République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Étude de la stabilité dans les systèmes de files d'attente avec clients négatifs

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité: ASSPA

par

Mlle. Hayat Houria Seddiki[1]

Sous la direction de

Dr. O. Benzatout

Soutenue le 16/07/2019 devant le jury composé de

Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr. O. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Pr. A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. M. Kadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

[1]e-mail: seddiki.hayat95@gmail.com

Table des matières

Introduction

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années "1909_1920" avec les travaux de l'ingénieur Danois Anger Krarup Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. Apartir des années 30 la théorie des files d'attente adopte un langage de plus en plus mathématique qui à été développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek,...
Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine, un outil d'analyse et de modélisation . L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. On parle des files d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.
Par la suite, les files d'attente ont été intégrés dans la modélisation de divers domaines d'activité. On assista alors à une évolution rapide de la théorie des files d'attente qu'on appliqua à l'évaluation des performances des systèmes informatiques et aux réseaux de communication. Les chercheurs oeuvrant dans cette branche d'activité ont élaboré plusieurs nouvelles méthodes qui ont été ensuite appliquées avec succés dans d'autres domaines, notamment dans le secteur de la fabrication.
Nous nous intéressons dans ce mémoire à la stabilité de modèles de files d'attente avec rappels. Ces modèles sont caractérisés par le fait que le client arrivé qui trouve le serveur occupé doit rejoindre une file supplémentaire de clients appelée "orbite", et réessaye ultérieurement de rejoindre le serveur d'après une politique particulière de rappels. Si par contre le client arrivé trouve le serveur libre, il prend son service et quitte le système. Il existe essentiellement trois politiques de rappels dans la littérature. La politique classique dite politique linéaire (linear policy), où chaque client en orbite tente de rejoindre le serveur indépendamment des autres clients en orbite, de ce fait le taux de rappels dépend linéairement du nombre de clients en orbite. La deuxième politique est appelée politique de contrôle des rappels (control policy) ou politique constante (constant retrial policy), introduite par Fayolle [16]. Dans cette politique, l'orbite effectue les rappels indépendamment du nombre de clients en orbite, et si le serveur est trouvé libre alors un client en orbite (le premier ou un client choisi aléatoirement) prend son service. Enfin, la troisième politique est une combinaison des deux précédentes et est appelée politique versatile (versatile retrial policy). Pour cette politique, l'orbite effectue un rappel de temps aléatoire, ensuite chaque client émet son propre "signal" pour joindre le serveur et prendre son service, cette dernière a été introduite par Artalejo et Gomez-Corral [4].

L'approche utilisée dans ce travail pour obtenir des conditions de stabilité est basée sur la modélisation de la dynamique du système par une suite récursive stochastique, qui est de nature plus générale que les processus de Markov. En utilisant la technique des évènements de rénovation on obtient la convergence couplée au sens fort (strong coupling convergence) vers un régime stationnaire et ergodique. Pour la politique de rappels linéaire, Altman et Borovkov [2] ont obtenu des conditions suffisantes pour la stabilité sous différentes suppositions générales sur les temps d'inter-arrivées et de services. En particulier, ils ont appliqué la méthode des évènements de rénovation pour obtenir l'ergodicité sous la supposition que la suite des temps de services est stationnaire et ergodique (sans l'hypothèse d'indépendance) et des temps d'inter-arrivées et de rappels i.i.d de distributions exponentielles.

Dans le chapitre 1, nous présentons les notions de bases de l'étude des systèmes de files d'attente, à savoir les processus stochastiques (processus de comptage, processus de renouvellement, processus de Poisson). Dans le chapitre 2, On présente les principales approches de stabilité des systèmes de files d'attente. on passe en revue quelques résultats de stabilité obtenus dans les systèmes de files d'attente avec rappels pour les trois principales politiques de rappels (constante, linéaire et versatile). Dans le chapitre 3, on modélise le système avec rappels et politique versatile par une suite récursive stochastique et on applique la méthode des évènements de rénovation pour obtenir une condition suffisante de stabilité sous la supposition que la suite des temps de services est stationnaire et ergodique et des temps d'inter-arrivées et de rappels i.i.d de distributions exponentielles.

L'arrivée d'un client négatif engendre immédiatement l'élimination d'un client régulier, s'il en existe. Le concept de client négatif a été introduit par, Gelenbe et al [22] ont obtenu des conditions de stabilité pour deux modèles de clients négatifs, le modèle avec élimination du client en service (RCS) et élimination du dernier client de la file (RCE). Artalejo et Gomez-Corral [5], [6] ont généralisé le concept de client négatif au cas où les clients régulier suivent une politique de rappels. Finalement, la stabilité d'un système avec rappels versatiles, le premier modèle de ce type avec politique linéaire classique a été étudié par Falin [10], qui a établit la distribution jointe de l'état du serveur avec la taille de la file. Une étude plus détaillée a été faite ultérieurement par Falin [11], on étudie la stabilité et l'instabilité de modèles avec rappels et politique de contrôle des rappels sous la supposition que les temps de rappels suivent une distribution générale.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

1.1 Le Processus de comptage

Définition 1.1 *(processus de comptage) Un processus stochastique* $[N(t), t \in \mathbb{R}]$ *est un processus de comptage si* $N(t)$ *représente le nombre total d'événements qui se sont produits entre* 0 *et* t *,il doit donc satisfaire*

-$N(t) \geq 0$

-$N(t)$ *a des valeurs entières uniquement.*

-pour $s < t, N(t) - N(s)$ *est le nombre d'évènements qui ont eu lieu entre* s *et* t*.*

Un processus de comptage est un processus discret à temps continu. Un second processus peut être associé au processus des temps d'occurrence, processus des temps d'inter-arrivées $\{W_n, n \in N_0\}$ *où* $\forall n \in N_0$ *la variable aléatoire* N_n *est le temps d'attente entre les* $(n-1)^{ieme}$ *et* n^{ieme} *occurrences, c-à-d :*

$$W_n = T_n - T_{n-1}$$

Proposition 1.2 *Les relations suivantes sont triviales tel que* $T_0 = 0$ *à vérifier :*

1.$T_n - W_1 + W_2 + ... + W_n \forall n \geq 1;$

2.$N(t) = \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\};$

3.$P[N(t) = n] = \mathbb{P}[T_n \leq t < T_{n+1}];$

4.$P[N(t) > n] = \mathbb{P}[T_n < t];$

5.$P[s < T_n < t] = P[N(s) < n < N(t)].$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} W_n &= T_n - T_{n-1} \\ T_n &= W_1 + W_2 + ... + W_n \\ &= T_1 - T_0 + T_2 - T_1 + T_3 - T_2 + ... + T_{n-1} - T_{n-2} + T_n - T_{n-1} \\ &= T_0 + T_n \\ &= T_n \quad \text{car } T_0 = 0 \end{aligned}$$

■

Définition 1.3 *(processus à accroissements indépendants)*
Un processus $\{X_t\}$ tel que $X_0 = 0$ est à accroissements indépendants si pour tout suite finie $0 < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Définition 1.4 *(Un processus à accroissements indépendants est à accroissements stationnaires) si la loi de l'accroissement $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend pas de t pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.5 *(Un processus de comptage)*
$\{N(t)\,;\, t \geq 0\}$ est un processus de poisson d'intensité $\lambda > 0$ si :
-$N(0) = 0$,
-le processus est à accroissements stationnaires ,
-le processus est à accroissements indépendants ,
-$\forall 0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N(t) - N(s)$ suit une loi de poisson deparamètre $\lambda(t - s)$.

1.2 Rappels : loi de Poisson et loi exponentielle :

1.2.1 Définitions et généralité :

Définition 1.6 *Une variable aléatoire X à valeurs entières suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda k)$$

Définition 1.7 *Une variable aléatoire Y à valeurs réelles strictement positives suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ si*

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(Y = t) = \mu \exp(-\mu t)$$

1.2.2 Distribution de Poisson

Soit n une variable aléatoire discrète avec $n = 0,1,...$ qui suit une distribution Poisson. La distribution de probabilité de n est $P_n = \lambda^n \exp(-\lambda)/n!$.

L'espérence et la variance de n sont $E(n) = \lambda$, et $V(n) = \lambda$, respectivement. La distribution de Poisson peut également être définie en unités de temps t. Dans ce cas, la variable discrète n représente le nombre d'occurrences dans le temps t devient,

$$P(n,t) = (\lambda t)^n \exp(-\lambda t)/n!$$

1.2.3 Distribution exponentielle

Soit t une variable aléatoire avec $t \geq 0$ qui suit une distribution exponentielle. La densité de probabilité de t est $f(t) = \mu \exp(-\mu t)$ et la distribution cumulée correspondante est $F(t) = 1 - \exp(-\mu t)$. L'espérance et la variance de t sont $E(t) = 1/\mu$, et $V(t) = 1/\mu^2$, respectivement.

1.2.4 Relation entre la distribution Exponentielle et la distribution de Poisson :

La densité de probabilité d'une distribution exponentielle $f(t) = \alpha \exp(-\alpha t)$ Supposons τ est exponentielle avec une espérance $1/\alpha$, et n est de Poisson de moyenne α. on a :

$$\begin{aligned} P(\tau > t) &= 1 - F(t) \\ &= \exp(-\alpha t) \\ &= P(n = 0)\text{en } t \\ &= P(0,t)^{\alpha} \end{aligned}$$

Notons $P(n,t)$ la probabilité d'avoir n unités dans le temps t.

$$\begin{aligned} &P(0,t) = \exp(-\alpha t) \\ &P(1,t) = \int_{\tau=0}^{t} P(0,\tau) f(1-\tau) d\tau = \alpha t \exp(-\alpha t) \\ &P(2,t) = \int_{\tau=0}^{t} P(1,\tau) f(1-\tau) d\tau = (\alpha t)^2 \exp(-\alpha t)/2! \\ &P(3,t) = ... \\ &P(4,t) = \int_{\tau=0}^{t} P(n-1,\tau) f(1-\tau) d\tau = (\alpha t)^n \exp(-\alpha t)/n! \end{aligned}$$

Définition 1.8 *Une variable aléatoire X est dite sans mémoire (ou sans usure)si :*

$$\forall s,t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X{>}t + s/X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

Si X est la durée de vie d'un matériel quelconque l'équation précédente s'interprété de la manière suivante, sachant le matériel en état de bon fonctionnement au temps t, la loi de probabilité de sa durée de vie future est la même que celle de sa durée de vie initiale. En d'autres termes, le matériel ne s'use pas.

Exemple 1.9 *Une variable aléatoire de loi exponentielle est sans mémoire.*

Remarque 1.10 *L'unique loi de probabilité continue sans mémoire est la loi exponentielle, cette définition est similaire à la version discrète à l'exception des variables s et t sont réelles positives et non entières, plutôt que de compte le nombre d'essais jusqu'au premier succès on peut penser à l'heure d'arrivée du premier appel téléphonique dans un centre d'appel.*

1.3 Le Processus de renouvellement

Introduction :

Un processus de renouvellement à pour fonction de dénombrer les occurrences d'un phénomène donné, lorsque les délais entre deux occurrences consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Exemple 1.11 *Il peut s'agir de compter le nombre de pannes d'un matériel électronique en théorie de la fiabilité (le matériel est alors renouvelé après chaque panne, d'où la dénomination), de dénombrer les arrivées de clients dans une file d'attente, de recenser les occurrence d'un sinistre pour une compagnie d'assurance...*

Définition 1.12 *(processus de renouvellement)*
Un processus de comptage dont la suite des inter-arrivées forme une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées s'appelle processus de renouvellement.

Définition 1.13 *(processus de renouvellement)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoire positives on note S_n la suite des sommes partielles, $S_0 = 0$ et $S_n = X_n + S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ on considère alors le processus R_t défini comme suit :

$$R_t = card\{n \geq 1, S_n \leq t\} = \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n \leq t\}}$$

Par exemple, si les X_n modélisent les durées de vie d'une ampoule R_t représente le nombre d'ampoules changées avant l'instant t, les X_n peuvent également représenter le temps séparant deux ventes successives, ou deux sinistres successifs pour une compagnie d'assurance. R_t désignera alors, suivant le cas, *le nombre d'articles vendus ou le nombre sinistres survenus au cours de l'intervalle de temps* $[0, t]$, *la suite* S_n *est appelée processus de renouvellement associé aux* $(X_n)_{n \geq 0}$ *et le processus* (R_t) *est le processus de comptage. Par abus de langage, on appelle également* R_t *Processus de renouvellement.*

1.4 Systèmes de Files d'Attente Classiques

1.4.1 Les différents types de files d'attente

Les figures suivantes représentent les différents systèmes de files d'attente selon l'espace d'attente et l'espace de service :

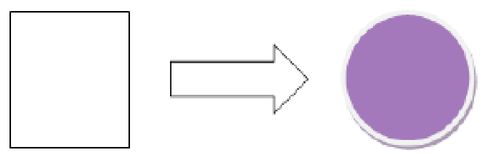

Fig 1 : File d'attente avec un seul espace d'attente et un seul serveur

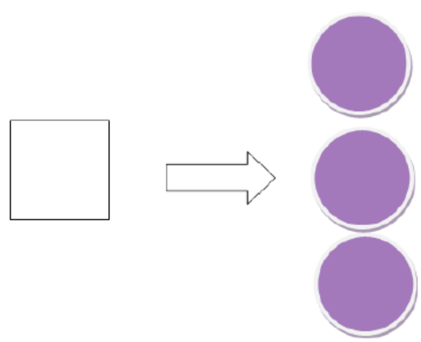

Fig 2 : File d'attente avec un seul espace d'attente et plusieurs serveurs

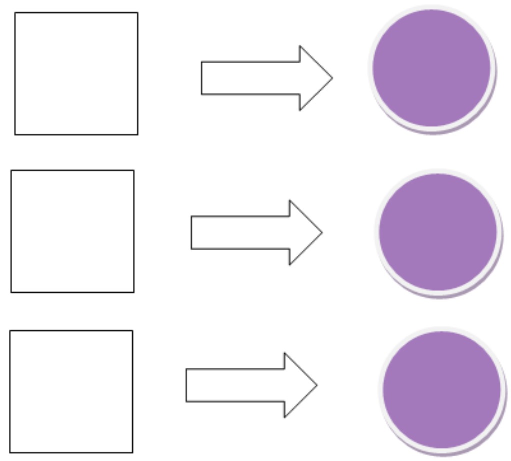

Fig 3 : File d'attente avec plusieurs
espaces d'attente et plusieurs serveurs

1.4.2 File d'attente simple

La file simple

Une file d'attente simple est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station [33]. Afin de spécifier complètement une file d'attente simple, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

1.4.3 Notations de Kendall

Pour classifier les files d'attente, on a recours à une notation symbolique appelée notation de Kendall, qui prend la forme générale suivante : A/B/s[/K][/S], où

- A est la distribution des temps d'inter-arrivées et B est la distribution des temps de service,
- s est le nombre de serveurs en parallèle,
- K est la taille de la salle d'attente, qui sera considérée infinie par défaut.
- S représente la discipline de service, qui est FIFO par défaut.

A et B appartiennent typiquement à l'ensemble $\{M, D, P, G, GI\}$, où M désigne la loi exponentielle, D la loi déterministe, P une loi périodique, G une loi générale, et GI désigne des variables générales mais i.i.d.

1.4.4 Processus d'arrivées de Poisson

Souvent dans les systèmes d'attente, on suppose que le processus des arrivées suit une loi de Poisson ou bien, de manière équivalente, comme on le verra dans cette section, les temps d'inter-arrivées suivent une distribution exponentielle.

Soit une suite de variables aléatoires positives τ_1,τ_2,... indépendantes et de distribution de probabilité commune. Il s'agira de considérer τ_n comme le temps écoulé entre la $(n-1)^{ème}$ et la $n^{ème}$ occurences ou arrivée d'un certain évènement spécifique dans une situation probabiliste, comme, par exemple les appels dans un central téléphonique, les émissions de particules radioactives, les arrivées de clients devant un guichet, etc.

Notons par

$$\mathrm{S}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \tau_k, \qquad n = 1, 2, ...$$

Alors S_n représente l'instant d'arrivée du $n^{ème}$ client. Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire $\mathcal{N}(t)$ par

$$\mathcal{N}(t) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{S}_n \geq t\}$$

La variable aléatoire $\mathcal{N}(t)$ représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Le processus de comptage $\mathcal{N}_\lambda(t)$ est appelé processus de Poisson avec taux λ si les inter occurences τ_1, τ_2,... ont une fonction de distribution exponentielle commune $\mathbb{P}\{\tau_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Pour tout $t \geq 0$, on definit la variable aléatoire γ_t par

$$\gamma_t \equiv \quad \text{le temps qui sépare l'instant } t \text{ de la prochaine arrivée.} \tag{1.1}$$

Plus précisément, t est donnée par

$$\gamma_t = \mathrm{S}_{\mathcal{N}(t)} - t \tag{1.2}$$

γ_t est appellée le temps résiduel d'arrivée au temps t. La variable aléatoire γ_t possède la même distribution exponentielle de moyenne $1/\lambda$ si le processus de comptage est de Poisson $\mathcal{N}_\lambda$. C'est à dire $\mathbb{P}\{\gamma_t \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, indépendamment de t.

1.4.5 File M/G/1 avec clients négatifs

Le concept de client négatif dans les modèles d'attente a été introduit par Gelenbe [21], et a été motivé par la modélisation des réseaux de neurones où les arrivées positives et négatives représentent respectivement, les signaux excitateurs et inhibiteurs. Puis leurs domaines d'applications se sont étendus aux réseaux informatiques où l'arrivée négative modélise l'effet d'un virus sur le système, éliminations des transactions dans les bases de données, les réseaux de télécommunications, les systèmes de productions,...etc.

Les arrivées négatives affectent le système de différentes manières :

- Élimination individuelle : l'arrivée négative élimine un client positif (ordinaire). Une arrivée négative dans un système vide est sans effet.
- Élimination par groupe : l'arrivée négative élimine un groupe de clients du système.
- Le désastre (catastrophe) : l'arrivée négative élimine tous les clients présents dans le système.
- Élimination d'une quantité aléatoire d'activité : l'élimination dans ce cas n'est pas nécessairement un nombre entier de clients positifs mais une quantité aléatoire de temps d'activité du serveur.

1.5 Suites Stationnaires et Ergodiques

Suites Stationnaires

Soit $\{\xi_n\}$ une suite aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant ces valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}_{\mathbb{Y}})$.

Définition 1.14 *Une suite $\{\xi_n\}$ est dite strictement stationnaire si les distributions des variables aléatoires de dimension finie $(\xi_{k+n_1}, \xi_{k+n_2}, \cdots, \xi_{k+n_j})$ ne dépendent pas de k pour tout j et $n_1, \cdots, n_j$:*
Une application $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est dite transformation bijective préservant la mesure si elle est bijective, l'image par T et par son inverse T^{-1} d'un ensemble mesurable a la même probabilité (mesure) que son ensemble de départ, i.e.

$$\mathbb{P}(T(A)) = \mathbb{P}(A) \quad et \quad \mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A) \quad pour\ tout\ ensemble\ A \in \mathcal{F}.$$

1/- Une telle transformation induit une transformation (bijective) correspondante, qu'on note U, des variables aléatoires définie par

$$U\eta(\omega) = \eta(T^{-1}(\omega)),$$

pour toute variable aléatoire η mesurable par rapport à $\mathcal{F}$.
Pour toute variable aléatoire η, $U\eta$ possède la même distribution que celle de η, et en fait le processus stochastique $\{\eta_n : -\infty < n < \infty\}$, avec $\eta_n = U^n\eta$ est strictement stationnaire. Ainsi, toute transformation bijective préservant la mesure peut être utilisée pour engendrer des processus stochastiques

strictement stationnaires.

Soit $\{\xi_n, n \geq 0\}$ une suite (strictement) stationnaire. D'aprés le théorème de Kolmogorov d'extension des distributions compatibles, une suite de v.a stationnaire $\{\xi_n, n \geq 0\}$ peut être étendue à la suite $\{\xi_n, -\infty < n < \infty\}$ stationnaire sur tout l'axe des temps.

2/- Une suite $\{\eta_n : -\infty < n < \infty\}$ est dite compatible avec l'opérateur (shift) U si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, η_n est $\mathcal{F}^\xi$ mesurable et $U\eta_n = \eta_{n+1}$.

On note par T l'opérateur de translation, correspondant à U, des évènements dans la $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}^\xi$:

$$T\{\omega : \xi_j(\omega) \in \mathrm{B}_j, j = 1, \cdots, k\} = \{\omega : \xi_{j+1}(\omega) \in \mathrm{B}_j, j = 1, \cdots, k\}$$

et $T^k, k \geq 0$ est la $k^{\text{ème}}$ itération de T. U^0 et T^0 sont les transformations identités, et U^{-k}, T^{-k} sont les transformations inverses de U^k et T^k respectivement.

Suites Ergodiques

Un ensemble A mesurable est dit invariant par rapport à l'opérateur de translation shift T si $A = TA$ presque sûrement.

Ainsi tout ensemble de probabilité 0 ou 1 est invariant. Les ensembles invariants forment une $\sigma-$algèbre.

• Une variable aléatoire η est dite invariante par rapport à un opérateur de transformation préservant la mesure U si $U\eta = \eta$ avec probabilité 1.

Ainsi, toute variable aléatoire presque sûrement constante est invariante.

Si la variable aléatoire η est invariante, l'ensemble $\{\omega : \eta(\omega) \in A\}$ est invariant pour tout Borélien A. Réciproquement, si l'ensemble $\{\omega : \eta(\omega) \in A\}$ est invariant pour tout Borélien A alors η est une variable aléatoire invariante.

Si A est un ensemble mesurable et si η est une variable aléatoire qui vaut 1 sur A et zero ailleurs, alors A est invariant si et seulement si η est une variable aléatoire invariante.

• Un opérateur de transformation T preservant la mesure est dit métriquement transitif si les seules ensembles invariants sont ceux de probabilité 0 ou 1, c'est à dire, si les seules variables aléatoires qui sont invariantes sont ceux qui sont constantes presque sûrement. Dans ce cas, on dira aussi que son opérateur de transformation correspondant U, des variables aléatoires, est aussi métriquement transitif.

• Soit U un opérateur de transformation préservant la mesure et soit η une variable aléatoire. Alors le processus $\{\eta_n = U^n\eta, n \geq 0\}$ est métriquement transitif.

• Une suite $\{\xi_n\}$ est dite métriquement transitive (metrically transitive) si les seules ensembles invariants de $\mathcal{F}^\xi$ sont ceux de probabilité 0 ou 1.

• Une suite $\{\xi_n\}$ est ergodique si et seulement si pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}^\xi$ mesurable η, avec $\mathbb{E}\eta < \infty$, nous avons p.s

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^i\eta = \mathbb{E}\eta \tag{1.3}$$

Si la suite $\{\xi_n\}$ est de plus stationnaire, la relation 1.3 peut être exprimée par la forme suivante

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{-1} U^i\eta = \mathbb{E}\eta. \tag{1.4}$$

Cette dernière relation est *appelée loi forte des grands nombres de Birkhoff.*

Le théorème suivant est une version du théorème ergodique fondamental adapté au cadre des processus stochastiques strictement stationnaires.

Théorème 1.15 *Soit $\{\xi_n, n \geq 0\}$ un processus stochastique strictement stationnaire, avec $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$, et soit $\mathcal{I}$ la σ-algèbre des ensembles invariants. Alors*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i = \mathbb{E}[\xi_0|\mathcal{I}] \tag{1.5}$$

avec probabilité 1. En particulier, si le processus est métriquement transitif, la limite $\mathbb{E}[\xi_0|\mathcal{I}]$ est égale à $\mathbb{E}[\xi_0]$.

Ainsi, une suite strictement stationnaire ξ_n est ergodique si et seulement si elle est métriquement transitive.

On peut énoncer donc la remarque suivante qui sera utile pour montrer l'ergodicité des suites régissant la dynamique des systèmes dont on va étudier la stabilité.

Remarque 1.16 *Si ξ_n est stationnaire et ergodique alors toute suite $\{\eta_n : -\infty < n < \infty\}$ compatible avec l'opérateur shift U est aussi ergodique, i.e. elle satisfait à la loi forte des grands nombres de* Birkhoff*.*

1.6 Formule de Wald

La formule de Wald sera utile pour les systèmes avec arrivées ou services en groupes. Elle permettra de calculer, par exemple, moyenne des arrivées pendant un temps de service dans le cas des arrivées en groupes de tailles suivant une variable aléatoire de moyenne finie. Soit X_1,X_2,... une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquements distribuées de moyenne finie. De plus, soit N une variable aléatoire à valeurs dans N de moyenne finie. Si la variable aléatoire N est indépendante des variables aléatoires X_1,X_2,... alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1). \tag{1.6}$$

La preuve de la formule 1.6 utilise la loi de l'espérance totale.

La formule 1.6 reste valable si la supposition que la variable aléatoire N est indépendante de la suite X_1,X_2,... est allégée. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) X_1,X_2,... est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquements distribuées de moyenne finie.

(ii) N est une variable aléatoire à valeurs dans N avec $\mathbb{E}(N < \infty)$.

(iii) L'évènement $N = n$ est indépendant de X_{n+1},X_{n+2},... pour tout $n \geq 1$.

Alors on a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1). \tag{1.7}$$

La supposition $\mathbb{E}(N) < \infty$ est essentielle dans l'équation de Wald. Pour illustrer ce fait, on considère la marche aléatoire symétrique $\{\mathrm{S}_n, n \geq 0\}$ avec $\mathrm{S}_0 = 0$ et $\mathrm{S}_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_1, X_2, ...$ est une suite de variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\}$ pour tout i. On définit la variable aléatoire N comme $N = \min\{n \geq 1 \mid \mathrm{S}_n = -1\}$,i.e, N est l'instant de la première visite de la marche aléatoire au point -1. Alors $\mathbb{E}(X_1, \cdots, X_N) = -1$. Notons que $\mathbb{E}(X_i) = 0$, et on a cependant que $\mathbb{E}(X_1, \cdots, X_N)$ n'est pas égal à $\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$. La raison est que $\mathbb{E}(N) = \infty$.

1.7 Files d'Attente avec Rappels

1.7.1 Déscription du modèle d'attente avec rappels

Un système d'attente avec rappels (Retrial Queue) est un système composé de $c(c \geq 1)$ serveurs identiques et indépendants, d'un buffer de capacité $K - c(K \geq c)$ et d'une orbite de capacité N. À l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon état, le client sera servi immédiatement et quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a une position d'attente libre dans le buffer, le client la rejoindra. Par ailleurs, si un client arrive et trouve tous les serveurs et toutes les positions d'attente du buffer occupés, il quittera le système définitivement avec la probabilité $1 - H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire. Les clients qui reviendront et rappelleront pour le service sont dits en "orbite". Cette dernière peut être finie ou infinie. Dans le cas d'une orbite à capacité finie, si elle est pleine, un client qui trouve tous les serveurs et les positions d'attente du buffer occupés, sera obligé de quitter le système définitivement sans être servi. Chaque client en orbite appelé aussi «client secondaire», est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité et une intensité de rappels bien définie (rappels constants, rappels classiques, ou bien rappels linéaires, ...). Chacun de ces clients secondaires est traité comme un client primaire c'est-à-dire un nouveau client qui arrive de l'extérieur du système. S'il trouve un serveur libre, il sera servi immédiatement puis quittera le système. Sinon, s'il y a des positions d'attente disponibles dans le buffer, il le rejoindra. Par contre, si tous les serveurs et les positions d'attente sont encore occupés, le client quittera le système pour toujours avec la probabilité $1 - H_k$ (si c'est le k^{me} rappel sans succès) ou bien entre en orbite avec la probabilité H_k si l'orbite n'est pas pleine.

1.7.2 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite

La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverse (voir Falin (1990)[34] et concerne l'aspect modélisation du système sous étude. Le protocole le plus décrit dans la théorie classique des files d'attente avec rappels est la politique de rappels classiques dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre α. Donc, il y a une probabilité $n\alpha dt + o(dt)$ d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle $(t, t + dt)$ sachant que n clients sont en orbite à l'instant t. Une telle politique a été motivée par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940. Dans les années précédentes, la technologie a considérablement évoluée. La littérature de files d'attente avec rappels décrit différents protocoles de rappels spécifiques à certains réseaux, informatiques et de communication modernes dans lesquels le temps inter-rappels est contrôlé par un dispositif électronique et par conséquent, est indépendant du nombre d'unités demandant le service. Dans ce cas, la probabilité d'un rappel durant $(t, t + dt)$, sachant que l'orbite est non vide, est $\nu dt + o(dt)$. Ce type de discipline de rappels est appelé politique de rappels constants. Le premier travail dans cette direction est celui de Fayolle qui considère une file d'attente $M/M/1$, où uniquement le client en tête de la file en orbite peut demander un service après un temps de rappels exponentiellement distribué avec un taux constant. Cette sorte de politique de contrôle de rappels est bien connue pour le protocole ALOHA dans les systèmes de communication. Certains autres travaux décrivent des applications aux réseaux locaux, protocole de communication, systèmes mobiles et autres (Choi (1992) [36], Shikata (1999) [37]). Artalejo et Gómez-Corral (1997) [35] traitent les deux cas d'une manière unifiée en définissant une politique de rappels linéaires pour laquelle la probabilité d'un rappel durant $(t, t + dt)$ sachant que n

client sont en orbite à l'instant t est $(\nu(1-\delta_{0n})+n\alpha)dt+o(dt)$. On mentionne aussi l'existence d'une autre politique dite politique de rappels quadratiques

1.7.3 Politique linéaire classique

La politique de rappels linéaire classique est caractérisée par le fait que chaque client en orbite engendre sa propre tentative de joindre le serveur indépendamment des autres clients en orbite. Prenons comme exemple illustratif un modèle de type M/G/1.

• **Modèle M/G/1 avec politique de rappels linéaire** :

Les clients arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux λ. Ces clients sont identifiés comme clients primaires. Si le serveur est libre à l'instant d'arrivée d'un client primaire, ce client obtient son service immédiatement et quitte le système après la fin de son service. D'autre part, si un client primaire arrive et trouve le serveur occupé il rejoint alors l'orbite. Chaque client en orbite engendre un processus de Poisson de taux μ de tentatives de joindre le serveur jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre pour prendre son service et quitter le système. Les clients primaires et ceux provenant de l'orbite ont la même distribution du temps de service. On note par σ_n le $n^{ème}$ temps de service et on suppose que la suite $\{\sigma_n\}$ est i.i.d. avec $0<\mathbb{E}\sigma_n<\infty$.

Sous des suppositions Markoviennes, nous verrons plus tard que la condition "naturelle" de stabilité de ce système est la même que le système M/G/1 classique (sans rappels) :

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1<1$$

Chapitre 2

CONDITION DE LA SATBILITÉ AVEC LES MÉTHODES STOCHASTIQUES

Dans ce chapitre, nous allons présenter un résumé des méthodes les plus importantes utilisées pour décider de la stabilité des systèmes stochastiques, en particulier les systèmes de files d'attente. Il est à noter, comme pour les systèmes dynamiques déterministes, qu'il n'existe pas une notion générale de stabilité, cela dépend du système étudié et de l'approche utilisée. Ensuite, nous présontons les conditions de stabilité des modèles classiques de files d'attente avec rappels et la stabilité de modèle avec clients négatifs Pour ces modèles, la méthode des fonctions de Lyapunov associée au critère de Foster est suffisante pour établir ces conditions.

2.1 Méthode des Fonctions de Lyapunov

On utilise dans cette méthode deux critères principaux, l'un de l'ergodicité et l'autre de transience.

2.1.1 Chaînes de Markov à espace d'états discret

Une chaîne de Markov est la généralisation la plus simple d'une suite de variables aléatoires indépendantes. La propriété principale d'une chaîne de Markov, dite propriété Markovienne, est que le comportement futur du processus ne dépend que de sont état présent et non de son passé.
Soit $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{S}$ des états, supposé fini ou infini dénombrable.

Définition 2.1 *Le processus stochastique $\mathcal{X} = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ avec espace d'états $\mathbb{S}$ est dit chaîne de Markov si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}\{X(n+1) = i_{n+1} | X(0) = i_0, \cdots, X(n) = i_n\} = \mathbb{P}\{X(n+1) = i_{n+1} | X(n) = i_n\},$$

pour toutes valeurs possibles de $i_0, ..., i_{n+1} \in \mathbb{S}$
On dit qu'une chaîne de Markov $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ est homogène si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall i, j \in \mathbb{S}, \quad \mathbb{P}\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = p_{i,j},$$

indépendamment de n. Les probabilités $p_{i,j}$ sont appellées probabilités de transition en une étape et satisfont à

$$p_{i,j} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{S} \quad et \quad \sum_{j \in \mathbb{E}} p_{i,j} = 1 \forall i \in \mathbb{S}.$$

La matrice stochastique $P = (p_{i,j})$, $i, j \in \mathbb{S}$, est alors appelée la matrice de transition de $\mathcal{X}$.
La probabilité de transition en n étapes est donnée par

$$\forall i, j \in \mathbb{S} \quad p_{i,j}(n) = \mathbb{P}\{X(n) = j | X(0) = i\}.$$

Une application directe de la formule des probabilités totales montre que $p_{i,j}(n)$ est le terme général de la matrice P^n. En particulier, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, les expressions

$$\forall i, j \in \mathbb{S} \quad p_{i,j}(n+m) = \sum_{K \in \mathbb{E}} p_{i,k}(n) p_{k,j}(m),$$

connues sous le nom d'équations de Chapman-Kolmogorov. Elles peuvent être données simplement par le produit matriciel $P^{n+m} = P^n \times P^m$.
• *On dit que les états i et j communiquent si*

$$\exists m, n \in \mathbb{N}, \quad p_{i,j}(n) > 0 \quad et \quad p_{i,j}(m) > 0.$$

Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{S}$. L'espace d'états peut donc être décomposé en un nombre fini ou dénombrable de classes d'équivalence appelées les classes de communication de $\mathcal{X}$.

Lemme 2.2 *Un état $i \in \mathbb{S}$ est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{i,i}(n) = \infty,$$

et transient si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{i,i}(n) < \infty.$$

. Si tous les états sont récurrents, la chaîne de Markov elle-même est dite récurrente.

. Si tous les états sont transients, la chaîne de Markov elle-même est dite transiente.

Corollaire 2.3 *Une chaîne de Markov irréductible est soit récurrente soit transiente.*

Lemme 2.4 *Un état $i \in \mathbb{S}$ est positif si et seulement si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup p_{i,i}(n) > 0,$$

et nul si et seulement si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} p_{i,i}(n) = 0.$$

Une chaîne de Markov est dite positive si tous les états sont positifs, et nulle si tous les états sont nuls.

Proposition 2.5 *Une chaîne de Markov irréductible est positive s'il existe un ensemble fini positif.*

Stabilité d'une chaîne de Markov :

Soit $\mu(n)$ la distribution de $X(n)$, à savoir $\forall i \in \mathbb{S}$, $\mu_i(n) = \mathbb{P}(X(n) = i)$.
D'après la formule des probabilités totales, on obtient $\mu(n+1) = \mu(n)\mathrm{P}$, si bien que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(n) = \mu(0)\mathrm{P}^n.$$

En particulier, une mesure de probabilité π sur $\mathbb{S}$ qui satisfait $\pi = \pi\mathrm{P}$ est appelée distribution stationnaire de la chaîne de Markov, puisque

$$\mu(0) = \pi \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(n) = \pi.$$

Lorsqu'une telle distribution stationnaire existe, la chaîne de Markov est dite stable. Sinon, la chaîne de Markov est dite instable.
Le résultat fondamental suivant permet de caractériser la stabilité des chaînes de Markov à espace d'états discrets.

Théorème 2.6 *Soit $\mathcal{X} = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov irréductible.*

- $\mathcal{X}$ *est stable si et seulement si* $\mathcal{X}$ *est positive, auquel cas la distribution stationnaire* π *est unique.*

  Si de plus $\mathcal{X}$ *est apériodique, alors pour toute distribution initiale* $\mu(0)$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(n) = \pi,$$

- $\mathcal{X}$ *est instable si et seulement si* $\mathcal{X}$ *est nulle, auquel cas pour toute distribution initiale* $\mu(0)$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(n) = 0.$$

Une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive est dite ergodique.

Théorème 2.7 *(Théorème ergodique)*
Soit $\mathcal{X}$ *une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive, de distribution stationnaire* π*. Pour toute fonction* $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $|\pi(f)| < \infty$, *on a*
$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(X(n)) \rightarrow^{p.s} \pi(f)$.

Critères de Foster : *Le résultat suivant donne une condition suffisante pour l'ergodicité d'une chaîne de Markov.*

Théorème 2.8 *Pour une chaîne de Markov* $\mathcal{X} = \{X(n)\}$ *irréductible et apériodique d'espace d'états* $\mathbb{S}$, *une condition suffisante pour l'ergodicité est l'existence d'une fonction positive* L, *et* $\epsilon > 0$ *tels que pour tout* $x \in \mathbb{S}$

$$\mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n))|X(n) = x] < \infty,$$

et

$$\mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n))|X(n) = x] \leq -\epsilon,$$

pour tout $x \in \mathbb{S}$ *sauf peut être en un nombre fini de points.*
Une généralisation naturelle du critère de Foster est donnée par le résultat suivant.

Corollaire 2.9 *(Critère de Foster généralisé)*
Soit une chaîne de Markov $\mathcal{X} = \{X(n)\}$ *irréductible. Une condition suffisante pour que* $\mathcal{X}$ *soit positive est qu'il existe un ensemble fini* A, *une fonction de Lyapunov* L, *et une fonction* m *sur* $\mathbb{S}$ *à valeurs entières non-nulles, tels que*

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}[L(X(n + m(x))) - L(X(n))|X(n) = x] < \infty,$$

et pour une certaine constante $\epsilon > 0$,

$$\forall x \subsetneq A, \quad \mathbb{E}[L(X(n+m(x))) - L(X(n))|X(n) = x] \leq -\epsilon m(x).$$

Critère pour la transience : *Le critère suivant donne une condition pour la non ergodicité d'une chaîne de Markov à espace d'états $\mathbb{Z}_+$ (voir Sennot et al.* [31]*).*

Théorème 2.10 *Une chaîne de Markov $\mathcal{X} = \{X(n)\}$ irréductible et apériodique d'espace d'états $\mathbb{Z}_+$ est non ergodique (transiente) si*

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n)|X(n) = i] < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+,$$

et il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\sum_{j<i} (j-i) p_{i,j} \geq -k,$$

de plus, il existe N tel que

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n)|X(n) = i] \geq 0, \quad pour \quad i \geq N.$$

2.1.2 Stabilité de la File M/GI/1

Nous avons vu précédemment que si $X(n) = X(s_n+)$ désigne le nombre de clients dans la file à l'instant s_n du départ du $n^{ème}$ client, $\{X(n)\}$ est une chaîne de Markov irréductible vérifiant

$$X(n+1) = X(n) + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_{n+1}) - 1,$$

si $X(n) > 0$, où σ_n est le temps de service du $n^{ème}$ client et $\mathcal{N}_\lambda$ le processus de Poisson de taux λ des arrivées. Sur l'ensemble $\{X(0) > 0\}$, on a donc

$$\mathbb{E}[X(1) - X(0)|X(0)] = \lambda \mathbb{E}\sigma - 1,$$

autrement dit, si $\lambda \mathbb{E}\sigma < 1$, la fonction identité est une fonction de Lyapunov et sous cette condition, la chaîne $\{X(n)\}$ est ergodique.

Réciproquement si $\lambda \mathbb{E}\sigma > 1$, il existe un K tel que $\lambda \mathbb{E}(\min\{\sigma_n, K\}) > 1$, si on remplace les services (σ_n) par les services bornés $(\min\{\sigma_n, K\})$, il est clair que la chaîne de Markov $\widetilde{X}(n)$ ainsi obtenue minorera la chaîne $X(n)$. De cette façon les sauts de $\widetilde{X}(n)$ on un moment d'ordre 2 borné. Par conséquent, $\{X(n)\}$ est aussi transiente dans ce cas.

2.1.3 Chaînes de Markov à espace d'états continu

Dans cette section, nous noterons $\mathcal{X} = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace d'états continu $\mathbb{S}$, muni d'une σ-algèbre $\mathcal{B}_s$. Comme nous allons le voir, la plupart des propriétés des chaînes de Markov à espace d'états discret ont leurs analogues dans le cas continu, pourvu que la notion d'état individuel ou d'ensemble fini d'états individuels du cas discret soit remplacée par la notion de "petit ensemble" dans le cas continu.

Définition 2.11 *(Chaîne de Markov) On dit que $\mathcal{X}$ est une chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout ensemble borélien $A \in \mathcal{B}_s$, et tous éléments $x_0, \cdots, x_{n-1}, x$ de $\mathbb{S}$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(n+1) &\in A|X(n) = x, X(n-1) = x_{n-1}, \cdots, X(0) = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X(n+1) \in A|X(n) = x).\end{aligned}$$

On dit qu'une chaîne de Markov $\mathcal{X}$ est homogène si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{S}, \quad \forall A \in \mathcal{B}_s, \quad \mathbb{P}(X(n+1) \in A|X(n) = x) = P(x, A),$$

indépendamment de n. Comme dans le cas discret, nous ne considérerons que des chaînes de Markov homogènes par la suite.
Nous appellerons $P = \{P(x, A), x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}_s\}$ le noyau de transition de $\mathcal{X}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$P^{(n)}(x, A) = \mathbb{P}(X(n) \in A|X(0) = x).$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+m)}(x, A) = \int_s P^{(n)}(x, dy) P^m(y, A).$$

La notion d'irréductibilité diffère sensiblement de celle du cas discret.

Définition 2.12 *(Petits ensembles) On dit qu'un ensemble $A \in \mathcal{B}_s$ est n-petit s'il existe $n \geq 1$, une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{S}$, et une constante $\gamma > 0$,tels que*

$$\forall x \in A, \quad P^{(n)}(x, .) \geq \gamma \mu(.).$$

Supposons que $\mathcal{X}$ soit irréductible. Tout ensemble accessible contient alors un ensemble n-petit A tel *que $\mu(A) > 0$. On définit la période de la chaîne de Markov comme le plus grand entier d tel que*

$$A \text{ est } n - petit \Longrightarrow n \in d\mathbb{N}.$$

Lorsque $d = 1$, $\mathcal{X}$ est dite apériodique.

Proposition 2.13 *Une chaîne de Markov irréductible est apériodique s'il existe un ensemble 1-petit A tel que $\mu(A) > 0$.*

Par la suite, un ensemble 1-petit sera simplement dit petit.

Récurrence au sens de Harris : *Pour tout $x \in \mathbb{S}$, on notera P_x la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ conditionnellement à l'évènement $\{X(0) = x\}$. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}_s$, soit τ_A le temps de retour vers A, à savoir*

$$\tau_A = \min\{n \geq 1, X(n) \in A\}.$$

L'ensemble A est dit récurrent au sens de Harris si

$$\forall x \in \mathbb{S}, \quad P_x(\tau_A < \infty) = 1.$$

Proposition 2.14 *Une chaîne de Markov irréductible est récurrente au sens de Harris s'il existe un petit ensemble récurrent au sens de Harris.*

Soit N_A le nombre de visites de l'ensemble A, c'est-à-dire

$$N_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X(n) \in A\}}.$$

L'espérence du nombre de visites de l'ensemble A, partant d'un état initial x, est donnée par

$$\mathbb{E}_x(N_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A).$$

Un ensemble $A \in \mathcal{B}_s$ est récurrent si

$$\forall x \in A, \quad \mathbb{E}_x(N_A) = \infty.$$

Proposition 2.15 *Une chaîne de Markov irréductible est positive s'il existe un petit ensemble positif.*

Notion de stabilité pour espace d'états continu : *Soit $\mu(n)$ la distribution de $X(n)$, à savoir*

$$\forall A \in \mathcal{B}_s, \quad \mu^{(n)}(A) = \mathbb{P}(X(n) \in A).$$

D'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\forall A \in \mathcal{B}_s, \quad \mu^{(n+1)}(A) = \int_E \mu^{(n)}(dx)P(x, A).$$

En particulier, une mesure de probabilité π *sur* $\mathbb{S}$ *qui satisfait*

$$\forall A \in \mathcal{B}_s, \quad \pi(A) = \int_s \pi(dx)P(x, A),$$

est appelée distribution stationnaire de la chaîne de Markov, puisque

$$\mu^{(0)} = \pi \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu^{(n)} = \pi.$$

L'orsqu'une telle distribution stationnaire existe, la chaîne de Markov est dite stable. Sinon, la chaîne de Markov est dite instable. On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.16 *Une chaîne de Markov irréductible est stable si et seulement si elle est positive, auquel cas la distribution stationnaire* π *est unique.*
Une chaîne de Markov irréductible, apériodique, récurrente au sens de Harris et positive est dite ergodique.
Critère de Foster pour espace d'états continu : *Le résultat suivant donne une condition suffisante pour la récurrence au sens de Harris.*

Théorème 2.17 *Soit une chaîne de Markov* $\mathcal{X} = \{X(n)\}$ *irréductible. Une condition suffisante pour que* $\mathcal{X}$ *soit récurrente au sens de Harris et positive est qu'il existe un petit ensemble* A *et une fonction de Lyapunov* L *bornée sur* A*, tels que*

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}[L(X(n+1) - X(n))|X(n) = x] < \infty,$$

et pour une certaine constante $\epsilon > 0$*,*

$$\forall x \subsetneq A, \quad \mathbb{E}[L(X(n+1) - X(n))|X(n) = x] \leq -\epsilon.$$

2.2 Méthode des évènements de rénovation

soient $\{X(n), n \geq 0\}$ et $\{\xi_n\}$ deux suites aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans les espaces mesurables $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_x)$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}_y)$ respectivement. On suppose de plus, qu'une fonction mesurable f :

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X} \quad \text{est définie sur } (\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_y)$$

2.2.1 Suites Récursives Stochastiques

Définition 2.18 *Une suite aléatoire $\{X(n)\}$ est dite Suite Récursive Stochastique (SRS) régie par la suite de contrôle $\{\xi_n\}$ si $\{X(n)\}$ obéit à l'équation*

$$X(n+1) = \mathrm{f}(X(n), \xi_n), \quad \forall n \geq 0$$

2.2.2 Évènements de rénovation

Définition 2.19 *Un évènement $A \in \mathcal{F}^{\xi}_{n+m}$, $m \geq 0$, est un évènement de rénovation (renovation event) pour la SRS $X(n)$ sur le segment $[n, n+m]$ s'il existe une fonction mesurable $g : \mathbb{Y}^{m+1} \mapsto \mathbb{X}$ telle que sur l'ensemble A*

$$X(n+m+1) = g(\xi_n, ..., \xi_{n+m}). \tag{2.1}$$

La suite $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{F}^{\xi}_{n+m}$, est une suite d'évènements de rénovation (renovating sequence of events) pour la SRS $X(n)$ s'il existe un entier n_0 tel que (2.1) est vraie pour $n \geq n_0$ avec la même fonction g pour tout n.

- *On dit que la suite d'évènements $\{A_n\}$ est stationnaire si $A_k = T^k A_0$ pour tout k.*

Théorème 2.20 *Soit $\{\xi_n\}$ une suite stationnaire, et supposons que pour la SRS $\{X_n\}$ il existe une suite d'évènements de rénovation $\{A_n\}$ telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j T^{-s} A_{j+s}\right) = 1 \tag{2.2}$$

uniformément en $s \geq 1$. Alors on peut définir sur le même espace de probabilité que $\{X(n)\}$ une suite stationnaire $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ satisfaisant à l'équation $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{P}\{X(k) = X^k, \quad \forall k \geq n\} = 1 \tag{2.3}$$

Inversement, si une suite $\{\xi_n\}$ est ergodique et (2.3) est satisfaite, alors il existe une suite d'évènements de rénovation $\{A_n\}$ qui satisfait (2.2).

Si la suite $\{\xi_n\}$ est ergodique et les évènements A_n sont stationnaires, alors les relations $\mathbb{P}(A_0 > 0)$ et

$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = 1$ *sont équivalentes et impliquent (2.3).Notons que, si on introduit la mesure* $\Pi(B) = \mathbb{P}(X^0 \in B)$, *la convergence (2.3) implique la convergence en variation*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{B\in\mathcal{B}_X} \mid \mathbb{P}(X(n) \in B) - \pi(B) \mid = 0.$$

2.2.3 Convergence couplée au sens fort pour les SRS

Définition 2.21 *La SRS* $\{X(n)\}$ *est couplée (couple-converges) avec* $\{X^n\}$, *si elle satisfait*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}\{X(k) = X^k, \quad \forall k \geq n\} = 1. \tag{2.4}$$

Introduisons la variable aléatoire

$$v_0 \equiv \min\{n \geq 0 : \ X(k) = X^k \quad \forall k \geq n\},$$

la relation (2.4) devient équivalente à

$$\mathbb{P}(v_0 < \infty) = 1.$$

Posons

$$X_k(n) = U^{-k} X(n+k), \qquad \textit{pour} \quad n \geq -k,$$

et

$$v_k = \min\{n \geq -k : X_k(n) = X^n\}.$$

Notons par $v = \sup_{k\geq 0} v_k$ *l'instant de couplage où toute les suites* $\{X_k(n), \quad n \geq 0, \quad k \geq 0\}$ *rencontrent la suite* $\{X^n\}$.

Définition 2.22 *Une suite* $\{X(n)\}$ *est couplée au sens fort (strong coupling convergent) avec la suite* $\{X^n \equiv U^n X^0\}$, *si*

$$v < \infty \quad p.s$$

La variable v *est appelée l'instant de couplage fort. Notons que la convergence couplée au sens fort implique la convergence couplée, qui elle même implique la convergence en variation totale et ainsi la convergence en distribution. Le théorème suivant donne une condition nécéssaire et suffisante de convergence couplée au sens fort d'une SRS vers un régime stationnaire et ergodique.*

Théorème 2.23 *L'existence d'une suite d'évènements de rénovation stationnaire* $\{A_n\}$ *avec* $\mathbb{P}(A_n) > 0$ *est une condition nécessaire et suffisante de convergence couplée au sens fort de la SRS* $X(n)$ *vers une suite stationnaire* X^n *obéissant à l'équation* $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$ *où* ξ_n *est stationnaire et ergodique.*

2.2.4 Application aux Systèmes avec Clients Négatifs

Les résultats de cette section sur la stabilité de certains modèles avec clients négatifs ont été obtenus par Kernane [27].

Élimination du client en service :

• **Arrivées stationnaires et ergodiques pour les clients négatifs**

Considérons une file à un serveur dans laquelle les arrivées des clients réguliers suivent un processus de Poisson de taux λ^+, et à chaque instant d'arrivée un groupe de clients de taille aléatoire a_i, avec a_i une suite i.i.d de moyenne $\overline{a}$, entre dans le système. On note par τ_i^+ les temps d'inter-arrivées des clients réguliers. La file est de capacité infinie et on suppose des disciplines de service conservatives telles que FIFO, LIFO ou accés aléatoire au service. On considère le cas où un client négatif élimine le client en service (RCS). Un client négatif n'a aucun effet sur un système vide. Les clients négatifs arrivent aux temps t_n ; $n = 0, 1, ...$ et on note par $\tau_n^- = t_{n+1} - t_n$ leurs temps d'inter-arrivées. On suppose que τ_n^- est une suite stationnaire (au sens strict) et ergodique (sans l'hypothèse d'indépendance). Le service des clients réguliers est éffectué en groupes de tailles aléatoires b_j, avec b_j une suite i.i.d de moyenne $\overline{b}$, et le temps S_j requis pour les servir est de distribution exponentielle de taux μ^+. L'arrivée négative élimine le groupe b_j qui est en service. Soit $\mathcal{N}_{\lambda^+}(t)$ (respectivement $\mathcal{N}_{\mu^+}(t)$) le processus de comptage de Poisson de paramètre λ^+ (resp. μ^+) qui compte le nombre d'arrivées de clients réguliers (resp. services) durant l'intervalle de temps $[0, t]$. On suppose que les entrées des clients (régulier et négatifs), tailles des groupes d'arrivées ou de service et temps de service sont mutuellement indépendants. Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système au temps t. On considère le processus induit $X(n)$ juste après le temps t_n (i.e., $X(n) = X(t_n)$). Le processus $X(n)$ peut être représenté par une suite récursive stochastique (SRS) comme suit :

$$X(n+1) = \left(X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\tau_n^-)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)} b_i - b_{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)+1} \right)^+, \tag{2.5}$$

où $(x)^+ = max(0, x)$. On note par

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\tau_n^-)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)} b_i - b_{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)+1}. \tag{2.6}$$

Notons par $V_0 = 0$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{-i}$. La proposition suivante donne une condition de stabilité par la convergence couplée au sens fort vers un régime stationnaire et ergodique.

Proposition 2.24 *Si $(\lambda^+\overline{a} - \mu^+\overline{b})\mathbb{E}\tau_1^- < \overline{b}$, alors le processus X(n) est couplé au sens fort avec un* *unique régime stationnaire et ergodique* $\widetilde{X}(n)$ *tel que*

$$\widetilde{X}(0) = \sup_{n \geq 0} V_n.$$

Si $(\lambda^+\overline{a} - \mu^+\overline{b})\mathbb{E}\tau_1^- > \overline{b}$*, alors le processus X(n) converge en distribution vers une limite impropre.*

Preuve. Nous avons d'après la formule de Wald et la propriété de perte de mémoire du processus de Poisson

$$\mathbb{E}\xi_n = \lambda^+\overline{a}\mathbb{E}\tau_1^- - \mu^+\overline{b}\mathbb{E}\tau_1^- - \overline{b}.$$

Puisque τ_n^- est stationnaire et ergodique alors ξ_n est aussi stationnaire et ergodique.
Si la condition $(\lambda^+\overline{a} - \mu^+\overline{b})\mathbb{E}\tau_1^- < \overline{b}$ est satisfaite alors $\mathbb{E}\xi_n < 0$. ■

Temps de services stationnaires et ergodiques

On suppose maintenant que les temps de services S_n forment une suite stationnaire et ergodique et les arrivées des clients négatifs suivent un processus de Poisson de taux λ^-. Puisque les temps de service S_n sont stationnaire alors ils ont la même distribution B(t) et avec une transformée de Laplace (LST) $B^*(s) = \int_0^\infty B(t)e^{-st}dt$. Si elle possède une densité b(t) alors on note par $\beta^*(s)$ sa transformée de Laplace correspondante.

Définissons s_n comme l'instant de fin du $(n-1)^{ème}$ temps de service. Les temps de service, les entrées des clients, les tailles des lots d'arrivées ou de services sont mutuellement indépendants. On considère le processus $X(n)$ induits juste après le temps s_n (i.e., $X(n) = X(s_n+)$). Le processus $X(n)$ satisfait la relation suivante :

$$X(n+1) = \left(X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(min(S_n, \tau_n^-))} a_i - b_n \right)^+, \tag{2.7}$$

dans ce cas $\mathbb{E}\xi_n = \lambda^+\overline{a}\mathbb{E}(min(S_1, \tau_1^-)) - \overline{b}$. Puisque τ_1^- est de distribution exponentielle de taux λ^- alors on a

$$\mathbb{E}(min(S_1, \tau_1^-)) = \int_0^\infty (1 - B(s))e^{-s\lambda^-}ds = \frac{(1 - \lambda^- B^*(\lambda^-))}{\lambda^-}, \tag{2.8}$$

Élimination du dernier client dans la file

Arrivées stationnaire ergodique pour les clients négatifs

La suite des temps d'inter-arrivées des clients négatifs $\{\tau_n^-\}$ est supposée stationnaire et ergodique et les clients réguliers sont éliminés à partir de la queue de la file, au instants d'arrivées t_n, en groupes de tailles aléatoires d_n avec $\{d_n\}$ une suite i.i.d de moyenne $\overline{d}$. On suppose les flux d'arrivées, tailles des groupes et temps de service sont mutuellement indépendants. Soit $X(n)$ le processus induit juste avant l'arrivée d'un client négatif. La représentation de $X(n)$ comme une suite récursive stochastique (SRS) est donnée par :

$$X(n+1) = \left(X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\tau_n^-)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)} b_i - d_n \right)^+ . \tag{2.9}$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 2.25 *Si* $(\lambda^+\overline{a} - \mu^+\overline{b})\mathbb{E}\tau_1^- < \overline{d}$ *alors le processus X(n) couple-converge au sens fort vers un unique régime stationnaire et ergodique* $\widetilde{X}(n)$ *tel que*

$$\widetilde{X}(0) = \sup_{n\geq 0} V_n.$$

Si $(\lambda^+\overline{a} - \mu^+\overline{b})\mathbb{E}\tau_1^- > \overline{d}$ *alors le processus X(n) converge en distribution vers une limite impropre.*

Suite des temps de service stationnaire ergodique

On suppose maintenant que les temps de service S_n sont stationnaire et ergodique et les inter-arrivées des clients négatifs sont i.i.d de distribution exponentielle de taux λ^-. Le processus $X(n)$ est induit immediatement après la fin du $(n-1)^{me}$ temps de service. Le processus $X(n)$ satisfait la relation récursive suivante :

$$X(n+1) = \left(X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(S_n)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(S_n)} c_i - b_n \right)^+ . \tag{2.10}$$

On obtient la proposition suivante.

Proposition 2.26 *Si* $(\lambda^+\overline{a} - \lambda^-\overline{c})\mathbb{E}S_1 < \overline{b}$, *alors le processus X(n) est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire et ergodique* $\widetilde{X}(n)$ *tel que* $\widetilde{X}(0) = \sup_{n\geq 0} V_n$.

Si $(\lambda^+\overline{a} - \lambda^-\overline{c})\mathbb{E}S_1 > \overline{b}$, *alors le processus* $X(n)$ *converge en distribution vers une limite impropre.*

2.3 Stabilité de modèles classiques

2.3.1 Politique de rappels linéaire :

File M/M/1/1

Les arrivées de l'extérieur forment un processus de Poisson de paramètre λ, les temps de services $\{\sigma_n\}$ sont i.i.d de distribution exponentielle de moyenne $\mathbb{E}\sigma_1$, et les temps d'inter-rappels de chaque client en orbite sont une suite i.i.d de distribution exponentielle de paramètre θ. Soit $X(t)$ le nombre de clients en orbite au temps t, et $C(t)$ le nombre de clients en service, i.e. pour un système à un serveur si $C(t) = 0$ alors le serveur est libre au temps t, et si $C(t) = 1$ le serveur est occupé. Dans le cas d'une file M/M/1/1 le processus $\{Y(t) = (X(t), C(t)), t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu et les résultats suivants sont connus dans la littérature :

- Si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ alors la chaîne de Markov $Y(t)$ est récurrente positive,
- Si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 = 1$ et $\theta\mathbb{E}\sigma_1 \geq 1$ alors la chaîne de Markov $Y(t)$ est récurrente nulle,
- Si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 = 1$ et $\theta\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ alors la chaîne de Markov $Y(t)$ est transiente,
- Si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 > 1$ alors la chaîne de Markov $Y(t)$ est transiente.

Voir Falin [14].

File M/G/1/1

Considérons la file M/G/1 avec rappels linéaires. Les temps de services $\{\sigma_n\}$ sont i.i.d de distribution générale B(x) et de moyenne finie $\mathbb{E}\sigma_1$. Considérons le processus induit $X(n) = X(s_n+)$ à l'instant s_n de fin du $(n-1)^{ème}$ temps de service. Le processus $\{X(n), n \geq 0\}$ représente donc une chaîne de Markov à temps discret vérifiant la récurrence

$$X(n+1) = X(n) - \mathbb{I}_n + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_n), \tag{2.11}$$

si X(n) > 0, où $\mathbb{I}_n$ est une fonction indicatrice telle que $\mathbb{I}_n = 1$ si le client qui rejoint le service après l'instant n (i.e. s_n+) vient de l'orbite et $\mathbb{I}_n = 0$ s'il vient de l'extérieur. $\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n)$ est le nombre d'arrivées de l'extérieur durant le temps de service σ_n.

D'après la formule (1.8), on a

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 | X(n) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + k\theta}, \tag{2.12}$$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 | X(n) = k\} = \frac{k\theta}{\lambda + k\theta}. \tag{2.13}$$

Pour utiliser le critère de Foster on doit choisir une fonction test de Lyapunov convenable. On peut choisir dans notre cas $L(k) = k$ et calculer donc la dérive moyenne suivante en utilisant les formules

(2.11) et (2.13)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(n+1)-X(n)|X(n)=k] &= \mathbb{E}[-\mathbb{I}_n+\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n)|X(n)=k] \\
&= -\mathbb{E}[\mathbb{I}_n|X(n)=k]+\mathbb{E}[\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n)|X(n)=k] \\
&= -\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n=1|X(n)=k\}+\mathbb{E}[\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n)] \\
&= -\frac{k\theta}{\lambda+k\theta}+\lambda\mathbb{E}\sigma_1
\end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[X(n+1)-X(n)|X(n)=k]=-1+\lambda\mathbb{E}\sigma_1.$$

Cette dernière limite est négative si et seulement si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1<1$. En appliquant le critère de Foster on obtient que la condition $\lambda\mathbb{E}\sigma_1<1$ est suffisante pour l'ergodicité de la chaîne de Markov induite $\{X(n)\}$.

Pour montrer que $\lambda\mathbb{E}\sigma_1<1$ est nécessaire pour l'ergodicité on utilise le critère pour la transience. Puisque pour le système considéré on a $X(n+1)-X(n)\geq -1$, et si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1\geq 1$ alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(n+1)-X(n)|X(n)=k] &= -\frac{k\theta}{\lambda+k\theta}+\lambda\mathbb{E}\sigma_1 \\
&\geq -\frac{k\theta}{\lambda+k\theta}+1=\frac{k\theta}{\lambda+k\theta}>0.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat classique suivant (voir Falin et Templeton [12])

La chaîne de Markov $\{X(n)\}$ est ergodique si et seulement si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1<1$.

Si $\lambda\mathbb{E}\sigma_1>1$ alors la chaîne de Markov $\{X(n)\}$ est transiente, et ainsi la file M/G/1/1 avec rappels de politique linéaire est instable. Il n'existe pas de résultats de stabilité pour le cas $\lambda\mathbb{E}\sigma_1=1$. Voir Deul [9], Falin [14], Greenberg et Wolff [24].

M/G/1/1 avec clients impatients

Dans beaucoup de situations pratiques, les clients font des rappels un certain nombre (aléatoire) de fois et quitte l'orbite sans obtenir de service. Ce genre de clients est appelé "impatient". Soit α_n la probabilité qu'un client retourne à l'orbite après sa $n^{ème}$ tentative non réussie d'obtenir un service, et quitte le système sans être servi avec probabilité $1-\alpha_n$. Dans le cas où $\alpha_n=\alpha=1$ pour tout $n\geq 1$, la condition de stabilité donnée par

$$\alpha_0\lambda\mathbb{E}\sigma_1<1,$$

a été montré par Falin [13].

Dans le cas $\alpha<1$, le système est stable si le temps moyen de rappels est fini (voir Fayolle et Brun

[18]).

File M/M/s/s Deul [9], Falin [14] [15] et Hanschke [26] ont montré que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < s.$$

Ils ont utilisé une chaîne de Markov incluse et le critère de Foster pour obtenir le résultat précédent.

2.3.2 Politique constante

Considérons maintenant le système M/G/1 avec politique de rappels constante. Les arrivées de l'extérieur forment un processus de Poisson de paramètre λ, les temps de services $\{\sigma_n\}$ sont i.i.d de distribution générale et de moyenne finie $\mathbb{E}\sigma_1$ et les temps de rappels de l'orbite sont de distribution exponentielle de paramètre θ. Le processus $\{X(n), n \geq 0\}$ vérifie la récurrence

$$X(n+1) = X(n) - \mathbb{I}_n + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_n),$$

avec maintenant les relations suivantes pour $\mathbb{I}_n$:

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 | X(n) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta},$$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 | X(n) = k\} = \frac{\theta}{\lambda + \theta},$$

ainsi

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) | X(n) = k] = -\frac{\theta}{\lambda + \theta} + \lambda \mathbb{E}\sigma_1.$$

En appliquant le critère de Foster, on obtient que la condition $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < (\theta/(\lambda + \theta))$ est suffisante pour l'ergodicité de la chaîne de Markov induite $\{X(n)\}$.

Pour montrer que $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1$ est nécessaire pour l'ergodicité, on utilise le critère pour la transience. Donc, on peut énoncer le résultat suivant pour le système M/G/1 avec rappels et politique constante : La chaîne de Markov $\{X(n)\}$ est ergodique si et seulement si :

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

2.3.3 Politique de rappels versatile

La politique versatile est une combinaison des deux précédentes politiques que sont la politique linéaire et la politique constante. La probabilité d'avoir un rappel durant l'intervalle de temps $(t, t+\Delta t)$, sachant que j clients sont en orbite au temps t, est $(\theta(1 - \delta_j) + j\mu)\Delta t + o(\Delta t)$. Le système considéré est toujours un M/G/1 avec cette dernière politique de rappels. La chaîne de Markov modélisant le système est toujours de la forme (2.11) avec pour $k \geq 1$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 | X(n) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta + k\mu}, \tag{2.14}$$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 | X(n) = k\} = \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu}, \tag{2.15}$$

pour $k = 0$ il est évident que $\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 | X(n) = 0\} = 1$.
On a donc

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) | X(n) = k] = -\frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu} + \lambda \mathbb{E}\sigma_1,$$

et ainsi pour $\mu > 0$ on a

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}[X(n+1) - X(n) | X(n) = k] = -1 + \lambda \mathbb{E}\sigma_1.$$

La conclusion est donc la même que pour la politique linéaire classique, i.e. La chaîne de Markov $\{X(n)\}$ est ergodique si et seulement si $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1$.
Pour $\mu = 0$ on retrouve le cas de la politique constante.

Chapitre 3

STABILITÉ DE MODÈLES AVEC POLITIQUE DE RAPPELS VERSATILE ET POLITIQUE DE CONTRÔLE

3.1 Politique de Rappels Versatile

Considérons un système à une file d'attente avec rappels et un serveur dans lequel les clients primaires entrent de l'extérieur aux temps $\{t_i, i = 1, 2, ...\}$. Soit $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ les temps successifs d'inter-arrivées, i = 1, 2,... . Si le $i^{ème}$ client arrivé trouve le serveur libre, il prend son service puis quitte le système. Autrement, si le serveur n'est pas libre, le client arrivé rejoint immédiatement l'orbite. La probabilité d'avoir un rappel durant l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$, sachant que j clients sont en orbite au temps t, est $(\theta(1 - \delta_{o,j}) + j\mu)\Delta t + o(\Delta t)$. Cela signifie qu'après un temps aléatoire de loi exponentielle de taux θ (qu'on appelle temps de rappels de l'orbite), indépendant du processus d'arrivées, chaque client en orbite génère un flot Poissonien de tentative de rappels avec paramètre μ et se comporte indépendamment des autres clients en orbite et du flux extérieur des arrivées. Ce modèle, introduit par Artalejo et Gomez-Corral [4], incorpore simultanément la politique de rappels classique et la politique constante. Si $\mu = 0$, on obtient la politique de rappels constante de paramètre θ. Si le temps de rappels de l'orbite se termine avant une arrivée extérieure, alors un client de l'orbite (le premier de la file ou un autre choisi aléatoirement) occupe le serveur. Le $n^{ème}$ temps de service est σ_n, et on suppose que $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$. On suppose durant toute cette section que la suite $\{\sigma_n\}$

est stationnaire et ergodique, les suites des temps d'inter arrivées $\{\tau_i\}$ sont i.i.d. exponentiellement distribués avec paramètre λ. Les temps d'inter-arrivées, temps de rappels de l'orbite et temps de rappels de chaque client en orbite sont mutuellement indépendantes et indépendantes de $\{\sigma_n\}$. Soit X(t) le nombre de clients en orbite au temps t. On définit s_n comme étant l'instant de fin du $(n-1)^{ème}$ service. On considère le processus induit X(n) juste après le temps s_n, $(i.e., X(n) = X(s_n^+))$. Après la fin du $(n-1)^{ème}$ service, une compétition entre deux lois indépendantes (puisque le temps de rappels de l'orbite et les temps de rappels de chaque client en orbite sont indépendants du temps d'inter-arrivée) exponentielles avec taux respectifs λ et $\theta + X(n)\mu$ déterminent le client suivant qui va rejoindre le serveur. La probabilité qu'un temps de rappel expire avant le temps d'inter-arrivée est alors $(\theta + X(n)\mu)/(\lambda + \theta + X(n)\mu)$. Soit u_n^1 et u_n^2 deux suites de variables aléatoires i.i.d distribuées uniformément sur [0, 1], mutuellement indépendantes et indépendantes de la suite σ_n. $u^1 = \{u_n^1\}$ génère le processus des arrivées, et $u^2 = \{u_n^2\}$ génère le type d'arrivée (extérieur ou de l'orbite) à la fin des périodes successives de services.
Soit $\prod : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{N}$ l'inverse de la distribution de Poisson

$$\prod(t,x) = \inf\left(n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \exp(-t)}{k} \geq x\right). \tag{3.1}$$

Ainsi $\prod(t, u_n^1)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre t.

3.1.1 Stabilité du Système

Le résultat suivant a été obtenu par Kernane et Aïssani [27]

Théorème 3.1 *Soit un système M/G/1/1 avec rappels et politique versatile de paramètres (θ, μ), de flux d'arrivées Poissonien de taux λ et de suite des temps de service $\{\sigma_n\}$ stationnaire et ergodique. Alors.*

- *Le processus $X(n) = X(s_n+)$ induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS*

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où $x^+ = \max[0, x]$ et ξ_n est définit par

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right\} \tag{3.2}$$

- *Le processus X(n) est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si une des conditions suivantes est satisfaite :*

1/ $\theta > 0$, $\quad \mu = 0 \quad$ *et* $\quad \lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda+\theta}$,

2/ $\theta \geq 0$, $\quad \mu > 0 \quad$ *et* $\quad \lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1$.

Preuve. Pour la construction de la SRS X(n), il faut noter seulement que la variable $\prod(\lambda\sigma_n, u_n^1)$ compte le nombre d'arrivées pendant le temps de service σ_n et l'indicatrice $\mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\theta+X(n)\mu}{\lambda+\theta+X(n)\mu}\right\}$ vaut 1 si un client de l'orbite a obtenue le service après le temps s_n, et vaut 0 si c'est un client de l'extérieur qui l'obtient.

Pour la convergence couplée au sens fort du processus $\{X(n)\}$, considérons en premier le cas $\theta > 0$ et $\mu = 0$, alors la suite (3.2) a la forme suivante

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\theta}{\lambda+\theta}\right\}.$$

Puisque la suite $\{u_n^i\}$ est identiquement distribuée i = 1,2, et donc stationnaire, elle peut être définie pour tout entier $-\infty < n < \infty$. Définissons les σ-algèbres :
$\mathcal{F}_n^{\sigma,u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, k \leq n)$ et $\mathcal{F}^{\sigma,u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, -\infty < k < \infty)$. Soit U l'opérateur de translation préservant la mesure des variables aléatoires $\mathcal{F}^{\sigma,u}$-mesurables générées par $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2, -\infty < n < \infty\}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire ξ_n est générée par $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2\}$, alors $\xi_{n+1} = U\xi_n$ et $\{\xi_n : -\infty < n < \infty\}$ est stationnaire. De plus, puisque $\{\sigma_n : -\infty < n < \infty\}$ est stationnaire et ergodique, et la suite $\{\xi_n : -\infty < n < \infty\}$ est compatible avec l'opérateur de translation U, la suite $\{\xi_n : -\infty < n < \infty\}$ est ergodique. Nous avons

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - \frac{\theta}{\lambda+\theta}.$$

Donc si

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda+\theta}$$

est vérifiée alors $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$. Sans perte de généralité, nous supposerons que $X(0) = a \geq 0$. Pour tout choix de n_0, les évènements $A_n = T^n A_0$, où A_0 est donné par

$$A_0 = \bigcap_{k=0}^{n_0-1} \{\xi_{-1} + \cdots + \xi_{-1-k} \leq 0\} \bigcap_{l\geq 1} \{\xi_{-1} + \cdots + \xi_{-n_0-l} \leq -a\}, \tag{3.3}$$

forment une suite stationnaire d'évènements de rénovation avec m = 0 et $g(y) \equiv y^+$.

En effet, pour $n \geq n_0$,

$$X(n+1) = \xi_n^+ \quad \text{p.s} \quad \text{sur} \quad A_n.$$

Puisque $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$ et la suite $\{\xi_n\}$ est stationnaire et ergodique, alors d'après la loi forte des grands nombres de Birkhoff (1.4) pour les suites ergodiques, nous avons presque sûrement

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \xi_i = \mathbb{E}\xi_1 < 0,$$

ce qui donne *p.s.*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (\xi_{-1} + ... + \xi_{-n}) = -\infty.$$

Ainsi, il existe un nombre $n_0 = n_0(a)$ tel que $\mathbb{P}(A_n) > 0$ pour $n \geq n_0$. Si, d'autre part les évènements B_n, le nombre m, et la fonction $g : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont définis comme

$$m = n_0, \quad B_n = T^m A_n, \quad g(y_0, ..., y_m) \equiv y_m^+,$$

alors les évènements $B_n \in \mathcal{F}^{\xi}_{n+m}$ sont de rénovation pour $\{X(n)\}$ sur le segment $[n, n+m]$ pour tout $n \geq 0$. Donc, on peut supposer que $n_0 = 0$. La positivité des probabilités des B_n vient du fait que les A_n sont T-invariantes et cela est dû à la stationarité de la suite $\{\xi_n : -\infty < n < \infty\}$, donc

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(T^m A_n)$$

$$= \mathbb{P}(A_n) > 0.$$

Ainsi, la suite $\{X(n)\}$ est couplée au sens fort avec une unique suite stationnaire
$\{X^n \equiv U^n X^0\}$, où X^0 est $\mathcal{F}^{\sigma,u}$-mesurable, obéissant l'équation $X^{n+1} = (X^n + \xi_n)^+$.
Considérons maintenant le cas $\theta \geq 0$ et $\mu > 0$. Les évènements de rénovation A_n seront construits maintenant en deux étapes. On va introduire au début une SRS majorante $X(n)^*$ sur le même espace de probabilité, qui va nous permettre d'obtenir des évènements stationnaires de rénovation simples A^*_n, de probabilité positive, et les évènements A_n seront obtenus comme sous-ensembles de A^*_n. La SRS $X(n)^*$ a la forme suivante

$$X(0)^* = X(0), \quad X(n+1)^* = \max(C, X(n)^* + \xi^*_n),$$

où

$$\xi^*_n = \prod(\lambda\sigma_n, u^1_n) - \mathbb{I}\left\{u^2_n \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}\right\}.$$

La suite $\{\xi_n^*\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ et $\xi_{n+1}^* = U\xi_n^*$. On choisit la constante C telle que $\mathbb{E}\xi_n^* < 0$, si la condition $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1$ est vérifiée, où

$$\mathbb{E}(\xi_n^*) = \lambda \mathbb{E}\sigma_1 - \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}.$$

Donc, il existe des évènements de rénovation $A_n^* = T^n A_0^*$, $n \geq n_0$, où A_0^* est défini comme (3.3) avec la suite $\{\xi_n^*\}$, et $\mathbb{P}(A_0^*) > 0$, tel que $X(n)^* = C$ sur l'ensemble A_n^* pour tout $n \geq n_0$. Définissons les ensembles

$$B_0 = \left\{ \prod(\lambda\sigma_{-k}, u_{-k}^1) = 0, \quad u_{-k}^2 \leq \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu}, \quad k = 1, ..., C \right\},$$

$$B_n = T^n B_0.$$

Les ensembles $A_n = A_{n-C}^* \cap B_n$ forment une suite stationnaire d'évènements de rénovation pour $X(n)$, puisque pour tout $n \geq n_0 + C$, nous avons sur A_n, les valeurs $X(n-k) \leq k$, $k = 0, 1, ..., C$, et en particulier, $X(n) = 0$. On doit montrer maintenant que les évènements de rénovation A_n sont de probabilités strictements positives. Pour cela il suffit de montrer que $\mathbb{P}(A_0) > 0$, car les ensembles A_n sont stationnaires. On a $\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(A_{-C}^*)\mathbb{P}(B_0|A_{-C}^*)$, et puisque $\mathbb{P}(A_{-C}^*) = \mathbb{P}(T^n A_0^*) = \mathbb{P}(A_0^*) > 0$, il nous reste à montrer que $\mathbb{P}(B_0|A_{-C}^*) > 0$. En suivant la démarche utilisée dans [2], et en l'adaptant à la politique de rappels versatile, on a

$$\mathbb{E}(\sigma_{-C} + ... + \sigma_{-1}|A_{-C}^*) \leq \frac{C\mathbb{E}\sigma_1}{\mathbb{P}(A_{-C}^*)} < \infty.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_0|A_{-C}^*) &= \mathbb{E}[e^{-\lambda(\sigma_{-C}+...+\sigma_{-1})}|A_{-C}^*] \prod_{k=1}^{C} \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu} \\
&\geq e^{-\lambda \mathbb{E}(\sigma_{-C}+...+\sigma_{-1}|A_{-C}^*)} \prod_{k=1}^{C} \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu} > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a une suite stationnaire $\{A_n\}$ d'évènements de rénovation de probabilités strictements positives pour la SRS $X(n)$. Puisque la SRS $X(n)$ vérifie une récurrence stochastique de la forme $X(n+1) = f(X(n), \sigma_n)$, avec $\{\sigma_n\}$ une suite stationnaire et ergodique, la convergence couplée au sens fort du processus $X(n)$ vers un régime stationnaire $\{X^n \equiv U^n X^0\}$, où X^0 est $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ mesurable, vérifiant $X^{n+1} = f(X^n, \sigma_n)$. L'ergodicité vient du fait que X^n est compatible avec l'opérateur de translation (shift) U. ■

3.1.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

On peut montrer une condition d'instabilité pour la politique constante puisque dans ce cas le taux de rappels ne dépend pas du nombre de clients en orbite.

Proposition 3.2 *Soit un système M/G/1/1 avec rappels et politique constante i.e.,* $\theta > 0$ *et* $\mu = 0$. *Si* $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 > \theta/(\lambda + \theta)$, *alors le processus X(n) converge en distribution vers une distribution limite impropre.*

Preuve. Si la condition $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 > \theta/(\lambda + \theta)$ est vérifiée cela entaîne que $\mathbb{E}(\xi_n) > 0$. la SRS $X(n)$ converge vers une limite impropre, i.e.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} X(n) = +\infty \quad p.s.$$

■

3.2 Clients négatifs

Considérons maintenant une file d'attente avec un seul serveur et deux types d'arrivées : arrivées régulières et arrivées négatives. Dans les systèmes avec rappels, si un client régulier arrive et trouve le serveur occupé, il rejoint l'orbite et refait sa tentative ultérieurement pour avoir un service après un temps aléatoire, autrement, s'il trouve le serveur libre, il reçoit son service et quitte le système. Si un client négatif arrive dans un system occupé, il élimine immédiatement un client régulier de l'orbite s'il y en a au moins un. Autrement, si le serveur est libre il n'a aucun effet sur le système. Le concept des clients négatifs a été présenté par Gelenbe [22], qui a établi la solution sous forme de produit pour un réseau de file d'attente comprenant des arrivées négatives aussi bien que les régulières. Un rappel des résultats et des situations pratiques peut être trouvé dans Artalejo [3]. Gelenbe, Glynn et Sigman [22] ont obtenu les conditions de stabilité pour deux modèles des arrivées négatives, l'élimination du client en service (RCS) et l'élimination du client à la queue de la file d'attente (RCT). Artalejo et Gomez-Corral [5, 6] ont étendu les files d'attente avec des arrivées négatives à la situation où les clients réguliers suivent une politique de rappels. On suppose que les clients réguliers arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux λ. L'accès au serveur à partir de l'orbite se fait selon la politique de rappels versatile. Nous supposons que les temps de services $\{\sigma_n\}$ des clients réguliers forment une suite stationnaire et ergodique. Les clients négatifs arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux δ. Les suites des temps d'inter arrivées des clients réguliers, temps d'inter-arrivées des clients négatifs, temps de rappels de l'orbite et temps de rappels de chaque client en orbite sont indépendantes l'une de l'autre et indépendantes de la suite $\{\sigma_n\}$. Soient $\{u_n^1\}$, $\{u_n^2\}$,$\{u_n^3\}$ et trois suites de variables aléatoires i.i.d distributées uniformément sur $[0,1]$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la suite $\{\sigma_n\}$. $u^1 = \{u_n^1\}$ engendrera le processus d'arrivées des clients réguliers, $u^2 = \{u_n^2\}$ engendrera le processus d'arrivées des clients négatifs, et $u_n^3 = \{u_n^3\}$ engendrera le type d'arrivée qui rejoint le service (extérieur ou de l'orbite) à la fin des temps successifs de service.

3.2.1 Stabilité du Système

Théorème 3.3 *Soit un système M/G/1/1 avec clients négatifs et rappels de politique versatile de paramètres (θ, μ), de flux d'arrivées Poissoniens pour les clients réguliers et négatifs de taux λ et δ respectivements et de suite des temps de service $\{\sigma_n\}$ stationnaire et ergodique. Alors,*

i) *Le processus $X(n) = X(s_n+)$ induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS*

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+,$$

où

$$\zeta_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^3 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right\}, \tag{3.4}$$

et

$$\eta_n = \prod(\delta\sigma_n, u_n^2).$$

ii) *Le processus X(n) est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $\theta > 0, \quad \mu = 0 \quad$ *et* $\quad \frac{(\lambda-\delta)(\lambda+\theta)}{\theta}\mathbb{E}\sigma_1 < 1,$
2. $\theta \geq 0, \quad \mu > 0 \quad$ *et* $\quad (\lambda - \delta)\mathbb{E}\sigma_1 < 1.$

Preuve. Considérons le premier cas $\theta > 0$ et $\mu = 0$. Alors la suite (3.4) a la forme suivante

$$\zeta_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^3 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta}\right\}.$$

On définit les σ-algèbres $\mathcal{F}_n^{\sigma,u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, u_k^3, k \leq n)$ et $\mathcal{F}^{\sigma,u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, u_k^3, -\infty < k < \infty)$. Soit U l'opérateur de translation préservant la mesure des variables aléatoires $\mathcal{F}^{\sigma,u}$-mesurables engendrées par $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2, u_n^3, -\infty < n < \infty\}$. Puisque la suite ζ_n est engendrée par $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^3\}$ et η_n est engendrée par $\{\sigma_n, u_n^2\}$ alors ζ_n et η_n sont des suites stationnaires et ergodiques.
$\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - (\theta/(\lambda+\theta)) - \delta\mathbb{E}\sigma_1$ et si

$$\frac{(\lambda-\delta)(\lambda+\theta)}{\theta}\mathbb{E}\sigma_1 < 1,$$

alors nous avons $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) < 0$.

Nous étudierons maintenant le cas $\theta \geq 0$ et $\mu > 0$. Nous suivrons la même méthode que pour les deuxièmes parties des théorèmes précédents en construisant une SRS majorante $X^*(n)$ définie comme suit :

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \zeta_n^* - \eta_n),$$

où

$$\zeta_n^* = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^3 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}\right\}.$$

La suite $\{\zeta_n^*\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ stationnaire et ergodique. Si $(\lambda - \delta)\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ on peut facilement trouver une constante C telle que $\mathbb{E}(\zeta_n^* - \eta_n) = (\lambda - \delta)\mathbb{E}\sigma_1 - ((\theta + C\mu)/(\lambda + \theta + C\mu)) < 0$.

■

3.2.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

Une condition d'instabilité peut être obtenue dans le cas de la politique constante.

Proposition 3.4 *Soit un système M/G/1/1 avec clients négatifs et rappels de politique constante i.e., $\theta > 0$ et $\mu = 0$. Si*

$$\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \theta)}{\theta}\mathbb{E}\sigma_1 > 1,$$

alors le processus $X(n)$ converge en distribution vers une limite impropre.

3.3 Stabilité du modèle avec politique de contrôle des rappels

Considérons une file d'attente à un serveur avec des arrivées de l'extérieur aux temps $\{t_i, i = 1, 2, \cdots\}$ suivant un processus de Poisson de taux λ. On note par $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ les temps successifs d'inter-arrivées, i = 1,2,$\cdots$ Si le client arrivée trouve le serveur occupée il rejoint un orbite de capacité infinie. S'il le trouve libre, il prend son service et quitte le système. L'accès de l'orbite au serveur suit une politique de contrôle des rappels, c-à-d, après la fin d'un temps de service, on permet seulement au client à la tête de la file d'attente de réessayer pour atteindre le service selon une distribution de probabilité générale R(.), de densité r(.) et transformée de Laplace $r^*(\theta)$. Le $n^{ème}$ temps de service est σ_n, et on suppose que $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$. Notons par $\{\alpha_n\}$ la suite des temps d'inter-rappels. On suppose dans tout ce chapitre que la suite $\{\sigma_n\}$ est stationnaire et ergodique. On suppose dans cette section que les temps d'inter-arrivées $\{\tau_i\}$ sont i.i.d. de distribution exponentielle de paramètre λ, les suites $\{\tau_i\}$ et $\{\alpha_j\}$ sont indépendante l'une de l'autre et de la suite $\{\sigma_n\}$. Soit X(t) le nombre de clients en orbite au temps t. Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire $\gamma(t)$ comme le temps qui

sépare l'instant t de la prochaine arrivée. Définissons s_n comme l'instant de fin du $(n-1)^{ème}$ temps de service. On considère le processus X(n) induit immédiatement après le temps s_n, (i.e., $X(n) = X(s_n^+))$ et $\gamma(s_n^+) = \gamma_n$. Soit $\{u_n\}$ une suite i.i.d de variables aléatoires de distribution uniforme sur [0,1], indépendante de la suite σ_n et qui générera le processus des arrivées.
Soit $\prod$ l'inverse de la distribution de Poisson définie comme dans le chapitre précédant par la relation (3.1).
Le processus X(n) satisfait à la relation récursive

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+$$

Théorème 3.5 *Supposons que $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda)$. Alors le processus $X(n)$ est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique.*
Si $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 > r^*(\lambda)$, alors le processus X(n) converge en distribution vers une limite impropre.

Preuve. Définissons les σ-algèbres $\mathcal{F}_n^{\sigma,u,\alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k, \alpha_k, k \leq n)$ et $\mathcal{F}^{\sigma,u,\alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k, \alpha_k, -\infty < k < \infty)$. Soit U l'opérateur de translation des variables aléatoires $\mathcal{F}^{\sigma,u,\alpha}$- mesurables engendrées par $\{\sigma_k, u_k, \alpha_k, -\infty < k < \infty\}$ puisque la variable aléatoire ξ_n est engendrée par $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2\}$, alors $\xi_{n+1} = U\xi_n$ et $\{\xi_n, -\infty < n < \infty\}$ est stationnaire. De plus, puisque $\{\sigma_n, -\infty < n < \infty\}$ est stationnaire et ergodique et la suite $\{\xi_n, -\infty < n < \infty\}$ est compatible avec l'opérateur U. On a

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \lambda \mathbb{E}\sigma_1 - \mathbb{P}(\alpha_n < \gamma_n).$$

Puisque les arrivées suivent un processus de Poisson alors le temps résiduel d'arrivée γ_n est de distribution exponentielle de taux λ, et ainsi $\mathbb{P}(\alpha_n < \gamma_n) = r^*(\lambda)$. Alors, si

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda)$$

est vérifiée on aura $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$. ■

3.4 Modèle avec Clients Négatifs

Nous considérons maintenant la stabilité d'une file d'attente avec rappels et deux types d'arrivées, régulier et négatif. Nous supposons que les clients réguliers arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux λ. L'accès de l'orbite au serveur suit la politique de contrôle. Nous supposons que les temps de service $\{\sigma_n\}$ des clients réguliers forment une suite stationnaire et ergodique. Les clients négatifs arrivent selon un processus de Poisson avec taux δ. Les temps d'inter-arrivées des clients réguliers, les temps entre arrivées des clients négatifs et les temps de rappels sont indépendant de l'un l'autre et de la suite $\{\sigma_n\}$. $u^1 = \{u^1_n\}$ engendrera le processus des arrivées des clients réguliers, et $u^2 = \{u^2_n\}$ engendrera le processus des arrivées des clients négatifs à la fin des périodes successives de service. Soit $X(n)$ défini comme ci-dessus et il a maintenant la représentation suivante :

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+,$$

où

$$\zeta_n = \prod(\lambda\sigma_n, u^1_n) - I(\alpha_n < \gamma_n), \tag{3.5}$$

et

$$\eta_n = \prod(\delta\sigma_n, u^2_n).$$

Proposition 3.6 *Le processus X(n) est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si la condition suivante est vérifiée*

$$(\lambda - \delta)\mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda). \tag{3.6}$$

Si $(\lambda - \delta)\mathbb{E}\sigma_1 > r^*(\lambda)$*, alors X(n) converge en distribution vers une limite impropre.*

Preuve. On considère les σ-algèbres $\mathcal{F}^{\sigma,u,\alpha}_n = \sigma(\sigma_k, u^{(k)}, u^1_k, u^2_k, \alpha_k, k \leq n)$ et $\mathcal{F}^{\sigma,u,\alpha} = \sigma(\sigma_k, u^1_k, u^2_k, \alpha_k, -\infty < k < \infty)$ et U l'opérateur correspondant. Puisque la suite ζ_n est engendrée par $\{\sigma_n, u^1_n, \alpha_n\}$ et η_n est engendrée par $\{\sigma_n, u^2_n\}$ alors ζ_n et η_n sont stationnaires et ergodiques. $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - r^*(\lambda) - \delta\mathbb{E}\sigma_1$ et si la condition (3.6) est vraie alors on a $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) < 0$. ■

3.4.1 Élimination par Groupes

Nous pouvons permettre des éliminations en lots des clients aux occurrences des arrivées négatives, c'est à dire si une arrivée négative se produit au temps t_i alors un groupe de taille aléatoire b_i de clients est éliminé de l'orbite. Soit $\bar{b}$ la moyenne des tailles de clients éliminées et $b^{(n)} = (b^{(n)}_k, k = 1, 2, ...)$ les tailles de clients éliminées qui se produisent pendant σ_n. La SRS dans ce modèle aura la représentation suivante

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+,$$

où

$$\zeta_n = \prod(\lambda\sigma_n, u^1_n) - I(\alpha_n < \gamma_n), \tag{3.7}$$

et

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\Pi(\delta\sigma_n, u_n^2)} b_k^{(n)}.$$

Proposition 3.7 *Le processus X(n) est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si la condition suivante est vérifiée*

$$(\lambda - \delta\bar{b})\mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda). \tag{3.8}$$

Si $(\lambda - \delta\bar{b})\mathbb{E}\sigma_1 > r^*(\lambda)$, *alors X(n) converge en distribution vers une limite impropre.*

Preuve. Semblable à la preuve de la proposition précédente, : en considérant les σ-algèbres $\mathcal{F}_n^{\sigma,u,b,\alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, b^{(k)}, \alpha_k, k \leq n)$ et $\mathcal{F}^{\sigma,u,b,\alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, b^{(k)}\alpha_k, -\infty < k < \infty)$ et en notant que $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - r^*(\lambda) - \delta\bar{b}\mathbb{E}\sigma_1$. $\blacksquare$

Bibliographie

[1] Akhmarov, I. and Leont.eva, N.P., Conditions for convergence to limit processes and the strong law of large numbers for queueing systems, Teor. Veroyatnost i ee Primenen 21 (in Russian) pp. 559-570.

[2] Altman, E. and Borovkov, A.A., On the stability of retrial queues, Queueing Systems 26 (1997), 343-363.

[3] Artalejo, J.R., G-networks : A versatile approach for work removal in queueing networks, European J. Oper. Res. 126 (2000), 233-249.

[4] Artalejo, J.R., and Gomez-Corral, A., Steady state solutions of a single server queue with linear repeated requests, J. Appl. Probab. 34 (1997), 223-233.

[5] Artalejo, J.R., and Gomez-Corral, A., Generalized birth and death processes with applications to queues with repeated attempts and negative arrivals, OR Spektrum. 20 (1998), 223-233.

[6] Artalejo, J.R., and Gomez-Corral, A., On a single server queue with negative arrivals and request repeated, J. Appl. Probab. 36 (1999), 907-918.

[7] Asmussen, S. and Foss, S.G., Renovation, regeneration, and coupling in multiple-server queues in continuous time, Frontiers in Pure and Appl. Probab. 1, pp. 1-6, H. Niemi et al. (Eds), (1993).

[8] Borovkov, A.A., Asymptotic Methods in Queueing Theory, John Wiley et Sons, 1984.

[9] Deul, N., Stationary conditions for multiserver queueing systems with repeated calls, Elektronische informationsverabeitung und Kybernetik, 10-12 (16) (1980), 607-613.

[10] Falin, G.I., Aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls, Ukr. Math. J. 28 (1976), 437-440.

[11] Falin, G.I., Functioning under nonsteady conditions of a single-channel system with group arrival of requests and repeated calls, Ukr. Math. J. 33 (1981), 429-432.

[12] Falin, G.I. and Templeton, J.G.C., Retrial queues, Chapman and Hall, New York, 1997.

[13] Falin, G.I., Estimations of error in approximation of countable Markov chains associated with models of repeated calls, Vestnik Moscow Univ. Ser. 1, Math. Mech., 2, 12-15.

[14] Falin, G.I., On ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls, Sov. J. Comput. Sys. Sci., 25 (1), (1986) 60-65.

[15] Falin, G.I., On sufficient conditions for ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls, Adv. Appl. Probab., 16, (1984), 447-448.

[16] Fayolle, G., A simple telephone exchange with delayed feedbacks, In : Teletra¢ c Analysis and Computer Performance Evaluation, (ed. by O.J. Boxma, J.W. Cohen and H.C. Tijms), Elsevier Science Amsterdam (1986).

[17] Fayolle, G. and Iasnogorodski, R., Criteria for the non-ergodicity of stochastic processes : application to the exponential Back-o¤ protocol, J. Appl. Probab. 24 (1987), 347-354.

[18] Fayolle, G. and Brun, M. A., On a system with impatience and repeated calls, In : Queueing theory and its applications, CWI Monographs, 7, pages 283-303, Amsterdam-New York, 1988, North-Holland.

[19] Foss, S.G., The method of renovating events and its applications in queueing theory, Semi Markov Models, Theory and Applications, Proc. 1-st Symp on Semi-Markov Processes, Brussel 1984 (Plenum 86).

[20] Foss, S.G. and Kalashnikov, V.V., Regeneration and renovation in queues, Queueing Systems 8 :3 (1991), 211-223.

[21] Gelenbe, E., Random neural networks with negative and positive signals and product form solution, Neural Computation 1 (1989) 502-510.

[22] Gelenbe, E., Queueing networks with negative and positive customers and prod- uct form solution, J. Appl. Probab. 28 (1991), 656-663.

[23] Gelenbe, E., Glynn, P., and Sigman, K., Queues with negative arrivals, J. Appl. Probab. 28 (1991), 245-250.

[24] Greenberg, B. S., M/G/1 queueing systems with returning customers, J. Appl. Probab., 26 (1) (1989) 152-163.

[25] Greenberg, B. S. and Wolff, R. W., An upper bound on the performance of queues with returning customers, J. Appl. Probab., 24 (2) (1987) 466-475.

[26] Hanschke, T. Explicit formulas for the characteristics of the M/M/2/2 queue with repeated attempts. J. Appl. Probab., 24, (1987) 486-494.

[27] Kernane, T. and Aïssani, A., Stability of retrial queues with versatile retrial policy, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 2006 (2006), Article ID 54359, 16 pages.

[28] Kernane, T., On the stability of queues with negative arrivals, Preprint.

[29] Kumar, P.R., et Meyn, S.P., Duality and linear programs for stability and performance analysis of queuing networks and scheduling policies, IEEE Trans. Aut. Cont. 41, No.1 (1996), 4-17.

[30] Rybko, A. N. and Stolyar, A. L., Ergodicity of stochastic processes describing the operations of open queueing networks, Problemy Peredachi Informatsii 28 (1992), 3-36.

[31] Sennot, L. I., Humblet, P. A. and Tweedie, R. L., Mean drift and the non- ergodicity of Markov chains, Operations Research, 17 (1969), 1058-1061.

[32] Wolff, R. W., Stochastic Modeling and the theory of Queues. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[33] K.B, GK, Techniques de modélisation : Méthodes analytiques.

[34] G. I. Falin. Asurvey of retrial queues. Queueing systems, 7 :127-168.....1990

[35] J. R. Artalejo and A. Gòmez-Corral. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations. Computers and Operations Research, 24(6) : 493-504...2008

[36] B.D. Choi.Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. Queueing Systems 11, 335-356,...1992

[37] shikata.Optimizing the menezes-vanstone algorithm or Non Super singular ellliptic currves...1999