République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Année univ.: 2018/2019

# Laplacien Fractionnaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

**A**liouane **A**mine [1]

Sous la direction de

**A. A**zzouz

Soutenu le 16/07/2019 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **F. Z. M**ostefai | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Présidente |
| **A. A**zzouz | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Encadreur |
| **S. A**bbas | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |
| **O. B**ennihi | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |

1. aliouaneamin2112@gmail.com

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH AZA WAJAL le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
En second lieu, je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements au professeur **Abdelhalim Azzouz** pour ses précieux conseils, l'orientation, la confiance et la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.
Également je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements au professeur **Dida** pour ses précieux conseils, de ce travail.
Je voudrais mes plus visf remerciement vont égalment aux membres du jury : **F.Z.Mostefai** et **S.Abbes** et le **O.Bennehi** pour l'intérét qu'ils ont à ma recheche en acceptant d'examiner mon tarvail et de l'enrichir par leurs critiques et remarques. Mes remerciements vont aussi à tout membre de département de mathématique de la **faculté des sciencesr Dr MOLAY TAHAR**
Enfin, mes remerciements vont à ma famille, **Aliouane** mes amis et à toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicaces

Je tiens à dédier ce modeste travail :

Avant tout

A mon trés cher pére "Boualme"

L'homme qui ma donné le désir d'apprendre et le savoir vivre.

A ma mère, ma fierté et mon bonheur.

A mes soeurs.

A mes frère "ABDLEKDER", "Sadek", "Imade",

A tous mes amis surtout "B. Zakria,A.abdellah,A. hicham,

K.Ali, B.Majide,B.yassin, S.Noureddine, G.lakhdar ".

A tous les enseignants et les travailleurs de département

d'mathématique qui nous ont beaucoup aide pendant mes

années d'études à la promotion Master Analyse mathématique 2019.

# Table des matières

# Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par le même concept on peut introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, est une opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre ń moins un ż. On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente, la dérivation numérique d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de L'Hôspital et Johann Bernoulli à la fin du $17^e$ siècle. Mais ces grands pionniers se heurtèrent à un paradoxe.
Les opérateurs non locaux tels que le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ apparaissent naturellementdans la mécanique des continuums, les phénoménes de transition de phase,
laplacien fractionnaire ou bien laplacien fractionnaire avec poids. Plus précisément on considère un opérateur pseudo différentiel de la forme

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathrm{C}(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy = \mathrm{C}(n,s) \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathcal{L}\mathbb{B}_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy.$$

où $s \in (0.1)$, cet opérateur et plus généralement les opérateurs pseudo différentiels qui font partie du domaine de l'analyse harmonique et des équations aux dérivées partielles pendant longtemps, l'intérêt pour ces opérateurs a augmenté constamment au cours des dernières années. Les opérateurs non locaux tels que $(-\Delta)^s$

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\xi)(\mathfrak{F}u)(\xi) = \mathfrak{F}(\mathcal{L}u) &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{\mathfrak{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}}dy \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{e^{i\xi.y}+e^{-i\xi.y}-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathfrak{F}u)(\xi) \\ &= \mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1-\cos(\xi.y)}{|y|^{n+2s}}dy(\mathfrak{F}u)(\xi). \end{aligned}$$

Notre objectif est de la laplacien farctionnaire

Le mémoire se compose de ce trois chapitrs au premier chapitre ; on rappelle les notions de base sur l'espace $L^p$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ les distribution et les distributions tempérés, on définit ainsi les opérations sur ses distribution, (Dérivation. Convolution.et Transformation de Fourier).

Au deuxième chapitre on définit les espace de Sobolev $W^{1.p}(I)$. $W_0^{1.p}(I)$ et $W^{m.p}(I)$

$$W^{1,p}(I) = u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) t.q : \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C^1(I)$$

Finalement le troisiéme chapitre est consacré à définir les espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ et on éntroduit le laplacien Fractionnaire.

# Chapitre 1

# Rappels d'Analyse Fonctionnelle et Harmonique

## 1.1 Analyse fonctionnelle

**Définition 1.1.1.** *Une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée à un recouvrement ouvert $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de l'ouvert $\Omega$ est un ensemble de fonctions $\Psi_i$ vérifiant*

1. *Pour tout $i$, la fonction $\Psi_i$ est de classe $C^\infty(\Omega)$, positive et à support contenu dans $A_i$.*
2. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un nombre fini de fonctions $\Psi_i$ non identiquement nulles sur $K$.*
3. *$\forall x \in \Omega$ on a $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \Psi_i(x) = 1$.*

**Définition 1.1.2.** *Soient $E, F$ deux espaces de Banach, On dit que $E$ s'injecte continûement dans $F$ et on note $E \hookrightarrow F$ si*

1. *$E$ est un sous espace vectoriel de $F$.*
2. *Toute suite convergente dans $E$ l'est aussi dans $F$, ($\exists c \geq 0$ telle que $\|u\|_F \leq c\|u\|_E$).*

**Définition 1.1.3.** *Soient $E, F$ deux espaces de Banach, On dit que l'injection de $E$ dans $F$ est compacte et on note $E \hookrightarrow F$ si*

1. *$E$ s'injecte continûment dans $F$.*

2. *L'application $I : E \to F$ est compacte.*

### 1.1.1 Espace $L^p$

#### Motivations

La théorie de l'intégration et le calcul intégral étudiés jusqu'ici sont insuffisants vis à vis de l'opération de produit des fonctions et des classes d'équivalence de fonctions mesurables. En effet les espaces $\mathrm{L}^1$ ne sont pas stables par produit en général. Par exemple si

$$(\mathrm{X}, m) = (]0,1[, dt) \text{ on a } t^{-1/2} \in \mathrm{L}^1 \text{ mais } (t^{-1/2})^2 = t^{-1} \notin \mathrm{L}^1$$

Le but de ce chapitre est de combler en partie cette lacune en donnant des conditions suffisantes pour que le produit de certaines classes de fonctions mesurables soit intégrables. Le but est aussi d'introduire les espaces $L^p$ qui sont très importants en analyse fonctionnelle et dans de nombreuses théories.

#### Espaces semi-normés $L^p$ de fonctions mesurables

On travaille dans ce paragraphe avec un espace mesuré $(\mathrm{X}, \mathrm{T}, m)$ et on note $M$ la fonctionnelle d'intégration associée à $m$

**Définition 1.1.4.** ***(Espaces** $L^p = L^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ **pour** $1 \leq p \leq +\infty$**)*** *C'est l'espace des fonctions $f$ mesurables* $\mathrm{X} \to \mathrm{C}$ *telles que* $\mid f \mid^p$ *soit intégrable*

$$f \in L^p \Leftrightarrow f \text{ mesurable et } M(\mid f \mid^p) < \infty.$$

*où encore*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ mesurable, tel que } \quad : \int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx < \infty\}$$

**Corollaire 1.1.1** (Espace semi-normé $L$). . *Soit* $(\mathrm{X}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et soit* $1 \leq p < +\infty$. *Alors* $L^p$ *est un espace vectoriel et la fonction numérique suivante définie sur* $L^p$ *est une semi-norme*

$$f \mapsto \| f \|_p = M(| f |^p)^{1/p}$$

**Définition 1.1.5.** ***(Exposants Conjugués)***. *Soient* $p$ *et* $q \in [1, +\infty]$. *On dit que* $p$ *et* $q$ *sont des exposants conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*La relation de conjugaison ainsi construite est symétrique. Noter que si l'un des exposants appartient à l'intervalle* $[1, 2]$, *l'autre appartenant forcément à* $[2, +\infty]$.
*Voici deux couples d'exposants conjugués : 2 et 2, 1 et* $+\infty$. *Donnons d'abord une condition suffisante pour que le produit de deux fonctions mesurables soit intégrables.*

### Théorèmes fondamentaux

**Théorème 1.1.1.** *[19] Pour* $p \in [1, \infty]$, $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_{L^p})$ *est une espace de Banach.*
*On définit les espaces* $L^\infty$ *par*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, tel que } : \sup_{x \in \Omega} | f(x) | < \infty\} \quad \text{et } \| f \|_\infty = \sup_{x \in \Omega} | f(x) |$$

**Théorème 1.1.2.** *[6] (Inégalité de Hölder).*
*Soient* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$. *(et* $p'$ *étant le conjugué de* $p$*) Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et on :*

$$\|fg\|_{L^1} = \int_\Omega | f(x)g(x) | \, dx \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

**Proposition 1.1.1.** *si* $\Omega$ *est de mesure finie et* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ *alors*

$$L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$$

*En particulier*

$$L^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega) \hookrightarrow L^{1}(\Omega),\ \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

**Définition 1.1.6.** ***(Fonctions localement intégrables)*** *On dit qu'une fonction $f$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est localement $p-$intégrable si elle est $p-$intégrable sur tout compact contenu dans $\Omega$, Ainsi :*

$$L^{p}_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{mesurable tel que} \ : \forall K \underset{compact}{\subset} \Omega,\ \int_{K} \mid f(x) \mid^{p} dx < \infty\}$$

**Remarque 1.1.1.** *Il est clair que $L^{p}_{loc}(\Omega) \subsetneq L^{p}(\Omega)$. En effet, si $\Omega = ]0, \infty]$ alors la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $f \in L^{1}_{loc}(]0, \infty])$ mais $f \notin L^{1}(]0, \infty])$*

**Théorème 1.1.3.**

Nous sommes maintenant prét à définir une classe plus lorge de fonctions normée distributions.

# 1.2 Distributions

## 1.2.1 Classe $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ à support compact

**Définition 1.2.1.** *Le support d'une fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}$ i.e le complémentaire du plus grand ouvert d'annulation, on le note*

$$suppf = \{\overline{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}\}$$

Malheureusement, il n'est pas possible d'étendre cette défnition telle quelle au cas des distributions, car il n'existe aucune notion de valeur en un point d'une distribution. Mais on peut défnir de maniére équivalente le support d'une fonction comme le plus petit fermé en dehors duquel la fonction est nulle.

**Définition 1.2.2.** *On appelle $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions $C^\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ indéfiniment dérivables à support compact.*

**Propriété 1.2.1.** *Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact jouent, en analyse, plusieurs rôles distincts, également importants :*
*a) Elles servent à localiser les fonctions sans en dégrader les hypothèeses de régularité ;*
*b) Elles servent à approcher les fonctions localement intégrables par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ;*
*c) Permet à partir des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et par un procédé de dualité que l'on va étendre le calcul différentiel des fonctions aux distributions, qui sont des objets plus généraux que les fonctions.*

*Les éléments de $\mathcal{D}(U)$ noté aussi $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont appelés fonctions tests.*

**Opérations sue le support**

### 1.2.2 Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

**Définitions et Exemples**

Soient le n-uplet d'entiers $\alpha = (\alpha_1, ...., \alpha_n)$, et $x = (x_1, ...., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on note

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} ... x_n^{\beta_n}$$

et $\partial^\alpha$ désigne la dérivée d'orde $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ définie par

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_{x_1}^{\alpha_n} .... \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi$$

si $\varphi$ est une fonction $\mid \alpha \mid$ fois différentiable (on utilisera aussi la notation $\partial^\alpha$ puor les distribution).

**Définition 1.2.3.** *Soient $n \geq 1$ entier et $\Omega$ un ouvert de $R^n$. Une distribution $T$ sur $\Omega$ est* *une $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles ou complexes vérifiant la condition (de continuité)suivante :*

*Pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ telle que pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ avec $supp\phi \subset \Omega$*

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq C \max_{\alpha \leq p} \sup_{x\in K} |\delta^\alpha \phi(x)|$$

*Lorsque $p_K$ peut-être choisi indépendemment de $K$ dans la condition de continuité ci-dessus, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier $p \in N$ tel que $p_K \leq p$ pour tout compact $K \subset \Omega$, on dit que $T$ est une distribution d'ordre $\leq p$ sur $\Omega$.*

*Dans ce cas, on appelle "ordre de la distribution $T$" le plus petit entier p positif ou nul tel que $T$ soit une distribution d'ordre $\leq p$.*

*On notera toujours $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des distributions sur $\Omega$ (à valeurs respectivement réelles ou complexes)-et souvent $\mathcal{D}(\Omega) = \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ on note par $\mathrm{T}(\varphi) = \langle \mathrm{T}, \varphi\rangle$ et$\mathcal{D}'(U)$ est l'ensemble des distributions et $\mathbf{K}_k$ l'ordre de $\mathrm{T}$*

**Remarque 1.2.1.** *A toute fonction $f$ de $L^1_{loc}(\Omega)$, on associe la forme linéaire définie par*

$$\mathrm{T}_f : \phi \mapsto \int_\Omega f(x)\phi(x)dx,$$

*pour toute fonction test $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$.*

*Observons que, pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour toute fonction $\phi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ à support dans $K$, on a*

$$|\ \langle T_f, \phi\rangle\ | \leq \mathrm{C}_k \sup |\ \phi(x)\ |, \quad avec\ \mathrm{C}_K = \int_K |\ f(x)\ |\ dx.$$

*Donc $\mathrm{T}_f$ est un distribution d'ordre 0 sur $\Omega$.*

**Définition 1.2.4.** *Soient $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{T}$ une distribution sur $\Omega$. On définit supp$(\mathrm{T})$*

*comme le plus petit fermé* $\mathrm{F}$ *de* $\Omega$ *tel que* $\mathrm{T}\mid_{\Omega\ \mathrm{F}}=0$. *Autrement dit*

$$supp(\mathrm{T}) = \bigcap_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(\mathrm{T})} \mathrm{F}$$

*où*

$$\mathcal{F}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{F}\, fermé\ de\, \Omega | \mathrm{T}\mid_{\Omega\ \mathrm{F}}\} = 0$$

*Voici quelques propriétés simples de la notion de support d'une distribution.*

*ou envore 1.4*

**Proposition 1.2.1.** *Soient* $\Omega$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et deux distributions* $\mathrm{T}, \mathrm{S} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Alors*

*(a)* $\mathrm{T}\mid_{\Omega\ supp(T)}= 0$ *;*

*(b) Pour toute fonction test* $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$supp(\phi) \cap supp(T) = 0 \ \textit{implique que}\ \ \langle \mathrm{T}, \phi\rangle = 0$$

*(c)* $supp(\mathrm{T}+\mathrm{S}) \subset \ upp(\mathrm{T}) \cup supp(\mathrm{S})$;

*(d) Pour tout fonction* $a \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, *on a*

$$supp(a\mathrm{T}) \subset supp(a) \cap supp(\mathrm{T});$$

*(e) pour tout multi-indice* $\alpha \in \mathbf{N}$

$$supp(\partial_x^\alpha \mathrm{T}) \subset supp(\mathrm{T}).$$

**Proposition 1.2.2.** ***[Plongement de** $L^1_{loc}(\Omega)$ **dans** $\mathcal{D}'(\Omega)$**]*** *L'application linéaire*

$$L^1_{loc}(\Omega) \ni f \mapsto \mathrm{T}_f \in \mathcal{D}'(\Omega)\ \textit{est injetive.}$$

***Convention***. *Dorénavant, nous identifierons donc toute fonction $f$ localement intégrable sur $\Omega$ avec la distribution $\mathrm{T}_f$ qu'elle définit sur $\Omega$.*

**Définition 1.2.5.** *Le support d'une distribution noté supp*$\mathrm{T}$ *est le complémentaire du plus grand ouvert d'annulation de* $\mathrm{T}$

$$x \in supp\mathrm{T} \Leftrightarrow \forall V \in V(x); \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle \neq \tag{1.1}$$

**Exemple 1.2.1.** ***(Distribution de Dirac)*** *La distribution de Dirac notée par $\delta_a$ est définie par*

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$$

*On note $\delta_a = \delta$ et supp$(\delta) = \{0\}$*

**Exemple 1.2.2.** ***(Distribution de Heaviside)*** *La distribution d'Heaviside est définie par*

$$H : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

*On a supp$(H) = \mathbb{R}_+$.*

**Exemple 1.2.3.** *La distribution $V_p(\frac{1}{t})$ appelée valeur princpale est définie par*

$$\langle V_p(\frac{1}{t}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{|t|>\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

### 1.2.3 Opérations sur les distributions

Soient $\mathrm{T}, \mathrm{S}$ deux distributions sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On définit la somme et produit par un scalaire d'une distribution comme suit

(i) $\langle \mathrm{T}+\mathrm{S},\varphi\rangle = \langle \mathrm{T},\varphi\rangle + \langle \mathrm{S},\varphi\rangle \ \forall\varphi\in\mathcal{D}(U)$

(ii) $\langle \alpha\mathrm{T},\varphi\rangle = \alpha\langle \mathrm{T},\varphi\rangle \ \forall\alpha\in\mathbb{K}$

### Dérivation au sens distributions

Si $\alpha\in\mathbb{N}^n$ alors la formule de dérivation pour toute distribution $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ est donnée par

$$\langle \partial^\alpha\mathrm{T},\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \mathrm{T},\partial^\alpha\varphi\rangle \tag{1.2}$$

Avec $\mid\alpha\mid=\sum_{i=1,n}\alpha_i$.

La puissance de la théorie des distributions réside sans doute dans le fait que l'on puisse dériver n'importe quelle distribution à n'importe quel ordre. La définition de la dérivée d'une distribution est simplement obtenue par généralistion de l'intégration par parties (formule de Green stokes voir [7]). Il est à signaler que la formule (1.2) définit une distribution unique $\partial^\alpha\mathrm{T}$ (tempérée si T l'est, voir définition plus loin). Cependant, Il faut prendre garde à ce que la dérivée d'une fonction au sens des distributions ne coincide pas en général avec sa dérivée classique. C'est le cas notamment pour les fonctions dérivable par morceaux.

**Exemple 1.2.4.** *L'exemple de base est celui de la fonction de Heaviside*

$$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto H(x)=\begin{cases}1 & si \quad s\geq 0,\\ 0 & sinon\end{cases}$$

*par définition*

$$\langle H',\varphi\rangle = -\langle H,\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle,$$

*c'est-à-dire que $H'=\delta$ (tandis qu'au sens des fonctions, $H'$ est définie et vaut $0$ en tout point sauf à l'origine, càd $H'$ se confond avec la fonction nulle). Plus généralement, on a le résultat* *suivant*

**Proposition 1.2.3.** *Formule des sauts. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$, éventuellement discontinue en 0 mais ayant des limites finies à gauche et droite de 0. On note*

$$[f] = \lim_{x \searrow 0} f(x) - \lim_{x \nearrow 0} f(x).$$

*Alors sa dérivée au sens des distributions est donnée par*

$$\mathrm{T}'_f = \mathrm{T}_{f'} + [f]\delta.$$

Le résultat général suivant montre que les dérivées de la masse de Dirac jouent un rôle trés important.

**Théorème 1.2.1.** *[18] Toute distribution dont le support est réduit au singleton $\{0\}$ est une combinaison linéaire finie de dérivées (au sens des distributions) de la masse de Dirac concentrée au point $\{0\}$.*

#### Produit tensoriel de deux distributions et Convolution

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement. Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(U)$ et $\mathcal{S} \in \mathcal{D}'(V)$, on définit la distribution $\mathrm{T} \otimes \mathrm{S}$ sur $U \times V$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U) \text{ et } \forall \psi \in \mathcal{D}, \ \langle \mathrm{T} \otimes \mathrm{S}, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle \langle \mathrm{T}, \psi \rangle$$

On définit aussi la convolution de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$ $f$ et $g$,(on dit qu'elles sont convolubles) par la fonction

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

si $h$ est une fonction bornée, on a alors, d'aprés le théoréme de Fubini

$$\langle f * g, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x+y) f(x) g(y) dx dy$$

**Définition 1.2.6.** ***(Produit Tensoriel de deux Distributions)*** *Soient* $\Omega_1$ *et* $\Omega_2$ *ouverts de* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$ *respectivement, ainsi que* $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *et* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$*. On défnit une distribution* $\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}$ *sur l'ouvert* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *de* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *par la formule*

$$\langle \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}, \phi \rangle = \langle \mathrm{S}, \langle \mathrm{T}, \phi(x_1, .) \rangle \rangle, \ \phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

*On aurait pu également défnir* $\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}$ *par la formule*

$$\langle \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}, \phi \rangle = \langle \mathrm{T}, \langle \mathrm{S}, \phi(., x_2) \rangle \rangle, \ \phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

*Ces deux défnitions sont équivalentes, comme le montre la*

**Proposition 1.2.4.** *Soient* $\Omega_1$ *et* $\Omega_2$ *ouverts de* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$ *respectivement, ainsi que* $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *et* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$*. Pour toute fonction test* $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$*, on a*

$$\langle \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}, \phi \rangle = \langle \mathrm{S}, \langle \mathrm{T}, \phi(x_1, .) \rangle \rangle = \langle \mathrm{T}, \langle \mathrm{S}, \phi(., x_2) \rangle \rangle.$$

.

### 1.2.4 Convolution $\mathrm{C}_c^\infty \star \mathcal{D}'$

Regardons d'abord le produit de convolution d'une fonction $L^1_{loc}$ par une fonction de classe $\mathrm{C}^1$ à support compact. Pour tout $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, rappelons que

$$\phi * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) u(y) dy \ x \in \mathbb{R}^n$$

Cette défnition s'étend sans diffculté au cas du produit de convolution d'une distribution par une fonction de classe $\mathrm{C}^1$ à support compact.

**Définition 1.2.7.** ***(Convolution** $\mathrm{C}_c^\infty \star \mathcal{D}'$ **Pour toute distribution** $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)* *Pour toute fonction test $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\mathrm{T} \star \phi(x) = \langle \mathrm{T}, \phi(x - .)\rangle = \langle \mathrm{T}, (\tau_x)_* \tilde{\phi}\rangle \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

*où $\tilde{\phi}$ désigne la fonction défnie par*

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$$

*et où $\tau_x$ désigne la translation de vecteur $x$*

$$\tau_x : y \mapsto \tau_x(y) = y + x,$$

*c'est-à-dire que*

$$\tau_x f(y) = f \circ \tau_{-x} = f(y - x), \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

*L'analogie entre cette défnition et celle concernant les fonctions suggére que la majoration habituelle du support du produit de convolution reste valable dans ce nouveau cadre.*

**Proposition 1.2.5.** *[18]* ***(Régulaité de la Convolution** $\mathrm{C}_c^\infty \star \mathcal{D}$) Pour toute distribution $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et toute fonction test $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, le produit de convolution de la distribution $\mathrm{T}$ par la fonction test $\mathrm{C}^1$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et on a*

$$\partial_x^\alpha(\mathrm{T} \star \phi) = (\partial_x^\alpha \mathrm{T}) \star \phi = \mathrm{T} \star \partial_x^\alpha \phi.$$

**Théorème 1.2.2.** *[18]* ***(Distributions à Support dans un Singleton)**. Soient $\Omega$ un* *ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, un point* $x_0 \in \Omega$ *et une distribution* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Supposons que*

$$supp(\mathrm{T}) \subset \{x_0\}$$

*Alors il existe une suite* $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{N}}$ *de nombres réels (ou complexes) telle que*

$$a_\alpha = 0 \text{ dés que } \mid \alpha \mid > O\mathbf{T} \text{ (avec O(T) est l'ordre de T).}$$

*et*

$$\mathrm{T} = \sum_{\alpha \in \mathrm{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

**Application :Èquation** $x^m T = 0$

Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On cherche quelles sont les distributions $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(I)$ telles que

$$(x - x_0)^m \mathrm{T} = 0, \text{ où } m \in \mathrm{N} \tag{1.3}$$

Tout d'abord, remarquons que cette relation implique que

$$supp(T) \subset \{x_0\}.$$

D'aprés le Théoréme (1.2.2) ci-dessus, T est de la forme

$$\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{x_0}^{(k)}.$$

Substituons le membre de droite de cette formule dans l'équation (1.3), et utilisons la formule de Leibnitz pour obtenir

$$(x - x_0)^m \delta_{x_0}^{(k)} = \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!} \delta_{x_0}^{(k-m)} \, si \, k \geq m, \; = 0 \, si \, k < m$$

Ondéduit que $a_k = 0$ pour $k \geq m$, de sorte que les solutions de l'équation

$$(x - x_0)^m \mathrm{T} = 0 \, dans \, \mathcal{D}'(I)$$

sont toutes les distributions de la forme

$$\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \delta_{x_0}^{(k)},$$

où les coeffcients $a_k$ sont quelconques.

**Théorème 1.2.3.** *[18] **(Densité de** $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ **dans** $\mathcal{D}'(\Omega)$**)** Soient $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe alors une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\leq 1}$ de fonctions de classe $\mathrm{C}^\infty$ à support compact dans $\Omega$ telle que*

$$\mathrm{T}_n \to \mathrm{T} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty$$

**Proposition 1.2.6.** ***(Convolution et notion de conergence)** Soient une fonction test $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\leq 1}$ une suite de distributions sur $\mathbb{R}^n$ convergeant vers $\mathrm{T}$ au sens des distributions. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathrm{N}^n$,*

$$\partial^\alpha(\mathrm{T}_n \star \phi) \to \partial^\alpha(\mathrm{T} \star \phi) \text{ \textbf{uniformément sur tout compact de}} \, \mathbb{R}^n$$

*lorsque $n \to \infty$.*

## 1.3 Espace de Schwartz, Distributions témpérées

### Introdiction

**Définition 1.3.1.** *[13] **(Fonctions à décroissance rapide)** Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est* *dite à décroissance rapide si pour tout entier positif* **k** *on a*

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x^k \mid f(x) \mid = 0$$

**Définition 1.3.2.** *L'espace des fonction indéfinment dérivable dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide est appelé espace de Schwtartz noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cette derniére propriété signifie que $\beta$ et $\alpha$ étant des multi-indices d'ordre n :*

$$\forall(\beta, \alpha) \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x^\beta \mid \partial^\alpha f(x) \mid = 0$$

**Exemple 1.3.1.**

*1 / $e^{-x^2}, e^{-x^4}$ sont des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

*2 / La fonction $e^{-|x|}$ et $\frac{1}{x^2+1}$ ne sont pas des fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, La premiére n'est pas $C^\infty$, le seconde n'est pas à décroissance rapide à l'infini c-à-d $\mid x^3 \frac{1}{x^2+1} \mid$ n'est pas majoré quand $x \longrightarrow \infty$*

*3 / Une fonction polynôme (non nulle) n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

### 1.3.1 Topologie sur $\mathcal{S}$

On redéfinit l'espace de *Schwartz* comme suivant :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mid x^\beta \partial^\alpha \varphi(x) \mid < \infty\}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un espace vectoriel sur lequel les $p_{\alpha,\beta}$ forment une famille dénombrable de semi-normes .On le munit de la topologie (métrisable) induite par ces semi- normes. Cela signifie qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $p_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi)$ tend vers zéro quel que soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$. La méme topologie est induite par les semi-normes $q_{l,m}(\varphi)$ définies par

$$q_{l,m}(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+ \parallel x \parallel)^m \mid \partial^\alpha \varphi(x) \mid,$$

où $\parallel . \parallel$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. En effet , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\parallel x \parallel \leq \sqrt{n} \max_{|\beta|=1} \mid x^{\beta|}$$

et pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe $c_m > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+, (1+t)^m \leq c_m(1+t^m)$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,on a

$$(1+ \parallel x \parallel)^m \leq c_m(1 + n^{\frac{m}{2}} \max_{|\beta|=m} \mid x^\beta \mid),$$

ce qui implique

$$q_{l,m}(\varphi) \leq c_m \max_{|\alpha|\leq l}(p_{\alpha,0}(\varphi) + n^{\frac{m}{2}} \max_{|\beta|=m} p_{\alpha,\beta}(\varphi)).$$

D'autre part, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$\mid x^\beta \mid \leq \parallel x \parallel^{|\beta|} \leq (1+ \parallel x \parallel)^{|\beta|}$$

et

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq q_{|\alpha|,|\beta|}(\varphi)$$

### 1.3.2 Propriétés de $\mathcal{S}$

**Proposition 1.3.1.** *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et on noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^P(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1, +\infty[$,*

**Preuve** Pour $p = +\infty$, on remarque que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\parallel \varphi \parallel_{L^\infty} = p_{0,0}(\varphi) = q_{0,0}(\varphi).$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, on utilise que $x \mapsto (1+ \parallel x \parallel^{-s})$ est intégrable en dimension $n$ si $s > n$. Par suite, en choisissant un entier $m > n/p$ on a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \mid \varphi \mid^p dx &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \parallel x \parallel)^{-mp} \mid (1+ \parallel x \parallel)^m \varphi(x) \mid^p dx \\ &\leq q_{0,m}(\varphi)^p \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \parallel x \parallel)^{-mp} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\parallel \varphi \parallel_{L^p} \leq \mathrm{C} q_{0,m}(\varphi), \quad \mathrm{C} = (\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \parallel x \parallel)^{-mp} dx)^{1/p}$$

**Proposition 1.3.2.**

*1 / L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation à tout ordre.*

*2 / L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par des founctions polynomiales de n'importe quel degré.*

**Proposition 1.3.3.** *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une algébre pour :*

*i / Le produit (ordinaire) des fonction défini par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi\psi$$

*cette application est bilinéaire continue pour la formule de Leibiniz*

$$p_{\alpha,\beta}(\psi\varphi) \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha}{\gamma(\alpha - \gamma)} p_{\gamma,\beta}(\psi) p_{\alpha-\gamma,0}(\varphi)$$

*ii // Le produit de convolution défini par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \star \psi$$

*cette application est aussi une application bilinéaire continue.*

*Encore, un résultat trés utile pour la suite*

**Proposition 1.3.4.** *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par la transformée de Fourier i.e*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix.\xi} dx$$

*l'application $\mathcal{F}$ est linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

**Propriété 1.3.1.** *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ contient l'espace des fonctions $C^\infty$ à support compact $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et contenu dans l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonction $C^\infty$, au sens où l'on a des injections continues*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

*L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ étant muni d'une topologie telle q'une sute $(\varphi_n)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge si et seulement s'il existe un compact fixe $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$ contenant tous les supports des $\varphi_n$ et $(\varphi_n)$ converge uniformément sur $\mathrm{K}$ ainsi que toutes ses dérivées ,alors $\varphi_n$ sont nulle au voisinage de $\pm\infty$ donc est à décroissance rapide. En effet $x^n \varphi_n^{(l)}$ est unifomément continue sur supp$\varphi_n$, donc sur $\mathbb{R}^n$, ce pour tout $k, l$ et donc $\| \ x^n \varphi_n^{(l)} \ \|_\infty$ est atteint dans $\mathbb{R}$ alors la suite $(\varphi_n)$ d'élements de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $(\varphi_n)$ d'élements $C^\infty$ alors elles sont d'élemen de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. De plus, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui est lui-méme dense dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.*

### 1.3.3 Distributions tempérées

On peut voir l'espace de *schwrtz* comme un ensemble de fonctions test permettant de définir des fonction généralisées que l'on appellera les distributions tempérées. Celles-ci n'auront pas nécessairement de valeurs ponctulles mais seront définies au travers de leurs valeurs contre les fonction test. Les distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ comprennent tout d'abord toutes les fonctions $f$ telles que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et tel que

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

Soit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Notons que (puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est métrisable,) la continuité d'une forme linéaire équivaut à sa continuté séquentielle)

**Propriété 1.3.2.**

*1 / Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty]$, d'aprés l'inégalité de Hölder, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| \varphi \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

*car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injiecte continument dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.*

*2 / Pour une fonction $f$ localement intégrable et à croissance au plus polynomiale, i.e.il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$| f(x) | \leq \mathrm{C}(1+ \| x \|)^k, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

*alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \leq \mathrm{C} \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \| x \|)^k \mid \varphi(x) \mid dx$$
$$\leq \mathrm{C} q_{0,k+m}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \| x \|)^{-m} dx$$

*pour $m > n$.*

**Définition 1.3.3.** *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e une forme linéaire $\mathrm{T}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $\alpha, \beta$ et $C$ pour lesquels*

$$| \langle \mathcal{T}, \varphi \rangle | \leq C_{\alpha,\beta}(\varphi) \quad pourtout \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*L'ensemble des distributions tempérées est un espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

**Exemple 1.3.2.**

*1 / On identifie la fonction $f$ avec la distribution (tempérée) $T_f$ définie par*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

*2 / l'ensemble des distributions tempérées contient aussi des objets qui ne sont pas des fonctions.*

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$

*est une distribution tempérée en général,pour $y \in \mathbb{R}^n$*

$$\langle \delta_y, \varphi\rangle = \varphi(y)$$

*La masse de Dirac est en fait une mesure de **Radon**, i.e une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues bornées*

*3 / Une distribution basé sur la fonction $f : x \neq 0 \longmapsto 1$, qui n'est pas localement intégarble. We peut pas être vue comme une distribution tempérée. Cependant,on lui associne une distribution tempérée applée valeur principale $1/x$*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

*comme étant une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

**Remarque 1.3.1.** *L'exponentielle $e^{x^2}$ ne définit pas une distribution tempérée, puisque*

$$\int_{\mathbb{R}}^{x^2} e^{x^2}e^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} dx = \infty$$

*n'est pas borné pour tout C>0, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$,*

$$\varphi = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$$

*donne*

$$\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle \geq C_{p_{\alpha,\beta}}(\varphi)$$

### 1.3.4 Espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées

**Définition 1.3.4.** ***(Espase** $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) L'ensemble des distributions tempérée forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$*

### 1.3.5 Convergence dans $\mathcal{S}'$

Il est naturellement muni de la topologie duale faible, défini par la convergence faible des suites, Une suite de distribution tempérée $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, quel que $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la suite numérique $(\langle \mathrm{T}_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$.
Un exemple fondamental de convergence au sens des distribution est celui des approximations de l'unité, qui donnent une représentation de la masse de Dirac comme limite de suite de fonctions $C^\infty$ à support compact.

**Définition 1.3.5.** *On appelle approximation de l'unité une famille de fonctions $\rho_\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ telle que*

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

*avec $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ d'intégrale 1. (On suppose souvent de plus $\rho \geq 0$.) Notons que si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité alors par un changement de variables, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

*C'est cette propriéte fondamentale qui pernet de montrer que $\rho_\varepsilon$ tend vers $\delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. En effet, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)((\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))dy.$$

*Cette derniére intégral est en fait prise sur un compact fixe (le support de $\rho$) et comme $\varphi$ est continue, elle converge vers zéro lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro d'aprés le théoréme de* `Lebesgue`*.*

D'aprés les injections continues et denses $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

### 1.3.6 Opérations sur $\mathcal{S}'$

**Multipliction d'une distribution par une fonction**. Pour généraliser le produit de fonction, on peut définir le produit d'une distribution T par une fonction $\psi$ en posant

$$\langle \psi \mathrm{T}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T}, \psi\varphi \rangle$$

à condition que l'ensemble des fonction test $\varphi$ soit stable par multiplication par $\psi$. C'est le cas pour tout fonction $\psi$ de classe $C^\infty$ lorsque les fonction test sont $C^\infty$ à support compact : autrement dit, quelles soient $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \psi\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si de plus T est une distribution tempérée, rien ne dit que $\psi$T soit encore une distribution tempérée. D'aprés le résultats de stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vus plus haut, ce sera le cas si $\psi$ est elle méme une fonction $C^\infty$ à décroissance rapide, ou si c'est une fonction polynomaiale. Si T est à support compact, alors quelle que soit $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \psi\mathrm{T}$ est à support compact. À titre d'exemple, notons que $x\delta$ n'est rien d'autre que la distribution nulle, tandis que $xv.p.(\frac{1}{x})$ s'identifie avec la fonction constante égale à 1.

**Remarque 1.3.2.** *Il est impossible de défini un produit entre distributions : il n'y a en tous cas aucune chance pour qu'il prolonge le produit des distribution par les fonction tout en étant associatif, car sinon on aurait*

$$0 = v.p(\frac{1}{x})(x\delta) = (v.p(\frac{1}{x})x)\delta = \delta?$$

**Remarque 1.3.3.** *Une distribution* $\mathrm{T}$ *vérifie* $x\mathrm{T} = 0$ *si seulement si* $\mathrm{T} = c\delta$, *où* $c$ *est une constante arbitraire. On déduit que* $x\mathrm{T} = 1$ *si seulement si* $\mathrm{T} = v.p(\frac{1}{x}) + x\delta$, *où* $c$ *est une constante arbitraire.*

***Convolution des distributions tempérées*** *On généralise la convolution des fonctions à la convolution d'une distribution tempérée avec une fonction* $C^\infty$ *à décroissance rapide. En effet, si* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *alors qule que soit* $x \in \mathbb{R}^n$, *la fonction* $y \longmapsto \psi(x-y)$ *appartient aussi à la classe de* ***Schwartz****.*

**Définition 1.3.6.** *Soient* $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *on définit le produit de convolution de* $\mathrm{T}$ *et* $\psi$ *par*

$$(\mathrm{T} * \psi)(x) = \langle \mathrm{T}, \psi(x - .)\rangle.$$

**Exemple 1.3.3.** *L'exemple fondamental est la convolution par la masse de Dirac est*

$$(\delta * \psi) = \psi(x * \delta)$$

**Propriété 1.3.3.** *On a* $\mathrm{T} * \psi = \psi * \mathrm{T}$ *(la covolution est vomutative). La déeivée de la convolution est donnée par* $\partial^\alpha(\mathrm{T} * \psi)(x) = \langle \mathrm{T}, \partial^\alpha\psi(x - .)\rangle$ *et plus généralement*

$$\partial^\alpha(\mathrm{T} * \psi)(x) = \langle \mathrm{T}, \partial^\alpha\psi(x - .)\rangle.$$

*Toutefois son comportement à l'infini n'est pas évident. Pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{T} * \psi(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathrm{T}, \psi(x - .)\rangle \varphi(x)dx$$

$$\langle \mathrm{T}, \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - .)\varphi(x)dx\rangle$$

*par linéarité de* T *et l'intégrale, c'est-à-dire encore*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{T} * \psi(x)\varphi(x)dx = \langle \mathrm{T}, \check{\psi} * \varphi\rangle,$$

*où* $\check{\psi}(x) = \psi(x)$. *Ceci est en fait un moyen de définir* $\mathrm{T}*\psi$ *directement comme une distribution tempérée, en posant*

$$\langle \mathrm{T} * \psi, \varphi\rangle = \langle \mathrm{T}, \check{\psi} * \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

## 1.4 Transformée de Fourier

### 1.4.1 Transformée de Fourier dans $L^1$

**Définition 1.4.1.** *[16] Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *on appelle une transformation de Fourier de* $f$ *la fonction noté* $\widehat{f}$ *ou* $\mathcal{F}(f)$ *définie par*

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x.\xi) f(x)dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

*ou* $x.\xi$ *est le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^n$.

**Remarque 1.4.1.** *Si* $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n)(\widehat{f})$ *est bien définie*

**Remarque 1.4.2.** *On peut ecrire la transformée de Fourier par la formule*

$$(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}(n)} f(x) \exp -ix.\xi dx.$$

**Propriétés 1.4.1.** *Soit $f$ une fonction de classe $C^m$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que ,pour tout multi-indice $\alpha$ ou $\mid \alpha \mid \leq m$ on a :*

*1 / La transfomée $\hat{f}$ de $f$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$*

*2 / Si $\hat{f}$ est de classe $C^m$ ,alors*

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) \exp(-2i\pi x.\xi) dx$$

*où*

$$\partial^{(\alpha)} \mathcal{F}(f) = (-2i\Pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f(x))$$

*3 /*

$$\mathcal{F}(\partial^{(\alpha)} f)(\xi) = (2i\pi)^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$$

**Proposition 1.4.1.** *[16] Soient $f$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

**Preuve.** On a

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x.\xi) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy dx$$

effectuant le changement de variable $(x, y) \to (x - y; y)$on aura

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(-2i\pi(y+z).\xi] f(z) g(y) dy dz$$

La fonction à intégrer est sommable dans $R^{(2n)}$ ,en appliquant le théoréme de FUBINI, on obtient

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = [\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi(y+z)f(z)dz].[\int_{\mathbb{R}^n} [\exp(-2i\pi(y+z)g(y)dy]$$

■

**Définition 1.4.2.** ***(Transformaée de Fourier invzrse )*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.Alors pour*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx$$

*on a*

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f(x)$$

*où $\bar{\mathcal{F}}$ est l'analogue de la transformée de Fourier obtenue en remplaçant i par -i dans $\mathcal{F}(f)$*

### 1.4.2 Transformation de Fourier des distribution

On va définir la transformée de Fourier pour les distributions réguliéres. Soit $f$ une fonction localement intégrable qui définit une distribution réguliére $\mathrm{T}_f$ et intéressons nous à la distribution réguliére associée à $\hat{f}$. On a

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}\langle \mathrm{T}_{\hat{f}}, \varphi\rangle = \langle \mathrm{T}_f, \hat{\varphi}\rangle$$

$$\forall \in \mathcal{D}\langle \mathrm{T}_{\hat{f}}, \varphi\rangle = \int \hat{f}(t)\varphi(t)dt$$

$$= \int (\int f(x)e^{-2i\pi xt}dx)\varphi(t)dt$$

et en utilisant le théoréme de FUBINI pour intervertir les deux intégrales :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}\langle \mathrm{T}_{\hat{f}}, \varphi\rangle = \int f(x)(\int e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt)dx$$

$$= \int f(x)\hat{\varphi}(t)dx$$

$$= \langle \mathrm{T}_f, \hat{\varphi} \rangle$$

Le probléme ici est que si $\varphi$ appartient à $\mathcal{D}$, il n'ya aucune raison pour que sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartinne à $\mathcal{D}$ et $\langle \mathrm{T}_f, \hat{\varphi} \rangle$ n'a en général pas de sens. Pour obtenir un définition : : : : : de la transformaée de Fourier des distributions , on doit donc se placer sur un espace plus grnd que $\mathcal{D}$ ce qui est l'objet des la suite de ce travail suivants.

### 1.4.3 Transformation de Fourier au sens des distributions

**Définition 1.4.3.** *La transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}'$ est la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$. On a la transformée de Fourier*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*s'étend naturellement à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en posant*

$$\langle \widehat{\mathrm{T}}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T}, \widehat{\varphi} \rangle \ \forall \mathrm{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \textit{et} \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*Ceci n'est autre qu'une généralisation d'une distribution tempérée associée à une fonction de la forme*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta)\widehat{\varphi}(\eta)d\eta$$

*qui découle directement du théoréme de* FUBINI *et de la définition de $\hat{f}$ et $\hat{\varphi}$ et $f$ et $\varphi$ qui sont intégrable et de carré intégrable.*

**Exemple 1.4.1.** *Transformée des distribution de* ***dirac***

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a)$$

*et par définition de la transformation dans* $\mathcal{S}$

$$\widehat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp(-2i\pi x.a)dx$$

$$= \langle \exp(-2i\pi x.a), \varphi \rangle$$

*on en déduit*

$$\mathcal{F}(\delta_a) = [\exp(-2i\pi x.a)]$$

*en particulier* $\mathcal{F}(\delta) = [(1)]$, *(la distribution associée à la fonction constante égal à 1)*

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

**Exemple 1.4.2.** *La transformée de Fourier au sans des distribution de la fonction de Heaviside*

*Puisque* $H' = \delta$, *on a* $\widehat{H'} = \widehat{\delta} = 1$. *Par ailleurs, on a* $\widehat{H'} = i\xi\widehat{H}$. *D'aprés le résultat mentionné dans la remarque, on en déduit que*

$$\widehat{H} = -iVp(\frac{1}{\xi}) + c\delta,$$

*où* $c$ *est une constante à déterminer. Pour cela, on observe que si* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est paire, sa transformée de Fourier aussi et par conséquent*

$$\langle \widehat{H}, \varphi \rangle = c\varphi(0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)d\xi$$

$$\langle H, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)d\xi$$

*Ces deux quantitésé étant par définition de* $\widehat{H}$, *on en déduit* $c = \pi$. *En combinant la définition de* T *et celle des dérivées au sens des distribuyions avec les formules (2), valables pour* *les fonction $C^\infty$ à décroissance rapide, on voit que ces deniéres s'étendent aux distribution tempérée :*

$$\partial^\alpha \mathrm{T} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha \mathrm{T}}, \quad \widehat{\partial^\alpha \mathrm{T}} = (i\xi)^\alpha \widehat{\mathrm{T}}.$$

**Exemple 1.4.3.** *La transformée de Fourier d'une gaussienne (loi normale)*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\sigma^2\pi)^2}} e^{\frac{\|x-m\|^2}{2\sigma^2}}$$

*où $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}^n$ est*

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2i\pi\xi.m} e^{-2\pi\sigma^2\|\xi\|^2}$$

*Pour le calcul, on se ramener par des changements de varible appropriés au cas $m = 0, n = 1$, puis en résolvant une équation différentielle, au calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$. En effet, il est évident que $f$ est intégrable, sa transformée de Fourier est donc définie par*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-m\|^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\xi.x} dx$$

*et le théoréme de* FUBINI *montre que*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\|x_1-m_1\|^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\xi_1.x_1} dx_1 ... \int_{\mathbb{R}} e^{-\|x_n-m_n\|^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\xi_n.x_n} dx_n$$

*Pour calculer*

$$g_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\xi.x} dx$$

*il suffit de faire le calcul pour $m = 0$*

$$g_0'(\xi) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\xi.x} dx$$

*Par intégration par partie*

$$g_0'(\xi) = -4\pi^2\sigma^2\xi \int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\xi.x} dx$$

$$= -4\pi^2\sigma^2\xi g_0(\xi)$$

*Par conséquent*

$$g_0'(\xi) + 4\pi^2\sigma^2\xi g_0(\xi) = 0$$

*En résolvant l'équation différentielle satisfaite par* $g_0$ :

$$g_0(\xi) = g_0(0)e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$$

*il reste à calculer*

$$g_0(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

*Par un changement de variable* $y^2 = -\frac{x^2}{2\sigma^2}$ *on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{y^2} dy$$

*Enfin, il y a une astuce bien connue pour calculer*

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{y^2} dy = 2\pi$$

*On remarque que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\|x\|^2} dx = I^2$$

**Exemple 1.4.4.** *La transformée de Fourier au sens de distribution de*

$$x \longmapsto e^{is\|x\|^2}$$

*Pour $s > 0$ s'indentifie avec la fonction*

$$\xi \longmapsto (\frac{\pi}{s})^{\frac{n}{2}} e^{\frac{in\pi}{4}} e^{\frac{-i\pi^2\|\xi\|^2}{s}}$$

*En effet ; on sait que la Gaussienne*

$$x \longmapsto f(x) = e^{-a\|x\|^2}$$

*qui est une fonction de $\mathcal{S}$ pour $a > 0$, admet pour transformée de Fourier*

$$\xi \longmapsto \hat{f}(\xi) = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-\pi^2\|\xi\|^2}{a}}$$

*parsuite, on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} \hat{\varphi(x)} dx = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-\pi^2\|\xi\|^2}{a}} \varphi(\xi) d\xi$$

*considérons alors les fonctions de la variable complexe $z$ définie par*

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} \hat{\varphi(x)} dx$$

$$G(z) = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-\pi^2\|\xi\|^2}{a}} \varphi(\xi) d\xi$$

*où $z^{\frac{1}{2}}$ désigne la carrée de $z$ de partie réelle positive pour $Re\ z > 0$. D'aprés la formule ci-dessus ces deux fonctions coïncident pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$. De plus, elles sont analytiques dans le demi-plan ouvert $z; Rez > 0$. Donc elles coïnicdent en fait sur tout le demi-plan. Enfin, elles admettent toutes deux un prolongement par coninuité à $i\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour $G$, on remarque que pour s>0,*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} (x + is)^{\frac{1}{2}}, \lim_{x \longrightarrow 0} (x - is)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s} e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

*D'où à la limite,*

$$F(-is) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{is\|x\|^2} \varphi(\hat{x}) dx$$

$$= G(-is) = (\frac{\pi}{s})^{\frac{n}{2}} e^{\frac{in\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-i\pi^2\|\xi\|^2}{a}} \varphi(\xi) d\xi$$

*pour s>0. Ceci étant vrai quelle que soit la fonction $f$, on en déduit le résultat annoncé.*

### 1.4.4 Transformation de Fourier du produit de convolution

On voit ainsi facilement que le lien entre produit de convolution et produit ordinaire via la transformtion de Fourier, exprimé dans la formule

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi), \tag{1.4}$$

se généralise au produit de convolution entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ :

$$\mathcal{F}(\mathrm{T} * \psi) = \mathcal{F}(\mathrm{T})\mathcal{F}(\psi).$$

En effet

$$\langle \mathcal{F}(\mathrm{T} * \psi), \varphi \rangle = \langle \mathrm{T} * \psi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathrm{T}, \check{\psi} * \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{\mathrm{T}}, \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) \rangle.$$

Or, d'aprés (1.4)et la formule d'inversion de Fouier

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = (\frac{1}{2\pi})^n \mathcal{F}(\phi)(-x),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi})\varphi = (\mathcal{F}(\check{\psi}))\check{}\varphi = \widehat{\psi}\varphi.$$

On en déduit la relation attendue : $\langle \mathcal{F}(\mathrm{T} * \psi), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(\psi)\mathcal{T}(\mathrm{T}), \varphi \rangle$.

**Remarque 1.4.3.** *En posant $\Phi = \widehat{\varphi}, \Psi = \widehat{\psi}$ et en appliquant la transformée de Fourier* *inverse à la formule (1.4) on obtient*

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi) * \mathcal{F}^{-1}(\Psi) = \mathcal{F}^{-1}(\Phi\Psi)$$

*d'où l'on déduit*

$$\mathcal{F}(\Phi\Psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(\Phi) * \mathcal{F}(\Psi) \tag{1.5}$$

*comme (1.5),cette formule s'étend au cas d'une distribution tempérée* $\mathrm{T}$ *et d'un fonction* $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\mathcal{F}(\mathrm{T}\Psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(\mathrm{T}) * \mathcal{F}(\Psi)$$

*Cependant,sachant que l'on ne pas multiplier les distributions, cette derniére formule fournit un argument contre l'extension du produit de convolution à deux distributions tempérées quelconques.*

*Il reste néanmoins possible de définir le produit de convolution d'une distribution tempérée avec une distribution à support compact. En effet, si* $\mathrm{T}$ *est une distribution à support compact et* $\mathcal{S}$ *est une distribution tempérée, on peut définir* $\check{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$\langle \check{\mathcal{S}}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{S}, \check{\varphi} \rangle,$$

*puis* $\check{\mathcal{S}} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *quel que soit* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *et enfin*

$$\langle \mathrm{T} * \mathcal{S}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T}, \check{\mathcal{S}} * \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*En particulier,on voit immédiatement que* $\mathrm{T} * \delta = \mathrm{T},$, *c'est-à-dire que la formule* $\psi * \delta = \psi$ *s'étend aux distributions(tempérées). Autrement dit,* $\delta$ *est l'élément neutre pour le produit de convolution.*

# Chapitre 2

# Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

## 2.1 Motivation

On considére le problème suivant [7] : Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}[a,b]$, chercher une fonction $u$ vérifiant : :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

une solution classique (forte) du problème (2.1) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(a,b)$ satisfaisant le problème (2.1) au sens usuel. En fait, la solution du problème peut être calculée sans difficulté. Nous allons ignorer cette étape pour donner notre motivation des espaces de Sobolev (classiques).

Multiplions la première équation de (2.1) par une fonction $\varphi \in \varphi^1(a,b)$ et faisons une intégration par partie on obtient :

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in \varphi^1(a,b), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{2.2}$$

Maintenant, il suffit de connaitre $u, u' \in L^1$. On appelle $u$ solution faible.

Etape A : la notion de solution faible doit être précise.

Etape B : Existence et unicité des solution faibles (Lax Miligram).

Etape C : Régularite de la solution.

$$u_t + Au = f \quad sur \quad \Omega$$

$$u = 0 \quad sur \quad \delta(\Omega)$$

Etape D : Toute solution de (2.2) dans $\mathcal{C}^1(a,b)$ est de classe $\mathcal{C}^2(a,b)$.

**Preuve**

$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([a,b]], \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0$

et donc

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$$

$-u'' + u = f \in \mathcal{C}$ ceci implique que $u \in \mathcal{C}^2(a,b)$

**Théorème 2.1.1.** *Si u est solution de (2.2) avec u(a)=u(b)=0 alors u est solution classique i,e solution de (2.1)*

**Remarque 2.1.1.** *Le passage de la solution faible à la solution classique s'appelle régularité.*

## 2.2 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Soit $I = (a,b)$ un intervalle ouvert et $p \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

**Définition 2.2.1.** $W^{1,p}(I)$

*L'espace de sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini comme :*

$$W^{1,p}(I) = u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) t.q : \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C^1(I)$$

*on note*

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

*pour* $u \in W^{1,p}(I)$ *nous notons* $u' = g$

**Remarque 2.2.1.** *Dans la définition* $W^{1,p}$ *nous appelons* $\varphi$ *une fonction test. Nous pourrions également bien utilises* $\mathcal{C}^\infty(I)$ *la classe de fonctions de test, car si* $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ *alors* $\rho_n \star \varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$

**Remarque 2.2.2.** *L'espace* $W^{1,p}$ *peut étre défini par l'ensemble des fonction* $u \in L^p(I)$ *avec* $u' \in L^p(I)$, *ici* $u'$ *est la dérivée de* $u$ *au sens des distribution.*

**Exemple 2.2.1.** *soit* $I = (-1, 1)$, *la fonction* $u(x) =\mid x \mid$ *est dans l'espace de sobolev* $W^{1,p}(I)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $u' = g$*,où*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & sur \quad 0 < x < 1 \\ -1 & sur \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

*Plus généralement, une fonction continue sur* $\overline{I}$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\overline{I}$ *appartient à* $W^{1,p}(I)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$. *Par ailleurs, la fonction* $g$ *ne peut être dans* $W^{1,p}(I)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

**Théorème 2.2.1.** *L'espace de sobolev* $W^{1,p}(I)$ *muni de la norme :*

$$\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \| u' \|_{L^p}$$

*est un espace de* ***Banach****.*

*on peut munir* $H^1(I)$ *de la norme équivalente* $(\| u \|_{L^p}^p + \| u' \|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v')$$

*et la norme associée :*

$$\| u \|_{H^1} = (\| u \|_{L^2}^2 + \| u' \|_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

**Proposition 2.2.1.** *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Il est reflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$, L'espace $H^1$ est un espace de Hilbert séparable.*

**Preuve**

Soit $(u_n)$ un sutie de Cauchy dans $W^{1,p}(I)$ donc $(u_n)$ et $(u'_n)$ sont des suites de cauchy dans l'espace de Banach $L^p(I)$. Donc il existe des fonctions $u$ et $g$ dans $L^p(I)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ et $u'_n \longrightarrow g$ dans $L^p(I)$. On a

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$$

et dans la limite

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$$

d'où $g = u'$ au sens des distribution, donc $u \in W^{1,p}(I)$. Par conséquent $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach

**Remarque 2.2.3.** *Soit $(u_n)$ une suite de $W^{1,p}$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p$ et $(u'_n)$ converge vers une certaine limite dans $L^p$. Alors $u \in W^{1,p}$ et $\| u_n - u \|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$.*

***Démonstration*** *Supposons que $(u'_n)$ converge vers fonction $H$ dans $L^p$. Comme on a $Hu_n \in W^{1,p}(I)$,*

$$\int_I u_n \varphi = -\int u'_n \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

*En passant à la limite, on obtient*

$$\int_I u \varphi = -\int_I H \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

*Donc $u \in W^{1,p}, u' = H$ et $\| u_n - u \|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$.*

**Théorème 2.2.2.** *Etant donnée $u \in W^{1,p}(I)$. Il existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\overline{I})$ tel que $u = \tilde{u}$ sur $I$ et*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \overline{I}$$

*Pour la preuve de ce théoréme on a besoin des lemmes suivants.*

**Lemme 2.2.1.** *Soit $f \in L^1_{loc}(I)$, si*

$$\int_I f(x)\varphi'(x)dx = 0 \;\; \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I),$$

*alors, $f = c$ dans $I$*

**Prueve**

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c(I)$ tel que $\int_I \psi = 1$. Pour toute fonction $\omega \in \mathcal{C}_c(I)$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$ tell que

$$\varphi' = \omega - (\int_I \omega)\psi \text{ est dans } \mathcal{C}_c(I)$$

En effet, la fonction $h = \omega - (\int_I \omega)\psi$ est continue et à support compact dans $I$ et $\int_I h = 0$, donc elle admet une unique primitive à support compact dans $I$.

$$\int_I f[\omega - (\int_I \omega)\psi]dx = 0 \; \forall \omega \in \mathcal{C}_c(I)$$

donc

$$\int_I [f - (\int_I f\psi)]\omega = 0 \; \forall \omega \in \mathcal{C}_c(I)$$

par la suite, on deduit que $f = \textit{constante}$ p.p dans $I$

**Lemme 2.2.2.** *Soit $g \in L^1_{loc}(I)$, et soit $y_0$ fixé dans $I$, alors la fonction*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt$$

*est dans* $\upsilon \in \mathcal{C}(I)$ *avec*

$$\int_I \upsilon\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}^1(I).$$

**Preuve**

La fonction $\upsilon$ est absolument continue. On a

$$\int_I \upsilon\varphi'(x) = \int_a^b (\int_{y_0}^x g(t)dt)\varphi dx = -\int_a^{y_0} dx(\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt + \int_a^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi(x)dt$$

par le théoréme de Fubini

$$\int_I \upsilon\varphi'(x) = -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx = -\int_I g(t)\varphi(t)dt.$$

d'où $\upsilon = g$ au sens des distributions.

**Preuve du théoréme 2.2.2** Fixons $y_0 \in I$ et posons $\overline{u}(x) = u(y_0) + \int_{y_0}^x u'(t)dt$. On sait d'aprés lemme 2.2.2 cité que $\overline{u}' = u'$ et donc

$$\int_I \overline{u}(x)\varphi'(x) = -\int_I u'(x)\varphi(x)dx = \int_I u(x)\varphi'(x)dx$$

donc

$$\int_I (\overline{u} - u)\varphi'(x)dx = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$$

D'aprés le lemme 2.2.1, $\overline{u} = u + \mathrm{C}$ p.p dans $I$ et puisque $\overline{u}(y_0) = u(y_0)$ alors $\mathrm{C} = 0$.

**Remarque 2.2.4.** *Ce lemme montre que la primitive* $\upsilon$ *d'une fonction* $g \in L^p$ *appartiennt à* $W^{1,p}$ *désque* $\upsilon \in L^p$, *ce qui est toujours le cas lorsque* $I$ *est borné. En effet, dans ce cas* $\upsilon(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt$ *est bornée, et donc* $\| \upsilon \|_{L^p} < \infty$.

**Proposition 2.2.2.** *Soit* $u \in L^p(I)$ *avec* $1 < p \leq \infty$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $u \in W^{1,p}(I)$.

*(ii) Il existe une constante* C *telle que*

$$|\int_I u\varphi' | \leq \mathrm{C} \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(I).$$

**Preuve**

Pour montrer que $(i) \Longrightarrow (ii)$ : Soit $u \in W^{1,p}$, donc $u \in L^p$. En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient directement

$$|\int_I u\varphi' | = | \int_I u'\varphi | \leq \parallel u' \parallel_{L^p(I)} \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}(I)} \leq \mathrm{C} \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}(I)} .$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ : On considére la forme linéaire $\psi : \mathrm{C}_c^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(\varphi) = \int u\varphi'.$$

comme $\mathcal{C}_c^\infty$ est un sous-espace dense de $L^{p'}$ et puisque $\psi$ est continue pour la norme de $L^{p'}$, alors une forme linéaire et continue sur $L^{p'}$. D'aprés le théoréme de représentation de Riesz [6] ,P97 et P99 , il existe $g \in L^p$ tel que

$$\langle \overline{\psi}, \varphi \rangle = \int g\varphi \quad \forall \varphi \in L^{p'}.$$

Et donc en particulier

$$\int u\varphi' = \int g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty,$$

d'où $u \in W^{1,p}$

**Remarque 2.2.5.** *le théoréme n'est pas vrai si $p = 1$, car $(ii)$ $(i)$. En effet, on a seulement l'inclusion $(L^\infty)' \subset L^1$, et on ne peut appliquer le théoréme de Riesz pour le cas $p = \infty$. Les fonctions de $W^{1,1}$ sont appelées les fonctions absolument continues, tandis que les fonctions vérifiant (ii) sont les fonctions à variations bornées (éventuellement discontinues) sur $I$.*

**Théorème 2.2.3.** *(Opérateur d'extension)*

*Soit $1 \leq p \leq \infty$. Il existe un opérateur linéaire borné opérateur $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ minéaire et continu tel que*

1. $\mathbf{P}u_{|I} = u$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(I)$
2. $\| \mathbf{P}u \|_{L^P(\mathbb{R})} \leq \mathrm{C} \| u \|_{L^p(I)}$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(I)$
3. $\| \mathbf{P}u \|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq \mathrm{C} \| u \|_{W^{1,p}(I)}$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(I)$

**Preuve**

En commençant par le cas $I = ]0, +\infty[$ nous montrons cette extension la fonction

$$(Pu)(x) = u^{\star}(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad x \geq 0, \\ u(-x) & si \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

fonctionne clairement, nous avons

$$\| u^{\star} \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2 \| u \|_{L^p(I)} .$$

Avec

$$u(x) = \begin{cases} u'(x) & si \quad x > 0, \\ -u'(-x) & si \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

nous vérifions facilement que $\upsilon \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$u^*(x) - u^*(0) = \int_0^x \upsilon(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suit que $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ pour la Remarque 2.2.4 et $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}$. Considérons maintenant le cas d'un intervalle borné $I$ ; sans perte de généralité, nous pouvons prendre

$I = ]0.1[$. Soit une fonction $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \eta \leq 1$, tel que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x0 < 1/4, \\ 0 \quad si \quad x > 3/4, \end{cases} \tag{2.5}$$

étant donné une fonction $f$ sur $]0.1[$ réglé

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \quad si \quad 0 < x0 < 1, \\ 0 \quad si \quad x > 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2.3.** *Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Donc*

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \quad et \quad (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\widetilde{u'}$$

**Preuve**

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1((0,\infty))$; donc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' &= \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\ &= -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi \quad since \quad \eta\varphi \in \mathcal{C}_c^1((0,1))) \\ &= -\int_0^\infty (\widetilde{u'}\eta + \tilde{u}|\eta') \end{aligned}$$

### 2.2.1 Théorémes de densité et d'injection

**Théorème 2.2.4.** *(Densité)*

*Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n)$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tell que $u_{n|I} \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$.*

**Remarque 2.2.6.** *En général, il n'y a pas de suite $(u_n)$ dans $\mathcal{C}^\infty(I)$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$ voir la propsition 2.2.2 c'est en contraste avec $L^p$ les espaces rappellent que pour chaque fonction $u \in L^p(I)$ il y a une suite $(u_n)$ dans $\mathcal{C}^\infty(I)$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(I)$*

**Lemme 2.2.4.** *(a) : Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $\upsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$\rho \star \upsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad et \quad (\rho \star \upsilon)' = \rho * \upsilon'.$$

**Preuve**

Supposons d'abord que $\rho$ est à support compact. Alors $\rho \star \upsilon \in L^p$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$.

$$\int (\rho \star \upsilon)\varphi' = \int \upsilon(\check{\rho} \star \varphi') = \int \upsilon(\check{\rho} \star \varphi)' = -\int \varphi'(\check{\rho} \star \varphi) = -\int (\check{\rho} \star \upsilon')\varphi,$$

D'où

$$\rho \star \upsilon \in W^{1,p} \quad et \quad (\rho \star \upsilon)' = \rho \star \upsilon'.$$

Supposons maintenant que $\rho$ n'est pas à support compact. On introduit alors une suit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\rho_n \longrightarrow \rho$ dans $L^1$. D'aprés ce qui précéde, on a

$$\rho_n \star \upsilon \in W^{1,p} \quad et \quad (\rho_n \star \upsilon)' = \rho_n \star \upsilon'$$

Or $\rho_n \star \upsilon \longrightarrow \rho \star \upsilon$ dans $L^p$ et $\rho_n \star \upsilon' \longrightarrow \rho \star \upsilon'$ dans $L^p$.

$$\rho \star \upsilon \in W^{1,p} \quad etque \quad (\rho \star \upsilon)' = \rho \star \upsilon'.$$

(b) : On fixe ensuite une fonction $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad |\, x \,| \leq 1, \\ 0 & \text{sur} \quad |\, x \,| \geq 2 \end{cases} \tag{2.7}$$

On définit la suite

$$\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n}) \quad pour \quad n = 1, 2, ...$$

Soit $f \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$. puisque $\zeta_n f \longrightarrow f$ dans $\mathbb{R}$, on a le théoréme de la convergence dominée, $\zeta_n f \longrightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

(c) : Choisissons une suite régularisante $(\rho_n)$. Montrons que la suite $u_n = \zeta_n(\rho_n \star u)$ converge vers $u$ dans $W^{1,p}$. Or $\| u_n - u \|_{L^p} \longrightarrow 0$. En effet,on écrit

$$u_n - u = \zeta[(\rho_n \star u) - u] + [\zeta_n u - u]$$

et donc

$$\| u_n - u \|_{L^p} \leq \| (\rho_n \star u) - u \|_{L^p} + \| \zeta_n u - u \|_{L^p} \longrightarrow 0$$

Ensuite, grâce au lemme 2.2.4, on a

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n \star u) + \zeta(\rho_n - u').$$

Par conséquent

$$\| u_n' - u' \|_{L^p} \leq \| \zeta_n'(\rho_n \star u) \|_{L^p} + \| \zeta(\rho_n \star u') - u' \|_{L^p} \leq \frac{\mathrm{C}}{n} \| u \|_{L^p} + \| (\rho_n \star u') - u' \|_{L^p} + \| \zeta u' - u' \|_{L^p} \longrightarrow 0,$$

où $\mathrm{C} = \| \zeta' \|_{L^\infty}$ .

**Théorème 2.2.5.** ***(Théoréme d'injection)*** *Il existe une constante* C *(dépendant seulement de $| I | \leq \infty$) telle que*

$$\| u \|_{L^\infty(I)} \leq \mathrm{C} \| u \|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty, \tag{2.8}$$

*Autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty$ avec l'injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$. De plus, lorsque $I$ est borné on a*

1. *l'injection $W^{1,p}(I) \subset \mathcal{C}(I)$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$*
2. *$W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$*

**Preuve**

Pour $I = \mathbb{R}$; le cas général s'en déduit grâce au théoréme de prolongement „„„.

Soit $\upsilon \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R};)$ si $1 \leq p < \infty$ on pose $\mathrm{G}(s) =\mid s \mid^{p-1} s$. La fonction $\omega = \mathrm{G}(\upsilon)$ appartient à $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et

$$\omega' = \mathrm{G}'(\upsilon)\upsilon' = \mathrm{p} \mid \upsilon \mid^{\mathrm{p}-1} \upsilon'.$$

Puisque $[\mathrm{G}(\upsilon(x))]' = \mathrm{G}'(\upsilon(x))\upsilon'(x)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{G}(\upsilon(x)) = \int_{-\infty}^{x} p \mid \upsilon(t) \mid^{p-1} \upsilon'(t)dt,$$

car $\lim_{y \longrightarrow \infty} \mathrm{G}(\upsilon(y)) = 0$ puisque $\mathrm{G}(\upsilon) \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Estimons maintenant $\mid \upsilon(x) \mid^p$ . Par l'inégalité de Hölder on a

$$\mid \upsilon(x) \mid^p=\mid \mathrm{G}(\upsilon(x)) \mid\leq \int_{\mathbb{R}} p \mid \upsilon(t) \mid^{p-1}\mid \upsilon'(t) \mid dt \leq p \parallel \upsilon^{p-1} \parallel_{L^q}\parallel \upsilon' \parallel_{L^p} .$$

En se rappelant que $q = \frac{p}{p-1}$, on obtient

$$\mid \upsilon(x) \mid^p\leq p \parallel \upsilon^{p-1} \parallel_{L^q}\parallel \upsilon' \parallel_{L^p} .$$

On utilise ensuite l'intégralité de Young avec $p$ et $q$ pour obtenir

$$p \parallel \upsilon \parallel_{L^{p-1}}^p\parallel \upsilon' \parallel_{L^{p-1}}\leq p[\frac{p-1}{p} \parallel \upsilon \parallel_{L^p}^p +\frac{1}{p} \parallel \upsilon' \parallel_{L^p}^p],$$

En utilisant l'inégalité $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \leq\mid a \mid + \mid b \mid$ et $p^{\frac{1}{p}} \leq e^{\frac{1}{e}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mid \upsilon(x) \mid &\leq [(p-1) \parallel \upsilon \parallel_{L^p}^p + \parallel \upsilon' \parallel]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq [p \parallel \upsilon \parallel_{L^p}^p + \parallel \upsilon' \parallel_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq p^{\frac{1}{p}} \parallel \upsilon \parallel_{W^{1,p}} \\
&\leq \mathrm{C} \parallel \upsilon \parallel_{W^{1,p}} .
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtient

$$\| v \|_{L^\infty} \leq \mathrm{C} \| v \|_{W^{1,p}} \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}), \tag{2.9}$$

où $\mathrm{C} = e^{\frac{1}{e}}$ est un constante universelle.

La démonstration se termine en raisonnant par densité. On prend $u \in W^{1,p}$, par le théoréme de densité, il existe une suite $(u_n) \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. En appliquant (2.5), on remarque que $(u_n)$ est de Cauchy dans $L^\infty$. Donc $u_n \longrightarrow u$ dans $L^\infty$ et on obtient notre inégalité cherchée.

Nous démontrons maintenant la seconde partie. Pour montrer 1. prenons F la boule unité de $W^{1,p}(I)$ avec $1 < p \leq \infty$. Pour $u \in \mathrm{F}$ et grace à l'inégalité de Holder on obtient

$$| u(x) - u(y) | = | \int_y^x u'(t)dt | \leq \| u' \|_{L^p} | x - y |^{\frac{1}{q}} \leq | x - y |^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in I$$

On en déduit alors du [théoréme d'Ascoli [6] P111] que F est relativement compact dans $\mathcal{C}(\overline{I})$. La seconde partie se base sur un théoréme assez techniqiue dont nous ne parlerons pas ici. Nous admettrons donc la seconde partie sens démonstration. Pour les intéressésn

**Remarque 2.2.7.** *Soit $I$ un itervalle borné, soit $1 \leq p \leq \infty$, et soit $1 \leq q \leq \infty$. pour théoréme [3.2] on peut facilement constater que la norme*

$$\| u \| = \| u' \|_p + \| u \|_q$$

*est équivalent à la norme de $W^{1,p}(I)$*

**Remarque 2.2.8.** *Soit $I$ un intervalle non borné $u \in W^{1,p}(I)$, et $u \in L^q(I)$ telle que $q \in [p, \infty]$, ie*

$$\int_I | u |^q \leq \| u \|_\infty^{q-p} \| u \|_p^p .$$

*Mais en général $u \notin L^q(I)$ par $q \in [1, p]$*

**Corollaire 2.2.1.** *On suppose que $I$ n'est pas borné et on prend $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$.*

*Alors on a*

$$\lim_{x\in I_{|x|\longrightarrow\infty}} u(x) = 0. \tag{2.10}$$

***Démonstration.*** *Par le théorème de densité 2.2.4, il existe un suite $(u_n)_{n>1} \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ telle que $u_{n|I} \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$. On déduit de (2.4) que $\| u_n - u \|_{L^\infty(I)} \longrightarrow 0$ et donc on obtient (2.6). En effet si $\epsilon > 0$ est donné, on choisit $n$ assez pour que $\| u_n - u \|_{L^\infty(I)} < \epsilon$; or pour $| x |$ assez grand pn a $u_n(x) = 0$ (puisque $u_n \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$) et donc $| u(x) | < \epsilon$.)*

## 2.3 Espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$

Du fait que $\mathrm{C}_c$ n'est pas dense dans $W^{1,p}$, on a

**Définition 2.3.1.** *Soit $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermture de $\mathcal{C}_c^1$ dans $W^{1,p}(I)$, c'est-à-dire que $W^{1,p}(I) = \overline{\mathcal{C}_c^1}$. Si $p = 2$, on ote $W_0^{1,p}(I) = H_0^1(I)$. On alors propriétés suivantes :*

1. *L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$; l'espace $H_0^1$ est muni du produit scalaire induit par $H^1$.*
2. *L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace $H_0^1$ est un espace de Hilbert séparable.*

**Remarque 2.3.1.** *On sait par le théoréme de densité 2.2.4 que $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, et par conséquent $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

**Remarque 2.3.2.**

*(i) $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ et dense dans $W^{1,p}(I)$.*

*(ii) Si $u \in W^{1,p}(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$, alors $u \in W^{1,p}(I)$.*

**Théorème 2.3.1.** *[7] Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial I$.*

**Remarque 2.3.3.** *Si $u \in W_0^{1,p}(I)$, il existe une suite $(u_n)$ de $\mathcal{C}_c^1(I)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $u \in W^{1,p}(I)$. Donc, par (2.4) $u_n \longrightarrow u$ uniformément sur $\overline{I}$ et par conséquent $u = 0$ sur $\partial I$.*

**Preuve**

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ tel que $u = 0$ sur $\partial I$. On fixe une fonction $\mathrm{G} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad | t | \leq 1, \\ t & \text{sur} \quad | t | \geq 2 \end{cases} \tag{2.11}$$

et

$$| \mathrm{G}(t) | \leq t \quad pour \quad tout \quad t \in \mathbb{R}.$$

On pose $u_n = \frac{1}{n}\mathrm{G}(nu)$ de sorte que $u_n \in W^{1,p}(I)$. On a d'autre part

$$suppu_n \subset x \in I; | u(x) | \geq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $suppu_n$ est un compact inclus dans $I$, car $u = 0$ sur $\partial I$ et $u(x) \longrightarrow 0$ quand $| x | \longrightarrow \infty, \quad x \in I$. Donc $\in u_n \in W^{1,p}(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$. Par la remarque ci-dessus $u_n \in W_0^{1,p}$. Finalement, on vérifie à l'aide du théréme de la convergence dominée que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}$.

**Remarque 2.3.4.** *Voici deux autres carctérisations des fonctions de $W_0^{1,p}$ :*

1. *Soit $1 \leq p < \infty$ et $u \in L^P(I)$; on définit $\overline{u}$ par*

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in I \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases} \tag{2.12}$$

*Alors $u \in W^{1,p}(I)$ si et seulement si $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

2. *Soit $1 < p < \infty$ et $u \in L^p(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si seulement s'il existe une constante $\mathcal{C}$ telle que*

$$| \int_I u\varphi' | \leq \mathcal{C} \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}).$$

**Proposition 2.3.1.** ***Inégalité de Poincaré***

*On suppose que $I$ est borné. Alors il existe une constante $\mathcal{C}$ dépendante de $\mid I \mid < \infty$ telle que*

$$\parallel u \parallel_{W^{1,p}} \leq \mathcal{C} \parallel u' \parallel_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \tag{2.13}$$

**Preuve**

$$\mid u(x) \mid = \mid u(x) - u(a) \mid = \mid \int_a^x u'(t)dt \mid \leq \parallel u \parallel_{L^1}$$

Donc $\parallel u \parallel_{L^\infty} \leq \mathcal{C} \parallel u' \parallel_{L^1}$ . Donc plus, grâce à l'inégalité de Hölder

## 2.4 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Dans cette section, on introduit les espaces de Sobolev d'ordre entier et nous donnons leurs propriétés élémentaires. Ces espaces sont définis sur un domaine quelconque $I \subset \mathbb{R}^n$ et qui constituent des espaces vectoriels dans les espaces $\mathrm{L}^p(I)$. On définit une fonctionnelle $\parallel . \parallel_{m,p}$ où $m$ est un entier positif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

$$\parallel u \|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p} \qquad \text{si } 1 \leq p < \infty \tag{2.14}$$

et pour $p = \infty$ on pose

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \qquad \text{si } 1 \leq p < \infty \tag{2.15}$$

il est clair que les équations (2.14) et (2.15) définissent une norme sur tout espace vectoriel de fonctions sur lequel elles sont de valeurs finies et qui fournit des fonctions égales presque partout dans $I$. On donne trois types d'espaces correspondant aux valeurs de $m$ et $p$.

- $H^{m,p}(I) \equiv$ est la completion de $\{u \in \mathrm{C}^\infty(I) : \parallel u \parallel_{m,p} (I) < \infty\}$ relativement à la norme $\parallel . \parallel_{m,p}$

- $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)\,\textbf{pour}\, 0 \leq |\alpha| \leq m,$ où $\mathcal{D}^\alpha u$ est le faible (ou distribution)$\}$
- $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ la fermeture de $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

**Définition 2.4.1.** *[22] Soit $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$. On définit $W^{m,p}(I)$ par récurence :*

$$W^{m,p}(I) = u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I).$$

*On pose*

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

*Une fonction $u$ appartient à $W^{m,p}(I)$ si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m$ appartiement aussi. plus précisément, $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'il exist $m$ fonctions $g_1, ...., g_m \in L^p(I)$ telles que*

$$\int u\mathrm{D}^j\varphi = (-1)^j \int g_j\varphi \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, ..., m.$$

*où $\mathcal{D}^j\varphi$ dénote la dérivée à l'ordre $j$ de $\varphi$. On peut considérer $u' = g_1, (u')' = g_2...$ juisq'à l'rdre $m$, que l'on note aussi $\mathrm{D}u, \mathrm{D}^2u, ....D^m u$. On munit l'espace $W^{m,p}$ de la norme*

$$\| u \|_{W^{m,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \| \mathrm{D}^\alpha u \|_{L^p}$$

*et $H^m$ du produit scalaire*

$$(u, \upsilon)_{H^m} = (u, \upsilon)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (\mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha \upsilon)_{L^2}.$$

**Théorème 2.4.1.** *[7] $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable $1 \leq p < \infty$, est réflexif et uniformément convexe si $1 < p < \infty$. En particulier, $W^{m,2}(\Omega)$ est donc séparable Hilbert space avec produit intérieur*

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v),$$

*où $(u, v) = \int_\Omega u(x)v(\bar{x})dx$ est le produit intérieur de $L^2(\Omega)$.*

**Remarque 2.4.1.** *Les notions démontrées précédement pour $W^{1,p}(I)$ sont aussi valables pour $W^{m,p}(I)$. En particulier,$W^{m,p}(I) \subset \mathcal{C}^{m-1}(I)$ avec injection continue.*

**Dualité, les espaces** $W^{-m,p'}(\Omega)$

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

Pour $p$ donné, $p'$ désigne toujours l'exposant conjugué :

$$p' = \begin{cases} \infty & \text{is} \quad p = 1, \\ p/(p-1) & \text{is} \quad 1 < p < \infty, \\ 1 & \text{is} \quad p = \infty. \end{cases}$$

**Lemme 2.4.1.** *Soit $1 \leq p < \infty$ à chaque $L \in (L^p_n)'$ correspond unique $v \in L^{p'}_n$ tel que pour chaque $u \in L^p_n$*

$$L(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, v_j\rangle.$$

*En outre*

$$\| L; (L^p_n)' \| = \| v; (L^{p'}_n) \|$$

*et $(L^p_n)' \simeq L^{p'}_n$.*

## 2.5 Le Laplacien

**Définition 2.5.1.** *Symbolisé par la lettre grecque $\Delta$, il correspond donc à l'opérateur $\nabla$ appliqué deux fois à la fonction considérée. Il s'applique le plus souvent aux $\langle . \rangle$, et son résultat est alors également un champ scalaire. La première application de nabla porte sur un scalaire : il s'agit d'un vecteur gradient, et le résultat est un vecteur*
*La deuxième opération porte alors sur un vecteur. Il s'agit alors d'une divergence, et le résultat*

*est un scalaire*

$$laplacien(f) = div(gr\vec{a}d(f)) = \Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

*d'où les identités mentionnées en introduction.*

**Proposition 2.5.1.**

- *L'opérateur laplacien est linéaire :*

$$\Delta(\lambda f + g) = \lambda \Delta f + \Delta g$$

- *L'opérateur laplacien vérifie la règle de Leibnitz pour en tant qu'un opérateur différentiel d'ordre deux :*

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2.(\nabla f).(\nabla g) + f(\Delta g)$$

- *L'opérateur laplacien est un opérateur négatif, au sens où, pour toute fonction lisse ? à support compact, on a :*

$$\int \phi \Delta \phi = - \int \parallel grad\phi \parallel^2 \leq 0.$$

*Cette égalité se démontre en utilisant la relation $\Delta = \partial grad$, en intégrant par parties, et en utilisant une version du théorème de Stokes, qui se transpose à l'intégration par parties dans le cas unidimensionnel.*

- *L'opérateur laplacien est indépendant du choix de la base orthonormale décrivant les variables spatiales.*

**Exemple 2.5.1.** ***Equation de Chaleur*** *[6]*

*Considérons le problème suivant : Pour $\Omega \in \mathbb{R}^n$ de frontiére $\Gamma$, trouver une fonction $u(x,t)$ : $\bar{\Omega} \times [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad dans \quad Q, \tag{2.16}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Sigma, \tag{2.17}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad sur \quad \Omega \tag{2.18}$$

*où* $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ *et* $\Sigma = \Gamma \times (0, +\infty)$

**Théorème 2.5.1.** *[6] Soit* $u_0 \in L^2(\Omega)$*. Alors, il existe une fonction unique* $u(x,t)$ *satisfaisant (2.16),(2.17), et (2.18)*

$$u \in \mathrm{C}([0, +\infty[; L^2(\Omega)) \cap \mathrm{C}([0, +\infty[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \tag{2.19}$$

$$u \in \mathrm{C}([0, +\infty[; L^2(\Omega)) \tag{2.20}$$

*en outre* $u \in \mathrm{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon, \infty[)\ \forall \varepsilon > 0$*. finalement* $u \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ *et*

$$\frac{1}{2} \mid u(T) \mid^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \mid u \mid^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2} \mid u_0 \mid^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.21}$$

**Théorème 2.5.2.** *(a) Si* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *alors la solution (2.16),(2.17), (2.18)*

$$u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(]0, \infty[; H^2(\Omega))$$

*et* $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$*. on a*

$$\int_0^T \mid \frac{\partial u}{\partial t}(t) \mid^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2} \mid \nabla u(T) \mid^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \mid \nabla u_0 \mid^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.22}$$

*(b) Si* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*,*

$$u \in \mathrm{C}([0, \infty[; H^2(\Omega))) \cap L^2(0, \infty; H^3(\Omega))$$

*et* $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$

*(c) Si* $u_0 \in H^k(\Omega)$ $\forall k$ *et satisfait aux conditions dites de compatibilité*

$$u_0 = \Delta u_0 = ... = \Delta^j u_0 = ... = 0 \text{ } sur \text{ } \Gamma \tag{2.23}$$

*pour chaque entier* $j$, *alors* $u \in \mathrm{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty[)$.

# Chapitre 3

# Espaces de Sobolev Fractionnaires

## Introduction

Dans cette section on s'intéresse à donner la définition des espaces $W^{s,p}(\Omega)$, où $0 < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, Nous prouvons les injections continue et compact, et des autres résultats de la régularité.

Aprés avoir démontré ces propriétés dans le cas $0 < s < 1$, nous les étendons aux espaces $W^{s,p}$ pour $s \in \mathbb{R}$, et on conclute ce chapitre par le cas particulier où $p \in \mathbb{N}$.

## 3.1 $W^{s,p}(\Omega)$ pour $(\Omega = \mathbb{R}^n)$ $(0 < s < 1\,,\, p \in \mathbb{N})$

**Théorème 3.1.1.** *[7] Soit $1 \leq p < n$, Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n)$, où $p^*$ est donné par*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

*et il existe une constante $\mathrm{C} = \mathrm{C}(p,n)$ tel que*

$$\| u \|_{p^*} \leq \mathrm{C} \| \nabla u \|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

**Remarque 3.1.1.** *La valeur $p^*$ peut être obtenue par un argument d'échelle, coutant aux physiciens, donnent par fois des informations utiles avec un minimum d'effort. Supposons qu'il existe des constantes* C *et $q(1 \leq q \leq \infty)$ tel que*

$$\| u \|_q \leq \mathrm{C} \| \nabla u \|_p \quad \forall u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

*Alors forcément $q = p^*$. Pour voir ce, correctif n'importe quelle fonction $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et brancher $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ on obtient.*

$$\| u \|_q \leq \mathrm{C}\lambda^{(1+\frac{n}{q}+\frac{n}{p})} \| \nabla u \|_p \quad \forall \lambda > 0,$$

*ce qui implique $1 + \frac{n}{q} + \frac{n}{p} = 0$ i.e ; $q = p^*$*

**Lemme 3.1.1.** *Soit $n \geq 2$ et soit $f_1, f_2, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leq i \leq n$ tel que*

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

*i.e $x_i$ omis de la liste. Alors la fonction*

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) ... f_n(\tilde{x}_n), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

*appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \| f_i \|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

## 3.2 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

La section est consacrée à la définition des espaces de sobolev fractionnaires. Au chapitre 1 nous avons rappelé les notions essentielles d'analyse harmonique dont on aura besoin dans la suite, aucun autre pré-requis n'est exigé. Considérons d'abord l'espace Schwartz $\mathcal{S}$ fonctions à à décroissance rapide $C^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$. La topologie de cet espace est générée par des semi-normes

$$pv(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+ \mid x \mid^N) \sum_{|\alpha|\leq N} \mid D^\alpha\varphi(x) \mid, \quad N = 0, 1, 2, ...,$$

où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les distributions tempérées qui est le dual topologique de $\mathcal{S}((R)^n)$. Comme d'habitude pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous définissons ;

$$\mathfrak{F}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}\varphi(x)dx$$

La transformée de Fourier de $\varphi$ et nous rappelons que l'on peut prolonger $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

**Définition 3.2.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $s \in ]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, on definit l'espace de sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad tq \ \frac{\mid u(x) - u(y) \mid}{\mid x - y \mid^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega)\}$$

*C'est un espace de Banach intermediaire entre $L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ , muni de la norme :*

$$\parallel u \parallel_{W^{s,p}(\Omega)} := (\parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{s,p})^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

*avec :*

$$[u]_{s,p} = (\int_\Omega \int_\Omega \frac{\mid u(x) - u(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}})^{\frac{1}{p}} \tag{3.2}$$

*la quantité $[u]_{s,p}$ est appelée (semi) norme de Gagliardo.*

**Remarque 3.2.1.** *Dans la littérature, le espaces de sobolev fractionnaires sont connus sous le nom des espaces de Aronzajin, Gagliardo ou les espaces de Slobodekij.*

**Proposition 3.2.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $s \in ]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, nous avons alors :*

- *$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace séparable, et de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*

- $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace réflexif pour tout* $1 < p < +\infty$
- $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace uniformément convexe pour tout* $1 < p < +\infty$

**Preuve**

Soit $(u_n)_n$ suite de cauchy pour la norme $\| \|_{s,p}$ alors $(u_n)_n$ est de cauchy dans $L^p(\Omega)$, donc $(u_n)$ converge vers $u$ dans $L^p(\Omega)$. On suppose $(v_n)_n$ :

$$v_n(x,y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{\mid x - y \mid^{s+\frac{n}{p}}}$$

qui est de cauchy dans $L^p(\Omega)$, donc converge dans $L^p(\Omega)$. Soit $(u_{\sigma(n)})_n$ une sous suite de $(u_n)_n$, et par le théoréme de convergence dominée converge p.p vers $u(x)$ et par suit $(u_{\sigma(n)})_n$ converge p.p tout $(x;y)$ vers :

$$v(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{\mid x - y \mid^{s+\frac{n}{p}}}$$

On applique le lemme de Fatou, on obtient :

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{\mid u(x) - u(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} dxdy \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\mid u_{\sigma(n)}(x) - u_{\sigma(n)}(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} dxdy$$

Alors $u \in W^{s,p}(\Omega)$ (car $u_{\sigma(n)}(x) \in W^{s,p}(\Omega)$. De plus d'après le théoréme de convergence dominée nous avons :

$$\frac{\mid u_n(x) - u_n(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\mid u(x) - u(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} \text{ dans } L^p(\Omega)$$

d'où $u_n \to u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$. Remarquons que dans le cas entier, l'espace $W^{s,p}$ s'injecte continument $W^{s',p}$, comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 3.2.2.** *[3] Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s \leqslant s' < 1$, alors nous avons :*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \| u \|_{W^{s',p}(\Omega)}$$

*avec $C = C(n, s, p) \geq 1$. En particulier :*$W^{s,p}(\Omega) \subseteq W^{s',p}(\Omega)$

**Preuve** Premiérement nous avons :

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geqslant 1]} \frac{| u(x) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy \leqslant \int_\Omega (\int_{\Omega\cap[|z|\geqslant 1]} \frac{1}{| z |^{n+sp}} dz) \mid u(x) |^p dx$$

$$\leqslant C(n, s, p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)}$$

où nous avons utilisé le fait que $\frac{1}{|z|^{n+sp}}$ est intégrable puisque $n + sp > n$.

Alors :

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geqslant 1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy \leqslant 2^{p-1} \int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geqslant 1]} \frac{| u(x) |^p + | u(y) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy$$

$$\leqslant 2^p C(n, s, p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)}$$

D'autre part

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geqslant 1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy \leqslant \int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geqslant 1]} \frac{| u(x) |^p + | u(y) |^p}{| x-y |^{n+s'p}} dxdy$$

car n+sp<n+s'p et $| x-y |< 1$, (4,1) et (4,2) impliquent

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy \leqslant 2^p C(n, s, p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x-y |^{n+s'p}} dxdy$$

Alors :

$$\parallel u \parallel^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant (2^p C(n, s, p) + 1) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x-y |^{n+s'p}} dxdy$$

$$\leqslant C(n, s, p) \parallel u \parallel^p_{W^{s',p}(\Omega)}$$

ce qui donne l'estimation souhaitée

Nous allons montrer dans la proposition (3.2.3) que le résultat de la proposition (3.2.2) tient aussi dans le cas $s' = 1$.

D'abord pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in ]0,1]$, on dit que $\Omega$ est de classe $C^{k,\alpha}$, si $\exists M > 0$ telle que pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe une boule $B = B_r(x), r > 0$ et un isomorphisme $T : Q \longrightarrow B$ telle que :

$$T \in C^{k,\alpha}(\overline{Q}), T^{-1} \in C^{k,\alpha}(\overline{B}), T(Q_+) = B \cap \Omega, T(Q_0) = B \cap \partial\Omega et :$$

$$\| T \|_{C^{k,\alpha}(\overline{Q})} + \| T^{-1} \|_{C^{k,\alpha}(\overline{B})} \leqslant M$$

avec :

$$Q := \{x = (x', x) \in \mathbb{R}^{n^{-1}} \times \mathbb{R} :| x' |< 1et \mid x \mid_n < 1\}$$

$$Q_+ := \{x = (x', x) \in \mathbb{R}^{n^{-1}} \times \mathbb{R} :| x' |< 1et0 < x_n < 1\}$$

$$Q_0 := \{x \in Q : x_n = 0\}$$

Nous avons le résultat suivant

**Proposition 3.2.3.** *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $s \in ]0,1[$, soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$, de frontière bornée. Alors :*

$$\| u \|_{W^{s,p}} \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}} \; \forall u \in W^{s,p}(\Omega)$$

*où $C = C(n, s, p) \geqslant 1$, en particulier :$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$*

**Preuve**

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, gràce aux hypothéses sur le domaine $\Omega$, , nous pouvons prolonger $u$ vers une fonction $\widetilde{u} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\| \widetilde{u} \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| \widetilde{u} \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ . On utilise le changement de variable $z = y - x$ et l'inequalité de Holder, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|<1]} \tfrac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy &\leqslant \int_\Omega \int_{B_1} \tfrac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{n+sp}} dzdx \\
&\leqslant \int_\Omega \int_{B_1} (\int_0^1 \tfrac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{\frac{n}{p}+s-1}} dt)^p dzdx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \int_0^1 \tfrac{|\nabla \widetilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+p(s-1)}} dtdzdx \\
&\leqslant \int_{B_1} \int_0^1 \tfrac{\|\nabla \widetilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|z|^{n+p(s-1)}} dtdz \\
&\leqslant C_1(n,s,p) \parallel \nabla \widetilde{u} \parallel^p_{L^p} (\mathbb{R}^n) \\
&\leqslant C_2(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Alors nous avons :

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|<1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+sp}} dxdy \leqslant C(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} .$$

# Espaces de Sobolev fractionnaires, s>1

## 3.2.1 Espace $W^{s,p}$, s>1

**Définition 3.2.2.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Soit $s \in \mathbb{R}\ \mathbb{N}$ avec s>1 et $p \in [1, +\infty[$. L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est définie par :*

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \mathrm{D}^\alpha u \in W^{\sigma,p} \forall \mid \alpha \mid = m\}$$

$*$ *C'est un espace vectoriel, on le muni de la norme :*

$$\parallel u \parallel_{W^{s,p}(\Omega)} = (\parallel u \parallel^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \parallel \mathrm{D}^\alpha u \parallel^P_{W^{\sigma,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

$*$ *Si $s = m$, alors l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est coincide avec l'espace de Sobolev*

$*$ *$(W^{s,p}(\Omega), \parallel . \parallel_{W^{s,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach.*

**Proposition 3.2.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$, et soit $p \in [1, +\infty[$ et $s', s > 1$. Alors si $s' > s$ :*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$$

**Preuve**

Nous avous $s = k + \sigma$ et $s' = k' + \sigma'$ avec $k, k' \in ]0, 1[$.

Alors nous avous deux cas :

• Si $k = k'$ alors $\sigma \leq \sigma'$; donc d'aprés la prpostion (3,1) :

$W^{\sigma',p}(\Omega) \subseteq W^{\sigma',p}(\Omega)$ et par conséquent $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s',p}(\Omega)$, de plus $\forall u \in W^{s',p}(\Omega)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \| u \|^p_{W^{s',p}(\Omega)} = \| u \|^p_{W^{k,p}(\Omega)} & + \textstyle\sum_{|\alpha|=k} \| \mathcal{D}^\alpha u \|^p_{s-k,p(\Omega)} \\ & \leqslant \| u \|^p_{W^{k',p}(\Omega)} + \mathrm{C} \textstyle\sum_{|\alpha|=k} \| \mathcal{D}^\alpha u \|^p_{s'-k',p(\Omega)} \\ & = \mathrm{C} \| u \|^p_{s',p} \end{aligned}$$

avec $C = C(n, s, p) \geqslant 1$

• Si $k' \geqslant k + 1$, alors nous avous :

$$W^{k'+\sigma',p} \subseteq W^{k',p} \subseteq W^{k+1,p} \subseteq W^{k+\sigma,p}$$

D'autre part pour $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ on a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tel que $D^\alpha u \in W^{1,p}(\Omega) \forall \mid \alpha \mid = k$ alors d'aprés le proposition (3.1.3) nous avons :

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \quad et \quad D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$$

ce qui implique que $u \in W^{k+\sigma,p}(\Omega)$ c-à-d : $W^{k+1,p}(\Omega) \subseteq W^{k+\sigma,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$, et par conséquent :

$$W^{s',p} \subseteq W^{s,p}$$

D'autre part pour $u \in W^{s',p}(\Omega)$ alors d'aprés la proposition (3.1.2) nous avons :

$$\begin{aligned}\| u \|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \| u \|^p_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha=k|} \| D^\alpha u \|^p_{W^{s-k,p}(\Omega)} &\leqslant \| u \|^p_{W^{k',p}(\Omega} + \sum_{|\alpha=k'|} \| D^\alpha u \|^p_{W^{s-k,p}(\Omega)} \\ &\leqslant \| u \|^p_{W^{k',p}(\Omega)} + C \sum_{|\alpha=k'|} \| D^\alpha u \|^p_{W^{s'-k',p}(\Omega)} \\ &= C \| u \|^p_{W^{k',p}(\Omega)}\end{aligned}$$

avec $C = C(n, s, p) \geqslant 1$

**Théorème 3.2.1.** *([[17], Th 7.38]) Pour s>1, l'espace* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

∗ *Pour* $\Omega$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $s > 1$ *on pose :* $W^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ *dans* $W^{s,p}(\Omega)$.

∗ *Nous avons d'aprés théoréme* $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

∗ *Toute les résultats précédent sont valable dans l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *avec s>0*

## 3.3 Laplacien fractionnaire

Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur le cas $p = 2$, un cas assez important puisque les espaces fractionnaires de Sobolev $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ et $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ se révèlent être des espaces Hilbert. Ils sont généralement désignés par $H^s(\mathbb{R}^n)$ et $H_0^s(\mathbb{R}^n)$, respectivement plus ils sont strictement liés à l'opérateur laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$, où pour tout $u \in \mathcal{L}$ et $s \in (0.1)$, $(-\Delta)^s$ est défini comme

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{| x - y |^{n+2s}} dy = C(n, s) \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathcal{L}\mathbb{B}_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{| x - y |^{n+2s}} dy. \quad (3.3)$$

ici P.V. est une abréviation couramment utilisée pour "dans le sens de la valeur principale" (tel que défini par cette dernière équation) et $C(n, s)$ est une constante dimensionnelle qui dépend $n$ et $s$, précisément donné par

$$C(n, s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{| \zeta |^{n+2s}} d\zeta\right)^{-1} \quad (3.4)$$

Le choix de cette constante est motivé par propostion (3.3)

**Lemme 3.3.1.** *Soit* $s \in (0.1)$ *et* $(\Delta)^{-s}$ *l'opérateur Laplacien fractionnaire défini par (3.1). Alors pour tout* $u \in \mathcal{S}$,

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

**Preuve** l'équivalence des définitions dans (3.3) et (3.4) immédiatement suivie par la formule de variable standard changeante. en effet en choisissant $z = y - x$, on a

$$(-\Delta)^s u(x) = -\mathrm{C}(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy = -\mathrm{C}(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{\mid z \mid^{n+2s}} dz. \tag{3.6}$$

de plus en substituant $\tilde{z} = -z$ en dernier terme de l'égalité ci-dessus, nous avons

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{\mid z \mid^{n+2s}} dz = P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z}-u(x)}{\mid \tilde{z} \mid^{n+2s}} d\tilde{z} \tag{3.7}$$

en dernier terme de l'égalité ci-dessus, nous avons $\tilde{z}$ cmme $z$

$$\begin{aligned} 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{u(x-z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{u(x+z)+u(x-z)-2u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned} \tag{3.8}$$

donc si nous renommons $z$ en $y$ dans (3.6) et (3.7), nous pouvons écrire l'opérateur laplacien fractionnaire dans (3.3) comme

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy.$$

La représentation ci-dessus est utile pour supprimer la singularité de l'intégrale à l'origine.

En effet pour toute fonction lisse $u$, un rendement de Taylor de second ordre

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{\mid y \mid^{n+2s}} \leq \frac{\parallel \mathrm{D}^2 u \parallel_{L_\infty}}{\mid y \mid^{n+2s-2}}$$

qui est intégrable près pour tout $s$ fixé dans (0.1). Donc puisque $u \in \mathcal{S}$, on peut se débarrasser du P.V. et écrire (3.5). une approche via la transformée de Fourier

Maintenant nous prenons en compte une définition alternative de l'espace $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ via la transformée de Fourier. Précisément nous pouvons définir

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \xi \mid^{2s}) \mid \mathfrak{F}u(\xi) \mid^2 d\xi < +\infty\} \tag{3.9}$$

et nous observons que la définition ci-dessus est la même via la norme de Gaglirado (3.1) est valable aussi pour tout réel $s \geq 1$. on peut aussi utiliser une définition analogue pour un cas $s < 0$ en mettant

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \xi \mid^{2s}) \mid \mathfrak{F}u(\xi) \mid^2 d\xi < +\infty\},$$

bien que dans cas, l'espace $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un sous-ensemble de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et, afin d'utiliser le transform de Fourier on doit commencer par un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

L'équivalence de l'espace $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ défini dans (3.9) avec celui défini dans la section précédente via la norme de Gagliardo (voir (3.1)) est démontrée une proposition à venir prop. (3.4.1).

En réalité, on peut regarder le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ comme un opérateur pseudo differentiel de symbôle $|\xi|^{2s}$.

**Proposition 3.3.1.** *Soient $s \in (0.1)$ et $(-\Delta)^s : \mathcal{L} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est indiqué et prouvé dans la proposition à venir (3.1).Alors pour tout $u \in \mathcal{L}$,*

$$(-\Delta)^s u = \mathfrak{F}^{-1}(\mid \xi \mid^{2s} (\mathfrak{F}u)) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

**Preuve** En vue du lemme (3.3.1) on peut utiliser la définition via le quotient différentiel pondéré de second ordre dans (3.6). Nous notons par $\mathcal{L}u$ l'intégrale dans (3.6) qui est

$$\mathcal{L}u = -\frac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy.$$

avec $\mathrm{C}(n,s)$ comme dans (3.5).

$\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire et nous recherchons son "symbole" (ou multiplicateur), c'est une fonction $\mathrm{S} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{L}u = \mathfrak{F}^{-1}(\mathrm{S}(\mathfrak{F}u)) \tag{3.11}$$

nous voulons prouver que

$$\mathrm{S}(\xi) = \mid \xi \mid^{2s}, \tag{3.12}$$

où nous avons noté par $\xi$ la variable de fréquence. Pour cet objectif nous soulignons que

$$\begin{aligned} \tfrac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}} &\leq 4(\mathcal{X}_{B_1}(y) \mid y \mid^{2-n-2s} \sup_{B_1(x)} \mid \mathrm{D}^2 u \mid + \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y) \mid y \mid^{-n-2s} \sup_{\mathbb{R}^n}|u|) \\ &\leq \mathrm{C}(\mathcal{X}_{B_1}(y) \mid y \mid^{2-n-2s} (1+ \mid x \mid^{n+1})^{-1} + \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y) \mid y \mid^{-n-2s}) \in L^1(\mathbb{R}^{2n}) \end{aligned}$$

En raison du théorème de Fubini Tonelli, nous pouvons échanger l'intégrale en $y$ avec la transformation de Fourier en $x$. Ainsi nous appliquons la transformée de Fourier dans la variable $x$ dans (3.11) et on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\xi)(\mathfrak{F}u)(\xi) = \mathfrak{F}(\mathcal{L}u) &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{\mathfrak{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{e^{i\xi.y}+e^{-i\xi.y}-2}{|y|^{n+2s}} dy(\mathfrak{F}u)(\xi) \\ &= \mathrm{C}(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1-\cos(\xi.y)}{|y|^{n+2s}} dy(\mathfrak{F}u)(\xi). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Parsuite, afin d'obtenir (3.12) il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi.y)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy = \mathrm{C}(n,s)^{-1} \mid \xi \mid^{2s}. \tag{3.14}$$

Pour vérifier cela, observons d'abord que si $\zeta = (\zeta_1 ... \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{1-\cos(\zeta_1)}{\mid \zeta \mid^{n+2s}} \leq \frac{\mid \zeta_1 \mid^2}{\mid \zeta \mid^{n+2s}} \leq \frac{1}{\mid \zeta \mid^{n-2+2s}}$$

au voisinage $\zeta = 0$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{\mid \zeta \mid^{n+2s}} d\zeta \textit{ est fini et positif} \tag{3.15}$$

Maintenant, on considére la fonction $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit

$$\mathcal{I}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi.y)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy$$

nous avons ça $\mathcal{I}$ est invariant par rotation, veut dire

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(\mid \xi \mid e_1), \tag{3.16}$$

où $e_1$ désigne le premier vecteur de direction dans $\mathbb{R}^n$. En effet quand $n = 1$ alors on peut en déduire (3.16) par le fait que $\mathcal{I}(-\xi) = \mathcal{I}(\xi)$. Lorsque $n \geq 2$,

nous considérons une rotation $R$ Pour qui $R \mid \xi \mid e_1 = \xi$ et nous notons par $R^T$ sa transposée. Alors par une substitution $\tilde{y} = R^T y$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1-\cos((R|\xi|e_1).y)}{|y|^{n+2s}} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1-\cos((R|\xi|e_1).(R^T y))}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1-\cos((R|\xi|e_1).\tilde{y})}{|\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{y} \\ &= \mathcal{I}(\mid \xi \mid e_1), \end{aligned}$$

qui prouve (3.16)

Comme conséquence de (3.15) et (3.16), la substitution $\zeta = \mid \xi \mid y$ donne que

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(\mid \xi \mid e_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\mid \xi \mid y_1)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy = \frac{1}{\mid \xi \mid} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos \zeta_1}{\mid \zeta \mid \xi \mid\mid^{n+2s}} d\zeta = \mathrm{C}(n,s)^{-1} \mid \xi \mid^{2s} .$$

où nous rappelons que $\mathrm{C}(n,s)^{-1}$ est égal à $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta$ par (3.2). Ce qui achève la preuve.

**Proposition 3.3.2.** *Soit $s \in (0.1)$ alors l'espace sobolev fractionnaire $H^s(\mathbb{R}^n)$ défini précedement coïncide avec $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ défini dans (3.9). En particulier pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2\mathrm{C}(n,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mid \xi \mid^{2s} \mid \mathfrak{F}u(\xi) \mid^2 d\xi$$

*où $\mathrm{C}(n,s)$ est défini par (3.2).*

**preuve**

Pour tout $y$ dans $\mathbb{R}^n$, en changeant les variables choisis $z = x - y$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\Big) dy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{n+2s}} dz dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mid \frac{u(z+y)-u(y)}{|z|^{n+2s}} \mid^2 dy\Big) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \| \frac{u(z+.)-u(.)}{|z|^{n+2s}} \mid^2 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \| \mathfrak{F}\Big(\frac{u(z+.)-u(.)}{|z|^{n+2s}} \mid^2\Big) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz
\end{aligned}$$

où la formule Plancherel a été utilisée.

Maintenant, en utilisant (3.14) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \| \mathfrak{F}\Big(\frac{u(z+.)-u(.)}{|z|^{n+2s}} \mid^2\Big) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi.x}-1|^2}{|z|^{n+2s}} \mid \mathfrak{F}u(\xi) \mid^2 d\xi dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-\cos(\xi.z))}{|z|^{n+2s}} \mid \mathfrak{F}u(\xi) \mid^2 dz d\xi \\
&= 2\mathrm{C}(n,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mid \xi \mid^{2s} \mid \mathfrak{F}u(\xi) \mid^2 d\xi.
\end{aligned}$$

ceci complète la preuve

**Remarque 3.3.1.** *L'équivalence des espaces $H^s$ et $\hat{H}^s$ indiqué dans propstion (3.4.2) repose sur la formule Plancherel. Comme il est connu, sauf si $p = q = 2$ on ne peut pas avancer ni reculer un $L^p$ et un $L^q$ via la transformée de Fourier (Voir [8] pour une lecture détaillé si $p$ est tel que $1 < p < 2$ et $q$ est son exposant conjugué $p/(p-1)$.) Pour cette raison, l'espace fractionnaire général défini via la transformée de Fourier pour $1 < p < \infty$ et $s > 0$, disons $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, ne coïncide pas avec les espaces sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (Voir [23])*

*Enfin, on pense être en mesure de montrer la relation entre l'opérateur laplacien fractionnaire* $(-\Delta)^s$ *et l'espace de Sobolev fractionnel* $H^s$.

**Proposition 3.3.3.** *[3] Soit* $s \in (0.1)$ *et soit* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$*. Alors*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2\mathrm{C}(n.s)^{-1}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

*où* $\mathrm{C}(n.s)$ *est défini par (3.2).*

## 3.4 Valeur asymptotique $\mathrm{C}(n,s)$

Dans cette section, nous allons discuter le facteur constant $\mathrm{C}(n,s)$ qui apparaît dans la définition du laplacien fractionnaire (voir (3.1)), en analysant son comportement asymptotique $s \longrightarrow 1^-$ et $s \longrightarrow 0^+$, cela est pertinent si l'on veut récupérer les normes de Sobolev des espaces $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$ en partant de l'un des $H^s(\mathbb{R}^n)$.
Nous rappelons la constante en question $\mathrm{C}(n,s)$ :

$$\mathrm{C}(n,s) = (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{\mid \zeta \mid^{n+2s}} d\zeta)^{-1}$$

Par un changement de variables $\eta' = \zeta' / \mid \zeta_1 \mid$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tfrac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta_1|^{n+2s}} \tfrac{1}{(1+|\zeta'|^2/|\zeta_1|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\zeta' d\zeta_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tfrac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta_1|^{n+2s}} \tfrac{1}{(1+|\eta'|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\eta' d\zeta_1 \\
&= \tfrac{A(n,s)B(s)}{s(1-s)}
\end{aligned}$$

où

$$A(n,s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+ \mid \eta' \mid^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\eta' \tag{3.17}$$

Remarquons que si $n = 1$ on a $A(n, s) = 1$ et

$$B(s) = s(1-s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos t}{\mid t\mid^{1+2s}}dt. \tag{3.18}$$

**Proposition 3.4.1.** *[3] pour tout $n > 1$, soit $A$ et $B$ définis par (3.17) et (3.18) respectivement alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

*(i)* $\lim_{s\longrightarrow 1^-} A(n, s) = \omega_{n-2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}}d\rho < +\infty;$

*(ii)* $\lim_{s\longrightarrow 0^+} A(n, s) = \omega_{n-2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}}d\rho < +\infty;$

*(iii)* $\lim_{s\longrightarrow 1^-} B(s) = \frac{1}{2};$

*(iiii)* $\lim_{s\longrightarrow 0^+} B(s) = 1$, *où $\omega_{n-2}$ désigne une mesure de dimension $(n-2)$ de la sphère de l'unité* $\mathrm{S}^{n-2}$.

*En conséquence,*

$$\lim_{s\longrightarrow 1^-} \frac{\mathrm{C}(n, s)}{s(1-s)} = (\frac{\omega_{n-2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}}d\rho)^{-1} \tag{3.19}$$

*et*

$$\lim_{s\longrightarrow 0^+} \frac{\mathrm{C}(n, s)}{s(1-s)} = (\omega_{n-2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}}d\rho)^{-1}. \tag{3.20}$$

**Corollaire 3.4.1.** *[3] Pour tout $n > 1$, soit $\mathrm{C}(n, s)$ et défini par (3.2) les états suivants :*

*(i)* $\lim_{s\to 1^-} \frac{\mathrm{C}(n,s)}{s(1-s)} = \frac{4n}{w_{n-1}},$

*(ii)* $\lim_{s\to 0^+} \frac{\mathrm{C}(n,s)}{s(1-s)} = \frac{2}{w_{n-1}}.$

*où $w_{n-1}$ dénote le $(n-1)$-dimensionnel mesure de la sphère unité* $\mathrm{S}^{n-1}$.

Pour un comportement asymptotique de $s$, nous avons :

**Proposition 3.4.2.** *Soit $n > 1$ pour tout $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ les affirmations suivantes tiennent :*

*(i)* $\lim\limits_{s\longrightarrow 0^+}(-\Delta)^s u = u;$

*(ii)* $\lim\limits_{s\longrightarrow 1^-}(-\Delta)^s u = -\Delta u.$

## 3.5 Extension de $W^{s,p}(\Omega)$ à $\mathbb{R}^n$

Si $s$ est entier, il est connu que, sous quelques conditions de régularité sur le domaine, l'on peut étendre toute fonction de $W^{s,p}(\Omega)$ à une fonction de $W^{s,p}(\mathbb{R})$. L'extension est primordiale pour assurer et améliorer quelques théormès d'injection dans le cas classique aussi bien que dans le cas fracionnaire.

Pour tout $s \in (0,1)$ et tout $p \in [1,\infty)$ on dit que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un domaine d'extension pour $W^{s,p}$ s'il existe une constante positive $C = C(n,p,s,\omega)$ tel que : Pour toute fonction $u \in W^{s,p}(\Omega)$ il existe $\tilde{u}W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{u}(x) = u(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et

$$\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Nous allons voir par la suite que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ nommé $\Omega$ de classe $C^{0,1}$ à frontière bornée est un domaine d'extension pour $\mathbb{R}^n$.

**Lemme 3.5.1.** *Soit $\Omega$ être un jeu ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $u$ une fonction dans $W^{s,p}(\Omega)$ avec $s \in (0.1)$ et $p \in [1,+\infty[$. s'il existe un sous-ensemble compact $K \subset \Omega$ tel que $u \equiv 0$ dans $\Omega \setminus K$, alors la fonction d'extension $\tilde{u}$ défini comme*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

*appartient à $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\| \tilde{u} \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \mathrm{C} \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

*où* C *est une constante appropriée en fonction de $n, p, s, K$ et $\Omega$.*

**Lemme 3.5.2.** *Soit $\Omega$ un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$, symétrique par rapport aux coordonnées $x_n$, et considérerons les ensembles $\Omega_+ = \{x \in \Omega : \ x_n > 0\}$ et $\Omega_- = \{x \in \Omega : \ x_n \leq 0\}$. Soit*

*$u$ une fonction dans $W^{s,p}(\Omega_+)$, avec $s \in (0.1)$ et $p \in [1, +\infty[$. Définissons :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n) & x \geq 0, \\ u(x', x_n) & x < 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

*Alors $\tilde{u}$ appartient à $W^{s,p}(\Omega)$ et*

$$\| \tilde{u} \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq 4 \| u \|_{W^{s,p}(\Omega_+)} .$$

**Preuve** En séparant les intégrales et en changeant la variable $\hat{x} = (x', -x_n)$, on a

$$\| \tilde{u} \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega_+} | u(x) |^p \, dx + \int_{\Omega_+} | u(\hat{x}', \hat{x}_n) |^p = 2 \| u \|^p_{L^p(\Omega_+)} \tag{3.23}$$

également si $x \in \mathbb{R}^n_+$ et $y \in \mathcal{L}\mathbb{R}^n_+$ puis $(x_n - y_n)^2 \geq (x_n + y_n)^2$ et donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy &= \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_+} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + 2 \int_{\Omega_+} \int_{\mathcal{L}\Omega_+} \frac{|u(x) - u(y', y_n)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ &\int_{\mathcal{L}\Omega_+} \int_{\mathcal{L}\Omega_+} \frac{|u(x', -x_n) - u(y', -y_n)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \leq 4 \| u \|_{W^{s,p}(\Omega_+)} . \end{aligned}$$

ceci conclut la preuve.

Regardons maintenant un lemme de troncature au voisinage de $\partial\Omega$.

**Lemme 3.5.3.** *Soit $\Omega$ ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n, s \in (0.1)$ et $p \in [1, +\infty[$. Considérons $u \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\psi \in \mathrm{C}^{0.1}(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1$ alors $\psi u \in W^{s,p}(\Omega)$ et*

$$\| \psi u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{3.24}$$

*où* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, p, s, \Omega)$.

**Preuve** Il est clair que $\| \psi u \|_{L^p} \leq \| u \|_{L^p}$ puisque $| \psi | \leq 1$. En sommant et en soustrayant le facteur $\psi(x)u(y)$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \tfrac{|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\le 2^{2p-1}(\int_\Omega\int_\Omega \tfrac{|\psi(x)u(x)-\psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &+ \int_\Omega\int_\Omega \tfrac{|\psi(x)u(y)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy) \\ &\le 2^{2p-1}(\int_\Omega\int_\Omega \tfrac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &+ \int_\Omega\int_\Omega \tfrac{|u(x)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy).\end{aligned} \tag{3.25}$$

puisque $\psi$ appartient à $\mathrm{C}^{0.1}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \tfrac{|u(x)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \le \wedge^p \int_\Omega\int_{\Omega\cap|x-y|\le 1} \tfrac{|u(x)|^p|x-y|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &+ \int_\Omega\int_{\Omega\cap|x-y|\le 1} \tfrac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &\le \tilde{\mathrm{C}} \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.26}$$

où $\wedge$ désigne la constante lipschitz de $\psi$ *et* $\tilde{\mathrm{C}}$ est une constante positive en fonction de $n, p$ et $s$. Notons que la dernière inégalité découle du fait que le noyau $\mid x-y\mid^{-n+(1-s)p}$ est sommable par rapport à $y$ *si* $\mid x-y\mid\le 1$ puisque $n+(s-1)<n$ et d'autre part le noyau $\mid x-y\mid^{-n-sp}$ est sommable quand $\mid x-y\mid\ge 1$ puisque $n+sp>n$. Finalement, en combinant (3.31) avec (3.32) on obtient l'estimation (3.30).

On est en position d'affirmer la question de cette section, à savoir que tout ouvert liphtizien $\Omega$ à frontière bornée est est un domaine d'exstension de $W^{s,p}$.

**Théorème 3.5.1.** *[3] Soit $p\in[1,+\infty[, s\in(0,1)$ et $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ être un ensemble de classe $C^{0,1}$ avec limite délimitée. Alors $W^{s,p}(\Omega)$ est continue intégré dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, à savoir pour tout $u\in W^{s,p}(\Omega)$ il éxiste $\tilde{u}\in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\tilde{u}\mid_\Omega = u$ et*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

*où $C = C(n,p,s,\Omega)$*

## 3.6 Inégalités de Sobolev fractionnaires

**Lemme 3.6.1.** *Réparer* $x \in \mathbb{R}^n$. *Soit* $p \in [1, +\infty[, s \in (0.1)$ *et* $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^n$ *être un ensemble mesurable avec mesure finie alors*

$$\int_{\mathcal{L}\mathrm{E}} \frac{dy}{\mid x - y \mid^{n+sp}} \geq \mathrm{C} \mid \mathrm{E} \mid^{-sp/n}$$

*pour une constante appropriée* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, p, s) > 0$.

**Preuve** nous fixons

$$\rho : (\frac{\mid \mathrm{E} \mid}{\omega_n})^{\frac{1}{n}}$$

et puis il s'ensuit

$$\mid (\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathrm{B}_\rho(x) \mid = \mid \mathrm{B}_\rho(x) \mid - \mid \mathrm{E} \cap \mathrm{B}_\rho(x) \mid = \mid \mathrm{E} \mid - \mid \mathrm{E} \cap \mathrm{B}_\rho(x) \mid$$

$$= \mid \mathrm{E} \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_\rho(x) \mid$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}\mathrm{E}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &= \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&\geq \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{\rho^{n+sp}} + \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \frac{|(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathrm{B}_{\rho(x)}|}{\rho^{n+sp}} + \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \frac{|(\mathrm{E}) \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}|}{\rho^{n+sp}} + \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&\geq \int_{\mathrm{E} \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{(\mathcal{L}\mathrm{E}) \cap \mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \int_{\mathcal{L}\mathrm{B}_{\rho(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}.
\end{aligned}$$

Le résultat souhaité suit facilement en utilisant les coordonnées polaires centrées sur x.

**Lemme 3.6.2.** *Soit* $s \in (0.1)$ *et* $p \in [1, +\infty[$ *tel que* $sp < n$. *réparer* $\mathrm{T} > 1$; *soit* $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}$ *et*

$$a_k \text{ être une séquence décroissante non négative bornée avec } a_k = 0 \text{ pour toute } k \geq N. \tag{3.27}$$

*puis*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k \leq \mathrm{C} \sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} a_{k+1}a_k^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k$$

*pour une constante appropriée* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, p, s, \mathrm{T}) > 0$, *indépendant de* $\mathrm{N}$

**Preuve** par (3.33)

$$\textit{tous les deux } \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k \textit{ et } \sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} a_{k+1}a_k^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k \textit{ sont des séries convergentes.} \tag{3.28}$$

d'ailleurs depuis $a_k$ est non négatif et décroissant, nous avons que si $a_k = 0$, puis $a_{k+1}$. En conséquence

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+1}^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k = \sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} a_{k+1}^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k.$$

par conséquent, nous pouvons utiliser l'inégalité de Holder avec des exposants $\alpha := n/sp$ et $\beta := n/(n - sp)$ en argumentant comme suite

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\mathrm{T}} \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+1}^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k \\
&= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} a_{k+1}^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k \\
&= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} (a_k^{sp/(\alpha\beta)}\mathrm{T}^{k/\alpha})(a_{k+1}^{1/\beta}a_k^{-sp/(\alpha\beta)}\mathrm{T}^{k/\beta}) \\
&\leq (\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_k^{sp/(\alpha\beta)}\mathrm{T}^{k/\alpha})^{\alpha})^{1/\alpha} (\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} (a_{k+1}^{1/\beta}a_k^{-sp/(\alpha\beta)}\mathrm{T}^{k/\beta})^{\beta})^{1/\beta} \\
&\leq (\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n}\mathrm{T}^k)^{sp/n} (\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z} a_k\neq 0} a_{k+1}a_k^{-sp/n}\mathrm{T}^k)^{(n-sp)/n}
\end{aligned}$$

Si rappelant (3.34), on obtient le résultat souhaité.

**Lemme 3.6.3.** *Soit* $q \in [1, +\infty[$. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *être une fonction mesurable pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *soit*

$$f_N(x) := \max\min f(x), N, -N \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.29}$$

*puis*

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} \| f_N \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \| f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} .$$

**Preuve** nous notons par $\mid f \mid_N$ la fonction obtenue en coupant $\mid f \mid$ au niveau N.nous avons ça $\mid f \mid_N = \mid f_N \mid$ et ainsi par fatou lemma nous obtenons que

$$\liminf_{N \longrightarrow +\infty} \parallel f_N \parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \liminf_{N \longrightarrow +\infty} (\int_{\mathbb{R}^n} \mid f \mid_N^q)^{\frac{1}{q}} \geq (\int_{\mathbb{R}^n} \mid f \mid^q)^{\frac{1}{q}} = \parallel f \parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)} .$$

l'inégalité inverse suit facilement par le fait que $\mid f \mid_N (x) \leq \mid f(x) \mid$ pour toute $x \in \mathbb{R}^n$. En tenant compte des lemmes précédents, nous pouvons donner une preuve élémentaire de l'intégalité de type Sobolev dans le théorème suivant.

**Théorème 3.6.1.** *[3] Soit $s \in (0.1)$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$ alors il existe une constante positive $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, p, s)$ tel que pour toute fonction mesurable et compacte $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$\parallel f \parallel_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)}^p \leq \mathrm{C} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mid f(x) - f(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} dxdy \tag{3.30}$$

*où $p^\star = p^\star(n, s)$ est le soi-collé "exposant critique fractionnaire" et il est égal à $np/(n - sp)$ par conséquent l'espace $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est intégré en permanence dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour toute $q \in [p, p^\star]$*

**Prouv** D'abord, nous notons que si le côté droit de (3.36) est illimitée alors le cliam dans le théorème suit clairement nous pouvons supposer que $f$ est telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mid f(x) - f(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} dxdy < +\infty. \tag{3.31}$$

De plus, nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.32}$$

En effet si (3.37) est valable pour les fonctions liées, alors il est valable pour la fonction $f_N$, obtenu par tout (éventuellement sans bornes) $f$ en coupant au niveau $-N$ et $+N$ (voir (3.34)). donc par lemme (3.7.3) et le fait que (3.36) ainsi que le théorème de convergence dominé impliquent

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mid f(x)-f(y)\mid^p}{\mid x-y\mid^{n+sp}}dxdy=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mid f(x)-f(y)\mid^p}{\mid x-y\mid^{n+sp}}dxdy$$

on obtient une estimation (3.35) pour la fonction $f$.

**Théorème 3.6.2.** *[3] Soit* $s\in(0.1)$ *et* $p\in[1,+\infty[$ *tel que* $sp=n$*. alors il existe une constante positive* $\mathrm{C}=\mathrm{C}(n,p,s)$ *tel que, pour toute fonction mesurable et compacte* $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, *on a*

$$\parallel f\parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leq \mathrm{C}\parallel f\parallel_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

*C'est*

$$\parallel f\parallel^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leq 2^p(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp^\star}a_k)^{p/p^\star}.$$

*donc sine* $p/p^\star=(n-sp)/n=1-sp/n<1$,

$$\parallel f\parallel^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leq 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}a_{k+1}a_k^{-\frac{sp}{n}} \tag{3.33}$$

*puis en choisissant* $T=2^p$, *lemme (3.7.2) les rendements*

$$\parallel f\parallel^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leq \mathrm{C}\sum_{k\in\mathbb{Z}a_k\neq0}2^{kp}a_{k+1}a_k^{-\frac{sp}{n}} \tag{3.34}$$

*pour une constante appropriée* C *cela dépend de* $n,p$ *et* $s$.

**Remarque 3.6.1.** *forme lemme (3.7.1) ça suit*

$$\int_{\mathrm{E}}\int_{\ell\mathrm{E}}\frac{dxdy}{\mid x-y\mid^{n+sp}}\geq c(n,s)\mid \mathrm{E}\mid^{(n-sp)/n} \tag{3.35}$$

*pour tous les ensembles mesurables* E *avec mesure finie.*

*d'autre part on voit que (3.35) réduit à (3.41) quend* $f=\mathrm{x}_E$, *alors (3.41) (Et ainsi lemme*

*(3.7.1)) peut être vu comme une inégalité de type sobolev pour les ensembles.*

*l'incorporation ci-dessus ne tient généralement pas pour l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *car il n'est pas toujours possible d'étendre une fonction* $f \in W^{s,p}(\Omega)$ *à une fonction* $\tilde{f} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *afin de pouvoir le faire, nous devrions exiger de nouvelles hypothèses de régularité sur* $\Omega$.

## 3.7 Régularité de Hölder

En cela, nous montrerons certaines propriétés de régularité pour les fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ quend $sp > n$ et $\Omega$ est un domaine d'extension pour $W^{s,p}$ sans tasses externes, par exemple, on peut prendre $\Omega$ n'importe quel domaine lipschitz (théorème de rappel (5.4)).
Le résultat principal est indiqué dans le prochain théorème (3.8.1) nous avons d'abord besoin d'un lemme technique simple, dont la preuve peut être trouvée dans [E.Giusti, metodi diretti nel calcolo delle variazioni] (par exemple)

**Lemme 3.7.1.** *[[14],lemme(2.2)]Soit* $p \in [1, +\infty[$ *et* $sp \in (n, n+p)$. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *être un domaine sans cuspides externes et* $f$ *être une fonction dans* $W^{s,p}(\Omega)$ *alors pour toute* $x_0 \in \Omega$ *et* $\mathrm{R}, \mathrm{R}'$, *puis* $0 < \mathrm{R} < \mathrm{R}' < diam(\Omega)$, *on a*

$$| \langle f \rangle_{B_R(x_0)\cap\Omega} - \langle f \rangle_{B_{R'}(x_0)\cap\Omega} | \leq c[f]_{p,sp} \mid \mathrm{B}_R(x_0) \cap \Omega \mid^{(sp-n)/np} \tag{3.36}$$

*où*

$$[f]_{p,sp} := ( \sup_{x_0\in\Omega\rho>0} \int_{B_\rho(x_0)\cap\Omega} \mid f(x) - \langle f \rangle_{B_\rho(x_0)\cap\Omega} \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

*et*

$$\langle f \rangle_{B_\rho(x_0)\cap\Omega} := \frac{1}{\mid \mathrm{B}_\rho(x_0) \cap \Omega \mid} \int_{B_\rho(x_0)\cap\Omega} f(x)dx.$$

**Théorème 3.7.1.** *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *être un domaine d'extension* $W^{s,p}$ *sans cuspide externe et laisser* $p \in [1, +\infty[, s \in (0.1)$ *tel que* $sp > n$. *Alors il existe* $\mathrm{C} > 0$, *cela dépend de n,p,s et* $\Omega$, *tel que*

$$\| f \|_{C^{0,\alpha}} \leq C(\| f \|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{| f(x) - f(y) |^p}{| x - y |^{n+sp}} dxdy)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.37}$$

*pour toute* $f \in L^p(\Omega)$, *puis* $\alpha := (sp - n)/p$.

**Preuve** Dans ce qui suit, nous passerons par C quantités positives appropriées possibles différentes d'une ligne à l'autre et éventuellement en fonction de $p$ et $s$.

D'abord, nous remarquons que si le côté droit de (3.43) est pas fini alors nous avons fini donc nous pouvons supposer que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{| f(x) - f(y) |^p}{| x - y |^{n+sp}} dxdy \leq C,$$

pour certains $C > 0$.

deuxième sinus $\Omega$ est un domaine d'extension pour $W^{s,p}$, nous pouvons prolonger $f$ à une fonction $\tilde{f}$ tel que $\| \tilde{f} \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| f \|_{W^{s,p}(\Omega)}$ .

Maintenant pour tout ensemble mesurable borné $U \subset \mathbb{R}^n$, on considère la valeur moyenne de la fonction $\tilde{f}$ dans $U$, donné par

$$\langle \tilde{f} \rangle_U := \frac{1}{| U |} \int_U \tilde{f}(x) dx.$$

Pour toute $\xi \in \mathbb{R}^n$, les rendements d'inégalité de Hölder

$$| \xi - \langle \tilde{f} \rangle_U |^p = \frac{1}{| U |^P} \int_U | \xi - \tilde{f}(y) dy |^p \leq \frac{1}{| U |} \int_U | \xi - \tilde{f}(y) |^p \, dy.$$

En conséquence en prenant $x_0 \in \Omega$ et $U := B_r(x_0), \xi := \tilde{f}(x)$ et intégrant sur $B_r(x_0)$, on obtient ça

$$\int_{B_r(x_0)} | \tilde{f}(x) - \langle \tilde{f} \rangle_{B_r(x_0)} |^p \, dx \leq \frac{1}{B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} | \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) |^p \, dxdy.$$

Donc depuis $\mid x-y\mid\leq 2r$ tel que $x,y\in \mathrm{B}_r(x_0)$, on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{B}_r(x_0)}\mid \tilde{f}(x)-\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_r(x_0)}\mid^p dx &\leq \tfrac{(2r)^{n+sp}}{|\mathrm{B}_r(x_0)|}\int_{\mathrm{B}_r(x_0)}\int_{\mathrm{B}_r(x_0)}\tfrac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\ &\leq \frac{2^{n+sp}r^{sp}\mathrm{C}\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}}{|\mathrm{B}_1|},\end{aligned}\tag{3.38}$$

cela implique

$$[f]^p_{p,sp}\leq \mathrm{C}\parallel f\parallel^p_{W^{s,p}(\Omega)},\tag{3.39}$$

pour une constante appropriée C.

Maintenant nous allons montrer que $f$ est une fonction continue prenant en compte (3.42), il s'ensuit que la séquence de fonction $x\longrightarrow\langle f\rangle_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega}$ converge uniformément dans $x\in\Omega$ quend $\mathrm{R}\longrightarrow 0$. En particulier la fonction limite $g$, wille être continuos et la même chose pour $f$, puisque par le théorème de Lebesgue nous avons cela

$$\lim_{\mathrm{R}\longrightarrow 0}\frac{1}{\mid \mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega\mid}\int_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega}f(y)dy=f(x)\quad pourpresquetous\quad x\in\Omega.$$

Maintenant prendre tout $x,y\in\Omega$ et ensemble $\mathrm{R}=\mid x-y\mid$. On a

$$\mid f(x)-f(y)\mid\leq\mid f(x)-\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)}\mid+\mid\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)}-\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)}\mid+\mid\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)}-f(y)\mid.$$

on peut estimer le premier et le troisième terme de droite de l'inégalité avove en utilisant le lemme (3.8.1). En effet obtenir la limite (3.42) comme $\mathrm{R}'\longrightarrow 0$ et écriture 2R au lieu de R, pour toute $x\in\Omega$ on a

$$\mid\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)}-f(x)\mid\leq c[f]_{p,sp}\mid \mathrm{B}_{2\mathrm{R}}(\mathrm{x})\mid^{(sp-n)/np}\leq \mathrm{C}[f]_{p,sp}\mathrm{R}^{(sp-n)/p}\tag{3.40}$$

où la constante C est donné par $c2^{(sp-n)/p}/\mid \mathrm{B}\mid_1$ . D'autre part

$$\mid\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)}-\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)}\mid\leq\mid f(z)-\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)}\mid+\mid\tilde{f}(z)-\langle\tilde{f}\rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)}\mid$$

et ainsi intégrer sur $z \in \mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y)$, on a

$$\begin{aligned} \mid \mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y) \mid\mid \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \; & \leq \textstyle\int_{\mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid dz \\ & + \textstyle\int_{\mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid dz \\ & \leq \textstyle\int_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid dz \\ & + \textstyle\int_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid dz. \end{aligned}$$

En outre depuis $\mathrm{B}_R(x) \cup \mathrm{B}_R(y) \subset (\mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y))$, on a

$$\mid \mathrm{B}_R(x) \mid \leq \mid \mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y) \mid \quad et \quad \mid \mathrm{B}_R(y) \mid \leq \mid \mathrm{B}_{2R}(x) \cap \mathrm{B}_{2R}(y) \mid$$

et donc

$$\mid \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \leq \frac{1}{\mid \mathrm{B}_R(x) \mid} \int_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid dz + \frac{1}{\mid \mathrm{B}_R(y) \mid} \int_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid dz.$$

une application de l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{|\mathrm{B}_R(x)|} \textstyle\int_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid dz \; & \leq \tfrac{\mathrm{B}_{2R}(x)|^{(p-1)/p}}{\mathrm{B}_R(x)|} (\textstyle\int_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(x)} \mid^p dz)^{1/p} \\ & \leq \tfrac{\mathrm{B}_{2R}(x)|^{(p-1)/p}}{\mathrm{B}_R(x)|} (2\mathrm{R}^s)[f]_{p,sp} \\ & \leq \mathrm{C}[f]_{p,sp} \mathrm{R}^{(sp-p)/p} \end{aligned} \tag{3.41}$$

De manière analogue on obtient

$$\frac{1}{\mid \mathrm{B}_R(y) \mid} \int_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid \tilde{f}(z) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{2R}(y)} \mid dz \leq \mathrm{C}[f]_{p,sp} \mathrm{R}^{(sp-p)/p}. \tag{3.42}$$

Combinant (3.46),(3.47) avec (3.48) est suit

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq \mathrm{C}[f]_{p,sp} \mid x - y \mid^{(sp-n)/p}, \tag{3.43}$$

à ré-étiqueter la constante C.

Donc en prenant en compte (3.45), nous pouvons conclure que $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)$, avec $\alpha = (sp - n)/p$.

Enfin prendre $\mathrm{R}_0 < diam(\Omega)$ ( notez que ce dernier peut être éventuellement l'infini), en utilisant estimation dans (3.46)et l'inquité Hölder que nous avons, pour toute $x \in \Omega$,

$$| f(x) | \leq | \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{R_0}(x)} | + | f(x) - \langle \tilde{f} \rangle_{\mathrm{B}_{R_0}(x)} | \leq \frac{\mathrm{C}}{| \mathrm{B}_{R_0}(x) |^{1/p}} \| f \|_{L^p(\Omega)} + c[f]_{p,sp} | \mathrm{B}_{R_0}(x) |^{\alpha} . \tag{3.44}$$

Donc par (3.45),(3.49) et (3.50), on a

$$\begin{aligned}
\| f \|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)} &= \| f \|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{x,y \in \Omega x \neq y} \tfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \mathrm{C}(\| f \|_{L^\infty(\Omega)} + [f]_{p,sp}) \\
&\leq \mathrm{C} \| f \|_{W^{s,p}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Pour une constante positive appropriée C.

## 3.8 EDP Fractionnaire

### Introduction

Le butee dans ce chapitre est d'étudier le probléme suivant :

$$(P_{\lambda,\mu}) = \begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda \frac{u}{|x|^{2s}} = u^p + \mu u^q & dans \quad \Omega, \\ u > 0 & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

En analysant l'existence des solutions non triviales du probléme $(P_{\lambda,\mu})$, où $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire définit dans le chapitre 3 par (3.3) avec $n > 2s$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné tel que $0 \in \Omega$.

**Définition 3.8.1.** *Soit* $u \in H^s(\mathbb{R}^n$, *on dit que* $u$ *est une solution d'énergie (sous-solution respectivement) du probléme* $(P_{\lambda,\mu})$. *si* $u(x) > 0$ *p.p* $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) \geq 0 (\leq 0.resp)$ *p.p* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, *et pour tout fonction non-négative* $\phi \in H_0^s(\Omega)$ *on a :*

$$\frac{a_{n,s}}{2} \int \int_Q \frac{(u(x) - u(y)(\phi(x) - \phi(y))}{\mid s - y \mid^{n+2s}} dxdy - \lambda \int_\Omega \frac{u\phi}{\mid x \mid^{2S}} dx \geq (\leq) \int_\Omega u^p \phi dx + \mu \int_\Omega u^q \phi dx$$

*Si* $u$ *est une sur et sous solution au méme temps, on dit que* $u$ *est une solution d'énergie positive.*

*La fonctionnelle d'énergie associée au probléme* $(P_+)$

$$(P_+) \begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda \frac{u_+}{|x|^{2s}} = u_+^p + \mu u_+^q & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

*est définie par* $j : H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$j(u) = \tfrac{a_{n,s}}{4} \int \int_Q \tfrac{|u(x)-u(y)|^2}{|s-y|^{n+2s}} dxdy - \lambda \int_\Omega \tfrac{u_+^2}{|x|^{2s}} dx \quad - \tfrac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1} dx + \tfrac{\mu}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} dx$$

*Les points critiques de* $j$ *sont des solutions du probléme* $(P_+)$.

**Remarque 3.8.1.** *Si* $u$ *est un solution strictement positive du probléme* $(P_+)$, *alors* $u_+ \equiv u$ *et* $u$ *est aussi une solution du probléme principal* $P_{\lambda,\mu}$.

*Si* $p > 2_s^* - 1$ *le probléme est sur-critique et on perd la structure variationnelle. On a besoin de préciser le concept faible de la solution et de préciser le cadre fonctionnel défini par :*

$$\Theta := \{\varphi \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ mesurable ,tel que } (-\Delta)^s \varphi \in L^\infty(\Omega) \text{ et} \varphi = 0 \text{ sur} \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$$

*Les principes de comparaison sont un outil important pour la recherche des solutions au moyen d'arguments itératif. Ils permettent de définir un ordre entre les solutions de problémes connexes dans certaines situations spécifiques. D'abord, nous pouvons Preuver un lemme de* *comparaison pour les solutions énergétiques.*

**Lemme 3.8.1.** *Soit $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ des solutions énergétiques de probléme*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f_1 & dans \quad \Omega, \\ u = g_1 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

*et*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f_2 & dans \quad \Omega, \\ u = g_2 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

*respectivement ,avec $f_1, f_2 \in H^{-s}(\Omega)$ et $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.*

*Si $f_1 \leq f_2$ p.p dans $\Omega$ et $g_1 \leq g_2$ p.p dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ Alors $u \leq v$ p.p dans $\mathbb{R}^n$ Ègalement, on présente le principe de comparaison des solutions faibles dans le lemme suivant :*

**Lemme 3.8.2.** *soit $u, b \in L^1(\Omega)$ sont des solutions faibles de probléme*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f_1 & dans \quad \Omega, \\ u = g_1 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

*et*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f_2 & dans \quad \Omega, \\ u = g_2 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

*respectivement ,avec $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$ et $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.*

*Si $f_1 \leq f_2$ p.p dans $\Omega$ et $g_1 \leq g_2$ p.p dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ Alors $u \leq v$ p.p dans $\mathbb{R}^n$*

**Les solutions radiales du probléme elliptique dans** $\mathbb{R}^n$ Le but dans cette section est d'analyser le comportement des solutions dans un voisinage de l'origine du probléme homogéne.

$$(-\Delta)^s u = \lambda \frac{u}{\mid x \mid^{2s}} \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{3.45}$$

Afin d'utiliser ces informations comme un moyen de Preuver l'existence et non-existence des résultats.Nous commençons par la construction de la solution radiale explicite de l'équation.

**Lemme 3.8.3.** *Soit* $0 < \lambda < \Lambda_{n,s}$ *alors* $v_{\pm} :=\mid x \mid^{-\frac{n-2s}{2}\pm\alpha}$ *sont solution de 3.45 où* $\alpha$ *est défini par l'identité*

$$\lambda = \lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = \frac{2^{2s}\Gamma(\frac{n+2s+2\alpha}{4})\Gamma(\frac{n+2s-2\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{n-2s+2\alpha}{4})\Gamma(\frac{n-2s-2\alpha}{4})}$$

**Remarque 3.8.2.** *On note* $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = m_\alpha m_{-\alpha}$ *tel que*

$$m_\alpha = 2^{\alpha+s}\frac{\Gamma(\frac{n+2s+2\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{n-2s-2\alpha}{4})}$$

**Lemme 3.8.4.**

$$\lambda : [(0, \frac{n-2s}{2}) \to (0, \Lambda_{n,s})]$$

$$\alpha \to \lambda(\alpha)$$

*si et seulement si* $0 \leq \alpha < \frac{n-2s}{2}$

*pour plus de détails sur la preouve voir [21]*

**Remarque 3.8.3.** *On peut construire explicitement deux solutions positives à notre probéme homogéne 3.45.*

*On note*

$$\gamma = \frac{n-2s}{2} - \alpha \text{ et } \bar{\gamma} = \frac{n-2s}{2} + \alpha$$

*avec* $0 < \gamma \leq \frac{n-2s}{2} - \alpha \leq \bar{\gamma} < n - 2s.$

*puisque*

$$n - 2\gamma - 2s = 2\alpha > 0 \ textet \ n - 2\bar{\gamma} - 2s = -2\alpha < 0,$$

*alors* $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\mid x \mid^{-\gamma}) \in L^2(\Omega)$ *mais pas* $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\mid x \mid^{-\bar{\gamma}}) \in L^2(\Omega)$.

*En utilisant ces résultats pour étudier les solutions radiales du probléme* $(P_{\lambda,\mu})$ *au voisinage de l'origine. En particulier, nous pouvons voir que chaque solution sera, au moins, aussi singuliére que* $\mid x \mid^{-\bar{\gamma}}$ *.*

**Lemme 3.8.5.** *Soit* $0 < \lambda \leq \Lambda_{n,s}$ *et* $f \in L^\infty(\Omega)$, *considérons* $u$ *une fonction non négative défini dans* $\Omega$ *telle que* $u \neq 0, u \in L^\infty \frac{u}{|x|^{2s}} \in L^1(\Omega)$ *et* $u = 0$ *dans* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
*Si* $u$ *vérifie :*

$$u \geq \mathrm{C} \mid x \mid^{-\gamma} \ \ dans \ \ \mathbf{B}_r \ ou \ \gamma := \frac{n-2s}{2} - \alpha$$

$$(-\Delta)^s - \lambda \frac{u}{\mid x \mid^{2s}} = u^p \ dans \ \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

*En particulier dans l'exemple suivant*

**Existence des solutions minimales pour** $1 < p < p(\lambda, s)$ Dans cette section, on considére $1 < p < p(\lambda, s)$ et on montre l'existence des solutions.

**Lemme 3.8.6.** *Soit* $f \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, *où* $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$. *Alors, il existe une solution unique* $v \in L^1(\Omega)$, *qui est la solution faible du probléme*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s)v = f & dans \quad \Omega, \\ v = 0 & sur \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

*De plus*

$$\parallel v \parallel_{L^1(\Omega)} \leq \mathrm{C} \parallel f \parallel_{L^1(\Omega, \delta(x)dx)}$$

*La Preuve suit des arguments données dans [[22], lemme 1 ]*

**Proposition 3.8.1.** *Soit* $M$ *défini par :*

$$M = \sup\{\mu > 0 : \ le \ probléme \ (P_{\lambda,\mu}) \ admet \ une \ solution\}$$

*Alors* $0 < M < \infty$.

**Proposition 3.8.2.** *Pour tout* $0 < \mu < M$, *le probléme* $(P_{\lambda,\mu})$ *admet au moins une solution positive. En effet, la suite des solutions minimales* $u_\mu$ *est croissante par rapport à* $\mu$

**Remarque 3.8.4.** *Les résultats obtenus dans cette section peuvent étre facilement traduits* *pour le cas de* $q = 0$, *c'est-à-dire si l'on considére une fonction* $f$ *avec des conditions de croissance appropriées au lieu du terme concave* $u_q$.

# Bibliographie


[1] *R. A. Adams*, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] *R. A. Adams*, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[3] *E. Valdinoci*, From the lung jump random walk to the fractional Laplacian, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SeMA 49 (2009), 3344.

[4] *N.Aronszajn.*Boundary values of functions with lnite Dirichlet integral, Techn. Report of Univ. of Kansas 14 (1955), 77-94.

[5] *W. Beckner* Inequalities in Fourier Analyse in $\mathbb{R}^n$, Proc.Nat.Acad.Sci.USA 72(1975),on.2,638-641

[6] *H.Brézis*. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques appliquées pour la maitrise. Masson, Paris, 1983. In French.

[7] *H.Brézis*. Functionnel analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations. Springer 2011.

[8] *W. Beckner*, Inequalities in Fourier Analysis in $\mathbb{R}^n$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72 (1975), no. 2, 638-641.

[9] *E. Gagliardo*, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, Ricerche Mat. 7 (1958), 102-137.

[10] *G. Leoni*, A first course in Sobolev spaces. Graduate Studies in Mathematics 105, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009

[11] *L. N. Slobodeckij*, Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Učep.Zap. 197 (1958), 54-112.

[12] *M. J. Grote and C. Kirsch*, Dirichlet-to-Neumann boundary conditions for multiple scattering problems, J. Comput. Phys.201 (2004), no. 2, 630-650.

[13] *M. Tucsank*, Distributions et équation fondamentales de la physique.cours pour les étudiants en maitise de mathémathiques,www.iecn.u-nancy.fr/tucsnak/coursdibpol

[14] *O. Savin and E. Valdinoci*, Density estimates for a nonlocal variational model via the Sobolev inequality, to appear in SIAM J.Math. Anal., available online at.

[15] *O. V. Besov*, On a certain family of functional spaces. Embedding and continuation theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 126 (1959),

[16] *Strichartz,R.S.* Aguide to distribution theory and Fourier transforms. World scientific Publishing Co.Inc.2003 1163-1165.

[17] *O. V. Besov*, On some conditions of membership in $L^p$ for derivatives of periodic functions, Naucn. Dokl. Vyss. Skoly. Fiz.-Mat. Nauki (1959), 13-17.

[18] *F. Golse.* Distributions, analyse de Fourier et EDP. Cours centre mathématiques Laurent Schwartz, (https ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/)

[19] *Paul Krée.* intégration et théorie de la mesure Une approche géométrique(1997.Ellipses Marketing)

[20] *Servadei, R., Valdinoci, E.* : Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators. J. Math. Anal. Appl.389,887C-898 (2012)

[21] *V. Maz'ya*, Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 342. Springer, Heidelberg, 2011.

[22] *H. Brezis*, T. Cazenave, Y. Martel and A. Ramiandrisoa, Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, Adv. Differential Equations 1(1996)73Ũ90

[23] W. P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions : Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

99