République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Algèbres de Lie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Touati Mohamed [1]

Sous la direction de

D.Djebbouri

Soutenu le 15/07/2019 devant le jury composé de

A. Zeglaui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
D. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. gdtouati@gmail.com

بسم الله الرحمن الرحيم

- «Dédicace » -

Prière et Salut soient sur Notre Cher Maître & Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons. Je dédie ce modeste travail :

À Ma Très Chère Mère

qui a toujour cru en moi et qui m'a offert son soutien moral et affecti, sans ses encouragements permanents et sa présence, que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur et te protège de tout mal ;

À Mon Très Cher Père

qui soit un ami et un frère avant tous, je te dois ce que je suis aujourd'hui Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie ;

À Mes Trés chères soeurs : Fatiha, Rekia, Fatima, et Rebha

À tous ma famille

je cite en particulier mes grand père et mes grand-mère mes tantes, mes oncles ainsi que leurs enfants.

À mon frère H.Islam et tous mes chers amis et mes collègues de l'université de Saida ;

Et à tous ce qui m'ont enseigné au long de ma vie scolaire, et les autres que j'ai obliés veuillez m'excuse.

-« Remerciements »-

Tout d'abord, je remercie le Dieu, notre créateur de m'avoir donné la force, la volonté et la patience nécessaire afin d'accomplir ce travail modeste.

En premier lieu, je tiens à remercier mon encadreur **Dr. D. Djebbouri** pour m'avoir guidé, encouragé, et surtout ses judicieux conseils, tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier très sincèrement l'ensemble des membres de laboratoire de la geométrie diférentielle spécialement **Mr. A. Zeglaui** pour ses aides, ses remarques constructives, ses orientations, et ses conseils.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements aux membres du jury **Mr. A. Zeglaui, Pr. S. Ouakkas** et **Mr. K. Djerfi** pour s'intéresser au sujet et avoir accepté de lire ce mémoire

J'adresse mes sincéres remerciements à mes chers parent set mes sœurs pour leur encouragement.

Je remercie vivement tous les étudiants de master geometrie différentielle, analyse et asspa pour leur amitié et leur confiance

Finalement,

je tiens à exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé et assisté durant mes études et qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuele afin de realiser ce mémoire.

Touati Mohamed

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, j'ai présenté un ensemble de définition et des propriétés comme Centre d'une algèbre,Idéaux dans les algèbre de Lie,morphisme d'algèbre de Lie, forme de Killing de l'agèbre de Lie et leur calassification algèbres de Lie nilpotentes, algèbres de lie résolubles et algèbres de Lie semi-simples . . .)

Mots-clés : Algèbre de Lie, morphisme d'algèbre de Lie, Idéaux dans les algèbre de Lie, forme de Killing ,(algèbre de Lie nilpotentes, algèbre de lie résolubles, algèbre de Lie semi-simples.

Abstract

In this work, I presented a set of definitions and properties as the center of an algebra, Ideals in Lie algebra, Lie algebra morphism, Lie's Killing form and thier calassification (nilpotents Lie algebras, resolbles Lie algebras, and semisimples Lie algebras . . .)

Keywords : Lie algebra, Lie algebra morphism, Ideals in Lie algebra, Lie's Killing form, nilpotent Lie algebra, resolble Lie algebra, and semisimple Lie algebra.

Introduction

Sophus Lie lui-même considérait que la théorie des « groupes continus » (au sens actuel les groupes topologiques) était née lors de l'hiver 1873-1874, mais le biographe Hawkins suggère que la théorie est née des recherches effectuées par Lie durant les quatres années précédentes (de 1869 à 1873).

Un développement important de la théorie fut ensuite réalisé par Wilhelm Killing. La généralisation par Eliè Cartan mena à la classification des algèbres de Lie semi-simples et aux travaux de Hermann Weyl sur les représentations des groupes de Lie compactes.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ applée crochet de Lie, qui possède les propriétés suivantes :

(1)- $[X, X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (antisymétrie)

(2)- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ pour tous X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$ (Identité de Jacobi)

Ce travail s'articule autour des algèbres de Lie, il est constitué de deux chapitres.

Le premier chapitre se compose de rappeles d'une algèbre, quelleque propréties idéax d'algèbre, et l'une algèbres de Lie avec leur centres, idéax, et les représentations d'algèbre de Lie (morphisme représentation,représentation adjointe et forme de Killing). Ce chapitre contient les notions de base d'une algèbre de Lie.
Au deuxième chapitre, nous étudions les classifications des algèbres de Lie (algèbres de Lie nilpotentes, algèbres de Lie résolubles, algèbre de Lie semi-simples, algèbre de Lie simples algèbre et algèbre de Lie réductives), et le théorème d'Engle et le théorème de Lie.
Dans tout ce travail, on désigne par $\mathbb{K}$ un corps et $(\mathcal{A}, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

◄ Notation ►

Le tableau suivant rassemble les notations importantes utilisées dans ce mémoire

$\mathscr{A}$	Algèbre
$\{E_i\}_{i\in I}$	Une base
$\mathcal{C}(\mathscr{A})$	centre d'algèbre
$\mathcal{D}$	Une dérivation
$\mathbb{1}_{\mathscr{A}}$	L'élément neutre par rapport à la lois $\times$
$\mathfrak{g}$	Une algèbre de Lie
$aff(\mathbb{R})$	L'algèbre de Lie des transformations affines de la droite réele
$rad(b)$	radical de b
ad	représentation adjointe
k	La forme de Killing $k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$

Chapitre 1

Algèbres de Lie

1.1 Algèbres

1.1.1 Définitions et exemples

Soit $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Definition 1.1.1. *On appelle une $\mathbb{K}$-algèbre tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni, d'une application bilinéaire de $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ à valeur dans $\mathscr{A}$.*
Une telle structure, notée ici $(\mathscr{A}, +, \cdot, \times)$, (parfois $(\mathscr{A}, \times)$) s'il n'y a pas risque d'ambiguité)
L'espace vectoriel définissant l'algèbre est appelé l'espace vectoriel sous-jacent.
La dimension d'une algèbre $\mathscr{A}$ sur un corps $\mathbb{K}$ est sa dimension comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Si l'application bilinèaire $\times$ est associative, on dit que $\mathscr{A}$ est une algèbre associative.
Si l'application bilinèaire $\times$ est commutative, on dit que $\mathscr{A}$ est une algèbre commutative (où symétrique).

Si l'application bilinèaire $\times$ posséde un élément neutre, on dit que $\mathscr{A}$ est une algèbre unitaire.

1.1.2 Exemples d'algèbres

Exemple 1.1.1.

(1)- L'ensemble des nombres complexes $(\mathbb{C}, +, \cdot, \times)$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre unitaire, associative et commutative de dimension* 2*.Une base de l'algèbre* $\mathbb{C}$ *est constituée des élément* 1 *et* i*.*

(2)- Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ *forment une algèbre unitaire, associative et commutative de dimension infinie sur* $\mathbb{K}$*.*

Exemple 1.1.2.

(1)- L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ *des matrices carrées d'ordre* $n \geq 2$ *à coefficients réels est une* $\mathbb{R}$*-algèbre unitaire, associative et non commutative de dimension* n^2*.*

(2)- On rappel qu'un quaternion est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$ *engendré par* $\{e, i, j, k\}$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un quaternion est s'écrit sous la forme $a + ib + jc + kd$, *où* a, b, c *et* d *sont des nombres réels,on remarque que* $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, ki = j, jk = i, ji = -k, kj = -i$ *et* $ik = -j$.
L'ensemble $(\mathbb{H}, +, \cdot, \times)$ *des quatrenions est une* $\mathbb{R}$*-algèbre unitaire, associative et non commutative de dimension* 4.

(3)- Pour tout $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathbb{V}$ *de(dimension finie ou infinie) les endomorphismes de* $\mathbb{V}$ *forment une* $\mathbb{K}$*-algèbre associative unitaire,non commutative sauf si* $\mathbb{V}$ *est de dimension égale à* 1.

Exemple 1.1.3.

(1)- L'espace $\mathbb{R}^3$ *munit du produit vectoriel* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \wedge)$, *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre non associative, non unitaire et non commutative de dimension* 3
la table de multiplication dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est :*

	$\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$	$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w}$	$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{w}$	$\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

(2)- L'ensemble des matrices carrèes d'ordre $n \geq 2$ *à coefficients réels, muni de l'application bilinèaire définie par :* $[M, N] = MN - NM$, *est une*

$\mathbb{R}$-algèbre non associative, non commutative de dimension n^2.

Definition 1.1.2. *Soit $(\mathscr{A}, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit $\mathscr{B}$ une partie non vide de $\mathscr{A}$. On dit que $\mathscr{B}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{A}$, si et seulement si $\mathscr{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}$ et que $\mathscr{B}$ est stable par l'application bilinèaire $\times$.*

Definition 1.1.3. ***Constantes de structure***

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre sur $\mathbb{K}$, et supposons que $\mathscr{A}$ admett une base $\{E_i\}_{i\in I}$. Il existe un systéme unique $(\gamma_{ijk})_{ijk\in I\times I\times I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $E_iE_j = \sum \gamma_{ijk}E_k \quad \forall i, j \in I$. Les γ_{ijk} s'appellent les constantes de structure de $\mathscr{A}$ par rapport à la base (E_i).

Exemple 1.1.4. *$\mathscr{A} = \mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-algèbre constituée des élément $E_1 = 1$ et $E_2 = i$*

$\gamma_{111} = 1, \gamma_{112} = 0, \gamma_{121} = 0$

$\gamma_{122} = 1, \gamma_{211} = 0, \gamma_{212} = 1$

$\gamma_{221} = -1, \gamma_{222} = 0$

Definition 1.1.4. ***Centre d'algèbre***

Soit $(\mathscr{A}, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, le centre de $\mathscr{A}$ est définie par

$$\mathcal{C}(\mathscr{A}) = \{Y \in \mathscr{A} / Y \times X = X \times Y, \forall X \in \mathscr{A}\}$$

Exemple 1.1.5. *Soit $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ l'algèbre des martices carrées d'ordre 2, le centre de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.*

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 1.1.6. *Le centre de $(\mathbb{H}, +, \cdot, \times)$ est l'ensemble des rèels.*

Definition 1.1.5. ***Idéaux dans les algèbres***

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathscr{A}$ On dit que $\mathcal{B}$ est un :

idéal à gauche : *de $\mathscr{A}$ si $\forall X \in \mathscr{A}, \forall Y \in \mathcal{B} \quad X \times Y \in \mathcal{B}$.*

idéal à droite : *de $\mathscr{A}$ si $\forall X \in \mathscr{A}, \forall Y \in \mathcal{B} \quad Y \times X \in \mathcal{B}$.*

idéal bilatère : *Si $\mathcal{B}$ est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite de $\mathscr{A}$.*

Remarque 1.1.2.1. *Si $(\mathscr{A}, \times)$ est commutative, on parle simplement d'idéal.*

1.1.3 Morphismes d'algèbres

Definition 1.1.6. *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres sur le même corps $\mathbb{K}$, et ϕ une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$.*
On dit que ϕ est un morphisme d'algèbres si ϕ est linéaire, et

$$\phi(X \times Y) = \phi(X) \times \phi(Y) \text{ pour tout } X, Y \in \mathscr{A}$$

Exemple 1.1.7. *L'application $Z \longmapsto \overline{Z}$ est un morphisme, de la $\mathbb{R}$-algèbre $(\mathbb{C}, +, \cdot, \times)$ sur elle-même.*

Proposition 1.1.1.

(1)- Le noyau de ϕ est un idéal bilatère de $\mathscr{A}$

(2)- l'image de ϕ est une sous-algèbre de $\mathscr{B}$.

Démonstration.
pour (1), on a $Ker\phi = \{x \in \mathscr{A} / \phi(x) = 0_{\mathscr{A}}\}$
$\forall a \in \mathscr{A}, \forall x \in ker\phi$

$$\begin{aligned} \phi(a \times x) &= \phi(a) \times \phi(x) \text{ puisque } \phi \text{ est linèaire} \\ &= \phi(a) \times 0_{\mathscr{A}} \\ &= 0_{\mathscr{A}} \end{aligned}$$

donc $a \times x \in Ker\phi$

$$\begin{aligned} \phi(x \times a) &= \phi(x) \times \phi(a) \text{ puisque } \phi \text{ est linèaire} \\ &= 0_{\mathscr{A}} \times \phi(a) \\ &= 0_{\mathscr{A}} \end{aligned}$$

donc $x \times a \in Ker\phi$

Alors $ker\phi$ est un idèal bilatère

Pour (2), on a $Im\phi = \{y \in \mathscr{B} / \exists x \in \mathscr{A}, f(x) = y\}$

$\forall y_1, y_2 \in (Im\phi)^2, \exists x_1, x_2 \in \mathscr{A} / f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= f(x_1) + f(x_2) \\ &= f(x_1 + x_2) \quad \text{puisque } \phi \text{ est liniaire} \end{aligned}$$

donc $\exists x_3 \in \mathscr{A} / x_3 = x_1 + x_2$ alors $y_1 + y_2 \in Im\phi$

soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda y_1 &= \lambda f(x_1) \text{puisque } \phi \text{ est liniaire} \\ &= f(\lambda x_1) \text{puisque } \mathscr{A} \text{ est une algèbre alors}, \exists x_4 = \lambda x_1 \text{ telle que} \\ \lambda y_1 &= f(x_4) \\ y_1 \times y_2 &= f(x_1) \times f(x_2) \\ &= f(x_1 \times x_2) \text{puisque } \mathscr{A} \text{ est une algèbre alors}, \exists x_5 = x_1 \times x_2 \text{ telle que} \\ y_1 \times y_2 &= f(x_5) \end{aligned}$$

Alors en deduit que $Im\phi$ est une sous-algèbre de $\mathscr{B}$. $\square$

1.1.4 Derivations

Definition 1.1.7. *Soit $\mathscr{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une application $\mathcal{D}$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ est appelée une $\mathbb{K}$-dérivation de $\mathscr{A}$ si les conditions suivantes sont vèrifiées :*

(1)- La $\mathbb{K}$-lineairété

$$\mathcal{D}(X+\lambda Y)=\mathcal{D}(X)+\lambda\mathcal{D}(Y)\quad \forall X,Y\in\mathscr{A}\quad \forall\lambda\in\mathbb{K}$$

.

(2)- La règle de Liebniz

$$\mathcal{D}(X\times Y)=(\mathcal{D}X)\times Y+X\times(\mathcal{D}Y)\quad \forall X,Y\in\mathscr{A}.$$

On note $\mathcal{D}er_{\mathbb{K}}(\mathscr{A})$ l'ensemble des dérivations de $\mathscr{A}$

Remarque 1.1.1. *Si $(\mathscr{A},+,\cdot,\times)$ est une algèbre unitaire alors :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}}) &= \mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}}\times\mathbb{1}_{\mathscr{A}})\\ &= \mathbb{1}_{\mathscr{A}}\times\mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}})+\mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}})\times\mathbb{1}_{\mathscr{A}}\\ &= 2\mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}})\\ \mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}}) &= 0_{\mathscr{A}}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{D}(\lambda\cdot\mathbb{1}_{\mathscr{A}})=0_{\mathscr{A}}\quad \forall\lambda\in\mathbb{K}$$

Cela implique que $\lambda\cdot\mathbb{1}_{\mathscr{A}}\in Ker\mathcal{D}$

Si de plus $\mathscr{A}$ est associative alors $(Ker(\mathcal{D}),+,\times)$ est un anneau unitaire.

et dans ce cas , si $x\in Ker(\mathcal{D}),\exists y\in\mathscr{A}$ telle que $y\times x=\mathbb{1}_{\mathscr{A}}$

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{D}(\mathbb{1}_{\mathscr{A}})\\ &= \mathcal{D}(x\times y)\\ &= \mathcal{D}(x)\times y+x\times\mathcal{D}(y)\\ &= x\times(\mathcal{D}(y))\end{aligned}$$

en multipliant les deux membres à gauche par y on obtient

$$\begin{aligned} y \times 0 &= y \times (x \times \mathcal{D}(y)) \,/\, \textit{puisque } \mathscr{A} \textit{ est associative} \\ y \times 0 &= (y \times x) \times \mathcal{D}(y)) \\ y \times 0 &= \mathbb{1}_{\mathscr{A}} \times \mathcal{D}(y) \\ 0 &= \mathcal{D}(y) \end{aligned}$$

d'où $(Ker(\mathcal{D}), +, \times)$ *est un corps*

Definition 1.1.8. *Le corps* $(Ker(\mathcal{D}), +, \times)$ *est un corps appelé le corps des constantes de la dérivation* $\mathcal{D}$

Remarque 1.1.2. *Il est clair que la somme de deux dérivations est une dérivation. Cependant la composition d'une dérivation*

1.2 Algèbres de Lie

Dans cette section $\mathbb{K}$ est un corps arbitraire, en particulaire sa caractiristique n'est pas nécéssarement nulle et n'est pas nécéssairement algebriquement clos. De plus, les espaces vectoriels que nous considérons seront, sauf mention du contraire, de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Definition 1.2.1. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimension n sur* $\mathbb{K}$ *est un espace vectoriel de dimension n sur* $\mathbb{K}$ *muni d'une application bilinéaire* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *applée crochet de Lie, qui possède les propriétés suivantes :*

(1)- $[X, Y] = -[Y, X]$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *(antisymétrie)*

(2)- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *pour tous* X, Y *et* Z *dans* $\mathfrak{g}$ *(Identité de Jacobi)*

Exemple 1.2.1.

(1)- *Tout espace vectoriel V sur* $\mathbb{K}$ *muni du crochet* $[X, Y] = 0, \quad X, Y \in V$, *est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$.

(2)- *L'ensemble des matrices* $(M_n(\mathbb{R}), [,])$ *telle que* $[A, B] = A \times B - B \times A$ *est une algèbre de Lie.*

(3)- *Soit V un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *L'algèbre* $\mathfrak{gl}(V)$ *des endomorphismes de V munie du crochet* $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ *est une algèbre de Lie de dimension* $dim(V)^2$ *sur* $\mathbb{K}$. *Par exemple si* $V = \mathbb{C}^n$ *(resp.*$V = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{H}^n$*), alors* $\mathfrak{gl}(V)$ *est l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$*(resp.*$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$*,* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$*) des matrices carrées d'ordre n à coeffcients complexes (réels, quaternioniques). Le crochet de Lie sur* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *(resp.*$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$*) est alors défini par le produit matriciel :*$[A, B] = AB - BA$.

Exemple 1.2.2.

(1)- *L'espace vectoriel* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ *des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels et de trace nulle est muni du crochet* $[A, B] = AB - BA$*,est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* $n^2 - 1$.

(2)- *L'algèbre de Heisenberg est l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *telles que* x, y, z *dans* $\mathbb{R}$ *muni du crochet des matrices, est une algèbre de Lie.*

Remarque 1.2.1. *les exemples précédents sont des cas particuliers de la situation générale suivante. Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre associative sur* $\mathbb{K}$*, le produit dans* $\mathfrak{g}$*, noté*

$X.Y$, induit un crochet sur $\mathfrak{g}$: $[X, Y] = X.Y - Y.X$, de sotre que $\mathfrak{g}$ posséde une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Definition 1.2.2. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne si $[X, Y] = 0$ pour toute X et Y dans $\mathfrak{g}$.*

Exemple 1.2.3.

(1)- Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne sur $\mathbb{K}$.

(2)- Toute algèbre de Lie de dimension 1 sur $\mathbb{K}$ est abélienne.

1.2.1 Centre d'une algèbre de Lie

Definition 1.2.3. ***Centre d'une algèbre de Lie***
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est définie par

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}/[X, Y] = 0 \quad (\forall Y \in \mathfrak{g})\}$$

Exemple 1.2.4.

(1)- Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie ablienne alors : $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

(2)- Soient R_x, R_y, R_z les rotations de $\mathbb{R}^3$ autour des axes x, y, z respectivement, i.e

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le crochet défini par le produit matriciel,on vérifie que : $[R_x, R_y] = R_z, [R_y, R_z] = R_x, [R_z, R_x] = R_y$.Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension 3 engendré par les trois matrices R_x, R_y, R_z est une sous-algèbre de Lie réelle de dimension 3, appelée sous-l'algèbre de Lie des rotatoins de l'espace, et notée $\mathfrak{o}(3)$. Le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ est

$$Z(\mathfrak{o}(3)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3)- *Il en est de même pour le centre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *des transformation affines de la droite réelle est l'espace vectoriel réel de dimension* 2 *engendré par les matrices*
$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *muni du crochet* $[X,Y] = XY - YX$ *i.e.*
$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array} \quad /a,b \in \mathbb{R} \right\}$
est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,*qui est isomorphe à*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad /a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

on projette le crochet de Lie de $M_2(\mathbb{R})$ *sur* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.*on obtient*

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$Z(\mathfrak{aff}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4)- *Le centre de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *est l'ensemble des matrices scalaire i.e* $Z(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}$.

(5)- *Le centre de* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$*est donné par* $Z(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Definition 1.2.4. *Soit E un sous ensemble d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Le normalisateur* $(resp$ *centralisateur* $N_g(E))(respZ_g(E))$ *de E dans* $\mathfrak{g}$ *est définie par :* $\{X \in \mathfrak{g}/[X,E] \subset E\}(resp\ \{X \in \mathfrak{g}/[X,E] = 0\})$*, en particulier si E est un sous espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$ *alors :* $Z_{\mathfrak{g}}(E) \subset N_{\mathfrak{g}}(E)$.

Exemple 1.2.5.

(1)- Si E est le sous espace vectoriel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{K})$ *engendré par la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *alors :*

$$Z_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} /a,b \in \mathbb{K} \right\} \subset N_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} /a,b,c \in \mathbb{K} \right\}$$

(2)- Si E est le sous espace vectoriel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ *engendré par la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *alors :* $Z_{\mathfrak{g}}(E) = N_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} /a \in \mathbb{K} \right\}$.

1.2.2 Idéaux de algèbre de Lie et Sous-algèbre de Lie

Definition 1.2.5. *Un sous espace vectoriel s d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *si* $[s,\mathfrak{g}] \subset s$.

Definition 1.2.6. *Soient* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ *deux sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$*, on noté* $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ *le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble*

$$\left\langle \{[x_1,x_2], x_1 \in \mathfrak{g}_1, x_2 \in \mathfrak{g}_2\} \right\rangle$$

Exemple 1.2.6.

(1)- L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ *est un idéal de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

(2)- Le sous espace vectoriel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle\{[X, Y]/X, Y \in \mathfrak{g}\}\rangle$ *est un idéal dérivé de* $\mathfrak{g}$*, appelé commutant de* $\mathfrak{g}$*.*

(3)- L'espace vectoriel des matrice triangulaires supérieure(resp inférieure) dont les termes diagonaux sont nuls est un idéal de l'algèbre de Lie de matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Proposition 1.2.1. *Sient* s *et* s' *deux Idéaux d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*, alors*

(1)- $s \oplus s'$ *est un idéal*

(2)- $s \cap s'$ *est un idéal*

(3)- $[s, s']$ *est un idéal*

Démonstration. Sient $x \in s(respx' \in s')$,

(1)- Puisque s est un idéal (resp s'), alors $\forall y \in \mathfrak{g}[x, y] \in s($ resp $\forall y \in \mathfrak{g}[x', y] \in s')$

$$\begin{aligned} [x, y] + [x', y] &= xy - yx + x'y - yx' \\ &= (x + x')y - y(x + x') \quad \text{Donc } \forall y \in \mathfrak{g}[x + x', y] \in \\ &= [x + x', y] \end{aligned}$$

$s \oplus s'$, alors $s \oplus s'$ est un idéal

(2)- Soit $x \in s \cap s'$, alors $x \in s$ et $x \in s'$ puisque s et s' sont des idéaux donc

$$\begin{aligned} \forall y &\in \mathfrak{g}, [x, y] \in s \text{ et } [x, y] \in s \\ \forall y &\in \mathfrak{g}, [x, y] \in s \cap s' \end{aligned}$$

ce qui monte que $s \cap s'$ est un idéal.

(3)- Soient $x \in s$ et $x' \in s'$, alors $\forall y \in \mathfrak{g}$, on a

$$
\begin{aligned}
[y,[x,x']] &= [y, xx' - x'x] \\
&= (xx' - x'x)y - y(xx' - x'x) \\
&= xx'y - x'xy - yxx' + yx'x \\
&= xx'y - x'xy - yxx' + yx'x - x'yx + x'yx - xyx' + xyx' \\
&= [x'y, x] + [x', yx] + [yx', x] + [xy, x']
\end{aligned}
$$

Donc $\forall y \in \mathfrak{g}, [y,[x,x']] \in [s,s']$ ce qi montre que $[s,s']$ est un idéal.

□

Definition 1.2.7. ***Sous algèbre de Lie***

Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous espace vectoriel s de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de Lie i.e :$[s,s] \subset s$

Exemple 1.2.7.

(1)- Tout idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. En particulier l'idéal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ appelé l'algèbre de Lie dérivée.

(2)- L'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (ou inférieures) est une sous algèbre de Lie.

(3)- $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre.

(4)- Soient R_x, R_y, R_z les rotations de $\mathbb{R}^3$ autour des axes x, y, z respectivement, i.e

$$
R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

En utilisant le crochet défini par le produit matriciel,on vérifie que : $[R_x, R_y] = R_z, [R_y, R_z] = R_x, [R_z, R_x] = R_y$.Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension 3 engendré par les trois matrices R_x, R_y, R_z est une *sous-algèbre de Lie réelle de dimension* 3*, appelée sous-l'algèbre de Lie des rotatoins de l'espace, et notée* $\mathfrak{o}(3)$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbb{K}$. Soit $\{E_i\}_{1\leq j\leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, nous avans donc $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} E_k$ où $\gamma_{ijk} \in \mathbb{K}$, par bilinérité, la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est complétement déterminée par la valeur des $\gamma_{ijk}, 1 \leq i, j, k \leq n$. Notons que $\gamma_{ijj} = 0$ et $\gamma_{ikj} = -\gamma_{ijk}$

Definition 1.2.8. *les scalires* $\gamma_{ijk}, 1 \leq i, j, k \leq n$*, sont appelés les constantes de structure de* $\mathfrak{g}$ *relativement à la base* $\{E_i\}_{1\leq i\leq n}$.

Exemple 1.2.8.

(1)- Si $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie abélienne, alors ses coefficients de structure sont tous nuls relativement à toute base de* $\mathfrak{g}$.

(2)- Reprenons l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ *relativement à la base* $\{R_x, R_y, R_z\}$ *sont donnés par :*

$\gamma_{xxx} = \gamma_{xxy} = \gamma_{xxz} = 0$

$\gamma_{yyx} = \gamma_{yyy} = \gamma_{yyz} = 0$

$\gamma_{zzx} = \gamma_{zzy} = \gamma_{zzz} = 0$

$\gamma_{xyx} = 0, \gamma_{xyy} = 0, \gamma_{xyz} = 1$

$\gamma_{yzx} = 1, \gamma_{yzy} = 0, \gamma_{yzz} = 0$

$\gamma_{zxx} = 0, \gamma_{zxy} = 1, \gamma_{zxz} = 0.$

1.2.3 Idéaux de algèbre de Lie et Sous-algèbre de Lie

Definition 1.2.9. *Un sous espace vectoriel* s *d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *si* $[s, \mathfrak{g}] \subset s$.

Definition 1.2.10. *Soient $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ deux sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on noté $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble*

$$\left\langle \{[x_1, x_2], x_1 \in \mathfrak{g}_1, x_2 \in \mathfrak{g}_2\} \right\rangle$$

Exemple 1.2.9.

(1)- L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(2)- Le sous espace vectoriel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\langle \{[X, Y] / X, Y \in \mathfrak{g}\} \right\rangle$ est un idéal dérivé de $\mathfrak{g}$, appelé commutant de $\mathfrak{g}$.

(3)- L'espace vectoriel des matrice triangulaires supérieure(resp inférieure) dont les termes diagonaux sont nuls est un idéal de l'algèbre de Lie de matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Proposition 1.2.2. *Sient s et s' deux Idéaux d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors*

(1)- $s \oplus s'$ est un idéal

(2)- $s \cap s'$ est un idéal

(3)- $[s, s']$ est un idéal

Démonstration. Sient $x \in s(respx' \in s')$,

(1)- Puisque s est un idéal (resp s'), alors $\forall y \in \mathfrak{g}[x, y] \in s($ resp $\forall y \in \mathfrak{g}[x', y] \in s')$

$$\begin{aligned} [x, y] + [x', y] &= xy - yx + x'y - yx' \\ &= (x + x')y - y(x + x') \quad \text{Donc } \forall y \in \mathfrak{g}[x + x', y] \in \\ &= [x + x', y] \end{aligned}$$

$s \oplus s'$, alors $s \oplus s'$ est un idéal

(2)- Soit $x \in s \cap s'$, alors $x \in s$ et $x \in s'$ puisque s et s' sont des idéaux donc

$$\begin{aligned}\forall y &\in \mathfrak{g}, [x,y] \in s \text{ et } [x,y] \in s \\ \forall y &\in \mathfrak{g}, [x,y] \in s \cap s'\end{aligned}$$

ce qui monte que $s \cap s'$ est un idéal.

(3)- Soient $x \in s$ et $x' \in s'$, alors $\forall y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}[y,[x,x']] &= [y, xx' - x'x] \\ &= (xx' - x'x)y - y(xx' - x'x) \\ &= xx'y - x'xy - yxx' + yx'x \\ &= xx'y - x'xy - yxx' + yx'x - x'yx + x'yx - xyx' + xyx' \\ &= [x'y, x] + [x', yx] + [yx', x] + [xy, x']\end{aligned}$$

Donc $\forall y \in \mathfrak{g}, [y,[x,x']] \in [s,s']$ ce qi montre que $[s,s']$ est un idéal.

□

Definition 1.2.11. ***Sous algèbre de Lie***
Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous espace vectoriel s de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de Lie i.e :$[s,s] \subset s$

Exemple 1.2.10.

(1)- *Tout idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. En particulier l'idéal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ appelé l'algèbre de Lie dérivée ;*

(2)- *L'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (ou inférieures) est une sous algèbre de Lie ;*

(3)- $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *est une sous-algèbre.*

(4)- *Soient R_x, R_y, R_z les rotations de $\mathbb{R}^3$ autour des axes x, y, z respectivement, i.e*

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le crochet défini par le produit matriciel,on vérifie que :
$[R_x, R_y] = R_z, [R_y, R_z] = R_x, [R_z, R_x] = R_y$*.Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension* 3 *engendré par les trois matrices* R_x, R_y, R_z *est une sous-algèbre de Lie réelle de dimension* 3*, appelée sous-l'algèbre de Lie des rotatoins de l'espace, et notée* $\mathfrak{o}(3)$*.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbb{K}$. Soit $\{E_i\}_{1 \leq j \leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, nous avans donc $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} E_k$ où $\gamma_{ijk} \in \mathbb{K}$, par bilinérité, la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est complétement déterminée par la valeur des $\gamma_{ijk}, 1 \leq i, j, k \leq n$. Notons que $\gamma_{ijj} = 0$ et $\gamma_{ikj} = -\gamma_{ijk}$

Definition 1.2.12. *les scalires* $\gamma_{ijk}, 1 \leq i, j, k \leq n$*, sont appelés les constantes de structure de* $\mathfrak{g}$ *relativement à la base* $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$*.*

Exemple 1.2.11.

(1)- Si $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie abélienne, alors ses coefficients de structure sont tous nuls relativement à toute base de* $\mathfrak{g}$*.*

(2)- Reprenons l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ *relativement à la base* $\{R_x, R_y, R_z\}$ *sont donnés par :*

$\gamma_{xxx} = \gamma_{xxy} = \gamma_{xxz} = 0$

$\gamma_{yyx} = \gamma_{yyy} = \gamma_{yyz} = 0$

$\gamma_{zzx} = \gamma_{zzy} = \gamma_{zzz} = 0$

$\gamma_{xyx} = 0, \gamma_{xyy} = 0, \gamma_{xyz} = 1$

$\gamma_{yzx} = 1, \gamma_{yzy} = 0, \gamma_{yzz} = 0$

$\gamma_{zxx} = 0, \gamma_{zxy} = 1, \gamma_{zxz} = 0.$

1.3 Représentations d'algèbres de Lie

1.3.1 Morphisme d'algèbre de Lie

Definition 1.3.1. *Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie.*
Un morphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ qui respecte le crochet de Lie, i.e $T([X,Y]) = [T(X), T(Y)]$ pour tout X, Y dans $\mathfrak{g}_1$.
Il est clair que le noyau (resp. l'image) d'un morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ d'algèbre de Lie est un idéal de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$).

Exemple 1.3.1. *Soient M, N deux variétes différentiables et $f : \ M \ \longrightarrow \ N$ un déffeomorphisme, soit $(\mathfrak{X}(M), [,])$(resp. $(\mathfrak{X}(N), [,])$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M(resp. N) alors l'application $f_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$ image directe par f d'un champ de vecteurs X sur M, est le champ de vecteurs sur N, que l'on note f_*X*

En effet

$$\begin{array}{rcl} X : C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ \phi & \longmapsto & X(\phi) \end{array}$$

$\forall p \in M \ (X(\phi))(p) = X_p(\overline{\phi_p})$

$$\begin{array}{rcl} f_*X : C^\infty(N) & \longrightarrow & C^\infty(N) \\ \psi & \longmapsto & f_*X(\psi) \end{array}$$

$\forall q \in N$

$$\begin{aligned} (f_*X(\psi))(q) &= (f_*X)_q(\overline{\psi}_q) \\ &= T_{f^{-1}(q)}f(X_{f^{-1}(q)}(\overline{\psi_q})) \\ &= X_{f^{-1}(q)}(\overline{\psi o f}_{f^{-1}(q)}) \\ &= (X(\psi o f))(f^{-1}(q)) \\ &= (X(\psi o f) o f^{-1})(q) \end{aligned}$$

Ainsi $f_*X(\psi) = X(\psi o f)f^{-1}$

D'où

$$\begin{aligned}
(f_*([X,Y]))(\psi) &= ([X,Y])(\psi o f)of^{-1} \\
&= (X(Y(\psi o f)) - Y(X(\psi o f)))of^{-1} \\
&= X(Y(\psi o f))f^{-1} - Y(X(\psi o f))of^{-1} \\
&= X((Y(\psi o f)f^{-1}of)of^{-1} - Y((X(\psi o f))f^{-1}of)of^{-1} \\
&= X(f_*Y(\psi o f)of^{-1}) - Y(f_*X(\psi o f)of^{-1}) \\
&= f_*X(f_*Y(\psi)) - f_*Y(f_*X(\psi)) \\
&= [f_*X, f_*Y](\psi)
\end{aligned}$$

f_* *est un isomorphisme d'algèbre de Lie.*

Exemple 1.3.2. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *le crochet* $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = (0, a_1b_2 - b_1a_2)$ *donc l'application*

$$\begin{array}{rccc}
\phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\
& (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

est un morphisme d'algèbre de Lie de $\mathbb{R}^2$ *dans* $Im\phi = \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$

Exemple 1.3.3. *Soient* $\mathfrak{o}(3)$ *est l'ensemble des matrices* 3×3 *réelles antisymétriques , donc un élément arbitraire de l'algèbre est de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *.*

D'autre part, $\mathfrak{su}(2)$ *est l'ensemble des matrices* 2×2 *complexes antihermitiennes de trace nulle, donc un élément arbitraire de l'algèbre est de la forme* $\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Une application de l'une à l'autre est définie comme suit entre les générateurs suivants (et elle est prolongée par linéarité sur $\mathbb{R}$) :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $[E_i, E_j] = \gamma_{ijk}E_k$ et $[\sigma_i, \sigma_j] = \xi_{ijk}\sigma_k$, cette application définit bien un homomorphisme d'algèbres de Lie. Un homomorphisme inverse s'obtient aisément en inversant simplement les flèches ci-dessus.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, et V est un espace vectoriel complexe alors l'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie.

Definition 1.3.2. *Une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel complexe V est un morphisme d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. la dimension de cette représentation est la dimension de V sur $\mathbb{K}$. La représentation (ϕ, V) est fidèle si ϕ est injective. La représentation (ϕ, V) est irréductible si les seuls sous espaces vectoriels de V qui sont invariants par $\mathfrak{g}$ sont $\{0\}$ et V lui même, i.e V est irréductible si $\phi(\mathfrak{g})W \subseteq W \Longleftrightarrow W = \{0\}$ ou $W = V$*

1.3.2 Représentation adjointe et forme de Killing

Definition 1.3.3. *Le morphisme d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *défini par* $X \longmapsto [X, .]$ *est appelé la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *est noté ad.*

Exemple 1.3.4. *Considérons l'algèbre de Lie* $\mathfrak{o}(3)$ *des rotation de l'espace, donc on a :*

$$ad(R_x) = R_x,\ ad(R_y) = R_y,\ ad(R_z) = R_z$$

Exemple 1.3.5. *pour l'algèbre de Lie* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *nous avons :*

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. nous désignons par V^* le dual vectoriel de V, i.e l'espace vectoriel des formes sur V. Soient $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ une application bilinéaire et U un sous espace vectoriel de V.

Definition 1.3.4. *le radical de b est le sous espace vectoriel*
$rad(b) = \{v \in V / b(v, v') = 0, \forall v' \in V\}$ *de* V*. Nous dirons que b est dégénérée (resp. dégénérée) si le radical de b est trivial (resp. Non trivial).*
L'orthogonal de U est le sous espace vectoriel
$U^\perp = \{v \in V / b(v, v') = 0, \forall v' \in U\}$ *de* V*. Nous noterons* $b\ |_{U \times U}$ *la restriction de b à* $U \times U$*.*

Proposition 1.3.1.

(1)- $rad(b\ |_{U\times U}) = U \cap U^\perp$*. Si de plus b est non dégénérée alors :*

(2)- $dim(U) + dim(U^\perp) = dimV$ *;*

(3)- $U + U^\perp = V \Longleftrightarrow b|_{U\times U}$ *est non dégénérée.*

Démonstration.

(1)- Est une simple reformulation des définitions. En effet

$$rad(b) = \{v \in V / b(v, v') = 0 \quad \forall v' \in V\}$$
$$U^{\perp} = \{v \in V / b(v, v') = 0 \quad \forall v' \in U\}$$
$$U \cap U^{\perp} = \{v \in U / b(v, v') = 0 \quad \forall v' \in U\}$$
$$rad(b\,|_{U \times U}) = \{v \in U / b(v, v') = 0 \quad \forall v' \in U\}$$

(2)- Considérons les application linéaires $\phi : \ V \longrightarrow V^*$ et $\psi : V \longrightarrow U^*$ définies par $v \longmapsto b(v, .)$.

En particulier, $Ker(\psi) = U^{\perp}$, et ϕ est un isomorphisme si et seulement si, b est non-dégénérée.

Soit U' un sous espace vectoriel de V tel que $V = U \oplus U'$ Tout élément u^* de U^* définit un élément v^* de V^* tel que $v^*|_U = u^*$ et $v^*|_{U'} = 0$.

Puisque ϕ est un isomorphisme, alors il existe v dans V tel que $\phi(v) = v^*$, de sotre que $\psi(v) = u^*$, i.e ψ est surjective, et donc

$$dim(V) = dim(im(\psi)) + dim(Ker(\psi)) = dim(U) + dim(U^{\perp}).$$

(3)- est une conséquence directe de (1) et (2)

□

Remarque 1.3.2.1. *Il se peut que b soit non dégénérée mais que sa restriction à $U \times U$ est dégénérée.*

Exemple 1.3.6. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ et $b((x, y), (x', y')) = xx' - yy'$ donc $U^{\perp} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xt - yt = 0\, \forall t \in \mathbb{R}\}$*

Proposition 1.3.2. *Considérons le cas ou V est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} k: & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (X, Y) & \longmapsto & tr(ad(X) \circ ad(Y)) \end{array}$$

(1)- bilinéaire

(2)- symétrique

(3)- ad-invariant i.e $k(ad(X)(Y), Z) + k(Y, ad(X)(Z)) = 0$, *pour tout* X, Y, Z *dans* $\mathfrak{g}$

(4)- $k(X, Y) = (1/2)(k(X+Y, X+Y) - k(X, X) - k(Y, Y))$, *pour tout* X, Y *dans* $\mathfrak{g}$

Démonstration. Il est facile de voir que $(1), (2)$ et sont verifiées. pour (3) on a

$$ad[X, Y] = [adX, adY]$$

$$tr(f \circ g) = tr(g \circ f)$$

donc

$$\begin{aligned}
k(ad(X)(Y), Z) + k(Y, ad(X)(Z)) &= k([X, Y], Z) + k(Y, [X, Z]) \\
&= tr(ad[X, Y] \circ ad(Z) + tr(ad(Y) \circ ad[X, Z]) \\
&= tr(ad(X) \circ ad(Y) \circ ad(Z) - ad(Y) \circ ad(X) \circ ad(Z) \\
&\quad + (ad(Y) \circ ad(X) \circ ad(Z) - (ad(Y) \circ ad(Z) \circ ad(X) \\
&= tr(ad(X) \circ ad(Y) \circ ad(Z) - ad(Y) \circ ad(Z) \circ ad(X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour (4), en effet

$$\begin{aligned}
k(X+Y, X+Y) &= tr(ad(X+Y)oad(X+Y)) \\
&= tr(ad(X+Y)(ad(X) + ad(Y))) \\
&= tr(ad(X+Y)ad(X) + tr(ad(X+Y)ad(Y)) \\
&= tr(ad(X)oad(X) + ad(Y)oad(X)) + tr(ad(X)oad(Y) + ad(Y)oad(Y) \\
&= tr(ad(X)oad(X)) + tr(ad(X)oad(Y)) + tr(ad(Y)oad(X)) + tr(ad(Y) \\
&= k(X, X) + 2k(X, Y) + k(Y, Y)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} k(X+Y,X+Y) & = & k(X,X)+2k(X,Y)+k(Y,Y) \\ k(X+Y,X+Y)-k(X,X)-k(Y,Y) & = & 2k(X,Y) \\ k(X,Y) & = & \frac{1}{2}(k(X+Y,X+Y)-k(X,X)-k(Y,Y)) \end{array}$$

□

Definition 1.3.5. *L'application bilinéaire k est appellé la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$.

Dorénavant les espaces orthogonaux que nous considérons sertont toujours relatifs à une forme de Killing (que nous préciserons si plusieurs algèbre de Lie interviennent).

Proposition 1.3.3. *Sient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$, *et* k *sa forme de Killing, si* s *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *alors :*

(1)- L'othogonal $s^{\perp}$ *de* s *est un idéal de* $\mathfrak{g}$.

(2)- La forme de Killing k_s *de* s *est la restriction à* s *de Killing de* $\mathfrak{g}$.

(3)- Si de plus k *est non dégénérée alors* k_s *est non dégénérée.*

Démonstration.

(1)- découle de la ad-invarience de k qui implique : $k([A,B],C) = k(A,[B,C]) = 0$ pour tout $A \in s^{\perp}, B \in \mathfrak{g}$ et $C \in s$.

(2)- Soit V un sous espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = s \oplus V$. alors, pour tout X et Y dans s, nous avons : : $(ad(X) \circ ad(Y))(s) \subset s$ et $(ad(X) \circ ad(Y))(V) \subset s$, de sorte que $Tr(ad(X) \circ ad(y)|_{s\times s}) = Tr(ad(X) \circ ad(Y))$.

(3)- Soit $X \in s$ tel que $k_s(X,Y) = k(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in s$. Rappelons que, d'aprś (2), $k_s = K_{s\times s}$ par ad-invarience de la forme de Killing, cela implique que $k(X[Y,W]) = k([X,Y],W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$. ainsi puisque k est non-dégénérée, nous obtenons que $[X,Y] = 0$ pour tout $Y \in s$ l'endomorphisme de $(ad(Y) \circ ad(W))^2$ de $\mathfrak{g}$ est trivial pour tout $W \in \mathfrak{g}$. En effet, nous avons : $(ad(Y) \circ ad(W))(A) = 0$ si $A \in s$ et $(ad(Y \circ ad(W)(A)) \in s$ si $A \in V$. Autrement dit,$(ad(Y) \circ ad(W))$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ et donc $Tr(ad(Y) \circ ad(W)) = 0$, cela entraine que $k(Y,W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$, soit $Y = 0$ puisque k est non-dégénérée.

□

Exemple 1.3.7.

(1)- Pour tout A et M dans $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *nous avons* $ad(A)^2(M) = A^2M - 2AMA + MA^2$ *de sorte que* $k(A,A) = 2nTr(A^2) - 2Tr(A)^2$.

(2)- En utilisant l'exemple précédent, nous trouvons que $k(A,A) = 2nTr(A^2)$ *pour tout A dans l'algèbre de Lie de* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$.

(3)- pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, *nous avons* $k(X,X) = 1$, $k(X,Y) = 0$ *et* $k(Y,Y) = 0$.

(4)- Le radical de la forme de Killing $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *est trivial, donc k est non dégénérée.*

(5)- Considérons l'algèbre $\mathfrak{o}(3)$ *des rotation de l'espace. Nous trouvons :* $k(X,X) = -2(a^2 + b^2 + c^2)$ *pour tout* $X = aR_x + bR_y + cRz$.

Chapitre 2

Classification des algèbres

2.1 Algèbres de Lie nilpotentes

Dans ce qui suit le corps $\mathbb{K}$ est quelconque, en particulier sa caractéristique n'est pas nécéssairement nulle et il n'est pas nécéssairement algébriquement clos.

Definition 2.1.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On pose pour tout entier $j \geq 0, \mathfrak{g}_{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(j)}]$, avec $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}_{(0)} \supseteq \mathfrak{g}_{(1)}, \cdots, \supseteq \mathfrak{g}_{(j)} \supseteq \cdots$ est appelée la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$*

Definition 2.1.2. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain rang, i,e s'il existe un entier $k \geq$ tel que $\mathfrak{g}_k = \{0\}$. Si $\mathfrak{g}_{(k-1)} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$, on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente de rang k.*

Exemple 2.1.1.

(1)- Tout algèbre de Lie abélienne est nilpotente.

(2)- *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaire supérieures (ou inférieures), dont les élément diagonaux sont nuls, est nilpotente. Le cas le plus simple d'une algèbre de Lie nilpotente, non abélienne, i,e* $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$ *et* $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$, *est l'algèbre de Heisenberg.*

Proposition 2.1.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$

(1)- *Si* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, alors le centre de* $\mathfrak{g}$ *n'est pas trivial.*

(2)- *Si* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente alors, tout élément* X *de* $\mathfrak{g}$ *est* $ad-$*nilpotent, i,e* $ad(X)$ *est un endomorphisme nilpotent de* $\mathfrak{g}$.

(3)- *Si l'algèbre de Lie* $ad(\mathfrak{g}) = \{ad(X)/X \in \mathfrak{g}\}$ *est une algèbre de Lie nilpotente alors* $\mathfrak{g}$ *nilpotente*

Démonstration.

(1)- Est une conséquence immédiate de la définition d'une algèbre de Lie nilpotente.pour (2), nous avons $ad^j(X)Y \in \mathfrak{g}_{(j)}$ pour tout X et Y dans $\mathfrak{g}$, et $j \geq 1$.

(2)- Puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente, il existe un entier k tel que $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$, et donc $ad^k(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, ce qui démontre (2).

(3)- Puisque $ad(\mathfrak{g})_{(j)} = ad(\mathfrak{g}_{(j)})$, alors nous avons $ad(\mathfrak{g})_{(j)} = \{0\} \Longrightarrow \mathfrak{g}_{(j+1)} = \{0\}$.

$\square$

Théorème 2.1.1. (*Théorème d'Engel)[8]*

Soient $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *et* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ *une représentation* *de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension $r = 1$ sur $\mathbb{K}$. Si $\rho(X)$ est un endomorphisme nilpotent de V, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, Alors :*

(1)- Il existe un vecteur non nul v de V tel que $\rho(X)v = 0$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

(2)- Il existe une chaîne de sous-espace vectoriel $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \quad \cdots \subset V_r = V$ tels que $dim(V_j) = j$ et $\rho(X)V_j \subset V_{(j-1)}$ pour tout j. Autrement dit, il existe une base de V dans laquelle tout endomorphisme $\rho(X)$ de V, $X \in \mathfrak{g}$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

(3)- Si $ad(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Corollaire 2.1.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotent sur $\mathbb{K}$. Il existe une chaîne d'idéaux de $\mathfrak{g}$:*
$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$ tels que $dim(\mathfrak{g}_j) = j$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j-1}$ pour tout j Auterment dit, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle tout endomorphisme $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation du théorème de Engel avec $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = ad$. □

Remarque 2.1.1. *Evidemment si T est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel V, Alors il existe une base B de V dans laquelle T prend la forme d'une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls. Plus généralement, si $T_1, \cdots, T_m$ sont des endomorphisme nilpotents de V, on peut trouver pour chaque T_j, une base B_j de V dans laquelle l'opérateur T_j une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls. Les bases B_j sont à priori distinctes. Le théorème de Engel montre que si la famille $\{T_1 \cdots T_m\}$ engendre* *une algèbre de Lie nilpotente, alors il est possible de choisir une même base B pour tous les opérateurs T_j. Une autre formulation du théorème de Engle est que la réciproque de* (1) *de la proposition précédente est vraie, i,e une algèbre de Lie est nilpotente si et seulement si, chacun de ses éléments est ad− nilpotent.*

2.2 Algèbres de Lie résolubles

Dans ce qui suit, sauf mention de contraire , le corps $\mathbb{K}$ est arbitraire

Definition 2.2.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une Algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$*. On pose pour tout* $j \geq 0, \mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$*, avec* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$*. La suite décroissante d'idéaux* $\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq \cdots$ *est appelée la suite dérivée de* $\mathfrak{g}$*.*

Definition 2.2.2. *Une Algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *est résolube si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang, i,e s'il existe un entier* $k = 1$ *tel que* $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$*.*

Exemple 2.2.1.

(1)- Toute Algèbre de Lie nilpotente est résolube, puisque $\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}_{(j)}$ *pour tout* j*.*

(2)- L'Algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures (ou inférieurs) est résolube (et nilpotente si tous les termes diagonaux sont nuls).

Proposition 2.2.1. *[8] Soit* $\mathfrak{g}$ *une Algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$*.*

(1)- Si $\mathfrak{g}$ *est résolube alors* $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*.*

(2)- Si $\mathfrak{g}$ *est résolube alors* $\mathfrak{g}$ *contient un idéal de codimension* 1*.*

(3)- Si $\mathfrak{g}$ *est résolube, tout sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *est résolube. En particulier un idéal dans une algèbre de résolube est résoluble.*

(4)- La somme de tous les idéaux résolube de $\mathfrak{g}$ est l'unique idéal résolube de $\mathfrak{g}$ contenant tous les résolube de $\mathfrak{g}$.

Théorème 2.2.1. *(Théorème de Lie)[8] Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps algèbreiquement clos de caractérisrtique nulle. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V non trivial sur $\mathbb{K}$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors :*

(1)- il existe un vecteur non nul commun à tous les $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$, i.e il existe une fonction scalaire $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $\rho(X)v = \lambda(X)v$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

(2)- il existe une suite $V_0 = \{0\} \subset \cdots \subset V_r = V$ de sous-espace vectoriel de V dans laquelle tous les endomorphisme $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$, prennent la forme de matrices triangulaires supérieures.

Corollaire 2.2.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractŕistique nulle.*

(1)- $\mathfrak{g}$ résoluble si seulment si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotente.

(2)- $\mathfrak{g}$ est résoluble alors il existe une suite $\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$ d'idèaux de $\mathfrak{g}$ telle que pour tout j, $dim(\mathfrak{g}_j) = j$, $\mathfrak{g}_j$ est un idéal dans $\mathfrak{g}_{j+1}$ et $\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j$ est une algèbre de Lie abélienne, i.e $[\mathfrak{g}_{j+1}, \mathfrak{g}_{j+1}] \subset \mathfrak{g}_j$.

Démonstration.

(1)- Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors, d'aprés le théorème de Lie, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $ad(X), X \in \mathfrak{g}$, prend la forme d'une matrice triangulaire supérieure, de sotre que $ad[X, Y] = [ad(X), ad(Y)]$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont nuls. Ainsi tous les endomorphisme $ad([X,Y]), X, Y \in \mathfrak{g}$ sont nilpotentes. Le théorème de Engel implique alors que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est une algèbre de Lie nilpoente. Réciproquement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente alors elle est résoluble, et donc $\mathfrak{g}$ est résoluble puisque $\mathfrak{g}^{(j)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{(j-1)}$.

(2)- il suffit d'appliquer le théorème de Lie à la reprsentation adjointe de $\mathfrak{g}$, i.e $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = ad$.

$\square$

Remarque 2.2.1. *Il est clair que si le corps $\mathbb{K}$ est de caractŕistique nulle, mais n'est pas algébriquement clos (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) alors le théorème de Lie reste vraie à condition que toutes les valeurs propres de chaque endomorphisme $ad(X), X \in \mathfrak{g}$, appartiennent à $\mathbb{K}$. Si le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique nulle, le théorème de Lie n'est pas vraie.*

Remarque 2.2.2. *Evidemment si T est un endomorphisme d'un espace vectoriel v sur un corps algèbriquement clos, alors il existe une base B de V dans laquelle T prend la forme d'une materice triangulaire supérieure. Plus généralment, si $T_1, \ldots, T_m$ sont des endomorphismes de V, on peut trouver pour chaque T_j, une base B_j de V dans laquelle l'opérateur T_j une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls. Les bases B_j sont à priori distinctes. Le théorème de Engel montre que si la famille $\{T_1, \ldots,_m\}$ engendre une algèbre de Lie résoluble, alors il est possible de choisir une même base B de tout les opérateurs T_j.*

2.3 Algèbres de Lie semi-simples

Dans ce paragraphe le corps $\mathbb{K}$ est un corps de caractiristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Definition 2.3.1. *D'après la proposition 2.2.1, il existe un unique résoluble de* $\mathfrak{g}$ *qui contient tout idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$*. Cet idéal est appelé le radical de* $\mathfrak{g}$ *et noté* $rad(\mathfrak{g})$

Definition 2.3.2. *Une algèbre de Lie est simple si elle est non abélienne et si elle ne contient pas d'idéaux propres non triviaux.*

Definition 2.3.3. *Une algèbre de Lie est semi-simple si elle ne contient pas d'idéaux résoluble non triviaux, i.e si* $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Exemple 2.3.1. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{o}(3)$ *est semi-simple*

Proposition 2.3.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur le corps* $\mathbb{K}$

(1)- Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

(2)- Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

(3)- Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors le centre de* $\mathfrak{g}$ *est trivial.*

(4)- Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors tout idéal de* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

(5)- Si $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $\mathfrak{g}$ *est la somme directe de deux idáux semi-simples.*

Démonstration.

(1)- $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ puisque $\mathfrak{g}$ n'est pas abĺienne. D'aute part $rad(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, de sorte que $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ou $rad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Si $rad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}$ est résoluble, en particulier $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ ce qui contredit (1).

(2)- On en déduit que $rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$,i.e est semi-simple.

(3)- puisque $Z(\mathfrak{g}) \subset rad(\mathfrak{g})$ et si $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ alors $rad(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, ce qui contredit le semisimplicité de $\mathfrak{g}$.

(4)- est une conséquence immédiate de la propsition (1.3.3(3)).

(5)- est une conséquence immédiate de la proposition (1.3.3(1)), si s un id'eal de $\mathfrak{g}$ alors l'orthogonal $s^{\perp}$ de s est un idéal de $\mathfrak{g}$. Par ailleurs, nous savons que, $s \cap s^{\perp}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, puisque $rad(k_s) = rad(k_{s\times s}) = s \cap s^{\perp}$. L'intersection $s \cap s^{\perp}$ est nécéssairment trivial, $\mathfrak{g}$ étant semi-simple. Or, d'aprés (4), s est semi-simple et donc $k/_{s\times s}$ est non-dégénérée. La remarque (1.2.2) implique alors que $\mathfrak{g} = s + s^{\perp}$.

□

2.4 Algèbres de Lie réductives

Dans ce paragraphe le corps $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Definition 2.4.1. *$\mathfrak{g}$ est réductive si pour tout idéal a dans $\mathfrak{g}$, il existe un idéal b de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = a \oplus b$*

Definition 2.4.2. *Le produit scalaire standard sur l'algèbre de Lie des matrices $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ est défini par :$< A, B >= Re(tr(A^t\overline{B}))$ pour tout A, B dans $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$*

Proposition 2.4.1. *Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, telle que $A \in \mathfrak{s} \Longrightarrow \overline{A}^t \in \mathfrak{s}$. Alors $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie réductive.*

Démonstration. Soient a unn idéal de $\mathfrak{g}$ et $a^{\perp}$ l'orthogonal de a relativment à $<,>$. Pour simplifier les notations, on pose $A^* = \overline{A}^t$. Alors pour tous $A \in a^{\perp}, B \in \mathfrak{g}$ et $C \in a$ on a :

$$\begin{aligned}\langle [A,] \rangle &= Re(tr(ABC^* - BAC^*)) \\ &= Re(tr(AC^*B - ABC^*)) \\ &= Re(tr(A(B^*C)^* - A(CB^*)^*)) \\ &= \langle A, [B^*, C] \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

La dernère égalité provient du fait que a est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $B^* \in \mathfrak{g}$. On déduit que $\mathfrak{g} = a \oplus a^{\perp}$ où a et $a^{\perp}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ $\square$

Corollaire 2.4.1. *Toute algèbre de Lie semi-simple est réductive.*

Exemple 2.4.1. *D'aprés la proposition ci-dessus, les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$, sont réductive. Toutefois elle ne sont pas semi-simples puisque leur centre est constitué de matrices scalaires à coefficients réels.*

2.5 Conséquences

les algèbres de Lie résolubles et les algèbres de Lie semi-simples constituent deux familles disjointes, puisqu'une algèbre de Lie semi-simple (resp.résoluble) ne peut pas être résoluble (resp. semi-simple).

Bibliographie

[1] **N**. Bourbaki.Groupes et algèbres de Lie, Chapitre *a* à 9, C.C.L.S 1971.

[2] **J.D**ixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars 1974

[3] **J.H**umphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag 1972.

[4] **N.J**acobson, Lie Algèbras, Intrescience tracts 10,Interscience Publishers 1962

[5] **A.K**napp, Lie Groups, beyond an introduction, Progress in Mathematics 140, Birkh*ä* user 1996.

[6] **M.R**ais, Orbites de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie, "Représentation des groupes de Lie résolubles", Monographie de la SMF 4, Dound 1972

[7] **A.S**agle and **R.W**alde, Introduction to Lie groups and Lie algebras, Pure and Applied Mathemathics 51, Academic Press 1973

[8] **S**.Mehdi Une introduction relativement compacte aux algèbres de Lie Décembre 2005

[9] **H**. Samelson, Notes on lie algebras, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies 23, 1969.

[10] **J.-p**. Serre, Algèbres de Lie semisimples complexes, W.A. Benjamin, Inc. 1966.

[11] **N.W**allah, Harmonic analysis on homogeneous space, Pure and Applied Mathematics 19, Marcel dekker, Inc.,1973.