République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Application du principe du point fixe dans la résolution de quelques problèmes aux limites

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Khalfallah **A**bdelkader [1]

Sous la direction de

Mme Safia **B**enmansour

Soutenue le 13/07/2019 devant le jury composé de

A. Mattalah	Ecole Supérieure de Management - Tlemcen	Président
S. Benmansour	Ecole Supérieure de Management - Tlemcen	Encadreur
N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : khalfallah.abdelkader93@gmail.com

Table des Matières

Introduction **5**

1 Préliminaires **7**

1.1 Définitions 7

1.1.1 **Espace vectoriel normé** 7

1.1.2 **Espace métrique** 8

1.1.3 **Espaces de Banach** 9

1.1.4 **Quelques notions de topologie** 10

2 Principe de l'application contractante **15**

2.1 Application contractante 15

2.1.1 Théorème du point fixe de Banach ou principe de l'application contractante 16

2.1.2 Théorème du point fixe de Picard 19

2.1.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii 19

2.1.4 Quelques extensions: 20

3 Existence et unicité des solutions positives pour un problème à valeur sur le bord de Neumann **23**

3.1 Résultats auxilliaires 24

3.2 Résultat principal 31

3.3 Problème modifié 33

Conclusion **37**

Bibliographie **37**

Remerciements

En premier lieu, je remercie le Bon Dieu, le Tout Puissant, de m'avoir donné la force pour acomplir ce travail, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je remercie vivement mon encadreur, Madame S. Benmansour, pour avoir dirigé ce travail; elle a fait preuve de patience et beaucoup de compétences.

Merci pour votre rigueur scientifique et la confiance que vous m'avez accordée au cours de l'élaboration de ce mémoire; merci pour la pertinence de vos critiques ainsi que vos suggestions précieuses. Veuillez trouver dans ce manuscrit une petite partie de mon infinie reconnaissance.

Je remercie également Madame A. Matallah pour avoir accepté de présider mon jury.

Mes vifs remerciements vont à Mesdames N. Bekkouche et F. Z. Mostefai pour avoir accepté d'évaluer ce travail et de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur D. Djebouri, Chef du département de mathématiques de l'université Taher Moulay, pour sa disponibilité et pour les efforts consentis afin de nous assurer les meilleures conditions de travail, et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation ainsi que les responsables de notre département.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce modeste mémoire.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux êtres qui me sont les plus chers dont je cite :

Les parents les plus chers au monde, que Dieu les garde et les protège.

Mes Soeurs Amina, Karima, Aicha, Naima et mon frère Chahredinne.

Mes chers neveux Souhil et Siradj el mounir.

Ma camarade Bouchra à qui je souhaite une vie pleine de joie et de réussite.

Tous mes amies, particulièrement: Soufiane, Mounir, Amine et Adel.

Toute la promotion 2019 de Master analyse mathématique, université de Saida.

Introduction

L'ambition de ce mémoire est d'illustrer quelques applications du principe du point fixe, ce fameux concept purement mathématique qui a marqué une étape et non des moindres, dans le développement de l'analyse non linéaire.

Force est de constater que la notion du point fixe appuie par ses grandes mesures le passage du monde académique vers celui de l'application. En effet, elle reste trés prisée vu l'étendue de son champs d'applications à priori, dans l'étude des équations non linéaires qui jouent un rôle crucial aussi bien en mathématiques qu'en sciences appliquées.

Le principe du point fixe a été introduit en premier lieu, par Banach en 1922; celui-ci affirme qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique, de plus il fournit un algorithme de calcul numérique permettant l'approximation du point fixe par un procédé itératif. Ce point de vue est constructif et puissant; il permet notamment d'introduire les éléments théoriques qui conduiront à la résolution du problème plus précisèment à démontrer l'existence et l'unicité de la solution en s'appuiyant sur les considérations théoriques de façon à fournir naturellement un moyen d'approcher la solution qui, bien souvent, n'est pas calculable explicitement autrement.

Ce résultat étant crucial, a atiré l'attention de plusieurs mathématicien; en effet, il été développé par Brouwer et Schauder en 1930 ainsi que Krasnosel'skii en 1955. Leurs efforts ont été couronnés par des résultats théoriques contribuant à la résolution de quelques problèmes comme par exemple s'assurer de l'existence des solution pour certaines équations différentielles cependant, sans avoir à les déterminer.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre est introductif; il est consacré aux préliminaires. On y trouve des définitions et propriétés de base relatives aux espaces fonctionnelles en vigueur ainsi que quelques notions de topologie utiles . De surcroit, on y introduit la définition du cône qui va partiellement ordonner l'espace en question et sera l'ensemble approprié pour la quête des solutions.

Dans le deuxième chapitre, est développée le principe de l'application contractante ainsi que quelques résultats fondamentaux. Précisons que l'application contractante ou contraction est inhérente au principe du point fixe; à cet effet on ne saurai les dissocier. Pour une bonne illustration nous avons jugé utile d'énoncer les théorèmes d'existence du point fixe pour des applications jouissant de la propriété de la contraction à priori; le principe de l'application contractante de Banach et à postériori celui de Picard et de Krasnosel'skii.

Le troisième chapitre constitue l'objectif principal de ce mémoire, nous y abordons quelques applications où le principe du point fixe s'implique pour établir l'existence et l'unicité des solutions de quelques classes de problèmes à valeurs sur le bord. Les résultats principaux de cette partie sont dévelopés dans la publication internationale:

Safia Benmansour and Mohammed Bouchekif, Existence and uniqueness of positive solutions for Neumann boundary-value problem. Electron. J. Diff. Equ. Vol(2011). No 118. pp 1-5.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour principal objectif de donner les définitions des principales notions qui interviennent dans ce mémoire .Il permettra de mener à bien la compréhension des parties qui suivront.

1.1 Définitions

La notion d'espace étant de rigueur dans ce mémoire, nous présentons en premier lieu leurs définitions, les différents types d'espace qui prendront part, leurs propriétés ainsi que les normes associées.

1.1.1 Espace vectoriel normé

Nous allons définir une notion fondamentale de l'Analyse fonctionnelle. Il s'agit de la norme. Nous en donnerons quelques exemples les plus répandus.

Définition 1.1 *Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée norme si, et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées:*

(i) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, *pour* $x \in E$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E : N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

(iii) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$. *(Inégalité triangulaire).*

Remarques:

1) Si N désigne une norme, on a pour tout élément x de l'espace vectoriel E, $N(x) \geqslant 0$. Par conséquent, on peut écrire : $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

2) La norme sur E, est en général notée $\|.\|$ ainsi pour $u \in E$ donné, le nombre réel positif $\|u\|$est appellé norme de u.

Exemple 1 *La norme la plus connue est la norme euclidienne définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par:*

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) \longmapsto (x^2 + y^2)^{1/2} \end{aligned}$$

L'application:

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) \longmapsto (|x| + |y|) \end{aligned}$$

est aussi une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.2 *Un espace vectoriel (e.v,n en abrégé) est la donnée d'un couple* $(E, \|.\|)$ *où* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$ *et* $\|.\|$ *est une norme sur* E.

1.1.2 Espace métrique

Toute aussi importante que la norme, la notion de distance est de rigueur pour définir un espace métrique.

Définition 1.3 *Soit* E *un ensemble non vide. Une application*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

vérifiant les trois propriétés suivantes:

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad \forall x, y \in E$

$d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall y, x \in E$

$d(x,y,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in E.$

est une distance sur E.

Définition 1.4 *Un espace métrique est la donnée d'un couple (E,d) où E est un espace et d est une distance.*

Exemple 2 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = |x-y| \end{array}$$

définit une distance dite distance usuelle.

Exemple 3 *Soit E un ensemble et $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application définie par:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & si \quad x = y \\ 1, & si \quad x \neq y \end{cases}$$

est une distance discrète, le couple (E,d) est appellé espace métrique discret.

1.1.3 Espaces de Banach

La notion de complétude d'un espace est réellement cruciale. Définissons au préalable la convergence des suites puis introduisons la définition d'une suite de Cauchy.

Définition 1.5 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E converge vers $l \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, , \|u_n - l\| < \varepsilon$$

Définition 1.6 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy dans E si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall m > n_0, \|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.7 *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.*

Remarque:

L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé complet.

Définition 1.8 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

1.1.4 Quelques notions de topologie

Intérieur et Adhérence d'un ensemble

La notion de voisinage est essentielle. Acet effet, définissons la.

Définition 1.9 *Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$ où $B(a, r)$ est la boule de centre a et de rayon r.*

Propriétés:

Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$.

(i) Si A est un voisinage de a et si B est un autre voisinage de a, alors $A \cap B$ est encore un voisinage de a.

(ii) Si A est un voisinage de a et si $A \subset B$, avec $B \subset E$, alors B est un voisinage de a.

(iii) Caractérisation des ouverts : A est ouvert si, et seulement si A est voisinage de chacun de ses points.

Nous allons à présent introduire les notions d'intérieur et d'adhérence.

Définition 1.10 *Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$. On dit que a est intérieur à $A \subset E$ si, et seulement si A est voisinage de a, ou encore, a est intérieur à A si, et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points intérieurs.

Les propriétés suivantes caractérisent l'intérieur de A.

Propriétés:

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.

(i) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

(ii) $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

(iii) A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

Passons à présent à l'adhérence d'un ensemble dans un espace vectoriel normé.

Définition 1.11 *Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé, A, un sous-ensemble de E, $a \in A$.*

a est dit adhérent à A si, et seulement s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que, pour tout $v \in V(a)$, on a: $V(a) \cap A \neq \varnothing$.

Remarque:

La définition précédente est équivalente à:

a est dit adhérent à A si, et seulement si quel que soit $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

On définit donc assez naturellement la notion d'adhérence d'un sous ensemble d'un espace vectoriel normé, exactement de la même façon que nous avions utilisée pour définir l'intérieur d'un sous ensemble d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.12 *L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents de A.*

De même que pour la notion d'intérieur, l'adhérence possède des propriétés caractéristiques:

Propriétés:

Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé, A, un sous ensemble de E, $a \in A$.

(i) $\overline{A}$ est un fermé qui contient A.

(ii) $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Continuité dans les espaces normés

out au long de ce manuscrit, il s'agira de converence et continuité forte, pour cela, on utilisera les normes.

Définition 1.13 *Soient* $(E, \|.\|)$ *et* $(E', \|.\|')$ *deux espaces normés et* $f : E \longrightarrow E'$ *une application .*
f *est continue en* $x_0 \in E$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Elle est dite continue sur E *si elle est continue en tout point de* E*.*

Définition 1.14 *On dit que* f *est uniformèment continue sur* E *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Compacité et convexité

Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E.
On définit un recouvrement de A en se donnant une famille $(B_i)_{i \in I}$ des parties de E dont la réunion contient A.

Définition 1.15 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé.*
On dit que E *est relativement compact si pour tout* $\varepsilon > 0$,*il existe un recouvrement fini de* E *par des paries de* E *dont le diamètre est inférieure à* ε*.*

Définition 1.16 *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.*

Définition 1.17 *Soit $D \subset E$,un opérateur $A : D \longrightarrow E$ est dit compact si pour tout ensemble S borné dans D, $A(S)$ est relativement compact. De plus A est dit complètement continu s'il est continu est compact.*

Définition 1.18 *On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si :*

$$\forall t \in [0,1], \forall (a,b) \in C^2, \quad ta + (1-t)b \in C$$

Remarque:

D'un point de vue géométrique, un convexe est donc un ensemble qui, lorsqu'il contient deux points contient nécessairement le segment les reliant.

Définition d'un cône

Définition 1.19 *Soit E un espace de Banach réél.*
Un sous ensemble convexe P de E est dit cône s' il satisfait :
$x \in P$ *et* $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in P$.
$x \in P$ *et* $-x \in P \Rightarrow x = \theta$ *où* θ *est l'élément nul de* E..

Posons :

$$\overset{\circ}{P} = \{x \in P / x \text{ est point intérieur de } P\}.$$

P est dit cône solide si $\overset{\circ}{p}$ est non vide .

Définition 1.20 *P est dit cône normale s'il existe une constante $N > 0$ telle que pour tout : $x, y \in P$*

$$\theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \| x \| \leqslant N \| y \| .$$

N est dite constante de normalité de P .

Généralités

On définit une relation d'ordre sur E qu'on note " $\leqslant$ " et on dit que E est partiellement ordonné par le cône P si:

$x \leqslant y$ si et seulement si $y - x \in P$.

Si $x_1, x_2 \in E$, l'ensemble :

$$\{x_1, x_2\} = \{x \in E \ / \ x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$$

est dit intervalle ordonné entre $x_1$et x_2.

On dit qu'un opérateur $A : E \longrightarrow E$ est croissant (décroissant) si :

$$x \leqslant y \Rightarrow Ax \leqslant Ay \ (Ax \geqslant Ay).$$

Pour tout $x, y \in E$, la notation $x \sim y$ montre qu'il existe $\lambda > 0, \mu > 0$ telles que

$$\lambda x \leqslant y \leqslant \mu x.$$

$\sim$ est une relation d'équivalence.

Soit donné $h > \theta$ (ie $h \geqslant \theta$ et $h \neq \theta$). On note par P_h l'ensemble :

$$P_h = \{x \in E \ / \ \exists \lambda(x), \mu(x) > 0 \text{ telles que } \lambda(x)h \leqslant x \leqslant \mu(x)h\}.$$

Il est clair que $P_h \subset P$.

Chapitre 2

Principe de l'application contractante

Ce chapitre est consacré à rappeler quelques concepts de base de l'application contractante dont nous avons essentiellement besoin. Nous donnerons à priori, le principe de contraction de Banach qui reste le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe. On y trouve aussi les principaux théorèmes du principe de l'application contractante.

2.1 Application contractante

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application. On dit que T est lipschitzienne de constante $k \geqslant 0$ ou tout simplement k-liptschitzienne, si elle vérifie l'inégalité suivante:

$$d(T(x), T(y)) \leqslant kd(x, y)$$

Remarques

Une application lipschitzienne est nécessairement, continue.

La composition de deux applications lipschitziennes est une application lipschitzienne.

Si T est une application lipschitzienne, T^n , la composition n fois de T avec elle-même est aussi lipschitzienne.

On dit que T est non expansive si $0 \leqslant k \leqslant 1$.

On dit que T est une contraction si $0 \leqslant k < 1$. Dans ce cas la constante de Lipschitz est dite constante de contraction.

Définition 2.1 *Soit (E, d) un espace métrique, et $f : E \to E$ une application, on dit qu'un point $x \in E$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.*

La partie qui suit est consacrée à l'énoncé des différents théorèmes de l'existence du point fixe pour des applications contractantes.

2.1.1 Théorème du point fixe de Banach ou principe de l'application contractante

Le Théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore Théorème du point fixe de Picard, a vu le jour pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Ainsi, nous énonçons le théorème suivant qui est la base du principe du point fixe.

Théorème 2.1 *Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une contraction de constante k. Alors T possède un unique point fixe $x \in M$.*
En plus si $y \in M$ est arbitrairement choisi,alors les itérations $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ données par:

$$x_0 = y,\ x_n = T(x_{n-1}), n \geqslant 1$$

possèdent la propriété $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Preuve: Soit $y \in M$ un point arbitraire.

Considérons la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donnée par:

$$x_0 = y, x_n = T(x_{n-1}), n \geqslant 1.$$

On doit prouver que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans M.

Pour $m < n$,on utilise l'inégalité triangulaire:

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n).$$

Puisque T est une contraction, on a:

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(T(x_{p-1}), T(x_p)) \leqslant kd(x_{p-1}, x_p),\ p \geqslant 1$$

En répétant cette inégalité on obtient :

$$d(x_m, x_n) \leqslant (k^m + k^{m+1} + \cdots + K^{n-1})d(x_0, x_1)$$

ie

$$d(x_m, x_n) \leqslant \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1),\ m < n.$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans M qui est complet donc $(x_n)_n$ converge vers x dans M.

Par ailleurs, puisque T est continue, on a :

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n+1}) \\ &= T(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}) = T(x) \end{aligned}$$

Donc x est bien un point fixe de T.

L'unicité de x: Soient x, y deux points fixes de T .

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leqslant kd(x,y)$$

Puisque $k < 1$, on doit avoir $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$. ■

Le résultat qui suit affirme que même, lorsque la propriété de contraction est locale plus précisèment, si T n'est pas une contraction sur tout l'espace M mais juste au voisinage d'un point donné, le point fixe persiste à exister comme l'indique le théorème suivant: (voir [14])

Théorème 2.2 *Soit* (M,d) *un espace métrique complet et*

$$B = \{x \in M, d(x,z) < \varepsilon, z \in M \ \ et \ \varepsilon > 0\}$$

Soit $T : B \to M$ *telle que*

$$d(T(y),T(x)) \leqslant kd(x,y), \forall x, y \in B \ \ et \ k < 1.$$

On suppose, en plus que

$$d(z,T(z)) < \varepsilon(1-k).$$

Alors T *possède un unique point fixe* $x \in B$.

Preuve: Il n'est pas dit que T soit définie sur $\overline{B}$ (l'adhérence de B).
La continuité uniforme de T nous permet de définir T par prolongement sur $\overline{B}$ où T sera encore une contraction de même constante k. On aura pour $x \in \overline{B}$:

$$d(z, T(x)) \leqslant d(z, T(z)) + d(T(z), T(x)) \leqslant \varepsilon(1-k) + \varepsilon k = \varepsilon$$

Et donc $T : \overline{B} \to B$, $\overline{B}$ étant fermé dans un espace métrique complet, $\overline{B}$ est un sous espace métrique complet et donc on peut appliquer le Théorème 2.1. Par conséquent, T possède un unique point fixe $x = T(x)$ dans $\overline{B}$. Et par le calcul précédent, on a:

$$d(z, T(x)) \leqslant \varepsilon$$

d'où $x \in B$. ■

2.1.2 Théorème du point fixe de Picard

Le Théorème du point fixe de Picard ressemble de près à celui de Banach, en revanche il a l'avantage de nous fournir la vitesse de convergence du procédé itératif.

Théorème 2.3 *Soit $(X; d)$ un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application contractante. Alors T possède un unique point fixe x et pour tout $x_0 \in X$, la suite $T^n(x_0)$ converge vers x, la vitesse de convergence vérifie alors:*

$d(x_0, T^n(x_0)) \leqslant \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1)$

où T^n est la composition n fois de T avec elle-même.

La preuve est similaire à celle du théorème précédent.

2.1.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Introduit pour la première fois en 1955, par Krasnoselskii lui même, ce théorème affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme

de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème doit son efficacité au fait qu'il soit fortement sollicité dans la résolution des équations différentielles non linéaires, en apportant des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Théorème 2.4 *Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X. Soient F et G deux applications de K dans X telles que:*

1. *Pour tout $x, y \in K$, $F(x) + G(y) \in K$*
2. *F est continue et compacte;*
3. *G est contractante de constante $k < 1$*

Alors, il existe $x_* \in K$ tel que $(F + G)(x_*) = x_*$.

2.1.4 Quelques extensions:

Il se peut que l'application T ne soit pas une contraction, ce passage va nous montrer que dans ce cas et sous certaines hypothèses sur T l'existence d'un unique point fixe va encore être démontrée.

Théorème 2.5 *Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que :*

$$d\left(T(x), T(y)\right) < d(x, y), \forall x, y \in M \text{ et } x \neq y$$

Supposons, en plus que $T : M \to K$ où K est un ensemble compact de M. Alors T possède un unique poit fixe dans M .

Preuve: La fonction $x \longmapsto d(T(x), x)$ étant liptschitzienne par définition, elle est donc continue sur K qui est compact, elle y atteint son minimum au point $y \in K$.
Si $T(y) \neq y$ alors : $d(T^2(y), T(y)) < d(T(y), y)$.ceci contredit le fait que $d(T(y), y)$ soit une valeur minimum de la fonction sur K.

■

Remarque:

Il y a des cas où T est Lipschitzienne sans être une contraction. Cependant, une puissance de T, $(T^m) = T \circ T \circ \cdots T$ m fois pour un certain m, peut être une contraction. D'où le résultat suivant.

Théorème 2.6 *Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que*

$$d(T^m(x), T^m(y)) \leqslant kd(x, y), \forall x, y \in M$$

pour u certain $m \geqslant 1$ et $0 \leqslant k < 1$. Alors T possède un unique point fixe .

Preuve: D'aprés le principe du point fixe de Banach, T^m possède un unique point fixe $z \in M$,

$$T^m(z) = z \Rightarrow T(z) = T(T^m(z)) = T^m(T(z))$$

Donc $T(z)$ est aussi un point fixe de T^m est puisqu'il est unique $T(z) = z$ donc z est un point fixe de T.

$$T^m(z) = z \Longrightarrow T(z) = T(T^m(z)) = T^m(T(z))$$

Donc $T(z)$ est aussi un point fixe de T^m est puisqu'il est unique $T(z) = z$ donc z est un point fixe de T ■

Exemple 4 *Soit l'espace métrique M donné par : $M = ([a, b])$. L'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$. M est un espace de Banach par rapport à la norme du max ie*

$$\|u\| = \max_{t \in [a;b]} |u(t)|, u \in M$$

On définit $T : M \longrightarrow M$ *par* $Tu(t) = \int_a^b u(s)ds$ *alors :*

$$\|T(u) - T(v)\| \leqslant (b-a)\|u - v\|.$$

$(b-a)$ *est la meilleure constante de Lipschitz pour* T*.*

D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s u(\tau)d\tau \right) ds = \int_a^t (t-s)u(s)ds$$

et par induction :

$$T^m u(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} u(s)ds.$$

Il s'en suit que:

$$\|T^m(u) - T^m(v)\| \leqslant \frac{(b-a)^m}{m!}\|u - v\|$$

T^m *serait une contaction si* $\frac{(b-a)}{m!} < 1$.

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions positives pour un problème à valeur sur le bord de Neumann

Dans ce chapitre, nous montrerons l'existence et l'unicité des solutions positives pour une équation différentielle du second ordre à conditions sur le bord du type Neumann plus précisèment le problème formulé comme suit:

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)) + g(t) \quad \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{P_m}$$

où m est une constante positive, $f : [0,1] \times [0, s_0) \to [0, +\infty)$ et $g : [0,1] \to [0, +\infty)$ sont des fonctions continues, g non identiquement nulle et s_0 est une constante positive donnée.

L'étude des équations différentielles non linéaires est une question de grande importance et qui persiste à être d'actualité. Ces équations émergent non seulement du domaine des mathematiques mais aussi d'autre branches de la science. Dans la litérature, cette thématique a beaucoup attiré l'attention, un signifiant progrés a été réalisé

essentiellement sur les théorèmes du point fixe sur des espaces de Banach.

Les problèmes à valeurs sur le bords de Neumann sont devenus un axe trés sollicité pour ce type d'équations differentielles, nous citons à titre d'exemple [[1],[29],[8],[18]-[21]]. Ainsi, une grande attention leur fut consacrée pour développer les critères garantissant l'existence et l'unicité des solutions positives pour ce type de problèmes voir [[19],[29]].

Dans ce chapitre, nous allons illustrer les résultats obtenus par Benmansour et Bouchekif dans la publication internationale:

Safia Benmansour and Mohammed Bouchekif, Existence and uniqueness of positive solutions for Neumann boundary-value problem. Electron. J. Diff. Equ. Vol(2011). No 118. pp 1-5. et qui consiste à étendre les résultats de Zhang et Zhai dans [15], d'existence et unicité des solutions positives du problème (P_m) pour $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ à un contexte plus général à savoir, pour une constante positive m arbitraire.

Afin de pouvoir énoncer le résultat principal, nous allons introduire quelques définitions, notations et résultats connus. Pour plus de détails, nous nous référons aux ouvrages [[7],[19]].

Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réel et P un cône dans E. Le cône P définit un ordre partiel dans E dans le sens $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P$, $\forall x, y \in E$.

Un cône P est dit normal s'il existe une constante positive N telle que pour tout $x, y \in E$, $\theta \leqslant x \leqslant y$ implique que $\|x\| \leqslant N \|y\|$, où θ dénote l'élément nul dans E. Soit donné $h > \theta$ (i.e. $h - \theta \in P$ et $h \neq \theta$), on note P_h l'ensemble

$$\{x \in P \setminus \exists\, \lambda(x); \mu(x) > 0 \mid x - \mu(x)\, h \in P \text{ et } \lambda(x)\, h - x \in P\}.$$

3.1 Résultats auxilliaires

Rappelons à présent, le Théorème du point fixe pour les opérateurs α-concaves généraux qui va constituer notre outil principal pour assurer l'existence et l'unicité des solutions positives dans P_h pour le problème $x = Ax + x_0$ où x_0 est donnée.

Introduisons la définition suivante.

Définition 3.1 *L'opérateur $A : P_h \to P_h$ est dit opérateur α-concave général s'il satisfait:* *Pour tout $x \in P_h$ et $t \in [0,1]$, il existe $\alpha(t) \in [0,1]$ telle que $A(tx) \geq t^{\alpha(t)} A(x)$.*

Le lemme suivant sera utile pour démontrer le résultat principal de cette partie.

Lemme 5 *[6]Supposons que A satisfait les conditions suivantes:*

(H_1) $A : P_h \longrightarrow P_h$ est croissant dans P_h
$(H_2)$$\forall x \in P_h$ et $t \in (0,1)$,il existe $\alpha(t) \in (0,1)$ tel que : $A(tx) \geqslant t^{\alpha(t)} Ax$.
Alors il existe $u_0, v_0 \in P_h$ tele que $u_0 < v_0, u_0 \leqslant Au_0 \leqslant Av_0 \leqslant v_0$.

Soit l'hypothèse (H_3): il existe une constante $l \geqslant 0$ telle que $x_0 \in [\theta, lh]$.
Le théorème suivant est crucial.

Théorème 3.1 *Supposons que l'opérateur A satisfait $(H_1), (H_2)$ et (H_3). Alors l'équation opérateur $x = Ax + x_0$ admet ue solution unique dans P_h.*

Preuve: $Ax \in P_h$ pout tout $x \in P_h$. Alors il existent $\lambda, \mu > 0$ telles que :

$$\lambda h \leqslant Ax \leqslant \mu h.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \lambda h &\leqslant Ax + x_0 \leqslant \mu h + lh = (\mu + l)h. \\ Ax + x_0 &\in P_h, \forall x \in P_h. \end{aligned}$$

Définissons un opérateur C par:

$$Cx = Ax + x_0 \qquad \forall x \in P_h$$

$C : P_h \longrightarrow P_h$ est croissant. Donc, pour tout $x \in P_h$ et $t \in (0,1)$ on sait que

$$C(tx) = A(tx) + X_0 \geqslant t^{\alpha(t)}Ax + x_0 \geqslant t^{\alpha(t)}(Ax + x_0) \geqslant t^{\alpha(t)}Cx$$

Le lemme précédent implique l'existence de $u_0, v_0 \in P$ tels que

$$u_0 < v_0 \ , u_0 \leqslant Cu_0 \leqslant Cv_0 \leqslant v_0 \quad (*)$$

Construsions, successivement, la suite:

$$u_n = Cu_{n-1}, v_n = Cv_{n-1}, n = 1, 2, ...$$

C étant croissant, on a

$u_1 = Cu_0 \leq Cv_0 = v_1$. Et en général, on obtient $u_n \leqslant v_n, n = 1, 2, \ldots$

On obtient de (*) et la monotonie de C

$$u_0 \leqslant u_1 \ldots < u_n \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v_1 \leqslant v_0 \quad (**) \ .$$

Soit

$$t_n = \sup \{t > 0 / u_n \geqslant tv_n\} .$$

Alors $u_n \geqslant t_n v_n, n = 1, 2, \ldots$

$$u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant t_n v_n \geqslant t_n v_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$$

or on a

$$u_{n+1} \geqslant t_{n+1}v_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$$

avec

$$t_{n+1} = \sup\{t > 0 / u_{n+1} \geqslant tv_{n+1}\}$$

donc

$$t_{n+1} \geqslant t_n$$

$(t_n)_n$ est par conséquent croissante et puisque $(t_n)_n \subset [0, 1]$ (ie bornée) elle est donc convergente.

Supposons que $t_n \longrightarrow t^*$ alors $t^* = 1$. Sinon $0 < t^* < 1$.

Si $0 < t^* < 1$, on distingue deux cas:

1.Il existe un entier N tel que $t_N = t^*$. Dans ce cas, on sait que $t_n = t^*$ pour tout $n \geqslant N$. Donc pour $n \geqslant N$ on a:

$$u_{n+1} = Cu_n \geqslant C(t^*v_n) \geqslant t^{*\alpha(t^*)}v_{n+1}$$

On a $t_{n+1} = t^*$(car $t_n = t^*$ pour tout $n \geqslant N$)

$t_{n+1} = t^* \geqslant t^* > t^*$ d'où la contradiction .

2.Pour tout entier $n, t_n < t^*$ on obtient:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Cu_n \geqslant C(t_nv_n) = C\left(\frac{t_n}{t^*}t^*v_n\right) \\ &\geqslant \left(\frac{t_n}{t^*}\right)^{\alpha\left(\frac{t_n}{t^*}\right)} C(t^*v_n) \geqslant \left(\frac{t_n}{t^*}\right)^{\alpha\left(\frac{t_n}{t^*}\right)} t^{*\alpha(t^*)}C(v_n) \\ &\geqslant \frac{t_n}{t^*}t^{*\alpha(t^*)}v_{n+1} \geqslant t_n\left[t^{*\alpha(t^*)}\right]v_{n+1} \geqslant t_n\left[t^{*\alpha(t^*)-1}\right]v_{n+1} \end{aligned}$$

Par définition de t_n,

$$t_{n+1} \geqslant t_n\left[t^{*\alpha(t^*)-1}\right].$$

Quand $n \to \infty$,on aura:

$$\begin{aligned} \theta &\leqslant u_{n+p} - u_n \leqslant v_n - u_n \leqslant v_n - t_n v_n \leqslant (1 - t_n)v_n \leqslant (1 - t_n)v_0 \\ \theta &\leqslant v_n - v_{n+p} \leqslant v_n - u_n \leqslant (a - t_n)v. \end{aligned}$$

Puisque P est normale de constante N , on aura :

$$\begin{aligned} \|u_{n+P} - u_n\| &\leqslant N(1 - t_n)\|v_0\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty (\text{car } t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1) \\ \|v_n - v_{n+p}\| &\leqslant N(1 - t_n)\|v_0\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

Donc $u^* = v^*$. Soit $x^* := u^* = v^*$. On obtient

$$u_{n+1} = Cu_n \leqslant Cx^* \leqslant Cv_n = v_{n+1}.$$

Quand $n \to +\infty$, on aura $x^* = Cx^*$, x^* est donc un point fixe de C dans P_h.
Dans ce qui suit, on va prouver que x^*est l'unique point fixe de C dans P_h.
Soit

$$t_1 = \sup\{t > 0 / \overline{x} \geqslant tx^*\}$$

$\overline{x}$ étant un quelconque point fixe de C dans P_h, $0 < t_1 < \infty$ et $\overline{x} \geqslant t_1 x^*$. On doit prouver que $t_1 \geqslant 1$.
Si $0 < t_1 < 1$ alors:

$$\overline{x} = C\overline{x} \geqslant C(t_1 x^*) \geqslant t_1^{\alpha(t_1)} x^*.$$

Puisque $t_1^{\alpha(t_1)} > t_1$, ceci contredit la définition de t_1. Alors $t_1 \geqslant 1$ et donc $\overline{x} \geqslant t_1 x^* \geqslant x^*$ et de façon similaire on prouve que $x^* \leqslant \overline{x}$ ce qui implique que $x^* = \overline{x}$, donc C possède un point fixe x^*dans P_h. On en déduit que l'équation $x = Ax + x_0$ possède une solution

unique dans P_h. ■

Application 1

Soit $E = C_\beta(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions bornées et continues sur $\mathbb{R}^N$ muni de la norme

$$\|x\| = \sup |x(t)| .$$

E est un espace de Banach réel.L'ensemble $P = C_\beta^+(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions non négatives dans $C_\beta(\mathbb{R}^N)$ est un cône normal et solide dans $C_\beta(\mathbb{R}^N)$

On note $h \equiv 1$ et on considère l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0(t) + \int_R K(t,s) f(x(s)) ds \tag{1}$$

où $x_0 \in P$, $f : P_h \to P_h$ croissante et pour $0 < \lambda < 1$ il existe $0 < \alpha(t) < 1$ tel que

$$f(\lambda x) \geqslant \lambda^{\alpha(\lambda)} f(x) \forall x \in P_h \tag{*}$$

Conclusion 6 *Supposons : $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ est continue et non négative. Alors l'équation* (1) *admet une solution unique dans P_h.*

Preuve: Il est claire que $x_0 \in [0, \|x_0\| h]$.

Définissons un opérateur A par :

$$Ax(t) = \int_{R^N} K(t,s) f(x(s)) ds$$

Notons que $K(t,s) \geqslant 0$, f est croissante, on déduit que :

$$A : P_h \to P_h$$

est croissant pour $\lambda \in (0,1)$ et $x \in P_h$, on a d'après $(*)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda x(t)) &= \int_{R^N} K(t,s) f(\lambda x(s)) ds \geqslant \int_{R^N} K(t,s) \lambda^{\alpha(\lambda)} f x(s)) ds \\ &\geqslant \lambda^{\alpha(\lambda)} \int_{R^N} K(t,s) f(x(s)) ds \geqslant \lambda^{\alpha(\lambda)} A x(t) \end{aligned}$$

Donc les hypothèses (H_1) (H_2) et (H_3) du Théorème 3.1 sont vérifiées et par conséquent, l'équation (1) admet une solution unique dans P_h . ■

Application 2

Soit $E = C[0,1]$, $p = \{x \in E / x(t) \geqslant 0,\ t \in [0,1]\}$ et

$$h(t) = \int_0^1 K(t,s) ds$$

On suppose que $K(t,s) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ est continue.

Conclusion 7 *Soit* $x_0 \in \overset{\circ}{P}$ *et* $x_0(t) + h(t) \leqslant 1$, $t \in [0,1]$. *Alors l'équation*

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^1 K(t,s) x(s) ds \tag{2}$$

admet une solution unique dans $\overset{\circ}{P}$.

Preuve: Il est facile d'établir que $\overset{\circ}{P} = \{x \in E / x(t) \geqslant 0, t \in [0,1]\}$.

P est un cône normal de constante égale à 1. Pour $x \in E$, définissons l'opérateur:

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s) x(s) ds$$

Evidemment: $A : \overset{\circ}{P} \to \overset{\circ}{P}$ est croissant. $K(t,s)$ est continue donc A est complètement continue. De plus

$$A(\lambda x(t)) = \int_{R^N} K(t,s)\lambda x(s)ds = \lambda Ax(t), \lambda < 0 \to A \text{ est homogène}$$

On a pour $v_0(t) = 1$, $\forall t \in (1,0)$

$$Av_0(t) + x_0(t) = \int_0^1 K(t,s)ds + x_0(t) = h(t) + x_0(t) \leqslant 1$$

Alors $Av_0 \leqslant v_0 - x_0$ (pour $v_0 \equiv 1$)

Donc toutes les conditions sont vérifiées, l'équation (2) admet une solution unique dans $\overset{\circ}{P}$. ■

3.2 Résultat principal

Dans cette partie, nous allons donner les hypothèses et le résultat principale d'existence et unicité de la solution pour le problème (P_m). A cet effet, rappelons qu'une solution positive du problème (P_m) est une fonction $u(t) \in C^2([0,1])$, qui est positive pour $0 < t < 1$, et satisfait l'équation différentielle et les conditions sur le bord dans (P_m).

Dans ce qui suit, nous considérons l'espace de Banach $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|u\|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Soit $G_m(t,s)$ la fonction de Green pour le problème à valeurs sur le bord

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u(t) = 0 \quad \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

alors,

$$G_m(t,s) = \frac{1}{m \sin m} \begin{cases} \cos ms \cos m(1-t), \text{ si } \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \\ \cos mt \cos m(1-s), \text{ si } \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour plus d'explications, nous nous référons à l'ouvrage [[23]].

Soit P l'ensemble défini par

$$\{x \in E \quad \text{telles que } x(t) \geqslant 0 \ \text{ pour } t \in [0,1]\},$$

le cône normal dont la constante de normalité est 1, et

$$P_h := \{x \in P \quad \backslash \quad \exists\, \lambda(x)\,; \mu(x) > 0 \text{ telles que } \mu(x)\, h \leqslant x \leqslant \lambda(x)\, h\}$$

où h est une fonction strictement positive qui appartient à E.

Soient $m \in \mathbb{R}^{*+}$, et m_1 choisie arbitrairement dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ telle que $m^2 = m_1^2 + m_2^2$.

Considérons les hypothèses suivantes:

(f_1) $f(t,s)$ est croissante en $s \in (0, s_0)$ pour t fixé dans $[0,1]$ et $f'_s(t,0) = +\infty$;

(f_2) Pour tout $\gamma \in (0,1)$, $s \in (0, s_0)$, il existe $\varphi(\gamma) \in (\gamma, 1]$ telle que

$$f(t, \gamma s) \geqslant \varphi(\gamma)\, f(t,s), \quad \text{pour } t \in [0,1].$$

(g) Il existe $s_1 \in (0, s_0)$ telle que

$$|g|_0 \leqslant (m_1 \sin m_1 + m_2^2) s_1 - f(t, s_1) \quad \forall t \in [0,1],$$

où $|g|_0 := \max\limits_{t \in [0,1]} |g(t)|$.

Nous donnons à présent, notre résultat principal.

Théorème 3.2 *Supposons que* (f_1), (f_2) *et* (g) *sont satisfaites. Alors, le problème* (P_m)

avec $m \in \mathbb{R}^{*+}$ *possède une solution unique dans* P_h, *où*

$$h(t) = \cos m_1 t \cos m_1 (1-t), \ t \in [0,1] \ \text{ et } m_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ \text{ telle que } m^2 = m_1^2 + m_2^2.$$

Dans la partie qui suit, nous allons introduire un problème modifié.

3.3 Problème modifié

Avant de formuler ce problème modifié, nous allons rappeler les résultats de Zhang et Zhai [[15]].

Ces derniers ont étudié le problème:

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u(t) = \widetilde{f}(t, u(t)) + g(t) \quad \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \qquad (\tilde{\mathcal{P}}_m)$$

Sous les hypothèses suivantes:

(H_1) $\widetilde{f}(t,s)$ est croissante en $s \in \mathbb{R}^+$pour t fixé.

(H_2) Pour tout $\gamma \in (0,1)$, il existe $\varphi(\gamma) \in (\gamma, 1]$ telle que

$$\widetilde{f}(t, \gamma s) \geqslant \varphi(\gamma) \widetilde{f}(t,s), \quad \text{pour } t \in [0,1].$$

(H_3) Pour tout $t \in [0,1]$, $\widetilde{f}(t, \cos^2 m) > 0$,

Les auteurs ont obtenu pour $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, les résultats suivants voir [15]].

Théorème 3.3 *Supposons que* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *sont vérifiées. Alors, le problème* (P_m) *avec* $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *possède une solution unique dans* P_h, *où*

$$h(t) = \cos mt \cos m(1-t), \qquad t \in [0,1].$$

Remarque:

Cette solution est donnée explicitement par

$$u(t) = \int_0^1 G_m(t,s) f(s,x(s)) ds + \int_0^1 G_m(t,s) g(s) ds.$$

Pour prouver notre résultat principal, nous allons faire usage du théorème précédent en introduisant le problème modifié $\left(\tilde{P}_{m_1}\right)$ qui va ramener le problème (P_m) pour $m_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} u''(t) + m_1^2 u(t) = \tilde{f}(t, u(t)) + g(t) \quad \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \qquad (\tilde{\mathcal{P}}_{m_1})$$

où

$$\tilde{f}(t,s) = \begin{cases} f(t,s) - m_2^2 s \quad \text{si} \quad s \leqslant s_2 \\ \\ \mu(t,s_2)\, s^{\alpha} \qquad \text{si} \qquad s \geqslant s_2, \end{cases}$$

$\mu(t,s_2) = (f(t,s_2) - m_2^2 s_2)\, s_2^{-\alpha}$ étant une fonction continue positive pour $t \in [0,1]$, $\alpha \in (0,1)$ fixé et $s_2 = \min(s_1, s_2')$ où s_2' est une constante que nous définirons ultérieurement.

Dans un premier temps, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution positive pour le problème modifié $\left(\tilde{P}_{m_1}\right)$ pour cela nous utiliserons le théorème précédent. Tout d'abord, nous prouvons que l'hypothèse (H_1) reste vérifiée pour $\tilde{f}(t,s)$. En effet, de la condition (f_1) et pour $m_2^2 > 0$, il existe $s_2' > 0$ telle que

$$\frac{f(t,r_2) - f(t,r_1)}{r_2 - r_1} \geqslant m_2^2 \text{ pour tout } 0 \leqslant r_1 < r_2 < s_2'.$$

Par conséquent, $\tilde{f}(t,s)$ est croissante en $s \in \mathbb{R}^+$ pour $t \in [0,1]$.

En second plan, nous montrons que l'hypothèse (H_3) est bien satisfaite.

Nous savons que pour tout $\gamma \in (0,1)$, $s \leqslant s_2$, il existe $\varphi_1(\gamma) \in (\gamma, 1]$ telle que

$$f(t, \gamma s) \geqslant \varphi_1(\gamma) f(t, s), \text{ pour } t \in [0,1].$$

Alors, pour $s \leqslant s_2$, nous avons:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, \gamma s) &= f(t, \gamma s) - m_2^2 \gamma s \\ &\geqslant \varphi_1(\gamma) f(t, s) - m_2^2 \gamma s \\ &\geqslant \varphi_1(\gamma) \tilde{f}(t, s) \end{aligned}$$

Pour $s \geqslant s_2$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, \gamma s) &= \mu(t, s_2) (\gamma s)^{\alpha}(t) \\ &= \gamma^{\alpha} \tilde{f}(t, s). \end{aligned}$$

Choisissant

$$\varphi_2(\gamma) = \min(\varphi_1(\gamma), \gamma^{\alpha}),$$

nous déduisons le résultat désiré.
Finalement, nous constatons qu'il est clair que

$$\tilde{f}\left(t, \cos^2 m_1\right) > 0.$$

Par conséquent, nous concluons que le problème $\left(\tilde{P}_{m_1}\right)$ admet une solution unique $\tilde{u}$ dans P_h.
Dans la partie qui suit, nous allons montrer que cette solution est bien celle de notre problème initial.

Pour conclure que $\tilde{u}$ est aussi solution du problème (P_m), il suffit de montrer que $\|\widetilde{u}\|_0 \leqslant s_2$. La solution $\widetilde{u}$ est donnée par

$$\widetilde{u}(t) = \int_0^1 G_{m_1}(t,s)[\widetilde{f}(s,\widetilde{u}(s)) + g(s)]ds.$$

Observons que $|G_{m_1}(t,r)| \leqslant (m_1 \sin m_1)^{-1}$ pour tout $t, r \in [0,1]$.

Ainsi, on obtient l'estimation suivante

$$\|\widetilde{u}\|_0 \leqslant \overline{\mu}(s_2)(m_1 \sin m_1)^{-1} \|\widetilde{u}\|_0^{\alpha} + |g|_0 (m_1 \sin m_1)^{-1},$$

où

$$\overline{\mu}(s_2) := \max_{t\in[0,1]} (f(t,s_2) - m_2^2 s_2) s_2^{-\alpha}.$$

Soit

$$h(s) := s - \overline{\mu}(s_2)(m_1 \sin m_1)^{-1} s^{\alpha} - |g|_0 (m_1 \sin m_1)^{-1}.$$

Il est suffisant que $h(s_2) \geqslant 0$ pour conclure que $\|\tilde{u}\|_0 \leqslant s_2$ ce qui est vérifié grâce à l'hypothèse (g).

Nous concluons que $\tilde{u}$ est aussi solution unique du problème (P_m) dans P_h avec

$$h(t) = \cos m_1 t \cos m_1 (1-t), t \in [0,1].$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé le principe du point fixe; nous nous sommes particulièrement intéressés à son application dans la résolution de quelques problèmes à valeurs sur le bord. Dans un premier temps, nous avons insisté sur le principe de l'application contractante; à cet effet, certains théorèmes notamment de Banach, Picard et Krasnoselskii furent de mise. Puis, nous nous sommes penchés sur l'aspect pratique en donnant quelques applications rehaussant l'intervention de cet outil, ô combien utile et constructif, dans la résolution de quelques classes d'équations différentielles avec conditions sur le bord.

La thématique développée est très intéressante et d'actualité et peut donner lieu à plusieurs perspectives de recherche.

Bibliographie

[1] A. Bensedik, M. Bouchekif, Symmetry and uniqueness of positive solutions for Neumann boundary value problem, Appl. Math. Lett. 20 (2007) 419-426.

[2] A. Granas, Continuation methods for contractive maps, Methods nonlinear anal, 3(1994375-379.

[3] C. Bessaga, On the converse of the Banach fixed – point principle, colloq.Math.,7 (1959), pp. 41-43.

[4] C.B Zhaï, X.M Cao, Fixed point theorems for singular comp-Maths-app 59 (2010).

[5] C. B. Zhai, X.M. Cao, Fixed point theorems for τ-φ-concave operators and applications, Comput. Math. Appl., 59 (2010) 532-538.

[6] C.B. Zhaï, C. Yang, C.M Guo, positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications comp-Maths-App-56 (2008).

[7] D. Guo and V. Laksmikantham, Nonlinear problems in abstract cone, Academic Press Inc. Boston (USA), 1988.

[8] D. Jian, H. Lin, D. O'Regan, R. P. Agarwal, Positive solutions for second order Neumann boundary value problem, J. Math. Res. Exposition 20 (2000) 360-364.

[9] D. O'regan, Fixed point theorem for non linear operators, J.Math Anal. Appl. 202 (1996). 413-432.

[10] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Rev. 18 (1976) 620-709.

[11] J. Mawhin, Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems, Arch. Math.2, Brno, 12 (1976), pp. 67–74.

[12] J. Mawhin, Two point boundary value problems for nonlinear second order differential equations in Hilbert space, Tohoku Math. J., 32 (1980), pp. 225–233.

[13] J. Sun, W. Li, S. Cheng, Three positive solutions for second order Neumann boundary value problems, Appl. Math. Lett. 17(2004) 1079-1084.

[14] J. Weissinger, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, Math.Nachrichten, 8 (1952), pp. 193–212.

[15] J. Zhang, C.B. Zhai, Existence and uniqueness results for perturbed Neumann boundary value problems, Bound. Value Probl. (2010), doi: 10.1155/2010/494210.

[16] K. Goebel and W.A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge univ. Press,1990.

[17] K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer, New York, 1995.

[18] L. Mays, J. Norbury, Bifurcation of positive solutions for Neumann boundary value problem, Anziam J. 42 (2002) 324-340.

[19] M. A. Krasnoselskii, Positive solutions of operators equations, Noordhooff, Groningen, 1964.

[20] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contraction mappings, J. London Math Society, 37 (1962), pp. 74-79.

[21] M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc, 12 (1961), pp. 7-10.

[22] M. Frigon, On continuation methods for contractive and non expansive mappings, Recent advance in metric fixed point theory, Universidad de Sevilla 1996, 19-30.

[23] R. Courant, D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Wiley (New York), 1983.

[24] R.P. Agarwal, D. O'regan, D.R. Sahu, Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, Springer.

[25] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O'regan, Fixed point theory and applications, Cambridge university press.

[26] S. Benmansour, M. Bouchekif, Existence and uniqueness of positive solutions for Neumann boundary-value problem. Electron. J. Diff. Equ. Vol(2011). No 118. pp 1-5.

[27] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, New York, 1966.

[28] Y.P. Sun, Y. Sun, Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems, Electronic. J. Diff. Equ, Vol (2004) N°133, pp1-8.

[29] Y.Z. Chen, Continuation method for α-sublinear mappings, Proc. Am. Math. Soc. 129(2001)203-210.