\widehat{r}(t,\lambda) =\mid q_\alpha \mid \tau_\lambda(t)/ \parallel \tau_\lambda\theta \parallel_T$. Ensuite, à l'aide du lemme 3.2.1, nous avons $\tau_1(t,\lambda) \leq 0$ et d'après la représentation (3.8), on a

$$B(\lambda) = \frac{\int_0^T \omega(t) \mid \theta_t \mid^2 (1-\tau(t,\lambda)) \mid \tau_1(t,\lambda) \mid dt}{\int_0^T \widehat{r}(t,\lambda) \mid \tau_1(t,\lambda) \mid dt}.$$

De plus, en utilisant la limite inférieure (3.9), nous estimons

$$B(\lambda) < \frac{(1+T)^2 \mid \theta \mid_\infty^2 \parallel \theta \parallel_T}{\mid q_\alpha \mid -(T+1) \parallel \theta \parallel_T} = B_{\max}. \tag{3.31}$$

La condition (3.29) pour $0 < \zeta < \kappa_0$ implique que

$$B_{\max} \leq \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)T - 1.$$

Ainsi pour $0 \leq \kappa \leq \zeta \leq \kappa_0$, on obtient :

$$\dot{\Gamma}(\kappa) > \frac{T}{\kappa} - \frac{1}{1-\kappa}(1+B_{\max}) \geq \frac{T}{\zeta} - \frac{1}{1-\zeta}(1+B_{\max}) \geq 0.$$

Cela implique $\gamma = \zeta$ et, par conséquent, $a(\gamma) = \ln(1-\gamma)/(1-\zeta) = 0$, ce qui implique aussi par le lemme 3.2.2 que $\phi(a(\gamma)) = \lambda_{\max}$. Par conséquent, nous concluons de (3.28) que pour tout $0 \leq t \leq T$

$$y_t^* = \tau_{\lambda_{\max}}(t)\theta_t = 0.$$

Théorème 3.2.2 *On suppose que*

$$\zeta > 1 - \frac{1}{T} e^{-|q_\alpha| \|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2},$$

alors pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *tel que* $|q_\alpha| > \|\theta\|_T$, *la solution du probleme d'optimisation* (3.3) *est donnée par*

$$y_t^* = \theta_t \qquad et \qquad \upsilon_t^* = \frac{1}{\omega(t)},$$

et

$$dX_t^* = X_t^*\big(r_t + |\theta_t|^2 - \upsilon_t^*\big)dt + X_t^*\theta_t' dW_t.$$

Preuve : Il suffit de vérifier la condition (3.25) pour la stratégie optimale

$$\nu^* = (y_t^*, \upsilon_t^*)_{0 \le t \le T}$$

avec

$$y_t^* = \theta_t$$

et

$$\upsilon_t^* = 1/\omega(t), \qquad t \in [0, T].$$

Il est facile de montrer que $\zeta > 1 - \frac{1}{T} e^{-|q_\alpha|\|\theta\|_T + \|\theta\|_T^2/2}$ implique que

$$L_T(\nu^*) \ge \ln(1 - \zeta).$$

De plus, pour $0 \le t \le T$ $L_t(\nu^*)$ est représenter par

$$L_t(\nu^*) = -\int_0^t g_s^* ds - \int_0^t \upsilon_s^* ds,$$

où

$$g_t^* = \left(\frac{|\ q_\alpha\ |}{\|\ \theta\ \|_t} - 1\right)\frac{|\ \theta_t\ |^2}{2} \ge \left(\frac{|\ q_\alpha\ |}{\|\ \theta\ \|_T} - 1\right)\frac{|\ \theta_t\ |^2}{2} \ge 0.$$

On pose $|\ q_\alpha\ | \ge \|\ \theta\ \|_T$. Alors, $L_t(\nu^*)$ diminue en t, c'est à dire pour tout $0 \le t \le T$

$$L_t(\nu^*) \ge L_T(\nu^*).$$

Cela implique l'affirmation de ce théorème.

Conclusion

Le calcul stochastique d'Itô et la théorie du contrôle des processus stochastiques ont de nombreuses applications, notamment en industrie et en économie. Ils interviennent de façon essentiel dans des problèmes fondamentaux de finance, l'évaluation des produits dérivés et la gestion de portefeuille et des risques.

Dans notre travail nous avons utilisé des méthodes probabilistes telles que le calcul stochastique d'Itô et la théorie du contrôle de processus stochastique pour résoudre un problème d'investissement et de consommation optimale durant un horizon [0, T] dans un marché financier de type Black-Sholes avec des coefficients déterministes.

Ainsi, l'investisseur devra contrôler son risque en utilisant un problème d'optimisation (maximisation) stochastique d'une certaine fonction d'utilité choisie dans notre cas comme fonction logarithmique qui représente la consommation attendue sur l'intervalle $[0, T]$ et la richesse terminale à la date d'échéance T. Cette maximisation nous permet de minimiser les pertes et d'affaiblir les risques dans la gestion. Comme l'investisseur doit contrôler son risque, nous avons voulu examiner les problèmes de contrôle sous contraintes sur les versions uniformes de la mesure Value-at-Risk (VaR) qui permettent de mesurer les pertes potentielles d'un portefeuille et de choisir la stratégie financière idéale.

Comme perspective, une généralisation des résultats pour ce type de problème lorsque les coefficients des marchés financiers considérés sont aléatoires.

Bibliographie

[1] P. Artznèr, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heeath *Coherent measures of risk*. Math. Finance. **9**, 203-228 (1999)

[2] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Thèse, Ann. Sci. de l'ecole Norm. Sup. Série 3, janvier 1900, 17 : 21-86

[3] S. Basak, A. Shapiro, *Value at Risk Based Risk management : optimal policies and asset prices*. Review of Financial Studies. **14**(2), 371-405 (1999)

[4] I .Ben Tahar, J. Trashorras et G. Turinici. *éléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverture des actifs dérivés*. (Mai 2015)MIDO, Université Paris Dauphine

[5] N. Berglund. *Martingales et calcul stochastique* . (Décembre 2009)Master 2 Recherche de Mathématiques Université d'Orléans

[6] F.Black , M.Scholes. *The pricing of options and Corporate liabilities*. Journal of political Econoy, 81 : 637-654, (1973) (May-june)

[7] D. Couco, He, H and S. Isaenko, *Optimale dynamic trading strategies with risk limits.working paper*(2005).

[8] K. Dowd, *Beyond value at Risk : the new Science of Risk Management*. Wileyr, London (1998)

[9] N. Elkaroui, E. Gobet. *Les outils stochastiques des marchés financiers.*(Février. 2011)

[10] S. Emmer, C. Klüppelberg, R. Korn, *Optimal portfolios with bounded Capital-at-Risk*. Math. Finance. **11** 365-384 (2001).

[11] A. Gabih, W. Grecksch, R. Wunderlich, *Dynamic portfolio optimization with bounded Shortfall risks*. Stoch. anal. Appl.**23**, 579-594 (2005)

[12] L. Gallardo. *Mouvement Brownien et calcul d'Itô*. Paris (2008)

[13] P. Jorion, *Value at Risk. McGraw-Hill*, New York (2001)

[14] C. Klüppelberg, S. Pergamenshchikov, *Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for power utility functions* . Radon Ser. Comput. Appl. Math. 8., Walter de Gruyter, Berlin, 2009.

[15] C. Klüppelberg, S. Pergamenshchikov, *Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for power utility functions.* In F. Delbaen, M.Rsonyi, and C.Stricker, editors, Optimal and Risk : Modern Trends in Mathematical Finance. The Kabanov Festschrift, pages 133-169. Springer, Heidelberg-Dordrecht-London-New York, 2009.

[16] C. Klüppelberg, S. Pergamenshchikov, *Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for logarithmic utility functions.* Advanced Financial Modelling. Radon Ser. Comput. Appl. Math., Walter de Gruyter, Berlin, 8 : 245-273, 2009.

[17] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, Berlin (1988)

[18] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance.* Springer, Berlin (2001)

[19] R. Korn, *Optimal Portfolios. World Scientific*, Singapore (1997)

[20] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, (1997)

[21] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* (2012)

[22] H. Pham, *Value at Risk. McGraw-Hill*, New York (2001)

[23] K. F. C. Yiu *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2007)