République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Continuité spectrale des opérateurs

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Ziani **H**icham [1]

Sous la direction de

A. Azzouz

Soutenu le 16/07/2019 devant le jury composé de

S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. hichem22753@gmail.com

Remerciements

Avant tous, je remercie **ALLAH**, le tout puissant de m'avoir donner la volonté et la patience pour accomplir ce travail.

En second lieu, je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements au professeur "**Abdelhalim Azzouz**" pour ses précieux conseils, l'orientation, la confiance et la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Également je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements au professeur **"G.Djellouli"** pour ses précieux conseils, de ce travail.

Je voudrais exprimer mes plus vifs remerciement vont également aux membres du jury : le"**S.Abbas**", le"**B.Saadli**" et le" **O.Bennehi**" pour l'intérêt qu'ils ont à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs critiques et remarques.

Mes remerciements vont aussi à tout membre de département de département de mathématique de la **faculté des sciencesr Dr MOLAY TAHAR**

Enfin, mes remerciements vont à ma famille, **ZIANI** mes amis et à toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce modeste travail :

Avant tout

A mon trés cher pére "ABD DJEBBAR"

L'homme qui ma donné le désir d'apprendre et le savoir vivre.

A ma mère, ma fierté et mon bonheur.

A mes soeurs.

A mes frère "HADJ BLAID", "ABD LEKADER", "RIADH",

A tous mes amis surtout "B. Zakria,A.abdellah,A. amin,

K.Ali, B.Majide,B.yassin, S.Noureddine, G.lakhdar ".

A tous les enseignants et les travailleurs de département

d'mathématique qui nous ont beaucoup aide pendant mes

années d'études à la promotion Master Analyse mathématique 2019.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est dédié à l'étude de la continuité spéctrale des opérateurs linéaires bornés sur un espace de banach X, cet axe a été essentiellement développé par **J.Newburgh** et génère des directions de recherche dans la continuité spéctrale dans les algébres générales de banach. **J.Conway et B.Morrel** ensuite ont entrepris cette étude pour définir des cacatères d'opérateurs satisafaisant la continuité spectrale appelés points de continuité. Il est intéressant d'identifier les points de continuité spectrale juste en indiquant la continuité de la restriction de la fonction de spectre ou de l'application rayon spectral aux sous-ensembles spéciaux de certaines algébres de banach.

Théorie de Fredholm, au nom de **Erik lvar Fredholm** est une théorie qui s'est avérée au fil des années trés utiles en théorie des equations intégrales et le developpement de la théorie du point fixe éventuellement pour les équations differéntielles.

Ce mémoire travail est composé de quatre chapitres :
Dans la premier chapitre, on commence par rappeler la théorie élementaire des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X, ce rappel est fondamental et une partie importante de ceux qui veulent aborder un sujet d'analyse fonctionnelle. On rappelle ensuite les éléments de la théorie des opérateurs compacts et la théorie spectrale qui découle. Des sous classes seront des intoduits nommant les opérateurs de Fredholm semi- Fredholm et leurs perturbations associées, les opérateurs de Browder, Kato et de Riesz sont des classes

des Fredholm qui sont identifiés via les notions de l'ascent et du descent .
Le deuxième chapitre est consacré à la théorie spectrale des opérateurs bornés, compact et des opérateurs de fredholm et leurs sous classes, il s'agit du spectre, spectre essentiel ainsi que le spectre de la somme et du produit de deux opérateurs linéaires bornés. On terminera ce chapitre par une étude du S-spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné (particulier).

Dans le troisieme chapitre On commence d'abord par définir la notion de l'approximation spectrale des opérateurs et les théorèmes existants. Les modes de convergences seront définis dans l'ordre de visualiser cette approximation (convergence en norme, convergence ponctuelle et convergence collectivement compacte.) La ν-convergence comme mode de convergence sera étudié rapidement, et une étude comparative sera donnée en fin de chapitre.

Au dernier chapitre, on s'attaque à la continuité spectrale des opérateurs bornés. Bien que les définitions soient claires, il en reste moins simple d'établir la continuité des éléments spectraux juste par le mode convergence. Les travaux de Conway et Djordevic nous ont permis de voir des propriétés (intrinsèques ou pas) liées aux opérateurs ou les classes correspondantes. Une caractérisation de la continuité sera établie via les théorèmes de Browder et Weyl ainsi que les théorèmes de a- Browder et les a-Weyl. Une synthèse des points de conituité spectrale sera faite en fin de chapitre ainsi cloturant ce mémoire.

Chapitre 1

Théorie des opérateurs linéaire bornés

L'objectif de ce chapitre est de rappeler des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions et propriétés élémentaires sur la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans les espaces de Banach X. Ensuite nous donnons quelques résultats sur les opérateurs compacts. En outre, nous rappellons des définitions différents sur les opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et les opérateurs de Riesz. Enfin nous donnons étude spectrale de la somme et produits des opérateurs bornés.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Nous donnons dans cette section quelques définitions et propriétés élémentaires des opérateurs linéaires bornés et on parle sur l'adjiont et l'inverse d'un opérateurs, ensuite on définit le spectre d'un opérateur.

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs linéaires

Définition 1.1.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $u \to Au$ définie sur X ou sur un sous-espace vectoriel de X*

appelé domaine de A noté $D(A)$ à valeurs dans Y, c'est à dire : $D(A) = \{x \in X,\ Ax \in Y\}$

Remarque 1.1.1. *Dans le cas de notre étude, l'opérateur A sera défini sur tout X, X est consiédéré un espace de Hilbert ou de Banach.*

Définition 1.1.2. ***(Opérateur linéaire borné) :***

Un opérateur continu ou borné est un opérateur tel que $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} ||Tx|| < +\infty$*. On note $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés sur X.*

Définition 1.1.3. *Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle un opérateur borné de X dans Y toute application linéaire continue de X dans Y. Pour $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note l'image d'un opérateur par $R(A) = \{Ax, x \in X\}$ et le nayau par $N(A) = \{x \in X, Ax = 0\}$*

Remarque 1.1.2. *L'opérateur identité de X dans Y sera noté par $\mathbb{I}$.*

1.1.2 Inverse et Adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.1.4. ***(Opérateur inverse) :***

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $A : X \to Y$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : Y \to X$ telque

$$AS = \mathbb{I}_Y \text{ et } SA = \mathbb{I}_X$$

Définition 1.1.5. ***(Adjoint d'un opérateur) :***

Soient X, Y deux espaces de Banach et A est un opérateur borné de X dans Y. L'adjoint de A noté A^*, est l'opérateur borné de Y^* dans X^* vérifiant :

$$(A^*\ell)(x) = \ell(A(x))$$

avec ℓ est une forme lineaire continue.

Théorème 1.1.1. *Soient X et Y deux Banach. L'application de $\mathcal{L}(X; Y)$ dans $\mathcal{L}(Y; X)$ qui a A associe son adjoint A^* est isométrique (i.e : $\|A\| = \|A^*\|$ pour tout $A \in \mathcal{L}(X; Y)$)*

Preuve. On a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1} (\sup_{\|\ell\|\le 1} |\ell(Ax)|) = \sup_{\|\ell\|\le 1} (\sup_{\|x\|\le 1} |\ell(Ax)|) =$$

$$\sup_{\|\ell\|\le 1} \|A^*\ell\| = \|A^*\|$$

■

Proposition 1.1.1. *On a les relations d'orthogonalité suivantes :*

Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X;Y)$. Alors on a :

(i) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$,

(ii) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$,

(iii) $N(A)^{\perp} \supseteq \overline{R(A^*)}$,

(iv) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$.

Définition 1.1.6. ***(Opérateur transposé) :***

Soient X et Y deux espaces de Banach et A un opérateur densément définie de X dans Y ; La transposée de A , c'est un opérateur de X dans Y de la façon suivante : ${}^tA$, et la forme linéaire $x \in X \to y^*(A(x))$ soit continue. On pose ${}^tA(y^*) = x^*$. On a donc :

$${}^tA(y^*)(x) = y^*(A(x))$$

pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y$

1.1.3 Spectre d'un opérateur linéaire borné

Soit X un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même, muni de la norme $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|_X$. L'espace $\mathcal{L}(X)$ est une algébre de Banach unifére (posséde un élément e telque $\|e\| = 1$)

Définition 1.1.7. ***(Ensemble résolvant ,Résolvante) :***

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ on appelle Ensemble résolvant de A est :

$$\rho(A)=\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \ \ \textit{soit une bijection de } X \textit{ sur } X\}$$

(i,e : $\lambda I - A$ *a un inverse borné ;* $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$*)*

L'opérateur $(\lambda I - A\ )^{-1}$ *est appelé la résolvante de* A *en et noté* $R_\lambda(A)$

Définition 1.1.8. ***(Spectre d'un opérateur borné) :***
Soit $A \in \mathcal{L}(X)$*, Le spectre de* A *et on note* $\sigma(A)$ *est le complémentaire dans* $\mathbb{C}$ *de* $\rho(A)$ *(L'ensemble résolvant de* A *). donc :*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \ \ \textit{n'est pas inversible dans } X\ \},$$

Et on écrit :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$$

Alors en peut trouver trois types du spectre distincts :

1) Le spectre ponctuel : Noté par $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A, il est défini comme suit :

$\sigma_p(A)$=$\{\lambda \in \mathbb{C}\backslash \quad N(\lambda I - A) \neq \{0\}$ c-à-d : $\lambda I - A$ n'est pas injectif$\}$

alors

$$\sigma_p(A)=\{\lambda \in \mathbb{C}\backslash \quad Ax = \lambda x, \quad x \in X, \quad x \neq 0\}$$

2) Le spectre continu : Noté par $\sigma_c(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\lambda I - A)$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans X, c-à-d.

$$\sigma_c(A)=\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \quad N(\lambda I - A)=\{0\}, \quad R(\lambda I - A) \neq X, \quad \overline{R(\lambda I - A)} = X\}$$

3) Le spectre résiduel Noté par $\sigma_r(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans X, c-à-d.

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus N(\lambda I - A) = \{0\}, \quad (R(\lambda I - A))^{\perp} \neq \{0\}\}$$

Remarque 1.1.3. *Le spectre de* A *est :*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Définition 1.1.9. ***(Rayon spectral) :***

Pour tout opérateur borné $A \in \mathcal{L}(X)$, on definit le rayon spectral de A comme étant la quantité :

$$r(A) = sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$$

On remarque que, $r(A) \leq \|A\|$

Lemme 1.1.1. *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$. Alors :*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ *existe et est égale à $r(A)$;*

(ii) *Si X est un espace de Hilbert et si $A \in \mathcal{L}(X)$ est auto-adjoint, alors $r(A) = \|A\|$.*

1.2 Opérateurs Compacts

Dans cette section, on définit les opérateurs compacts et nous parlons sur la théorie spéctrale des opérateurs compacts.

1.2.1 Opérateur Compact

Applications linéaires compactes

Si X est un espace de Banach, on note $B_X(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $B_X(0, r)$ la boule fermée. Dans le cas ou $r = 1$, on note pour simplifier $B_X = B_X(0, 1)$ et $\overline{B_X} = \overline{B_X}(0, 1)$. S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on oubliera parfois de préciser que la boule est dans X, en notant simplement $B(0; r)$ ou $\overline{B}(0; r)$.

Définition 1.2.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ est dite compact si l'image $A(\overline{B}_X)$ est une partie relativement compact de Y. l'ensemble des applications linéaires compactes de X dans Y noté par $\mathcal{K}(X; Y)$ où $\mathcal{K}(X)$ si $X = Y$.*

Commençons par un résultat simple mais utile.

Proposition 1.2.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X;Y)$. Les assertions suivantes sont equivalentes :*

(i) A est compact.

(ii) Pour toute partie T bornée de X, l'ensemble $A(\overline{T})$ est relativement compact dans Y.

Preuve. (ii) $\Longrightarrow$ (i) : on applique (ii) a $A = B_X$. (i) $\Longrightarrow$ (ii) : soit T une partie bornée quelconque de X. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $T \in B_X(0;r) = rB_X$. D'où, avec la linéarité de A, on obtient que

$$A(\overline{T}) \subset A(r\overline{B}_X) = rA(\overline{B}_X)$$

Comme $A(\overline{B}_X)$ est relativement compact, on vérifie alors facilement que $rA(\overline{B}_X)$ est relativement compact et donc $A(\overline{T})$ est aussi relativement compact ■

La proposition suivante décrit la structure de $\mathcal{K}(X;Y)$.

Proposition 1.2.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach; l'ensemble $\mathcal{K}(X;Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X;Y)$.*

Proposition 1.2.3. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ et $A \in \mathcal{L}(Y;Z)$; si S ou A est compact alors AS est compact. En particulier, $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatére de $\mathcal{L}(X)$.*

Remarque 1.2.1. *$\mathcal{K}(X)$est un idéal bilatére de $\mathcal{L}(X)$ c'est à dire si $A \in \mathcal{K}(X)$ et $S \in \mathcal{L}(X)$, alors AS et SA sont dans $\mathcal{K}(X)$.*

Remarque 1.2.2. *Il est clair que tout opérateur A de rang fini (i,e : l'image de A est dimention fini est compact) : en effet, l'ensemble $A(\overline{B}_X)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'aprés le résultat précédent, si une suite $(A_n)_n$ d'opérateur de rang fini dans $\mathcal{L}(X,Y)$ converge vers A dans $\mathcal{L}(X,Y)$, alors A est compact. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Lemme 1.2.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact et $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda \neq 0$. Alors $R(A - \lambda)$ est fermé.*

Lemme 1.2.2. *Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{K}(X)$, alors $I - A$ est à image fermée et :*

$$dim(N(I - A)) = codim(R(I - A)) < \infty$$

Définition 1.2.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach, Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ est dit **compact** s'il transforme toute partie bornée de X en une partie relativement compact de Y . Autrement dit, A est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous-suite convergente.*

Un opérateur compact est nécessairement continue car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée tel que $\|Ax_n\| \to \infty$, ce qui contredit la compacité

Théorème 1.2.1. *Si $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ est compact alors pour tout suite $(x_n)_n$ tel que $x_n \to x$ on a $Ax_n \to Ax$. La réciproque est vraie si X est réflexif.*

1.2.2 Théorie Spectrale d'un opérateur compact :

Soit X un espace de Banach. On appelle spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$, le sous-ensemble du plan complexe défini par :

$$\sigma(A)=\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas bijective } \}$$

On dit que $\lambda \in \sigma(A)$ est une valeur propre de A de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si $\lambda I - A$ n'est pas injective et $dimN(\lambda I - A) = m$.

Lemme 1.2.3. *Soit A est un opérateur compact, $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \neq 0$, alors λ est un point isolée de $\sigma(A)$*

1.2.3 Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto adjoint

On commence par rappeler le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints en dimension finie.

Théorème 1.2.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie n, alors :*

(i) Les sous-espaces propres $N(\lambda I - A$, où $\lambda \in sp(A)$, sont deux à deux orthogonaux;

(ii) A est diagonalisable dans une base orthonormée et :

$$H = \oplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} N(\lambda I - A)$$

(ii) A admet la dťecomposition spectrale suivante :

$$A = \Sigma_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda = \Sigma_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

Où P_λ est la projection orthogonale de H sur $N(\lambda I - A)$.

On caractérise dans ce lemme, la norme d'un opérateur auto-adjoint compact.

Lemme 1.2.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors :*

$$\|A\| = \max\{|\lambda| \ \in \sigma_p(A)\}$$

Théorème 1.2.3. ***(Décomposition spectrale) :***

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Si H est séparable, alors, il admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de A. Autrement dit, A est diagonalisable dans une base hilbertienne.

Preuve. Comme A est compact, alors, son spectre est constitué de 0 et d'une suite finie ou non de valeurs propres non nulles. Comme A est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda)_{n>1}$ la suite des valeurs propres distinctes de $A(\lambda_0 = 0)$. On pose $F_n = N(\lambda I - A)$ et $F_0 = N(A)$ D'aprés le théorème de Fredholm , F_n est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. De plus , les sous-espaces F_n sont deux à deux orthogonaux.

Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(F_n)_{n \geq 0}$. On va montrer que F est dense dans H. On remarque d'abord que $A(F) \subset F$ de sorte que $A(F^\perp) \subset F^\perp$.

En effet :

$$\forall x \in F^{\perp}, \forall y \in F, \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0.$$

Soit B la restriction de A à $F^{\perp}$. D'aprés ce qui précéde B est un opérateur de $F^{\perp}$ dans $F^{\perp}$

L'opérateur $B = A \mid_{F^{\perp}}$ est auto-adjoint compact et$\sigma(B) = \{0\}$. En effet$\sigma(B)\backslash\{0\}$ est constitué des valeurs propres de B, qui seraient alors aussi des valeurs propres de A. Les vecteurs propres associés appartiendront donc à F et à $F^{\perp}$.

ce qui est absurde. on a :

$$F^{\perp} \subset N(A) \subset F$$

ce qui entraine que $F^{\perp} = \{0\}$. Autrement dit, F est dense dans H. Reste à la fin de choisir dans chaque F_n une base hilbertienne. La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de A. Ainsi, le résultat obtenu en dimension finie se le théorème 1.2.2 généralise en dimension inifinie comme suit :

Théorème 1.2.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact, alors on a :*

$$A = \Sigma_{\lambda\in\sigma_p(A)}\lambda P_{\lambda} = \Sigma_{\lambda\in\sigma_p(A)\backslash\{0\}}\lambda P_{\lambda}$$

Où P_{λ} est la projection orthogonale de H sur $N(\lambda I - A)$.

■

1.3 Opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et Opérateurs de Riesz

Cette section donne plusieurs définitions et propriétés différents sur les opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et opérateurs de Riesz sur l'espace de Banach.

1.3.1 Opérateurs de Fredholm, Semi-Fredholm

Définition 1.3.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés, soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, on note $N(A)$ le nayau de A et $R(A)$ l'image de A. On dit que :*

1) A est un opérateur de Fredholm si $dim N(A)$ et $codim R(A)$ sont finis, l'ensemble des ces opérateurs est noté par :

$$\Phi(X,Y) \text{ ou } \Phi(X) \text{ lorsque } X = Y$$

2) A est un opérateur de semi-Fredholm supérieur si $dim N(A)$ est fini et $R(A)$ est fermé, l'ensemble des ces opérateurs est noté par :

$$\Phi_+(X,Y) \text{ ou } \Phi_+(X) \text{ lorsque } X = Y$$

3) A est un opérateur de semi-Fredholm inférieur si $codim R(A)$ est fini, l'ensemble des ces opérateurs est noté par :

$$\Phi_-(X,Y) \text{ ou } \Phi_-(X) \text{ lorsque } X = Y$$

4) A est un opérateur de semi-Fredholm si $A \in \Phi_\pm(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y)$

Remarque 1.3.1. *Comme l'image d'un opérateur est fermée si elle est de codimention fini alors :*

(i) $\Phi(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y)$

(ii) $\Phi(X)$ est un ensemble non-vide puisqu'il contient l'identité. Par contre $\Phi(X,Y)$ peut-être vide lorsque $X \neq Y$

Définition 1.3.2. *Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, on note $\alpha(A) = dim(N(A))$ et $\beta(A) =$*

$codim(R(A))$, On appelle l'indice d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeurs entiéres suivante :

$$\begin{aligned} i : \mathcal{L}(X,Y) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ A &\rightarrow i(A) = \alpha(A) - \beta(A) \end{aligned}$$

Et dans ce cas, on a $i(A) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, Il est clair que

- *Si $A \in \Phi(X)$ alors $i(T) < \infty$*
- *Si $A \in \Phi_+(X) \backslash \Phi(X)$ alors $i(A) = -\infty$*
- *Si $A \in \Phi_-(X) \backslash \Phi(X)$ alors $i(A) = +\infty$*

Remarque 1.3.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach, on remarque que :*

(i) Dans le cas ou X et Y sont de dimension finie, tous les opérateur sont de Fredholm et leur indice égale à $dimX - dimY$

(ii) Tout opérateur inversible de $\mathcal{L}(X,Y)$ sont de Fredholm d'indice nul, En effet, il découle de l'inversibilité de A que $N(A) = \{0\}$ (bijection), c'est à dire $\alpha(A) = 0$, et $R(A) = X$ qui est fermée et sa codimension est nulle ($\beta(A) = 0$), ainsi : $i(A) = 0 - 0 = 0$.

(iii) Si $K \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, alors $K - \lambda$ est un opérateur de Fredholm pour tout compact non-nul $\lambda \in \mathbb{C}$

(iv) Tout opérateur injectif à image fermée est semi-Fredholm supérieur d'indice négatif

(v) Tout opérateur surjectif est de semi-Fredholm inférieur d'indice positif

Voici un premier critére de ferméture des opérateurs linéaires.

Théorème 1.3.1. *soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ un opérateur à image fermée. Alors on a :*

(i) A est semi-Fredholm supérieur si et selement si A^* est semi-Fredholm inférieur

(ii) A est semi-Fredholm inférieur si et selement si A^* est semi-Fredholm supérieur

(iii) A est semi-Fredholm si et selement si A^* est semi-Fredholm

(iv) A est Fredholm si et selement si A^* est Fredholm

Et dans tous ses cas, on a $i(A^*) = -i(A)$.

Preuve. Puisque $R(A)$ est fermée alors $R(A^*)$ est fermé, donc :

$$R(A) = N(A^*)^\perp \text{ et } R(A^*) = N(A)^\perp$$

Par conséquence, $\alpha(A^*) = \dim N(A^*) = codimR(A) = \beta(A)$ et $\beta(A^*) = codimR(A^*) = \dim N(A) = \alpha(A$. et puisque $\dim N(A^*)$ et $codimR(A^*)$ est finis alors A^* est de Fredholm.

$$i(A^*) = \alpha(A^*) - \beta(A^*) = \beta(A) - \alpha(A) = -i(A)$$

Maintenant, les autres assertions se vérifient facilement. ∎

Théorème 1.3.2. *soient $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ et $S \in \mathcal{L}(X;Y)$.*

(i) Si $A \in \Phi_+(X,Y)$ et $S \in \Phi_+(Y,Z)$, alors $SA \in \Phi_+(X,Z)$.

(ii) Si $A \in \Phi_-(X,Y)$ et $S \in \Phi_-(Y,Z)$, alors $SA \in \Phi_-(X,Z)$.

(iii) Si $A \in \Phi(X,Y)$ et $S \in \Phi(Y,Z)_y$ alors $S \in \Phi(X,Z)$.

Preuve. Montrons l'assertion (ii).

Soient M et N des sous-espaces fermée de dimension finie tels que $Y = R(A) \oplus M$ et $Z = R(S) \oplus N$. Alors il vient que $Z = (R(S) + SM) \oplus N$, et comme SM est de dimension finie, on obtient que $SA \in \Phi_-(X,Z)$. les assertions (i) et (ii) se déduisent de (i) par dualité. ∎

Corollaire 1.3.1. *soit A un opérateur bornée sur X.*

(i) *Si $A \in \Phi_+(X)$ alors $A^n \in\in \Phi_+(X)$ pour tout $n \geq 1$.*

(ii) *Si $A \in \Phi_-(X)$ alors $A^n \in\in \Phi_-(X)$ pour tout $n \geq 1$.*

(iii) *Si $A \in \Phi(X)$ alors $A^n \in\in \Phi(X)$ pour tout $n \geq 1$.*

Théorème 1.3.3. *Soient $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(i) Si $SA \in \Phi_+(X,Y)_y$ alors $A \in \Phi_+(X,Y)$.

(ii) Si $SA \in \Phi_-(X,Y)_y$ *alors* $S \in \Phi_-(X,Y)$.

(iii) Si $SA \in \Phi(X,Y)_y$ *alors* $A \in \Phi_+(X,Y)$ *et* $S \in \Phi_-(Y,Z)$.

Preuve. (ii) comme $R(SA) \subseteq R(S)$, on obtient que $codimR(S) \leq codimR(SA)$. D'où $S \in \Phi_-(Y,Z)$. Les assertions (i) et (ii) se déduisent de (i) par dualité . ∎

Lemme 1.3.1. *Si* $A, S \in \Phi(X)$ *alors* $AS \in \Phi(X)$. *De plus,*

$$i(AS) = i(A) + i(S)$$

Lemme 1.3.2. *Soient* $A : X \to Y$ *un opérateur borné et* M *un sous-espace de* X *de codimension finie* n. *Alors* A *est de Fredholm de plus* $i(A) = i(A_0) + n$.

Proposition 1.3.1. *Soit* $A \in \mathcal{L}(X)$ *les assertions suivantes sont équivalantes :*

(i) Φ_A *est un ouvert.*

(ii) $i(\lambda - A)$ *est constante on tout composont de* Φ_A.

(iii) $\alpha(\lambda - A)$ *et* $\beta(\lambda - A)$ *sont constantes on tout composont de* Φ_A *sauf sur ensemble discret de point aux quel ils sont des plus grand.*

Théorème 1.3.4. ***(Alternative de Fredholm) :***

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ *un opérateur compact. On a pour tout* $\lambda \in C^*$ *:*

(i) $N(\lambda I - A)$ *est de dimension finie.*

(ii) $R(\lambda I - A)$ *est fermé.*

(iii) $N(\lambda I - A) = \{0\} \Leftrightarrow R(\lambda I - A) = X$.

Perturbation de Fredholm et semi-Fredholm :On va exposer les résultat principaux des perturbation de Fredholm basés essentiels papier de Abedlmouleh et Jribi .

Définition 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces de Banach et l'opérateur $F \in \mathcal{L}(X,Y)$, alors on a :*

(i) *F est appelée perturbation de Fredholm si $F + A \in \Phi(X,Y)$ avec $A \in \Phi(X)$.*

(ii) *F est appelée perturbation de semi-Fredholm supérieur si $F + A \in \Phi_+(X,Y)$ avec $A \in \Phi_+(X)$.*

(iii) *F est appelée perturbation de Fredholm inférieur si $F + A \in \Phi_-(X,Y)$ avec $A \in \Phi_-(X)$.*

Remarque 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces de Banach. Les ensembles des perturbations de Fredholm (semi fredholm sup. et semi fredholm inf.) seront notées par : $\mathcal{F}(X,Y)$ ou $\mathcal{F}(X)$ avec $X = Y$., $\mathcal{F}_+(X,Y)$ ou $\mathcal{F}_+(X)$ avec $X = Y$. et $\mathcal{F}_-(X,Y)$ ou $\mathcal{F}_-(X)$ avec $X = Y$.*

Remarque 1.3.4.

$$\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y).$$

$$\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y).$$

Lemme 1.3.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $F \in \mathcal{L}(X)$. Alors :*

(i) *Si $A \in \Phi(X)$ et $F \in \mathcal{F}(X)$, alors $A + F \in \Phi(X)$ et $i(A+F) = i(A)$.*

(ii) *Si $A \in \Phi_+(X)$ et $F \in \mathcal{F}_+(X)$, alors $A + F \in \Phi_+(X)$ et $i(A+F) = i(A)$.*

(iii) *Si $A \in \Phi_-(X)$ et $F \in \mathcal{F}_-(X)$, alors $A + F \in \Phi_-(X)$ et $i(A+F) = i(A)$.*

Ascent et Descent d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.3.4. *[20] Pout $A \in \mathcal{L}(X)$, on appelle ascent de A et on note $asc(A)$ le plus petit entier p tel que $N(A^p) = N(A^{p+1})$, si un tel entier n'existe pas alors :$asc(A) = \infty$, et on écrit :*

$$asc(A) = \min\{p \in \mathbb{N} : N(A^p) = N(A^{p+1})\}$$

Définition 1.3.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, on appelle descent de A et on note $desc(A)$ le plus petit entier q tel que $R(A^q) = R(A^{q+1})$, si un tel entier n'existe pas alors :$desc(A) = \infty$ et on* *écrit :*

$$desc(A) = \min\{q \in \mathbb{N} : R(A^q) = R(A^{q+1})\}$$

1.3.2 Opérateurs de Browder, Semi Browder

Deux classes importantes dans la théorie de Fredholm sont données par les classes des opérateurs semi-Fredholm avec ascent ou descent finie.
Les opérateurs semi-Browder supérieur sont définis par :

$$\mathcal{B}_+(X) = \{A \in \Phi_+(X) : ascA < \infty\}$$

et les opérateurs semi-Browder inférieur par :

$$\mathcal{B}_-(X) = \{A \in \Phi_-(X) : descA < \infty\}$$

Finalement les opérateurs de Browder connus aussi sous le nom des opérateurs de Riesz Schauder sont donnés par :

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_+(X) \cap \mathcal{B}_-(X)$$

Pour une lecture détaillée on se refère à [20].

Remarque 1.3.5. *On remarque que $\Phi(X), \Phi_+(X)$ et $\Phi_-(X)$ sont des semi-groupes ouverts dans $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}_+(X), \mathcal{B}_-(X)$ sont des sous ensembles de $\mathcal{B}(X)$*

Théorème 1.3.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ alors :*

1) A est un semi-Browder supérieur $\Leftrightarrow$ A^* est un semi-Browder inférieur.

2) A est un semi-Browder inférieur. $\Leftrightarrow$ A^* est un semi-Browder supérieur.

3) A est un Browder $\Leftrightarrow$ A^* est un Browder.

Proposition 1.3.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ alors :*

1) A est un semi-Browder supérieur $\Leftrightarrow$ $R(A)$ est fermée et $N^\infty < \infty$

2) A est un semi-Browder inférieur $\Leftrightarrow codimR^{\infty} < \infty$

3) A est un Browder $\Leftrightarrow dimN^{\infty} < \infty$ *et* $codimR^{\infty} < \infty$

Remarque 1.3.6. *Soit* $A \in \mathcal{L}(X)$ *alors on remarque que :*

- *A est un semi-Browder supérieur alors* $i(A) \leq 0$
- *A est un semi-Browder inférieur alors* $i(A) \geq 0$
- *A est un Browder alors* $i(A) = 0$

1.3.3 Opérateur de Kato

Définition 1.3.6. *[20] Soit* $A \in \mathcal{L}(X)$*, on dit que A est un opérateur de Kato si* $R(A)$ *est fermée et A satisfait les conditions suivantes :*

1. $N(A) \subset R^{\infty}(A)$
2. $N^{\infty}(A) \subset R(A)$
3. $N^{\infty}(A) \subset R^{\infty}(A)$
4. $N(A) \subset \overline{R^{\infty}(A)}$

Avec : $R^{\infty}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(A^n)$

Décompposition de Kato [20] :

Soit A un opérateur semi-Fredholm, alors il existe des sous-espaces fermés $X_1, X_2 \subset X$ invariant avec respect de A tel que $X = X_1 \oplus X_2, dimX_1 < \infty, A|_{X_1}$ est nilpotent et $A|_{X_2}$ est de Kato.

1.3.4 Opérateur de Riesz et Projection de Riesz

Algèbre de Calkin

Définition 1.3.7. *Soient* $\mathcal{L}(X)$ *l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés et* $\mathcal{K}(X)$ *l'idéal fermé de* $\mathcal{L}(X)$*. L'algèbre* $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ *formé des classes* $A + \mathcal{K}(X)$ *est dite algèbre de Calkin avec* $A \in \mathcal{L}(X)$ *et noté par* $\mathcal{C}(X)$*.*

Théorème 1.3.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, A est un opérateur de Fredholm si et seulement si $\pi(A)$ est inversible dans l'algèbre de Calkin. où $\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{C}(X)$ est la projection canonique.*
i.e $\pi(A) = A + \mathcal{K}(X)$

Définition 1.3.8. ***(La partie quasinilpotente) :***
La partie quasinilpoente de A noté par :

$$H_0 = \{u \in X, \lim_{n\to\infty} \|A^n u\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$$

0 *est un point isolé du spectre.*

Définition 1.3.9. ***(Opérateur de Riesz) :***
$A \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur de Riesz et on note par : $\mathcal{R}(X)$ si pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, A - \lambda I$ est se Fredholm
Autrement dit $A \in \mathcal{R}(X)$ si seulement si A est quasinilpotent dans l'algébre de Calkin $\mathcal{C}(X)$

Définition 1.3.10. *La projection de Riesz :*

Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, Si λ_0 est un point isolé dans $\sigma(A)$, Notons :

$$\Gamma_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \epsilon\}$$

Le cercle orienté positivment , On définit le projecteur de Riesz de A associé à λ_0 sur Γ_{λ_0} par :

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda I_X)^{-1} \mathrm{d}\lambda,$$

Chapitre 2

théorie spectrale des opérateurs bornés

Dans ce chapitre on commence par des définitions sur les types du spectre essentiel d'un opérateurs linéaire borné dans un espace de Banach, ensuite nous étudions le spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés.

Somme de deux opérateurs Soient S et A deux opérateurs de X dans Y On définie l'opérateur somme $S + A$ par :

$$(S + A)(x) = S(x) + A(x)$$

Opérateur produit

Soient X, Y et Z trois espaces vectoriéls, et soient $A : X \to Y$ et $S : Y \to Z$, deux opérateurs linéaires ,On définie l'opérateur composition SA (dit opérateur produit) de A et S par :

$$(SA)(x) = S(A(x))$$

• Si R est un opérateur de H dans Y, alors : $(RS)A = R(SA)$ • Si R est un opérateur de Y dans H, alors :$(R + S)A = RA + SA$

2.1 Spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné

On plus de les types de spectre d'un opérateur linéaire borné, il existe un autre type qui s'appelle **le spectre essentiel** pour définit cet dernier on donne d'abord la définition du le spectre discret :

Définition 2.1.1. ***(le spectre discret)***
C'est l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie , noté par $\sigma_d(A)$

Définition 2.1.2. *Dans un espace de Hilbert ,Si A est un opérateur auto-adjoint on a une seule définition du spectre essentiel :c'est l'ensemble du tous les points du spectre ne sont pas des valeurs propres isolées de multiplicité finie c-à-d :il est le complémentaire du spectre discret, on note par* $\sigma_e(A)$ *, alors on écrit :*

$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_d(A)$$

Mais dans l'espace de Banach le spectre essentiel il y a plusieurs définitions non équivalent

.

La difinition la plus plausible du spectre essentiel est :

$$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \text{ n'est pas de Fredholm } (\Phi(A)) \text{ d'indice } 0\}.$$

Mais d'autre part il a des autres définitions par [14] on le présent comme suit :

$$\begin{aligned}
\sigma_{e1}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \notin \Phi_{+}(X)\} = \mathbb{C} \backslash \Phi_{+A} \\
\sigma_{e2}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \notin \Phi_{-}(X)\} = \mathbb{C} \backslash \Phi_{-A} \\
\sigma_{e3}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \notin \Phi_{\pm}(X)\} = \mathbb{C} \backslash \Phi_{\pm A} \\
\sigma_{e4}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \notin \Phi(X)\} = \mathbb{C} \backslash \Phi_{A} \\
\sigma_{e5}(A) &= \bigcap_{K \in K(X)} \sigma(A+K \\
\sigma_{e6}(A) &= \mathbb{C} \backslash \rho_6(A) \\
\sigma_{e7}(A) &= \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_{ap}(A+K) \\
\sigma_{e8}(A) &= \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_{\delta}(A+K) \\
\sigma_{pa}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \text{ n'a pas image fermé}\}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\sigma_{ap}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \inf_{\|x\| \leq 1} \|\lambda - A\| = 0\} \\
\sigma_{\delta}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda - A \text{ non surjective}\}
\end{aligned}$$

Et :

$$\rho_6(A) = \{\lambda \in \rho_5(A) \backslash \quad \text{tous les scalaires} \quad \lambda \quad \text{dans} \quad \rho(A)\}$$

Et :

$$\rho_5(A) = \{\lambda \in \Phi_A \backslash \quad i(\lambda - A) = 0\}$$

Propriétés :

$\sigma_{e1}(A)$ et $\sigma_{e2}(A)$ sont des spectre essentiel de **Gustafson** et **Weidman,**$\sigma_{e3}(A)$ le spectre essentiel de **Kato** $\sigma_{e4}(T)$ est le spectre essentiel de **Wolf** $\sigma_{e5}(A)$ est le spectre essentiel de **Schechter** $\sigma_{e6}(A)$ est de **Browder**, $\sigma_{e7}(A)$ est de **Rakovcevié**, $\sigma_{e8}(A)$ le spectre essentiel introduit par **Schmoeger** .

Proposition 2.1.1. ***(Caractérisation du spectre essentiel) :***

En générale on a :

$\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(A) = \sigma_{e3}(A \subseteq \sigma_{e4}(A) \subseteq \sigma_{e5}(A) \subseteq \sigma_{e6}(A)$

$\sigma_{e5}(A) = \sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e8}(A)$, $\sigma_{e1}(A) \subset \sigma_{e7}(A)$

$\sigma_{e2}(A) \subset \sigma_{e8}(A)$,

Proposition 2.1.2. *Soit X est un espace de Banach et $A \in C(X)$. Alors :*
$\lambda \notin \sigma_{e5}(A)$ si seulement si $\lambda \in \Phi_A$, et $i(\lambda - A) = 0\}$.

Proposition 2.1.3. *Soit $A \in C(X)$, alors :*

(i) $\lambda \notin \sigma_{e7}(A)$ si seulement si $\lambda - A \in \Phi + (X)$ et $i(\lambda - A) \leq 0$.

(ii) $\lambda \notin \sigma_{e8}(A)$ si seulement si $\lambda - A \in \Phi_{-}(X)$ et $i(\lambda - A) \geq 0$.

(iii) A est un opérateur linéaire borné, alors $\sigma_{e8}(A) = \sigma_{e7}(A^{*})$.

Remarque 2.1.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et le complémentaire de $\sigma_{e4}(A)$ est connexe, alors :*

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A)$$

Rappelons le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *(i) Si $BA \in \Phi + (X)$ alors $A \in \Phi + (X)$.*

(ii) Si $BA \in \Phi_{-}(X)$ alors $V \in \Phi_{-}(X)$.

(iii) Si $A \in \Phi(X)$ et $B \in \Phi(X)$ alors $BA \in \Phi(X)$ et $i(AB) = i(A) + i(B)$.

(iv) Si $AB \in \Phi(X)$ et $BA \in \Phi(X)$ alors $A \in \Phi(X)$ et $B \in \Phi(X)$.

2.2 Spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés

Cette section donne le spectre essentiel de la somme de deux opérateus linéaires bornés, on commence par le théorème suivant de [14] qui donne la relation entre le Spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés et le spectre essentiel de chacun de ces opérateurs avec leurs produits sont des perturbation Fredholm ou des perturbation semi-Fredholm supèrieur ou infèrieur dans l'espace de Banach X.

Théorème 2.2.1. *Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Si $0 \in \rho(A)$. Alors pour $\lambda \neq 0$, on a $\lambda \in \sigma_{ei}(A) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^{-1})$,pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8$.*

Preuve. $\lambda \in \sigma_{ei}(A) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^{-1})$ for $i = 4, 5$.

D'autre part, peut être écrit $\lambda \neq 0$

$$A - \lambda = -\lambda(A^{-1} - \lambda^{-1})A.$$

alors :

$\alpha(A - \lambda) = \alpha(A^{-1} - \lambda^{-1})$ et $R(A - \lambda) = R(A^{-1} - \lambda^{-1})$.

Cela montre que $\lambda \in \Phi_{+A}$ (resp. Φ_{-A}) si seulement si $\dfrac{1}{\lambda} \in \Phi_{+A^{-1}}$ resp. $\Phi_{-A^{-1}}$. Et on a : $i(A - \lambda) = i(A^{-1} - \lambda^{-1})$. Donc :

$\lambda \in \sigma_{ei}(A)$ Si seulement si $\dfrac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^{-1})$ pour $i = 1, 2, 3, 7, 8$. ■

Théorème 2.2.2. *Soit A et B deux opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach X.*

(i) Si $AB \in \mathcal{F}(X)$ alors :

$$\sigma_{ei}(A + B)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ei}(B)]\backslash\{0\}, \ i = 4, 5.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}(X)$, alors

$$\sigma_{e4}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)]\backslash\{0\}.$$

De plus, si le complément de $\sigma_{e4}(U)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e5}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)]\backslash\{0\} \tag{2.1}$$

(ii)Si l'hypothèse de (i) est satisfait et si $\mathbb{C}\backslash\sigma_{e5}(A+B)$, $\mathbb{C}\backslash\sigma_{e5}(A)$ et $\mathbb{C}\backslash\sigma_{e5}(B)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e6}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e6}(A) \cup \sigma_{e6}(B)]\backslash\{0\}.$$

(iii) Si $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, alors

$$\sigma_{ei}(A+B)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ei}(B)]\backslash\{0\},\ i = 1, 7.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}_+(X)$ alors

$$\sigma_{e1}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)]\backslash\{0\}. \tag{2.2}$$

De plus, Si $\mathbb{C}\backslash\sigma_{e4}(A)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e7}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(VB)]\backslash\{0\}. \tag{2.3}$$

(iv) Si $BA \in \mathcal{F}_-(X)$ alors

$$\sigma_{ei}(B+A)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ei}(B)]\backslash\{0\},\ i = 2, 8.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}_-(X)$, alors

$$\sigma_{e2}(B+A)\backslash\{0\} = [\sigma_{e2}(A) \cup \sigma_{e2}(B)]\backslash\{0\}. \tag{2.4}$$

De plus, Si le complément de $\sigma_{e4}(A^*)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e8}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e8}(A) \cup \sigma_{e8}(B)]\backslash\{0\} \tag{2.5}$$

(v) Si $AB \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$ alors

$$\sigma_{e3}(A+B)\backslash\{0\} \subset [(\sigma_{e3}(A) \cup \sigma_{e3}(B)) \cup (\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(B)) \cup (\sigma_{e2}(A) \cap \sigma_{e1}(B))]\backslash\{0\}.$$

De plus, Si $BA \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$ alors

$$\sigma_{e3}(A+B)\backslash\{0\} = [(\sigma_{e3}(A) \cup \sigma_{e3}(B)) \cup (\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(B)) \cup (\sigma_{e2}(A) \cap \sigma_{e1}(B))]\backslash\{0\}.$$

Preuve. La démonstration de ce théorème généraliser dans [16] pour les perturbation de Fredholm et semi-Fredholm

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ .on écrit :

$$(A-\lambda I)(B-\lambda I) = AB - \lambda(A+B-\lambda I) \tag{2.6}$$

Et

$$(B-\lambda I)(A-\lambda I) = BA - \lambda(A+B-\lambda I) \tag{2.7}$$

(i) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4}(a) \cup \sigma_{e4}(B) \cup \{0\}$. Alors, $(A-\lambda I) \in \Phi(X)$ et$(B-\lambda I) \in \Phi(X)$. D'aprés l'assertion (iii) de[[20] le lemme 2.1.1], donne $(A-\lambda I)(B-\lambda I) \in \Phi(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, on applique l'équation 2.6, on a $(A+B-\lambda I) \in \Phi(X)$, donc $\lambda \notin \sigma_{e4}(U+V)$. We obtain

$$\sigma_{e4}(A+B)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)]\backslash\{0\} \tag{2.8}$$

Soit $\lambda \notin \sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B) \cup \{0\}$. alors par la proposition 2.1.2, $(A-\lambda I) \in \Phi(X)$, $i(A\lambda I) = 0$, $(B-\lambda I) \in \Phi(X)$ et $i(B-\lambda I) = 0$ et alors par l'assertion (iii) de le lemme 2.1.1, donne $(A-\lambda I)(B\lambda I) \in \Phi(X)$ et $i((A-\lambda I)(B-\lambda I)) = 0$. De plus, puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, on applique l'équation 2.6. et1.3.3 alors on a :

$$(A+B-\lambda I) \in \Phi(X) \text{ et } i((A+B-\lambda I) = 0.$$

Maintenant on applique la proposition 2.1.2 1.9 donc on a $\lambda \notin \sigma_{e5}(A+B)$, avec

$$\sigma_{e5}(A+B)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)]\backslash\{0\} \tag{2.9}$$

On démontre l'inclusion inverse des équations 2.8 et 2.9. Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e4}(A+B) \cup \{0\}$, alors $(A+B-\lambda I) \in \Phi(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$ et $BA \in \mathcal{F}(X)$ alors par l'éqs2.6 et 2.7. On a :

$$(A-\lambda I)(B-\lambda I) \in \Phi(X) et (B-\lambda I)(A-\lambda I) \in \Phi(X) \tag{2.10}$$

D'aprés l'eq 2.10 et l'assertion (iv) du le lemme 2.1.1 Il est clair que $(A-\lambda I) \in \Phi(X)$ et $(B-\lambda I) \in \Phi(X)$. Donc $\lambda \notin \sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)$. cela démontre que :

$$[\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)]\backslash\{0\} \subset \sigma_{e4}(A+B)\backslash\{0\}.$$

Alors :

$$\sigma_{e4}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)]\backslash\{0\}.$$

ceci preuve que

$$[\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)]\backslash\{0\} \subset \sigma_{e5}(A+B)\backslash\{0\}.$$

Soit $\lambda \notin \sigma_{e5}(A+B) \cup \{0\}$, alors par la proposition 2.1.2, $(A+B-\lambda I) \in \Phi(X)$ et $i(A+B-\lambda I) = 0$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$ et $BA \in \mathcal{F}(X)$, On voit quet $(A-\lambda I) \in \Phi(X)$ et $(B-\lambda I) \in \Phi(X)$.

On peut applique les équations et l'assertion (iii) du le lemme 2.1.1 , on a

$$i[(A-\lambda I)(B-\lambda I)] = i(A-\lambda I) + i(B-\lambda I) = i(A+B-\lambda I) = 0.(2.11) \tag{2.11}$$

Puisque A est un opérateur linéaire borné, on obtient $\rho(A) \neq \emptyset$. et $\mathrm{C}\backslash\sigma_{e4}(A)$ on déduire dans la remarque 2.1.1 que :

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A).$$

On utilise l'équation précédent que $(A-\lambda I) \in \Phi(X)$, on déduire que $i(A-\lambda I) = 0$.

dans l'éq 2.11 on a $i[(V-\lambda I)] = 0$. On conclut $\lambda \notin \sigma_{e5}(U) \cup \sigma_{e5}(V)$ avec

$$[\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)]\backslash\{0\} \subset \sigma_{e5}(A+B)\backslash\{0\}.$$

Donc on démontre l'équation 2.15.

(ii) Les ensembles $\mathrm{C}\backslash\sigma_{e5}(A+B), \mathrm{C}\backslash\sigma_{e5}(A)$ et $\mathrm{C}\backslash\sigma_{e5}(B)$ sont connexe. Puisque A et B sont des opérateur bornés on a, $\rho(A), \rho(B)$ et $\rho(A+B)$ ne sont pas des ensembles vides. Donc on utilise [15], on déduire que :

$\sigma_{e5}(A+B) = \sigma_{e6}(A+B), \sigma_{e5}(A) = \sigma_{e6}(A)$ et $\sigma_{e5}(B) = \sigma_{e6}(B)$.

Donc, Eq 2.15 donne ;

$$\sigma_{e6}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e6}(A) \cup \sigma_{e_6}(B)]\backslash\{0\}.$$

(iii) Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B) \cup \{0\}$, alors $(A-\lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $(B-\lambda I) \in \Phi_+(X)$. On utilise [29] la page 129, on a $(A-\lambda I)(B-\lambda I) \in \Phi_+(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, on peut applique l'équation 2.6 et l'assertion (ii) de lemme 1.3.3 on a donc $(A+B-\lambda I) \in \Phi+(X)$.

Donc, $\lambda \notin \sigma_{e1}(A+B)$. Alors

$$\sigma_{e1}(A+B)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)]\backslash\{0\} \tag{2.12}$$

Maintenant, supposons que $\lambda \notin \sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B) \cup \{0\}$, alors par la proposition 2.1.3 l'assertion (i), on a

$(A-\lambda I) \in \Phi+(X),\ i(A-\lambda I) \leq 0,\ (B-\lambda I) \in \Phi+(X)$ et $i(B-\lambda I) \leq 0.$

On utilise [29] la page 129, et [20] la page 153, on a

$(A-\lambda I)(V-\lambda I) \in \Phi+(X)$ et $i[(A-\lambda I)(B-\lambda I)] \leq 0.$

Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, on applique l'éq 2.6 et l'assertion (ii) du lemme1.3.3, on a alors

$(A+B-\lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $i(A+B-\lambda I) \leq 0.$

On peut applique la proposition 2.1.3 l'ennoncé (i), il est clair que $\lambda \notin \sigma_{e7}(A+B)$ Donc :

$$\sigma_{e7}(A+B)\backslash\{0\} \subset [\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)]\backslash\{0\} \tag{2.13}$$

On démontre l'inclusion inverse des équations 2.12 et 2.13

On suppose que $\lambda \notin \sigma_{e1}(A+B) \cup \{0\}$ alors $(A+B-\lambda I) \in \Phi_+(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X)$, alors d'aprés les équations 2.6 et 2.7 et l'assertion (ii) de lemme 1.3.3 on a.

$$(A-\lambda I)(B-\lambda I) \in \Phi_+(X),\ (B-\lambda I)(A-\lambda I) \in \Phi_+(X) \tag{2.14}$$

D'aprés l'équation 2.14. Et le lemme 2.1.1 l'ennoncé (i), il est clair que $(A-\lambda I) \in \Phi_+(X)$

et $(B \ -\lambda I) \in \Phi_+(X)$. Alors $\lambda \notin \sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)$. Donc :

$$[\sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)] \backslash \{0\} \subset \sigma_{e1}(A+B) \backslash \{0\}.$$

Cela preuve l'éq 2.16). Maintenant on démontre ;

$$[\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)] \backslash \{0\} \subset \sigma_{e7}(A+B) \backslash \{0\}.$$

Soit $\lambda \notin \sigma_{e7}(A+B) \cup \{0\}$, alors par la proposition 2.1.3 (i), $(A+B-\lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $i(A+B-\lambda I) \leq 0$.

Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X)$, Il est clair que

$(A-\lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $(B-\lambda I) \in \Phi_+(X)$.

On utilise les équations 2.6 et 2.14 et l'assertion (ii) de le lemme (1.3.3) On a

$$i[(A-\lambda I)(B-\lambda I)] = i(A+B-\lambda I) \leq 0.$$

Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, alors $(A-\lambda_0 I) \in \Phi(X)$ et $i(A-\lambda_0 I) = 0$, puisque $\rho(A) \subset \rho_4(A)$ alors $\lambda_0 \in \rho_4(A).\rho_4(A) = \mathbb{C} \backslash \sigma_{e4}(A)$ est connexe et par la proposition 1.3.1 l'ennoncée (ii), on a $i(A-\lambda I)$ est constante pour tout composant de Φ_A, alors $i(A-\lambda I) = 0$ pour tout $\lambda \in \rho_4(A)$. On applique [20] la page 153, il est clair que

$$i[(A-\lambda I)(B-\lambda I)] = i[(A-\lambda I)] + i[(B-\lambda I)] \leq 0,$$

Donc $i[(B-\lambda I)] \leq 0$. par la proposition 2.1.3 (i), on conclure $\lambda \notin \sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)$ alors

$$[\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)] \backslash \{0\} \subset \sigma_{e7}(A+B) \backslash \{0\},$$

Alors, on obtient l'équation 2.17.

(iv) La preuve de l'équation 2.18 est de même manière que (iii) pour l'éq 2.16.

Maintenant on démontre cette équation suivante :

$$\sigma_{e8}(A+B)\backslash\{0\} = [\sigma_{e8}(A) \cup \sigma_{e8}(B)]\backslash\{0\}.$$

Soient A et $B \in \mathcal{L}$. On applique l'assertion (iii) de la proposition 2.1.3 on a $\sigma_{e8}(A) = \sigma_{e7}(A^*)$, $\sigma_{e8}(B) = \sigma_{e7}(B^*)$ et $\sigma_{e8}(A+B) = \sigma_{e7}(A^* + B^*)$.
Appliquant (iii) pour l'équation 2.17, on obtient :

$$\sigma_{e7}(A^* + B^*)\backslash\{0\} = [\sigma_{e7}(A^*) \cup \sigma_{e7}(B^*)]\backslash\{0\}.$$

Donc, on montre l'éq 2.5

(v) Puisque, l'équation $\sigma_{e3}(A) = \sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(A)$, $\sigma_{e3}(B) = \sigma_{e1}(B) \cap \sigma_{e2}(B)$ et $\sigma_{e3}(A+B) = \sigma_{e1}(A+B) \cap \sigma_{e2}(A+B)$ sont connues, $AB \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, alors par les équations 2.16 et 2.18 on déduire que :

$$\sigma_{e3}(A+B)\backslash\{0\}$$

$$= [(\sigma_{e3}(A) \cup \sigma_{e3}(B)) \cup (\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(B)) \cup (\sigma_{e2}(A) \cap \sigma_{e1}(B))]\backslash\{0\}.$$

■

2.3 S-spectre essentiel

Danc cette section on définit le S-spectre essentiel d'un opérateur borné, on plus elle donne les caractérisations de ce dernier.

Définition 2.3.1. *Soient X un espace de Banach, A et S deux opérateurs linéaires bornés sur X, avec $S \neq O$, On définit l'ensemble $S-$résolvant par :*

$$\rho_S(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda S - A \ a \ inverse \ born\acute{e}\}$$

Le S-spectre de A est le complémentaire de l'ensemble S-résolvent c-à-d :

$$\sigma_S(A) = \mathbb{C} \backslash \rho_S(A).$$

Dans un espace de Hilbert X, si A est un opérateur auto-adjoint, on a une seule définition du spectre essentiel qui consiste à l'ensemble de tous les points du spectre qui ne sont pas des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Par ailleurs, dans un espace de Banach le S-spectre essentiel d'un opérateur linéaire bornée a plusieurs définitions non équivalentes comme on celles définies pour le spectre essentiel au chapitre précédent. Pour S borné, on donne les définitions et les variants du S-spectre essentiel d'un opérateur A, noté $\sigma_{e,S}(A)$ relativement aux définitions des différents opérateurs (Fredholm, Riesz, Kato,....) citée au chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\sigma_{e1,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin \Phi_{+}(X)\} := \mathbb{C} \backslash \Phi_{+A,S}, \\
\sigma_{e2,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin \Phi_{-}(X)\} := \mathbb{C} \backslash \Phi_{-A,S}, \\
\sigma_{e3,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin \Phi_{\pm}(X)\} \ := \mathbb{C} \backslash \Phi \pm A, \ S, \\
\sigma_{e4,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin \Phi(X)\} := \mathbb{C} \backslash \Phi_{A,S}, \\
\sigma_{e5,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{S}(A+K). \\
\sigma_{eB_{+},S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin B_{+}(X)\} := \mathbb{C} \backslash g_{+A,S}, \\
\sigma_{eB-,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin B_{-}(X)\} \ := \mathbb{C} \backslash B_{-A,S}, \\
\sigma_{e6,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S \ - A \notin B(X)\} \ := \mathbb{C} \backslash B_{A,S}, \\
\sigma_{e7,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{ap,S}(A+K). \\
\sigma_{e8,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{\delta,S}(A+K). \\
\sigma_{e9,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - \ A \text{ n‘est pas essentiellement inversible á gauche}\} \\
\sigma_{e10,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - \ A \text{ n‘est pas essentiellement inversible á droite}\} \\
\sigma_{e11,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{l,S}(A+K), \\
\sigma_{e12,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{r,S}(A+K).
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\sigma_{ap,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{\|x\|=1, x \in D(A)} \|(\lambda S - A)\| = 0\}, \\
\sigma_{\delta,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - \ A \text{ n'est pas surjective}\}, \\
\sigma_{r,S}(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - \ A \text{ n'est pas inversible à droite}\}
\end{aligned}$$

et

$$\sigma_{l,S}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - \ A \text{ n'est pas inversible à gauche}\}.$$

Notons que si $S = I$ on retrouve les définitions du spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné dans leur ordre respectif. La section suivante permet de donner une caractérisation des S-spectres essentiels inspirée du livre de Müller [20]

2.4 Caractérisation du S-spectre essentiel

Dans cette section, on donne les différentes caractérisations du S-spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X. Un premier résultat est établi par Jeribi.

Théorème 2.4.1. *Soient S et A deux opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Banach X, alors :*

(i) $\sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$.

(ii) $\sigma_{e7,S}(A) = \sigma_{e1,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) > 0\}$.

(iii) $\sigma_{e8,S}(A) = \sigma_{e2,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) < 0\}$.

(iv) $\sigma_{e11,S}(A) = \sigma_{e9,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) > 0\}$.

(v) $\sigma_{e12,S}(A) = \sigma_{e10,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) < 0\}$.

Preuve.

(i) Supposons $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$. alors $(A - \lambda S) \in \Phi(X)$ et $i(A - \lambda S) = 0$, en appliquant [20] page 173, il existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tq $A - \lambda S + K$ est inversible, alors $\lambda \in \rho_S(A + K)$. Ceci montre que : $\lambda \notin \bigcap\limits_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_S(A + K)$. On a alors

$$\sigma_{e5,S}(A) \subset \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \tag{2.15}$$

Montrons à présent l'inclusion inverse de de l'équation 2.15. Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A)$, alors il existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\lambda \in \rho_S(A + K)$, parsuite $A - \lambda S + K \in \Phi(X)$ et

$i(A - \lambda S + K) = 0$. L'opérateur $A - \lambda S$ peut écrit sous la la forme :

$$A - \lambda S = A + K - \lambda S - K \tag{2.16}$$

Puisque $K \in \mathcal{K}(X)$, d'aprés [20] page 161, on a $A - \lambda S \in \Phi(X)$ et $i(A - \lambda S) = i(A+K-\lambda S) = 0$. Ce qui permet de conclure que $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A-\lambda S) \neq 0\}$, et donc :

$$\sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \subset \sigma_{e5,S}(A).$$

D'où le résultat :

$$\sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}.$$

La démonstration des autres cas est analogue à celle de la première assertion. ■

A partir au théorème précédent on peut établir une caractérisation plus simple de quelques S-spectres essentiels :

Corollaire 2.4.1. *Soient S et A deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X, alors :*

(i) $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A)$ si seulement si $\lambda \in \Phi_{A,S}$ et $i(A - \lambda S) = 0$.

(ii) $\lambda \notin \sigma_{7,S}(A)$ si seulement si $\lambda S - A \in \Phi_+(X)$ et $i(A - \lambda S) \leq 0$.

(iii) $\lambda \notin \sigma_{8,S}(A)$ si seulement si $\lambda S - A \in \Phi_-(X)$ et $i(A - \lambda S) \geq 0$.

Preuve. La preuve de ce corollaire est immédiate par le théorème 2.4.1 ■

Remarque 2.4.1. *(1) L'énoncé (i) du corollaire généralise le résultat donné par [27] page 15 avec $S = I$.*

(2) L'ennoncé (ii) – (iii) *de corollaire précédent étend le résultat donné par [28]*

Par les indices des opérateurs, on peut connecter les S-spectres essentiels de deux opérateurs par le bias de celui de leur produit, on a :

Proposition 2.4.1. *Soit S et $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que $S \neq A$ alors :*

(i) Si $\alpha(S) < \infty$ alors $\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(SA)$.

(ii) Si $\beta(S) < \infty$ alors $\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(AS)$.

(iii) Si $S \in \Phi(X)$ alors $\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e4,S}(AS) = \sigma_{e4,S}$ (SA).

Preuve.

(i) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4,S}$ (SA), alors $(\lambda S - SA) \in \Phi(X)$ cela implique que $S(\lambda - A) \in \Phi(X)$. Puisque $\alpha(S) < \infty$, d'aprés [29] page 111 on déduit que $(\lambda - A) \in \Phi(X)$ ce qui implique que $\lambda \notin \sigma_{e4}(A)$. Donc :

$$\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(SA). \tag{2.17}$$

(ii) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4,S}$ (AS). Alors $(\lambda S - AS) \in \Phi(X)$, cela implique que $(\lambda - A)S \in \Phi(X)$. Puisque $\beta(S) < \infty$, Alors par [29] page 114, on voit que $(\lambda - A) \in \Phi(X)$, donc $\lambda \notin \sigma_{e4}(A)$. Par conséquent :

$$\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(AS). \tag{2.18}$$

(iii) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4}(A)$, alors $(\lambda - A) \in \Phi(X)$, puisque $S \in \Phi(X)$ alors en appliquant [29] page 106 on conclut que $(\lambda - A)S \in \Phi(X)$ et $S(\lambda - A) \in \Phi(X)$. Parsuite $\lambda \notin \sigma_{e4,S}$ (AS) et $\lambda \notin \sigma_{e4,S}$ (SA). On a donc : $\sigma_{e4,S}(SA) \subset \sigma_{e4}(A)$ et $\sigma_{e4,S}(AS) \subset \sigma_{e4}(A)$. Tenant couple des équations 2.17 et 2.18 on obtient :

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e4,S}(AS) = \sigma_{e4,S}(SA)$$

■

Chapitre 3

Convergence et approximation des Opérateurs

Introduction

Le long de ce chapitre, on est entrain de parler de la ν-convergence cette derniere a été fondée à partir de l'approximation spectrale des opérateurs.T.Nair [22].

Motivations

Soient T et T_n des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach complexe X, que l'on notera T, $T_n \in B(X)$. Il va sans dire que la convergence se passe toujours lorsque n tend vers $+\infty$. $\sigma(T_n), \sigma(T)$ étant les spectres de T_n et T respectivement. Si T_n converge vers T dans un sens, plusieurs questions se posent naturellement :

1. Si $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$, Est-ce que $\lambda \in \sigma(T)$?
2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, Est, ce qu'il existe $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ pour tout n assez grand tel que $\lambda_n \to \lambda$?

Selon un mode de convergence donné, on dit que :

Propriéte U est vérifiée si pour toute suite $(T_n)_n/\ T_n \longrightarrow T, \lambda_n$ appartient à $\sigma(T_n)$ et convergeant vers λ on a $\lambda \in \sigma(T)$;

Propriété L est vérifiée si pour toute suite $(T_n)_n/\ T_n \longrightarrow T$ et $\lambda \in \sigma(T)$, il existe une suite $(\lambda_n)_n/\lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$ pour n assez grand.

Considérons la propriété suivante :

$$\text{'Pour tout } T_n \to T, sup\{dist(\mu; \sigma(T)), \mu \in \sigma(T_n)\} \to 0 \text{ '}$$

cette propriété est connue comme étant la **semi continuité supérieure** du spectre sous un mode de convergence donné. Dans ce cas, la propriété **U** en est une conséquence directe.
Par ailleurs, la propriété **L** est connue comme étant la **semi continuité inférieure** du spectre avec ce mode de convergence. Explicitement :

$$\text{'Pour tout } T_n \to T \text{ et } \lambda \in \sigma(T)\ ,\ dist(\lambda, \sigma(T_n)) \to 0 \text{ '}$$

La **semi continuité supérieure** du spectre et la **semi continuité inférieure** , prises ensemble donnent la **continuité** du spectre au sens de Kuratowski.

3.1 Approximation des opérateurs

Plusieurs problèmes liés aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles se ramènent à des problèmes de valeurs propres. Une des questions principales dans cet axe est la suivante :

Etant donné un opérateur borné T et et une perturbation notée E, que sera le spectre de T et le spectre de $E + T$ relatif.
Hélas, aucune réponse ne peut être donnée que dans des cas particuliers, ceci est causé par l'absence de la propriété de semi continuité inférieure du spectre d'un opérateur quelconque T. Le cadre favorable était de considérer des perturbations compactes, ensuite plusieurs résultats ont été donnés pour des cas de perturbations non compactes.

Pour un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach complex X, une solution approchée du problème :

$$T\varphi = \lambda\varphi \quad \text{pour } \varphi \in X\backslash\{0\}$$

est obtenue en résolvant le problème approximé suivant :

$$T_n\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \quad \text{pour } \varphi_n \in X\backslash\{0\}$$

Plusieurs modes de convergence ont été introduits pour l'approximation des éléments spectraux de l'opérateur T : Convergence collectivement compacte, converge compacte, convergence régulière, convergence fortement stable... ([4],[22]).
Soit λ une valeur propre isolée de T de multiplicité algébrique égale à m, alors sous plusieurs modes de convergence cités plus haut T_n admet exactement m valeurs propres comptées avec leurs multiplicités algébriques.

3.1.1 Approximation fortement stable

Commençons par donner quelques modes de convergence usuels. Soit X un espace de Banach :

- **Convergence ponctuelle** : On dit que T_n converge ponctuellement vers T noté $T_n \overset{p}{\to} T$ si

$$\|T_nx - Tx\| \to 0 \text{ pour tout } x \in X$$

- **Convergence en norme** : On dit que T_n converge normalement vers T noté $T_n \overset{n}{\to} T$ si

$$\|T_n - T\| \to 0$$

- **Convergence collectivement compact** : On dit que T_n converge collectivement compact vers T noté par $T_n \overset{cc}{\to} T$ si $T_n \overset{p}{\to} T$, et pour n_0 fixé, l'ensemble :

$$\bigcup_{n \geq n_0} \{(T_n - T)x : x \in X, \|x\| \leq 1\} \text{ est relativement compact de X.}$$

Si T est compact, cette condition est équivalente à $\bigcup_{n \geq n_0} \{(T_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ est relativement compact de X

On s'intéresse à voir comment sont liées les multiplicités algébriques des valeurs spectrales λ_n et λ entre elles et si une base du sous espace spectral associé à λ peut être approximée par des bases correspondantes de T_n.

La convergence ponctuelle et **la convergence en norme** sont des concepts classiques, cependant le concept de la convergence collectivement compacte à été développé séparément par Atkinson et Anselone [4].

Remarque 3.1.1. *Soit X un espace de Banach. La convergence collectivement compacte ou en norme entraine la convergence ponctuelle, c-à-d : Si $T_n \overset{n}{\to} T$ ou $T_n \overset{cc}{\to} T$, alors $T_n \overset{p}{\to} T$. L'inverse n'est pas nécessairement vraie comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 3.1.1. *Dans cet exemple, $T_n \overset{p}{\to} I$ mais $T_n \overset{n}{\nrightarrow} I$ et $T_n \overset{cc}{\nrightarrow} I$.*
Considérons $X := \ell^p, 1 < p < \infty$. $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ dans X, définissons une suite des opérateurs T_n sur X par :

$$T_n x := \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Alors pour tout n, T_n est un opérateur borné de rang fini sur X et $T_n \overset{p}{\to} I$. Mais $T_n \overset{n}{\nrightarrow} I$ puisque $\|T_n - I\| = 1, \forall n$, (On peut aussi la montrer par l'absurde, dans ce cas I devra être de rang fini dans un espace de dimension infinie ce qui est faux.)
On a aussi $T_n \overset{cc}{\nrightarrow} I$,pour tout entier positif n_0 fixé,

$$e_k \in \{(I - T_n)x : x \in X, \|x\| \leq 1\} \text{ pour } k = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$$

Mais la suite (e_k) n'a pas de sous-suite convergente.

Remarque 3.1.2. *Si X est un espace de Banach de dimension infinie, ni la convergence en norme ni la convergence collectivement compacte est plus forte que l'autre.*

Donnons un exemple de cette situation, si $T := I$ et $T_n := c_n I$ avec $c_n \to 1$ dans $\mathbb{C}$, alors $T_n \stackrel{n}{\to} T$, mais $T_n \stackrel{cc}{\nrightarrow} T$, sauf si $c_n := 1$.
D'autre part, par un résultat de Josefson et Nissenzweig (voir [36], chapitre XII), il existe une suite (f_n) dans X^* tel que $\|f_n\| = 1$ pour tout n et $\langle x, f_n\rangle \longrightarrow 0$ pour tout $x \in X$. Pour $x_o \in X\backslash\{0\}$ fixé, soit $T_n x := \langle x, f_n\rangle x_o$, $x \in X$ et $T := 0$. Alors $T_n \stackrel{cc}{\to} T$, mais $T_n \stackrel{n}{\nrightarrow} T$.
Sous des hypothèses additionnelles, la convergence en norme peut impliquer la convergence collectivement compacte, ou réciproquement.
On constate aussi que la convergence ponctuelle ne garantit pas que la propriété L soit vérifié ni U .

Exemple 3.1.2. *Soit $x = \ell^2$, pour $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$, soit $Tx = x_1 e_1$ et pour tout $n \geq 2$*

$$T_n x = x_1 e_1 - x_n e_n$$

Puisque, $\|T_n x - Tx\|_2 = |x_n| \to 0, \forall x \in X$, on constate que $T_n \stackrel{p}{\to} T$. On a :

$$\sigma(T) = \{0, 1\} \text{ et } \sigma(T_n) = \{-1, 0, 1\}$$

Puisque, $\lambda_n = -1 \in \sigma(T_n), \forall n$, mais $-1 \notin \sigma(T)$. Alors, la propriété U n'est pas vérifiée. Aussi, si pour $x \in X$, posons :

$$T_n x = x_1 e_1 + x_n e_n,$$

alors $T_n \stackrel{p}{\to} T$, 1 est une valeur propre de T_n de multiplicité algébrique égale à 2, mais 1 est une valeur propre de T de multiplicité algébrique 1. On voit alors que la multiplicité algébrique n'est pas préservée sous la convergence ponctuelle.

D'autre part, il est possible de montrer que sous la convergence en norme les propriétés L et U sont vérifiées en chaque point isolé du spectre.

Définition 3.1.1. *Soit T est un opérateur linéaire compact dans un espace de Banach X complexe de dimension infinie et (T_n) une suite d'opérateurs linéaires bornés dans X (T n'est pas exigé compact) tels que*

C1 : $\forall x \in X \lim_{n\to\infty} T_n x = Tx,$

C2 : $\lim_{n\to\infty} \|(T_n - T)T_n\| = 0,$

alors (T_n) est une approximation fortement stable de T dans un voisinage de chaque valeur propre non nulle.

Remarque 3.1.3. *Les conditions C1 et C2 sont satisfaites par des discrétisations uniformes et collectivement compacte, mais elles sont également satisfaites par des perturbations de norme d'approximation compacte T c'est-à-dire, $T_n = K_n + B_n$ tel que B_n converge en norme vers 0 et K_n est approximation collectivement compacte de T*

Théorème 3.1.1. *[3] Soit X un espace de Banach complexe, λ une valeur propre isolée non nulle d'un opérateur borné T. Soit (T_n) une suite d'opérateurs bornés sur X. Si :*

(A1) *T est un opérateur compact,*

(A2) $\|(T - T_n)x\| \longrightarrow 0$ *pour tout* $x \in X,$

(A3) $\|(T - T_n)T_n\| \longrightarrow 0$

Alors T_n est une approximation fortement stable de T.

D'autre part, Bouldin au théorème suivant , montre ce résultat sans condition de compacité sur T

Théorème 3.1.2. *[8] Soit X un espace de Banach complexe, λ une valeur propre isolée non nulle d'un opérateur borné T tel que T n'est pas compact. Soit (T_n) une suite d'opérateurs bornés sur X. Si :*

B1 *λ est de multiplicité algébrique finie ;*

B2 $\|T_n(T - T_n)\| \to 0$ *;*

B3 $\|(T-T_n)x\| \to 0$ *pour tout* $x \in X$ *;*

B4 $\|(T-T_n)T_n\| \to 0$.

Alors (T_n) *est une approximation fortement stable de* T.

Théorème 3.1.3. *Une suite d'opérateurs bornées* (T_n) *sur un espace de Banach* X *est une approximation fortement stable de* T *en* λ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

C $\|(T-T_n)T_n\| \to 0$, $(\|T-T_n\|)$ *est borné ;*

aussi bien que l'une des conditions suivantes :

D1 $\|(T-T_n)T\| \to 0$,

D2 *rang*$P(T,T) < \infty, \|(T-T_n)x\| \to 0$ *pour chaque* $x \in X$,

et l'une des conditions :

E1 $\|(T-T_n)T\| \to 0$,

E2 $\|T_n(T-T_n)\| \to 0$,

E3 *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $n \geq N$, T_n *est compact,*

E4 *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $n \geq N$, $(T-T_n)$ *est compact.*

Exemple 3.1.3.

1. *Si* (T_n) *est une approximation de* T, *c-à-d* $\|T-T_n\| \to 0$, *alors les conditions (C), (D1)et (E2)du théorème 3.1.3 sont satisfaites. Ici, l'opérateur* T *n'est pas supposé compact et la multiplicité algébrique de la valeur spectrale isolée de* T *n'est pas finie. En général les résultats de Ahues et Bouldin ne sont pas appliqués.*
   Pour exemple : Si $T = I$ *, l'opérateur identité sur un espace Banach de dimension infini et* $T_n = K_n I$*,où* K_n *sont des vecteurs tel que* $K_n \to 1$, *alors* $\|T-T_n\| \to 0$, *mais* T *n'est pas un opérateur compact et la valeur propre isolée* $\lambda = 1$ *est de multiplicité infinie.*

2. *Si* (T_n) *est une approximation collectivement compacte de l'opérateur compact* T, *c'est à dire* $\|(T-T_n)x\| \to 0$ *pour chaque* $x \in X$ *l'ensemble*

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \{(T-T_nx) : \|x\| < 1\}$$

est relativement compact pour $n_0 \in \mathbb{N}$, alors les conditions (C), (D1), (D2), (E3) et (E4) du théorème 3.1.3 sont satisfaites (voir [4]). Mais (E2) n'est pas vérifiée (voir [[8]]). Alors le résultat de Bouldin ne peut être appliqué. Définissons une suite d'opérateurs (T_n) par :

$$T_n = \sum_{i,j=0}^{n} \langle ., e_j \rangle a_{ij} e_i$$

Alors pour tout n, T_n est compact et satisfait

(i) $\|(T - T_n)x\| \to 0$ *pour chaque* $x \in X$

(ii) $\|(T - T_n)T_n\| = 0 = \|T_n(T - T_n)\|, n \in \mathbb{N}.$

Cette observation de Bouldin [[8], section 3] satisfait (C), (D2), (E2) et (E3) du théorème (3.1.3), mais le résultat de Ahues n'est pas vérifié.

3.2 ν-convergence

Le concept de ν-convergence a émergé comme un nouveau mode de convergence introduit par Ahues [4]. Ce concept vise à rendre possible et intéressant l'approximation des opérateurs non compacts par des opérateurs de rang fini.

3.2.1 ν-convergence

Définition 3.2.1. *Une suite $(\mathcal{U}_n)$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite ν-convergente vers $\mathcal{U}$, noté par $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{U}$, si*

- $(\|\mathcal{U}_n\|)$ *est borné,*
- $\|(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})\mathcal{U}\| \to 0$
- $\|(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})\mathcal{U}_n\| \to 0.$

Remarque 3.2.1. *La ν-convergente est une pseudo convergence. Explicitement, il existe une suite $(\mathcal{U}_n)_n$ tels que $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{V}$ sans qu'on ait $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.*

En effet, Soit X un espace de Banach, $C \in \mathcal{L}(X)$, $A_n, B_n \in \mathcal{L}(X)$. Considérons une suite

des opérateurs $\mathcal{U}_n$ *sur* $X \otimes X$ *par* $\mathcal{U}_n = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & B_n \end{bmatrix}$ *et soit* $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Si $A_n \to 0$ *et* $B_n \to 0$ *alors* $\|\mathcal{U}_n\| = max\{\|A_n\|, \|B_n\|\} \to 0$ *ce qui donne* $\mathcal{U}_n \xrightarrow{n} 0$ *donc* $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} 0$. *D'autre part, du fait que* $\mathcal{V}^2 = 0$, *d'aprés [[4], p 107] on a alors* $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{V}$.

Malgré cet incovénient, il reste que l'égalité des spectre $(\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{V}))$ constitue un point essentiel pour la résolution des problèmes de valeurs propres de type $A\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U}$

Remarque 3.2.2. *Notons aussi que, dans la définition (3.2.1), aucune des assertions ne peut être déduite des deux autres. En effet,*
Soit $X = \mathcal{M}^n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

et

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

pour $n = 1, 2, \ldots,$ *alors* $\|(A_n - A)A\| = 0 = \|(A_n - A)A_n\|$, *mais* $(\|A_n\|)$ *est non borné.*

3.2.2 Lien avec les modes de convergence

Donnons les liens qui peuvent exister entre la ν-convergence et les modes de convergence cités plus haut :

Lemme 3.2.1.

(a) *Si* $T_n \xrightarrow{n} T$, *alors* $T_n \xrightarrow{\nu} T$. *La réciproque est vraie si* $0 \notin \sigma(T)$.

(b) *Soit* $T_n \xrightarrow{\nu} T$ *et* $\mathcal{U}_n \xrightarrow{n} \mathcal{U}$. *Alors* $T_n + \mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} T + \mathcal{U}$ *si seulement si* $(T_n - T)\mathcal{U} \xrightarrow{n} O$.

En particulier ,

(i) *Si* $T_n \overset{\nu}{\to} T$ *et* $\mathcal{U}_n \overset{n}{\to} O$, *alors* $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T$,

(ii) *Si* $T_n \overset{\nu}{\to} O, \mathcal{U}_n \overset{n}{\to} \mathcal{U}$ *et* $T_n\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$, *alors* $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{U}$.

(c) *Si* $T_n \overset{cc}{\to} T$ *et* T *est un opérateur compact. Alors* $T_n \overset{\nu}{\to} T$.

(d) *Soient* $T_n, \mathcal{U}_n \in \mathcal{L}(X)$, $T_n \overset{cc}{\to} T$, T *est compact et* $\mathcal{U}_n \overset{n}{\to} O$. *Posons* $\hat{T}_n := T_n + \mathcal{U}_n$, *alors* $\hat{T}_n \overset{\nu}{\to} T$. *On a de plus, si* $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T$, *alors* $\hat{T}_n \overset{n}{\nrightarrow} T$; *et si* $\mathcal{U}_n \overset{cc}{\nrightarrow} O$, *alors* $\hat{T}_n \overset{cc}{\nrightarrow} T$.

Preuve.

(a) Soit $T_n \overset{n}{\to} T$. Du fait que $\|T_n\| \leq \|T_n - T\| + \|T\|$, $\|(T_n - T)T\| \leq \|T_n - T\| \|T\|$ et $\|(T_n - T)T_n\| \leq \|T_n - T\| \|T_n\|$, on déduit que $T_n \overset{\nu}{\to} T$.

Inversement, si $0 \notin \sigma(T)$ et $T_n \overset{\nu}{\to} T$. Alors T est inversible ce qui permet d'écrire

$$\left\|(T_n - T)(TT^{-1})\right\| \leq \|(T_n - T)T\| \left\|T^{-1}\right\|,$$

et donc $T_n \overset{n}{\to} T$.

(b) Puisque $\|T_n - \mathcal{U}_n\| \leq \|T_n\| + \|\mathcal{U}_n\|$, on voit que la suite $(\|T_n - \mathcal{U}_n\|)$ est bornée . Supposons que $(T_n - T)\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$. Comme

$$\|(T_n + \mathcal{U}_n - T - \mathcal{U})(T + \mathcal{U})\| \leq \|(T_n - T)T\| + \|(T_n - T)\mathcal{U}\| + \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| + \|T + \mathcal{U}\|,$$

et

$\|(T_n + \mathcal{U}_n - T - \mathcal{U})(T_n + \mathcal{U}_n)\| \leq \|(T_n - T)T_n\| + \|(T_n - T)\mathcal{U}_n\| + \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| + (\|T_n\| + \|\mathcal{U}_n\|)$,

d'où $\|(T_n - T)\mathcal{U}_n\| \leq \|T_n - T\| \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| + \|(T_n - T)\mathcal{U}\|$, on conclut que, $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T + \mathcal{U}$. Inversement, supposons que $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T + \mathcal{U}$. Puisque

$$(T_n - T)\mathcal{U} = (T_n + \mathcal{U}_n - T - \mathcal{U})(T + \mathcal{U}) - (T_n - T)T - (\mathcal{U}_n - \mathcal{U})(T + \mathcal{U}),$$

On obtient $(T_n - T)\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$. Les deux cas particuliers (i) et (ii) sont similaires et se démontrent de façon similaire.

(c) Soit $T_n \stackrel{cc}{\to} T$, par le principe de la borne uniforme, la suite $(\|T_n\|)$ est bornée et la convergence ponctuelle $T_n \stackrel{p}{\to} T$ est uniforme sur les ensembles relativement compacts $\{Tx : \ x \in X, \|x\| \leq 1\}$ et $\bigcup\limits_{n \geq n_0} \{Tx : x \in X, \|x\| \leq 1\}$. Donc $\|(T_n - T)T\| \to 0$ et $\|(T_n - T)T_n\| \to 0$. Ainsi $T_n \stackrel{\nu}{\to} T$

(d) Par (c) ci dessus, on a $T_n \stackrel{\nu}{\to} T$ et donc par (b) (i) ci dessus, $\hat{T}_n \stackrel{\nu}{\to} T$. Si $T_n \stackrel{n}{\nrightarrow} T$, alors $\hat{T}_n \stackrel{n}{\nrightarrow} T$ Puisque $\|T_n - T\| = \left\|\hat{T}_n - \mathcal{U}_n - T\right\| \leq \left\|\hat{T}_n - T\right\| + \|\mathcal{U}_n\|$.

Finalement, on montre que si $\hat{T}_n \stackrel{cc}{\to} T$, alors $\mathcal{U}_n \stackrel{cc}{\to} O$. Il est clair que $\mathcal{U}_n \stackrel{p}{\to} O$. Par ailleurs, pour chaque entier n_0 l'ensemble $F := \bigcup\limits_{n \geq n_0} \{\mathcal{U}_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ est un sous-ensemble de $\hat{E} - E$, où $\hat{E}$ est un fermé de l'ensemble $\bigcup\limits_{n \geq n_0} \{\hat{T}_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ et E est un fermé de l'ensemble $\bigcup\limits_{n \geq n_0} \{T_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$.Puisque, $T_n \stackrel{cc}{\to} T$ et T est compact, l'ensemble E est compact pour certains n_0. Si $\hat{T}_n \stackrel{cc}{\to} T$, l'ensemble $\hat{E}$ est aussi compact.

∎

Donnons quelques remarques découlant du lemme précédent :

Remarque 3.2.3.

- *La Convergence en norme entraine la ν-convergence d'après le point (a). Les deux modes sont équivalents si $0 \notin \sigma(T)$. En général à s'intrésse aux cas où T est compact, donc de spectre contenant le 0.*
- *Convergence collectivement compacte vers un opérateur compact entraine ν-convergence, point (c). D'autre part, si $X = \ell^2$,$T = O$, $T_n x := x_{n+1} e_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell^2$; alors $T_n \stackrel{p}{\to} T$, $T_n \stackrel{\nu}{\to} T$, mais $T_n \stackrel{n}{\nrightarrow} T, T_n \stackrel{cc}{\nrightarrow} T$, dans cet exemple on suppose que le rang de T_n est fini.*
- $T_n \stackrel{\nu}{\to} T \Leftrightarrow T_n \stackrel{n}{\to} T$ *si* $0 \notin \sigma(T)$

- *La ν-convergence est stable sous les perturbations en norme (les opérateurs U sont sipposés normaux).*
- *La ν-convergence peut être vérifiée même en l'absence de la convergence des normes et la convergence collectivement compacte*

Notons que si $T_n \overset{n}{\to} T$, ou $T_n \overset{cc}{\to} T$ et si chaque T_n est compact alors T est nécessairement compact. Par contre, cette implication est fausse sous la ν convergence ([3], p75).

Lemme 3.2.2. **(i)** *([4], Exercice 2.12)Si $T_n \overset{n}{\to} T$ et $T_n \overset{n}{\to} U$ alors $\sigma(T) = \sigma(U)$.*

(ii) *Si $T_n \longrightarrow T$ alors $T_n \overset{n}{\to} T$. Inversement, Si $0 \in \rho(T)$ et $T_n \overset{n}{\to} T$, alors $T_n \longrightarrow T$*

(iii) *Si $T_n \overset{n}{\to} T$ et $U_n \longrightarrow U$. Alors $T_n + U_n \overset{\nu}{\to} T + U$ si et selement si, $(T_n - T)U \longrightarrow 0$*

Rappelons la **propriété U**
Avant de passer à l'étude de la ν-convergence, signalons son importance par rapport aux autres modes de convergence existants. D'abord la ν convergence assure une grande partie dans la théorie des approximations des opérateurs, les conditions sont aisément vérifiables. Cependant, les opérations élémentaires de somme et du produit dans $\mathcal{BH}$ ne sont pas stables sous ce mode. Donnons l'identité de la résolvante (la deuxieme qui servira à démontrer des propriétés spectrales de quelques opérateurs sous la ν convergence.
Si $T_n \overset{p}{\to} T$, alors $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$, mais $\lambda \notin \sigma(T)$

Proposition 3.2.1. *Soient T et $\widetilde{T}$ dans $\mathcal{L}(X)$*

(a) ***Deuxième Identité de la résolvante*** *: soit $z \in \rho(T) \cap \rho(\widetilde{T})$. Alors*

$$\widetilde{R}(z) - R(z) = \widetilde{R}(z)(T - \widetilde{T})R(z) = R(z)(T - \widetilde{T})\widetilde{R}(z).$$

(b) ***Second développement de Neumann*** *: soit $z \in \rho(T)$ tel que $\varrho((T - \widetilde{T})R(z)) < 1$. Alors $z \in \rho(\widetilde{T})$ et*

$$\widetilde{R}(z) = R(z) \sum_{k=0}^{\infty} [(T - \widetilde{T})R(z)]^k.$$

Si de plus $\|(T-\widetilde{T})R(z)\|<1$, *alors*

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|}{1-\|(T-\widetilde{T})R(z)\|},$$

et

$$\|\widetilde{R}(z)-R(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|\|(T-\widetilde{T})R(z)\|}{1-\|(T-\widetilde{T})R(z)\|}$$

On a Aussi, si $\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|<1$, *alors*

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|(1+\|(T-\widetilde{T})R(z)\|)}{1-\|[T-\widetilde{T}R(z)]^2\|},$$

$$\|\widetilde{R}(z)-R(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|\|(T-\widetilde{T})R(z)\|(1+\|(T-\widetilde{T})R(z)\|)}{1-\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|}.$$

(a) Pour $z\in\rho(T)\cap\rho(\widetilde{T})$, on a

$\widetilde{R}(z)(T-\widetilde{T})R(z)=\widetilde{R}(z)[(T-zI)-(\widetilde{T}-zI)]R(z)=\widetilde{R}(z)-R(z)$. Échangeant T et $\widetilde{T}$, nous obtenons l'autre égalité.

(b) Pour $z\in\rho(T)$, considérons l'indentité

$$\widetilde{T}-zI=T-zI-(T-\widetilde{T})=[I-(T-\widetilde{T})R(z)](T-zI).$$

Puisque $\varrho((T-\widetilde{T})R(z))<1$, l'opérateur $I-(T-\widetilde{T})R(z)$ est inversible.

l'indentité $z\in\rho(\widetilde{T})$,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(z) &= (T-zI)^{-1}[I-(T-\widetilde{T})R(z)]^{-1}\\ &= R(z)\sum_{k=0}^{\infty}[(T-\widetilde{T})R(z)]^k.\end{aligned}$$

Soit $\|(T-\widetilde{T})R(z)\| < 1$. Alors $\varrho((T-\widetilde{T})R(z)) \leq \|(T-\widetilde{T})R(z)\| < 1$ et on a

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \|R(z)\| \sum_{k=0}^{\infty} \|(T-\widetilde{T})R(z)\|^k = \frac{\|R(z)\|}{1-\|(T-\widetilde{T})R(z)\|}.$$

Soit $\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\| < 1$. Alors

$$\varrho((T-\widetilde{T})R(z)) \leq \|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|^{\frac{1}{2}} < 1,$$

donc $z \in \rho(\widetilde{T})$ et on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(z) &= R(z)(\sum_{j=0}^{\infty}[(T-\widetilde{T})R(z)]^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty}[(T-\widetilde{T})R(z)]^{2j+1}) \\
&= R(z)[I+(T-\widetilde{T})R(z)] \sum_{j=0}^{\infty}[((T-\widetilde{T})R(z))^2]^j.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|(1+\|(T-\widetilde{T})R(z)\|)}{1-\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|}$$

Aussi, par (a) au dessus,

$$\|\widetilde{R}(z)-R(z)\| \leq \|\widetilde{R}(z)\|\|(T-\widetilde{T})R(z)\|.$$

Chapitre 4

Continuité spectrale des opérateurs

Introduction

De part la variété des notations utilisées dans la littérature, et afin de rendre la lecture de ce chapitre assez simple, on va esayer d'unifiier les appelations et les notations correspondantes. Le long de chapitre, on considère, sauf mention contraire, des espaces de Banach notés X, Y..., $B(X, Y)$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de X dans Y, noté $B(X)$ lorsque $X = Y$. On note le spectre d'un opérateur T par $\sigma(T)$, l'ensemble suivant $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - T \quad \text{n'est pas inversible dans} \quad \text{X}\}$ et $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \mathcal{P}(T)$.($\mathcal{P}(T)$ ensemble résolvant.)

4.1 Continuité du spectre

Si τ_n est une suite de parties compactes de $\mathbb{C}$, alors par définition sa limite inférieure est

$$\liminf \tau_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ il existe } \lambda_n \in \tau_n \quad \text{avec } \lambda_n \to \lambda\}$$

et sa limite supérieure est

$$\limsup \tau_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ il existe } \lambda_{n_k} \in \tau_{n_k} \text{ avec } \lambda_{n_k} \to \lambda\}$$

Si $\liminf \tau_n = \limsup \tau_n$, alors $\lim \tau$ est définie par la limite commune.

4.1.1 Continuité du spectre

Soient X et Y deux espaces de Banach et $T, T_n \in B(X)$ tel que T_n converge en norme vers T.

Définition 4.1.1. *Une application P définie dans $B(X)$ ayant pour image des parties compactes de $\mathbb{C}$, est dite semi-continue supérieurement notée scs (resp. inférieurement noté sci) en A, implique que si $A_n \to A$ (en topologie de la norme) alors* $\limsup P(A_n) \subset P(A)$ *(resp.*$\liminf P(A_n)) \subset P(A)$*. Si P est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en A, alors elle est dite continue en A et dans ce cas* $\lim P(A_n) = P(A)$*.*

Par le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *[21], lemme 3 Soit Λ_0 un ensemble spectral non vide de x et D un domaine contenant λ_0 alors si $x_i \longrightarrow x$ alors $\forall x$ tq $i > n$ implique que $S(x_i \cap D \neq \emptyset)$*

Il est facile de voir que pour tout $\lambda \in iso\, \sigma(T)$ nous avons $\lambda \in \liminf \sigma(T_N)$. Nous avons peut être un résultat plus fort qui consiste à :
Si $\lambda \in \pi_0(T)$ (voir définition page 56), alors il existe une suite de nombres complexes $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \in \pi_0(T_n)$, pour tout entier positif n, et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ (voir [4], Corollaire 2.13).

Définition 4.1.2. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit avoir la propriété d'extension à valeur singulière (SVEP pour faire court) à $\lambda \in \mathbb{C}$, si pour tout voisinage ouvert U_λ de λ, la seule fonction analytique $f : U_\lambda \longrightarrow X$ qui satisfait l'équation $(\mu - T)f(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in U_\lambda$ est la fonction $f \equiv 0$.*

Théorème 4.1.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ et si $\{T_n\}_n$ est une suite dans $\mathcal{L}(X)$ tel que $T_n \overset{\nu}{\to} T$, alors* $\limsup \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$*.*

La validité de la conclusion de théorème 4.1.1 pour le spectre ponctuel approximatif reste une question importante. Nous allons introduire quelques conditions supplémentaires pour y répondre (voir le théorème 4.1.2).

Théorème 4.1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que T^* ait SVEP en tout point $\beta \notin \sigma(T)$. Si (T_n) est une suite dans $\mathcal{L}(X)$ tel que $T_n \overset{\nu}{\to} T$, alors* $\limsup \sigma_{ap}(T_n) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Preuve. Soit $\lambda \in \limsup \sigma_{ap}(T_n)$. Puisque $\sigma_{ap}(T_n) \subset \sigma(T_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lambda \in \limsup \sigma(T_n)$ et donc par le théorème 4.1.1, $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ alors $\lambda - T$ est injective et $R(\lambda - T)$ est à image fermée. Ceci implique que $\lambda - T \in \Phi_{\pm}(X)$ et $i(\lambda - T) \leq 0$, donc $\lambda \notin \sigma(T)$ et donc T^* possède la propriété SVEP en λ. Par conséquent, $i(\lambda - T) = 0$, c'est-à-dire $0 - \beta(\lambda - T) = i(\lambda - T) = 0$. Donc $\lambda - T$ est inversible, ce qui constitue une contradiction. ∎

Proposition 4.1.1. *Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur de Riesz. Si (T_n) est suite dans $\mathcal{L}(X)$ tel que $T_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{R}$, alors $\sigma(T_n) \longrightarrow \sigma(\mathcal{R})$.*

La classe des opérateurs nilpotents, quasi-nilpotents et compacts satisfait à la conclusion de la proposition précédente. Il est bien connu que si $T_n \overset{n}{\to} T$ et T_n est une suite des opérateurs compacts, alors T est nécessairement compact, cependant si $T_n \overset{\nu}{\to} T$ et chaque T_n est un compact (ou de rang fini), alors l'opérateur T peut ne pas être compact.

Exemple 4.1.1. *Soit $e_{n n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale pour $\ell^2(\mathbb{N})$ et soit T l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, \ldots).$$

Cet opérateur n'est pas compact, car pour la suite définie $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ la suite $(Te_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente. D'autre part, $T^2 = 0$, ce qui montre que T est nilpotent et parsuite T est un opérateur de Riesz (voir chap.1 ou mieux le livre de Aiena [2]).

Maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, \ldots, x_{2n}, 0, 0 \ldots).$$

Il est clair que $ran(T_n) = n$, $\|T_n\| = 1$ et $(T_n - T)T = 0 = (T_n - T)T_n$, donc $T_n \stackrel{\nu}{\to} T$. Alors par la proposition 4.1.1, $\sigma(T_n) \longrightarrow \sigma(T)$. Dans cet exemple, on voit qu'il est possible d'approcher le spectre d'un opérateur non-compact par une suite de nombres complexes qui n'est que les spectres des opérateurs de rang fini.

4.1.2 Continuité de rayon spectral

Définition 4.1.3. *Soit $A \in B(\mathcal{H})$, on définit le rayon spectral de A par*

$$r(A) = \{\max |\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Il est bien connu que :

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_n \|A^n\|^{1/n}.$$

La première de ces égalités affirme que le rayon spectral d'un opérateur A est la limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues de $B(\mathcal{H})$ dans $[0, \infty[$ (via., l'application $A \to \|A^n\|^{1/n}$). De sorte que l'ensemble des points de continuité de r est un ensemble de deuxième catégorie (i.e il contient un G_δ dense).

La deuxième égalité affirme que r est l'infimum d'une suite de fonctions continues, et donc r est une fonction semi-continue supérieurment. Pour caractériser les points de continuité de r, il est nécessaire d'introduire de nouvelles fonctions de $B(X)$ dans $[0, \infty[$.

Définition 4.1.4. *Si $A \in B(\mathcal{H})$ et $P_\pm = \emptyset$ on définit $\beta(A) = 0$; si $P\pm \neq \emptyset$ soit $\beta(A) =$*

$\sup\{|\lambda| : \lambda \in P\pm(A)\}$

Avant l'entamer la discussion des résultats concernant la continuité du rayon spectral, ennonçons quelques lemmes d'abord.

Lemme 4.1.2. *La fonction $\delta : B(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, \infty[$ est semi-continue inférieurement.*

il résulte de ce lemme :

Corollaire 4.1.1. *La fonction $\alpha : B(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, \infty[$ est semi-continue supérieurement*

Afin de montrer la continuité du rayon spectral, on établit quelques notions

Définition 4.1.5. *Si $A \in B(\mathcal{H})$ on définit la fonction $\beta \in [0, \infty[$ par*

$$\beta(A) = \sup\{\inf\{|\lambda| : \lambda \in C\}$$

où C est une composante de $\sigma_e(A) \cup \sigma_p^0(A)\}$.

Enfin, on définit α par $\alpha(A) = \max(\beta(A), \delta(A))$.

Donnos quelques propriétés de ces fonctions, pour les preuves on se refère à [9] :

Définition 4.1.6. *Si $A \in B(\mathcal{H})$ on définit $\delta_0(A)$ et $\delta_*(A)$ par :*

$\delta_0(A) = \sup\{\inf\{|\lambda| : \lambda \in C\}$ *: C Une composante de $\sigma^0(A)$*

$\delta_*(A) = \sup\{\inf\{|\lambda| : \lambda \in D\}$ *: C Une composante de $\sigma(A)$*

Lemme 4.1.3. $\delta_*(A) \leq \delta(A) \leq \delta_0(A)$

Notons que ces inégalités peuvent être strictes. En effet : Si $D = \{z : |z| < 1\}$ et $U = \{z : 1 < |z| < 2\}$. Soient S le shift latéral de multiplicité 1 et T la multiplication par z sur $A^2(U)$ l'espace des fonctions analytiques carrés intégrables sur U, si $A = S \oplus T \oplus T \oplus ...$ alors

$$\delta_*(A) = 0, \quad \delta(A) = 1 \quad \delta_0(A) = 2$$

Lemme 4.1.4. $\alpha(A) = \max(\beta(A), \delta_0(A))$.

Preuve. D'apres le lemme (4.1.3), $\delta(A) \leq \delta_0(A)$ ainsi $\alpha(A) \leq \alpha_0(A) \equiv \max(\beta(A), \delta_0(A))$. Si $\alpha_0 = \beta(A)$, alors clairement $\alpha_0(A) \leq \alpha(A)$, supposons que $\alpha_0(A) = \delta_0(A) > \beta(A)$. Soient $\delta_0(A) > \rho > \beta(A)$ et C une composante de $\sigma^0(A)$ tel que
$\inf\{|\lambda| : \lambda \in C\} > \rho$. Ainsi $C \cup [P_\pm(A)]^- = \emptyset$. Donc C est soit une composante de $\sigma_p^0(A)$, soit par la prop. 4.2.4 C est une composante de $\sigma_e(A)$ ce qui donne en fait C est une composante $\sigma_e(A) \cup \sigma_p^0(A)$. Ainsi $\delta(A) > \rho$ et alors $\delta_0(A) < \delta(A)$. De plus $\alpha_0(A) \leq \alpha A)$. d'où le résultat souhaité. ∎

Théorème 4.1.3. *Le rayon spectral est continu en A si et seulement si $r(A) = \alpha(A)$.*

Preuve. Supposons que $r(A) = \alpha(A)$ et que $A_n \longrightarrow A$. Puisque r est semi-continu supérieurement et α est semi-continu inférieurement et $\alpha \leq r$, alors $r(A) = \alpha(A) \leq \liminf \alpha(A_n) \leq \limsup r(A_n) \leq r(A)$ et parsuite $r(A) = \lim r(A_n)$.

Inversement, Supposons que $r(A) > \alpha(A)$ et choisissons ρ tel que $r(A) > \rho > \alpha(A)$. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$. puisque $\alpha(A) < \rho$, par le lemme (4.1.3) on a que $P_\pm \subset D$ et chaque composante $\sigma^0(A)$ rencontre D. D'aprés le théorème (4.2.7, il existe une suite $\{A_n\}$ dans $B(\mathcal{H})$ tel que $\sigma(A_n) \subset D$ pour chaque n et $\| A_n - A \| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi $r(A_n) \leq \rho$ pour chaque n et $r(A) \neq \lim r(A_n)$. ∎

Remarque 4.1.1. *Il est possible de voir que α est continu en A si et seulement si r est continu en A.*

Corollaire 4.1.2. *Si $\delta_*(A) = r(A)$ alors r est continu en A*

Comme conséquence

Corollaire 4.1.3. *Soit A un opérateur normal, r est continu en A ssi $r(A) = \delta_*(A)$*

Corollaire 4.1.4. *Si $\sigma(A)$ est totalement discontinu, alors r est continu en A. En particulier, r est continu en tout opérateur compact.*

On rappelle qu'**un espace totalement discontinu** est un espace topologique qui est le moins connexe possible au sens où il n'a pas de partie connexe non triviale : dans tout espace topologique, l'ensemble vide et les singletons sont connexes ; dans un espace totalement discontinu, ce sont les seules parties connexes. Un exemple populaire d'espace totalement discontinu est l'ensemble de Cantor.

Proposition 4.1.2. *Chaque isométrie est un point de continuité de r.*

La preuve repose sur le travail de Newburgh [21] dans lequel il montre que le spectre est continu en tout opérateur avec un spectre totallement discontinu.

Définition 4.1.7. *Si $A \in B(\mathcal{H})$, on définit la fonction β dans $B(\mathcal{H})$ par :*

$$\beta(A) = \begin{cases} 0 & P_{\pm}(A) = \varnothing \\ \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} & P_{\pm}(A) \neq \varnothing \end{cases}$$

Lemme 4.1.5. *La fonction $\beta : B(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, \infty[$ est semi-continue inférieurement.*
Cela découle du théorème (4.2.7) et du fait que $\{T \in SF : i(T) \neq 0\}$ est ouvert dans $B(\mathcal{H})$. (SF le groupe d'opérateurs de semi-fredholm dans $B(\mathcal{H})$).

A la fin de cette section, donnons quelques éléments de la continuité du l'application du rayon spectral liée à la nature de l'opérateur lui même.

Théorème 4.1.4. *[10] Soit $\mathcal{H}$ un espace de Banach complexe, alors pour la norme d'opérateurs l'application rayon spectrale est semi continue sup. sur $B(\mathcal{H})$ continue sur $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Ce théorème généralise en fait un résultat de la continuité du rayon spectral pour des opérateurs définis sur un espace ordonnés par des cônes ([10], prop 2.1)

Remarque 4.1.2. *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable (ou pas) alors la continuité du rayon spectral sur l'ensemble des opérateurs normaux (les opérateurs auto-adjoints y sont déja) est triviale.*

Corollaire 4.1.5. *[10]*

i) L'application rayon spectrale est continue en tout opérateur quasi-nilpotent (opérateur vérifiant $r(T) = 0$), en particulier l'opérateur nul est point de continuité de r

ii) Si T et K sont deux opérateurs compacts sur un espace de Banach, alors

$$\lim_{\lambda \to 0} r(T + \lambda K) = r(T).$$

4.2 Continuité du spectre essentiel

On rappelle les définitions essentielles qui seront utiles pour discuter la continuité spectrale dans cette section. Nous invitons ceux qui désirent faire une lecture approfondie à plusieurs ouvrages ([1], [2], [14], [20] ...). Pour $T \in B(\mathcal{H})$ on définit le spectre essentiel noté $\sigma_e(T)$, le spectre essentiel de Weyl (noté $\sigma_w(T)$) et de Browder noté $\sigma_b(T)$ par :

$$\begin{aligned} \sigma_e(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \Phi(X)\}, \\ \sigma_w(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \Phi_0(X)\} \\ \sigma_b(T) &= \cap\{\sigma(T + K) : TK = KT, K \in \mathcal{K}(X)\}. \end{aligned}$$

Tandis que $\sigma_a(T)$ désigne le spectre ponctuel approximatif de $T \in B(X)$.
On définit $\pi_{00}(T)$ comme étant l'ensemble de tous les points isolés du spectre de T tel que $0 < \dim N(T - \lambda) < \infty$. On désigne par $\pi_0(T)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres normales de T; c'est à dire l'ensemble des points isolés auxquelles la projection spectrale est de rang fini (voir [1]).

Il est bien connu que les ensembles suivants forment des groupes d'opérateurs semi-Fredholm sur X :

$$\Phi_+(X) = \{T \in B(X) : \quad R(T) \ \textit{est fermé et} \quad \dim N(T) < \infty\}$$

$$\Phi_-(X) = \{T \in B(X) : \quad R(T) \ \textit{est fermé et} \quad \dim(X/R(T)) < \infty\}$$

Le semi-groupe des opérateurs de Fredholm est $\Phi(X) = \Phi_-(X) \cup \Phi_+(X)$. Nous considérons également les ensembles

$$\Phi_0(X) = \{T \in \Phi(X) : i(T) = 0\} \quad \text{(Opérateur de Weyl)},$$

$$\Phi_+^- = \{T \in \Phi_+(X) : \ i(T) \leq 0\}, \quad \Phi_-^+(X) = \{T \in \Phi_-(X) \quad i(T) \geq 0\}.$$

4.2.1 Théorèmes de Browder et Weyl

On dit que T satisfait le théorème de Weyl ([17],[24]) si

$$\sigma_w(T) = \sigma(T) \backslash \pi_{00}(T)$$

et satisfait le théorème de Browder ([17],[16]), si

$$\sigma_w(T) = \sigma(T) \backslash \pi_0(T)$$

Soit π_{a0} l'ensemble de tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ tq λ sont isolés dans $\sigma_a(T)$ et $0 < \alpha(T - \lambda) < \infty$. Aussi, par définition, $\sigma_{ea}(T) = \bigcap\limits_{K \in \mathcal{K}(X)} \{\sigma_a(T + K)\}$ est le spectre essentiel ponctuel approximatif. On définit aussi le spectre essentiel approximatif de Browder noté $\sigma_{ab}(T)$ par

$$\sigma_{ab}(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \{\sigma_a(T + K) : \ TK = KT\}.$$

On sait que $\sigma_{ea}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \Phi_-^+(X)\}$.

Proposition 4.2.1. *Pour tout $T \in B(X)$ on a l'inclusion $\pi_0 \subset \pi_{00}$.*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, pour un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$, on dit que le théorème de Browder est vérifié si et seulement si $\sigma(T) = \sigma_w(T) \cup \pi_{00}(T)$, ou d'une maniére équivalente $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. Evidement si T vérifie le théorème de Weyl il vérifie aussi le théorème de Browder. L'inverse n'est pas vrai en général

Exemple 4.2.1. *On considère l'opérateur $T \in B(\ell_2)$ défini par*

$$T : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, ...)$$

Alors l'opérateur ne satisfait pas le théorème de a− Weyl [[17], Exemple 3] mais il vérifie le théorème a−Browder. Effectivement, Si $X = \ell_p$ ou $X = c_0$ et

$$T = \upsilon\omega : (x_1, x_2; x_3, \ldots) \longmapsto (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{2}x_4, \ldots)$$

est le produit d'un shift latéral et une fonction poids standard, alors du fait que T est quasi-nilpotent ($r(T) = \{0\}$) et donc compact mais non Fredholm, alors

$$\sigma(T) = \sigma_{ess}(T) = \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \{0\}$$

et donc $\pi_0(T) = \{0\}$

Pour palier à une situation, Harte [17] donne une condition supplémentaire pour établir une équivalence des deux théorèmes de Browder et Weyl :

Théorème 4.2.1. *Une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un opérateur vérifie le théorème de Weyl vérifie aussi le théorème de Browder est que l'on a une des assertions suivantes :*

1. $\sigma_w(T) \cap \pi_0(T) = \emptyset$
2. $\pi_0(T) \subset \pi_{00}(T)$

Théorème 4.2.2. *Si le spectre de Browder σ_b est continu en $T \in B(H)$, alors le théorème de Browder est vérifié pour T.*

Preuve. Puisque σ_b est continu en $T \in B(H)$, on a par ([6], théorème 14.17) $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. Maintenant par un argument de Harte et Lee [[17], théorème 4.2.2] le théorème de

Browder est vérifié pour T. ■

Le théorème spectral est presque en défaut pour le spectre essentiel de Weyl, peut être juste une inclusion concernant le produit puisque le produit de deux opérateurs de Weyl est aussi un opérateur de Weyl et on a $\sigma_w p(T) \subset p\sigma_w(T)$, p étant un polynôme.

Le théorème suivant établit un lien entre le théorème de Browder et la continuité spectrale.

Théorème 4.2.3. *Si le théorème de Browder est vérifié pour $T \in B(H)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) σ est continue en T,
(ii) σ_w est continue en T,
(iii) σ_b est continue en T.

Preuve. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Puisque pour $T \in B(H)$ le théorème de Browder est vérifié, ou de manière équivalente $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$, par le [[6], théorème 14.17], il vient que σ_b est continu en T si seulement si σ_w est continu en T.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Puique T vérifie le théorème de Browder on a $\sigma_w(T) = \sigma(T)\backslash\pi_0(T)$. Maintenant,

$$\sigma_e(T) \cap \overline{\pi_0(T)} \subset \sigma_w(T) \cap \overline{\pi_0(T)} = (\sigma(T)\backslash\pi_0(T)) \cap \overline{\pi_0(T)} \subset \overline{\Gamma_{0e}(T)}$$

Par le même argument précédent, il vient que σ est continu en T si seulement si σ_w est continu en T. ■

Jusqu'à présent, nous avons analysé la continuité spectrale via des arguments trés simplistes. La notion des ascent et descent d'un opérateur ont permit le développement de quelques outils faisant appel à ces indicateurs. Nous renvoyons ceux qui veulent franchir le pas désirant une lecture specialisée vers le livre de Müler [20] et les excellents livres de Jeribi [14] et [2].

4.2.2 Théorème s de $a-$Browder, $a-$Weyl

Pour un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ on note par $a(T)$ l'ascent de T et par $b(T)$ le descent de T i.e.le plus petit entier non-négatif n tq $R(T^n) = R(T^{n+1})$.

Lemme 4.2.1. *Si $T \in B(H)$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lambda \notin \sigma_{ab}(T)$;

(ii) $T - \lambda \in \Phi_+(X)$ et $a(T - \lambda) < \infty$;

(iii) $T - \lambda \in \Phi_+(X)$ et $\lambda \notin acc\sigma_a(T)$.

Preuve. Un argument de Rakocevic ([25], théorème 2.1) donne $\lambda \notin \sigma_{ab}(T)$ si seulement si $T - \lambda \in \Phi_+^-(X)$ et $a(T - \lambda) < \infty$, ce qui donne l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Pour le sens inverse, il suffit de montrer que $T - \lambda \in \Phi_+(X)$ et $a(T - \lambda) < \infty$ pour déduire que $T - \lambda \in \Phi_+^-(X)$. En effet, si $T - \lambda \in \Phi_+(X)$, mais $T - \lambda \notin \Phi(X)$, alors évidemment $i(T - \lambda) \leq 0$. Si au contraire $T - \lambda \in \Phi(X)$ et $a(T - \lambda) < \infty$, alors soit $b(T - \lambda) < \infty$ correspondant à $\lambda \notin \sigma_b(T)$, d'où $i(T - \lambda) = 0$, ou bien $b(T - \lambda) = \infty$ et on a alors

$$ni(T - \lambda) = i(T - \lambda)^n) = \dim N((T - \lambda)^n) - \dim XR((T - \lambda)^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Ce qui implique que $i(T - \lambda) < 0$. D'où le résultat recherché. De ([25], 4.2.2) on conclut que $(i) \Leftrightarrow (iii)$ ■

On note : $\pi_a(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T)$

Remarque 4.2.1. *Par le lemme précédent on a :*

$$\pi_a(T) = \{\lambda \in \sigma_a(T) : T - \lambda \in \Phi_+(X) \text{ et } a(T - \lambda < \infty)\}$$

Evidemment

$$iso\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ea}(T) = \pi_a(T) \subset \pi_{a0}(T)$$

Définition 4.2.1. *On dit que le théorème a−Browder est vérifié pour $T \in B(X)$ si*

$$\sigma_{ea}(T) = \sigma_a(T) \backslash \pi_a(T)$$

Définition 4.2.2. *[11],[23] On dit que T vérifie le théorème de a-Weyl si*

$$\sigma_{ea}(T) = \sigma_a(T) \backslash \pi_{a0}(T)$$

Proposition 4.2.2. *[23] si $T \in B(\mathcal{H})$ vérifie le théorème de a-Weyl alors il vérifie aussi le théoréme de Weyl.*

Remarque 4.2.2. *Un opérateur qui vérifie le théorème de a− Weyl vérifie aussi le théorème de a−Browder. Cependant, l'inverse n'est pas vrai en général. L'exemple (4.2.1) reste valable encore ici.*

Théorème 4.2.4. *Si $T \in B(X)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) T vérifie le théorème de a−Browder
(ii) $\sigma_{ea}(T) = \sigma_{ab}(T)$
(iii) $\sigma_a(T) = \sigma_{ea}(T) \cup \pi_a(T)$
(iv) $\pi_a(T) = \Delta(T)$, où $\Delta(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \in \Phi_+^-(X)$ et $\alpha(T - \lambda) > 0\}$
(v) $acc\sigma_a(T) \subset \sigma_{ea}(T)$
(vi) $\pi_a(T) \cup \Delta(T)$ est un sous-ensemble de discontinuités de $\gamma_T(\lambda) = \gamma(T - \lambda)$, où $\gamma(.)$ désigne le module minimum réduit.

Dans la suite de cette partie, on considère quelques opérateurs particuliers qui seront examinés par les théorèmes de Browder de de Weyl

Définition 4.2.3. *Un opérateur $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ est dit quasitriangulaire s'il existe une suite $\{F_n\}_n$ de projections de rang fini tel que*

$$F_n \longrightarrow 1 \text{ faiblement et } \|F_nTF_n - TF_n\| \to 0$$

Un opérateur est bi-quasitriangulaire si T et T^* sont quasitriangulaires.

Remarque 4.2.3. *Dans le travail de Apostol et Al [5], ils montrent qu'un opérateur est quasitriangulaire si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda$ soit semi Fredholm tel que $ind(T - \lambda) \geq 0$. Il suit qu'un opérateur est bi-quasitriangulaire si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda$ soit semi fredholm et $ind(T - \lambda) = 0$*
En conséquence

$$T \textit{est bi-quasitriangulaire si et seulement si} \quad P_{\pm}(T) = \emptyset$$

où $P_{\pm}(T) = \bigcup_n \{\lambda \in \mathbb{C}/\ T - \lambda \ \textit{semi-fredholm} \quad ind(T - \lambda) = n\}$

Lemme 4.2.2. *[9] Si* $\mathrm{T} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *est biquasitriangulaire, alors* σ_e *est continu en* T *si seulement si pour chaque* $\lambda \in \sigma_e(\mathrm{T})$ *et* $\epsilon > 0$*, il existe un voisinage* V_ϵ *contenant au moins une compsante de* σ_e*.*

Un autre résultat concernant la continuité du spectre essentiel :

Théorème 4.2.5. *Soit T un opérateur quasitriangulaire sur $\mathcal{H}$. Si σ est continu en T, alors σ_e est continu en T.*

Preuve. Supposons que le spectre σ est continu en T. Puisque T est bi-quasitriangulaire, D'aprés Lange [19] cela implique que $\sigma(T) = \sigma_e(T) \cup \sigma_p^0$ et $\sigma(T)$ constitue la fermeture de ses points isolés. Aussi, $\sigma_e(\mathrm{T})$ est la fermeture de ses composantes triviales. Donc par le lemme 4.2.2)
Ceci implique que σ_e est continu en T.

∎

La réciproque du théoréme (4.2.2) est donnée par Jeon et Kim [13] :

Théorème 4.2.6. *Si le théorème de Browder est vérifié pour* $\mathrm{T} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *et que* σ_e *est continu en T alors σ est continue en T.*

Preuve.

Pour montrer le théorème (4.2.8), il suffit de voir que si $T_n \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ est une suite d'opérateurs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \| T_n - T \| = 0$$

pour un certain opérateur T, alors

$$acc\sigma(T) \subseteq \liminf_n \sigma(T_n) \tag{4.1}$$

car la fonction σ est semi-continue supérieurment et

$$iso\sigma(T) \subseteq \lim inf_n \sigma(T_n) \tag{4.2}$$

Supposons $\lambda \in acc\sigma$(T). Soit $\lambda \in acc \cap \sigma_e$(T). Puisque la fonction σ_e est continue en T, alors

$$\lambda \in \liminf_n \sigma_e(T_n) \subseteq \liminf_n \sigma(T_n).$$

Soit à présent $\lambda \in acc\,\sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$. Alors $T - \lambda$ est un opérateur de Fredholm. Supposons au contraire que $\lambda \notin \liminf \sigma(T_n)$. Alors il existe $\delta > 0$, un voisinage $\mathcal{N}_\delta(\lambda)$ de λ et une sous suite $\{T_{nk}\}$ de $\{T_n\}$ telle que

$$\sigma(T_{nk}) \cap \mathcal{N}_\delta(\lambda) = \emptyset \quad \text{pour chaque} \quad k > 1$$

Evidemment, $T_{nk} - \lambda$ est Fredholm, avec $i(T_{nk} - \lambda) = 0$, et

$$\lim_{n\to+\infty} \|(T_{nk} - \lambda) - (T - \lambda)\| = 0$$

Il découle de la continuité de l'indice que $i(T - \lambda) = 0$, et donc $t - \lambda$ est Weyl. C'est une contradiction avec $acc\sigma(T) \subseteq \sigma_w(T)$ puisque le théorème de Browder est valable en T

■ Ceci nous amène au résultat suivant

Corollaire 4.2.1. *Soit $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ un opérateur quasitriangulaire et le théorème de Browder est vérifié en T. Alors le spectre essentiel σ_e est continu en* T *si seulement si le spectre σ est continu en T.*

Proposition 4.2.3. *Si $A \in B(\mathcal{H})$, Alors*

$$\sigma_e(A) = [\sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(A)] \cup P_{+\infty}(A) \cup P_{-\infty}(A).$$

Il résulte de la proposition précédente que :

$$\partial P_{\pm}(A) \subseteq \sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(A)$$

Proposition 4.2.4. *Si C est une composante de $\sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(A)$ et $C \cap [P_+(A)]^- = \emptyset$, $\sigma_{le}(A)$, $\sigma_{re}(A)$, et $\sigma_e(A)$. Alors C est une composante de $\sigma_{le}(A)$, $\sigma_{re}(A)$ et $\sigma_e(A)$*

Lemme 4.2.3. *(a) $\sigma : B(\mathcal{H}) \to S$ est semi-continue supérieureurement .*
(b) $\sigma_e : B(A) \to S$ est semi-continue supérieureurement.
(c) Si $-\infty \leq n \leq +\infty, P_n : B(\mathcal{H}) \to S$ est semi-continue inférieurement .
(d) $P_+ : B(\mathcal{H}) \to S$ est semi-continue inférieurement .

Preuve. Les parties (a) et (b) découlent de [21]. Pour prouver (c), posons $A_k \longrightarrow A$ et considérons $\varepsilon > 0$, et K un sous-ensemble compact de $P_n(A)$ tel que $P_n(A) \subseteq (K)_\varepsilon$. Puisque $i(\lambda - A_k) \longrightarrow i(\lambda - A) = n$, pour tout λ dans K. De ce fait il existe un entier n_0 tel que $i(\lambda - A_k) = n$ pour tout λ dans K et tout $k \geq n_0$. Ainsi $P_n \subseteq (K)_\varepsilon \subseteq (P_n(A_K))_\varepsilon$ pour $K \geq n_0$. La partie (d) se démontre de la même manière.

■

Lemme 4.2.4. *Supposons que $A_n \to A$ dans $B(\mathcal{H})$.*

Si C est une composante de $\sigma(A)$ (resp. $\sigma_e(A)$) et U est un ensemble ouvert contenant C, alors il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, U contient une composante de $\sigma(A_n)$ (resp. $\sigma_e(A_n)$)

Théorème 4.2.7. *Si $A \in B(\mathcal{H})$, S désigne les parties compactes de $\mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Si $\sigma : A \in B(\mathcal{H}) \longrightarrow S$ est continu en A*

(b) *Pour tout λ sur $\sigma(A) \setminus [P_\pm(A)]^-$ et $\epsilon > 0$, la boule $B(\lambda, \epsilon)$ contient une composante de $\sigma(A)$.*

(c) *Si $\{C_i : i \in I\}$ sont les composantes de $\sigma^0(A)$ et pour chaque i dans I un point λ_i est choisi dans C_i. Alors*

$$\sigma(A) = [P_\pm(A) \cup \{\lambda_i : i \in I\}]^-$$

(d) *Si $\{Z_j : j \in J\}$ est la collection de points dans $\sigma_0(A)$ tel que $\{Z_j : j \in J\}$ est la collection de composantes triviales de $\sigma_0(A)$ Alors*

$$\sigma(A) = [P_\pm(A) \cup \{Z_j : j \in J\}]^-$$

Remarquons que la condition (b) indique que chaque point de $\sigma(A) \setminus [P_\pm(A)]^-$ est approximable ponctuellement dans $\sigma^0(A)$. Ce qui permet de déduire le résultat suivant :

Corollaire 4.2.2. *Si $\sigma : B(\mathcal{H}) \longrightarrow S$ est continu en A alors $P_0(A) = \emptyset$.*

Corollaire 4.2.3. *Si A est un opérator bi-quasitriangular alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) $\sigma : B \to S$ est continu en A.

(b) pour chaque λ dans $\sigma(A)$ et $\varepsilon > 0$. la boule $B(\lambda, \varepsilon)$ contient une composante de $\sigma^0(A)$

(c) Si $\{\mathrm{C}_i : i \in I\}$ sont les composantes de $\sigma^0(A)$ et si pour chaque i dans I au point λ_i est

choisi parmi C_i*, est*

$$\sigma(A) = \{\lambda_i : i \in I\}$$

(d) Si $\{z_j : j \in J\}$ *est la collection de points en* $\sigma^0(A)$ *tel que* $\{\{z_j\} : j \in J\}$ *est la collection de composants triviaux de* $\sigma^0(A)$ *alors* $\{z_j : j \in J\}]^- = \sigma(A)$.

Il vient alors que si $A \in B(\mathcal{H})$ et $\sigma(A)$ est totalement discontinu alors σ est continu. Ainsi tout opérateur ayant un spectre totalement discontinu doit avoir $P_{\pm}(A) = \emptyset$. Il est important de dire qu'il existe plusieurs sous ensemble compact de $\mathbb{C}$ ayant des collections denses de compsantes triviales mais sont non totalement discontinu. Conway [9] donne un exemple illustrant cette situation :

$$K = \{\{(x, 0 \quad 0 \le x \le 1\} \cup \{(\frac{k}{n}, \frac{1}{n}),\ 0 \le k \le n\}\}$$

Théorème 4.2.8. *Le spectre de weyl* σ_w *est continu en* A *si et seulement si pour* λ *dans* $\sigma_w(A)\backslash[P_{\pm}(A)]^- = (\sigma_e(A)\backslash[P_{\pm}(A)]^-)$ *pour chaque* λ *il y a une composante de* $\sigma_e(A)$ *qui est contenu dans* $B(\lambda, \varepsilon)$.

Corollaire 4.2.4. *Si* $A \in B(\mathcal{H})$ *,*$\sigma(A) = \sigma_w(A)$ *et* σ *est continu en* A *si seulement si* σ_w *est continu en* A.

Corollaire 4.2.5. *Si* $A \in B(\mathcal{H})$ *alors le spectre de Weyl* σ_w *est continu en* A *et il y a un opérateur compact* K *tel que* σ *est continu en* $A + K$

Preuve.([[18]],[[30]]) Soit K un opérateur compact tel que $\sigma(A+K) = \sigma_w(A)$ puisque $\sigma_w(A+K) = \sigma_w(A)$,est un point de continuité de σ_w. donc le corollaire [4.2.8] est applique.

4.2.3 Continuité du rayon spectral essentiel

Définition 4.2.4. *Pour* $A \in B(\mathcal{H})$ *on définit* $\delta_0(A)$ *et* $\delta_*(A)$ *par :*

$\delta_{0e}(A) = \sup\{\inf\{|\lambda| : \lambda \in C\}$: C *Une composante de* $\sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(A)$

$\delta_e(A) = \sup\{\inf\{|\lambda| : \lambda \in D\}$: C *Une composante de* $\sigma_e(A)$

Et $\alpha_e(A) = \max\{\beta, \delta_e(A)\}$.

Théorème 4.2.9. *[5]*

Si $\triangle$ *est un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{C}$ *et* $A \in B(\mathcal{H})$*, il existe une suite* A_n *d'opérateurs dans* $B(\mathcal{H})$ *telle que* $\sigma(A_n)$ *pour chaque* n *et* $\| A - A_n \| \to 0$ *si et seulement si :*

(a) $P_A \subseteq \triangle$;

(b) chaque composant de $\sigma^0(A)$ *recenter* $\triangle^-$.

Lemme 4.2.5. δ_e *est inférieurment semi-continu.*

Lemme 4.2.6. α_e *est inférieurment semi-continu.*

Lemme 4.2.7.

$$\delta_e(A) \leq \delta_{0e}(A)$$

Lemme 4.2.8.

$$\alpha_e = \max\{\beta(A), \delta_{0e}(A)\}$$

Preuve. Soit $\alpha_e = \max\{\beta(A), \delta_{0e}(A)\}$ d'apres le lemme 4.2.7 ,$\alpha_e(A) \leq \alpha_{0e}(A)$
L'autre moitié de cette inégalité est prouvée comme le fait correspondant dans le lemme 4.1.4
■ Dans cette partie nous allons exposer des résultats similaires aux ceux obtenus pour la continuité du spectre.

Théorème 4.2.10. *Le rayon spectral essentiel est continu en* A *si et seulement si* $\alpha_e(A) = r_e(A)$

Preuve. Comme dans la preuve du théorème (4.2.8), si $\alpha_e(A) = r_e(A)$ alors r_e est continu en A. On suppose alors que $\alpha_e(A) < \rho < r_e(A)$ et posons $D = \{z \in \mathcal{C} : |z| \leq \rho\}$.
D'après le théorème 4 de [30] (voir aussi [18]), il existe un opérateur compact K sur $\mathcal{H}$ tel que $\sigma(A + K) = \sigma_w(A)$. Ainsi $\sigma(A + K) = \sigma_e(A) \cup P_{\pm}(A)$ par le théorème (4.2.8) et le fait

que σ_e et $P\pm$ sont invariants sous les perturbations compactes.

A présent $\sigma^0(A+K) = \sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(A)$ et donc chaque composante de $\sigma^0(A+K)$ rencontrer D d'aprés le lemme(4.2.8). Puisque $P_\pm(A+K) = P_\pm(A) \subseteq D$ le théorème (4.2.8) implique qu'il existe une suite $\{A_n\}$ des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ tels que $\sigma(A_n) \subseteq D$ pour tout n et $A_n \longrightarrow A+K$. Alors $A_n - K \longrightarrow A$ puisque $\sigma_e(A_n - K) = \sigma_e(A_n) \subseteq D$, $r_e(A_n - K) = r_e(A_n) \leq \rho$. pour tout n.

Par conséquent r_e n'est pas continu en A .

■

Corollaire 4.2.6. *Si A est un operateur normal alors r_e est continu en A si et seulement si $\delta_e(A) = r_e(A)$*

Proposition 4.2.5. *Si r_e est continu en A alors r est continu en A*

Preuve. Si $r_e(A) = r(A)$, alors $r_e(A) = r(A) = \alpha_e(A) \leq \alpha(A) \leq r(A)$ alors r est continu en A, suposons que $r_e(A) < r(A)$ et soit $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| = r(A)$. Alors $\lambda \in \partial\sigma(A) \subseteq \sigma_e \cup \sigma_p^0$. Mais $r_e(A) < r(A)$ implique que $\lambda \notin \sigma_e(A)$ alors $\lambda \in \sigma_p^0$ C'est $\{\lambda\}$ est continu en $\sigma_e(A) \cup \sigma_p^0(A)$ puisque $\delta(A) = |\lambda| = r(A)$ alors r est continu en A. ■

Soit $\Gamma_{0e}(T)$ l'union de tout les composantes triviales de l'ensemble ([6]), alors

$$\Gamma_{0e}(T) = (\sigma_e(T) \backslash [\rho^{\pm}_{s-F}(T)]^-) \cup (\underset{-\infty<n<\infty}{\cup} [\rho^n_{s-F}(T)]^- \backslash \rho^n_{s-F}(T))$$

Où

$$\rho^{\pm}_{s-F}(T) = \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X), i(T-\lambda) \neq 0$$

$$\rho^{n}_{s-F}(T) = \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X), i(T-\lambda) = n$$

Proposition 4.2.6. *Si $A \in B(\mathcal{H})$ tel que $\sigma_0^p = \emptyset$ et σ est continu en A alors σ_w est continu en A*

Proposition 4.2.7. *Si σ_e est continu en A alors est ausi σ_w*

Il est clair que $\delta_*(A) = r(A)$ Le corollaire 4.1.4 découle des résultats de [18] où est-ce que c'est montré que σ :$B(\mathcal{H}) \longrightarrow S$ est continu en chaque opérateur avec spectre totalement discontinu . ∎

Conclusion

Bibliographie

[1] P. Aiena, Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[2] P. Aiena, Semi Fredholm operators, perturbations and localized SVEP. Escuela Venezolana de Mathematicas. 2007

[3] M. Ahues, A class of strongly stable operator approximations, /. Aust. Math. Soc. Ser B 28 (1987), 435-442. Boca Raton, FL, 2001. xviii+382 pp. ISBN : 1-58488-196-.

[4] M. Ahues, A. Largillier and B.V. Limaye, Spectral computations for bounded operators, Applied Mathematics (Boca Raton), 18. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

[5] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, Some results on non-quasitriangularoperators. IV, Rev. Roum. Math. Pures Appl.18(1973), 487Ű514

[6] C. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero and D. Voiculescu, Approximation of Hilbert space operators, Vol. II, Research Notes in Mathematics No. 102 (Pitman, Boston, 1984).

[7] A. Ammar and A. Jeribi, The Weyl essential spectrum of a sequence of linear operators in Banach spaces, Indag. Math. 27 (2016), 282-295.

[8] R. Bouldin, Operator approximations with stable eigenvalues. J. Austral Math Soc Ser A. 1990

[9] J. B. Conway and B. B. Morrel, Operators that are points of spectral continuity,Integral equations and operator theory, 2(1979), 174-198. Springer-Verlag, New York.

[10] G. Degla, An overview of semi-continuity results on the spectral radius and positivity. J. maths. Anal. App. 338 (2008). 101-110.

[11] S. V. Djordjevic and D. S. Djordjevic, Weyl's theorems : continuity of the spectrum and quasihyponormal operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 64 (1998), 259ś269

[12] L. Gillman and M. Jerison,of Continuous Functions, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton- 1960).

[13] I. N Jeon, I. K. Kim, A note on spectral continuity. Korean Journal of mathematic. 23 (2015) Vol. 4 pp. 601-605.

[14] A. Jeribi, Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices. Springer-Verlag, New-York (2015).

[15] A. Jeribi, M. Mnif, Fredholm operators, essential spectra and application to transport equations, Acta Appl. Math. 89, 155-176 (2005).

[16] V. Hardt , R. Mennicken et S. Naboko Systems of singular differential operators of mixed order and applications to l-dimensional MHD problems, Math. Nach. 205, 19-68 (1999).

[17] R. E. Harte and W. Y. Lee, Another note on Weyl's theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 2115ś2124.

[18] J. S. Lancaster, "Lifting from the Calkin algebra", Indiana University Ph.D. Dissertation, 1972.

[19] R. Lange, Biquasitrianguralirity and spectral continuity. Glascow Math. J. 26 (1985), pp 177-180.

[20] V. MÜLLER, Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras

[21] J.D. Newburgh, The variation of spectra, Duke Math. J. 18 (1951) 165Ũ176

[22] Nair, M.T. (1992) : On strongly stable approximations, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 52, 251-260.

[23] 11. V. Rakoccevic, Operators obeying a-Weyl's theorem, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 34 (1989), No. 10, 915-919.

[24] V. Rakocevic ,On one subset of M. Schechter's essential spectrum, Mat. Vesnik 5.(1981), 389-391.

[25] V. Rakocevic,On the essential approximate point spectrum IIŠ, Mat. Vesnik. 36 (1984) 89-97.

[26] W. Rudin : Functional Analysis. 1991 (Second Edition). Real and Complex Analysis 1974. McGraw-Hill.

[27] M. Schechter, Spectra of Partial Differential Operators, North-Holland Amsterdam-New York-Oxford, 1986.

[28] C. Schmoeger, The spectral mapping theorem for the essential approximate point spectrum, Colloq. Math. 74(1997), 167-176.

[29] M. SCHECHTER , Principles of Functional Analysis. Grad. Stud. Math. 36, Amer. Math. Soc, Providence,RI. 2002.

[30] J. G. Stampfli, "Compact perturbations, normal eigenvalues, and a problem of Salinas", J. London Math. Soc., 9 (1974), 165-175.