Année univ.: 2019/2020

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

Les solitons de Ricci

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplome de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saîda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : géométrie différentielle

Dédicaces

Je rends grâce a notre dieu le tout miséricorde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoire venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail à la mémoire de ma mère avec tous les sentiments et de gratitude à :

Mes parents, le être le plus cher a mon cœur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.

Mes très chères sœurs Chaima, Soundous et Hadile et toute ma famille.

Mes amies et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Tous ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

Louanges A Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maître Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons .

Je tiens à remercier ***B. Saadli*** pour la bienveillance avec laquelle il a encadré ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.

Je tiens à remercier également le professeur ***S. Ouakkas*** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

Je remerci ***K. Djerfi***, ***A.Halimi*** d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'être membres du jury.

Je désire aussi remercier tous les professeurs de Math à l'université Dr Tahar Moulay - Saida pour son aide durant toutes ces années.

Que soient ,enfin, je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de prés ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail.

Table des matières

Introduction

Un soliton est une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. On en trouve dans de nombreux phénomènes physiques de même qu'ils sont la solution de nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires.

Soliton dans la nature : Les solitons hydrodynamiques Le phénomène associée a été décrit pour la première fois par l'Ecossais John Scott Russell qui l'a observé initialement en se promenant le long d'un canal : il a suivi pendant plusieurs kilomètres une vague remontant le courant qui ne semblait pas vouloir faiblir. Il a été modélisé par Joseph Boussinesq en . Ainsi sur l'eau, il est apparenté au mascaret. Il apparaît par exemple dans la Seine ou sur la Dordogne, en Gironde, à certains endroits et à certains moments.
Le concept de solitons de Ricci a été introduit par Hamilton, ce sont des généralizations naturelles des métriques d'Einstein. On peut aussi les voir comme des points fixes du flot de Ricci, d'où l'appellation "Soliton".

Dans ce mémoire, on s'intéresse par l'étude de soliton de Ricci, où le soliton de Ricci est une variété Riemannienne satisfait l'quation suivant :

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g = \lambda g \tag{1}$$

où Ric est la courbure de Ricci de $(M; g)$, ξ un champ de vecteurs sur M, $\mathcal{L}_\xi g$ la dérivée de Lie de la métrique g par rapport à ξ, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si ξ est le gradient d'une fonction différentiable f sur M, $(M; g; \xi; \lambda)$ est dit soliton de Ricci de type gradient, noté $(M; g; \nabla f; \lambda)$ ou $(M; g; \nabla f)$, l'équation (1) devient :

$$Ric + Hess\ f = \lambda g \tag{2}$$

Une application harmonique $\varphi : (M; g) \to (N; h)$ entre deux variétés Riemanniennes est le point critique de la fonctionnelle énergie :

$$E(\varphi, D) = \int_D \mid d\varphi \mid^2 v_g \tag{3}$$

où D est un domaine compact de M, $\mid d\varphi \mid$ la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$, et v_g l'élément de volume riemannien de $(M^m; g)$. On démontre que toute application φ est harmonique si et seulement si est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\tau(\varphi) = trace_g \nabla d\varphi = 0 \tag{4}$$

où $\nabla d\varphi$ est la deuxième forme fondamentale de φ, $\tau(\varphi)$ est dit champ de tension.

Le but de ce mémoire est de présenter soliton de Ricci par des définitions, exemples et propriétées, ainsi étudier les applications harmoniques, et de démontrer le théorème suivant ;

Soit $(M^m; g; \xi; \lambda)$ un soliton de Ricci. Si $\tilde{g} = Ric$ est une métrique riemannienne sur M, alors l'application identité Id de $(M; g)$ dans $(M; \tilde{g})$ est une application harmonique.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres :

Chapitre 1 :nous citons les concepts plus courant de la géometrie différentielle, définitions et exemples de la variétés lisses, l'espace tangent, champ de vecteur, la construction du fibré, accompagnes de quelques exemples et figures.

Chapitre 2 : on décrit les outils de la géometrie riemannienne en introduisant multiples défnitions à savoir la variété riemannienne, conexion de Levi-Civita, métrique riemannienne

et, en partuculier la métrique sphère comme un exemple.

Chapitre 3 :on présente d'abord les tensuers de courbure : courbure sectionnelle, courbure scalaire, courbure de Ricci, ensuite on fait rappel aux opérateures définissant ainsi la derivée de lie, le gradient , la divergence, le Hessien et laplacien.

Enfin, le dernier chapitre : il fait apparaitre le sens d'une application harmonique, où surgit la démonstration d'un théorème important, liant l'application harmonique, au champ de tension nul avec exemples, ensuite met en relief la définition d'un soliton de Ricci, et d'un gradient soliton de Ricci, étudit des exemples de Ricci soliton, présente quelques proprietés avec preuves, et conclut la démonstration du théorème annoncé.

Chapitre 1

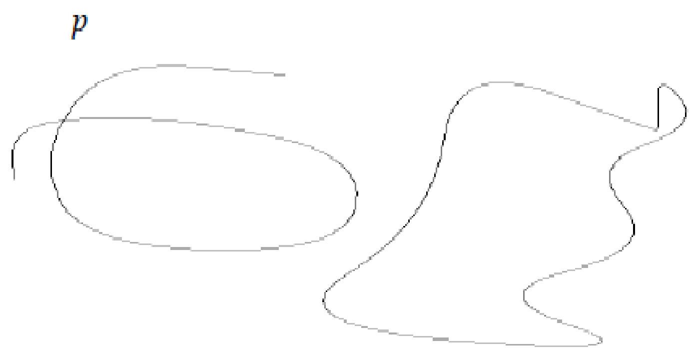
Généralités

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à $\mathbb{R}^n$, afins d'y transférer ce que nous savons déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à $\mathbb{R}^n$. De tels objets nous sont familiers dans $\mathbb{R}^3$: une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe... ressemblent localement à $\mathbb{R}^2$. Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. Ce que nous allons définir ne peut a priori pas être vu comme sous ensemble d'un $\mathbb{R}^n$. Nous voulons en donner une définition intrinsèque, que nous appellerons variétés, sans faire référence à un espace plus grand. Nous sommes dans la situation d'habitants d'une sphère qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à $\mathbb{R}^3$. Un habitant d'une sphère, s'il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. Nous allons recoller ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Globalement, nous n'auront pas nécessairement $\mathbb{R}^n$, mais localement, nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Généralités sur les variétés lisses

1.1.1 Définitions et exemples

Une variété différentiable est un objet sur lequel on souhaite pouvoir faire les mêmes calculs différentiels que sur $\mathbb{R}^n$. Pour calculer une dérivée, il suffit de connaitre la fonction dans un voisinage du point considéré, donc on va munir une variété d'une structure locale héritée de celle de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, sur la figure 01, on observe que la courbe de gauche se recoupe en p donc ce n'est pas une variété : en effet, un voisinage même petit du point double p n'a pas la topologie d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Par contre la courbe de droite est une variété : tout point admet un petit voisinage qu'on peut identifier avec un intervalle de $\mathbb{R}$ (remarquer à cette occasion que ceci n'est plus vérifié pour les grands voisinages : il y a toujours une dialectique entre phénomènes locaux et aspects globaux qui font apparaitre la topologie ou la géométrie de la variété).



Définition 1.1.1. *Soit M un espace topologique séparé (de Hausdorff), une carte de M est le couple (u, φ), où u est un ouvert de M et $\varphi(u)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que :*

$$\varphi : \; u \longrightarrow \varphi(u) \text{ est un homomorphisme.}$$

n est appelé la dimension de la carte (u, φ)

Définition 1.1.2. *Deux cartes (u, φ), (v, ψ) sont dite compatibles si :*

$$u \cap v = \emptyset \text{ ou } \varphi \circ \psi^{-1} : \; \psi(u \cap v) \longrightarrow \varphi(u \cap v) \text{ est un } diffomorphisme \text{ de classe } C^{\infty}$$

Définition 1.1.3. *Un Atlas $\mathcal{A}$ de M est une famille de carte $\{(u_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que :*

1) $M = \cup_{i \in I} u_i$
2) *Toutes les cartes ont la même dimension n.*
3) *Toutes les cartes sont compatibles entre eux.*

Définition 1.1.4. *La dimension des cartes d'un atlas $\mathcal{A}$ est appelé dimension de l'atlas $\mathcal{A}$.*

Définition 1.1.5. *Une variété différentiable de dimension n, est un espace topologique séparé, muni d'un atlas différentiable $\mathcal{A}$ de dimension n.*

Exemples 1.1.1.

1· $\mathbb{R}^n$, *muni de l'atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ est une variété de dimension n.*

2· *Tout espace vectoriel E, est une variété différentielle de dimension n, muni de l'atlas $\mathcal{A} = \{(E, I)\}$ où*

$$\begin{array}{rcl} I^{-1} : \; \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$$

$(e_1, \cdots, e_n)$ *base de* E.

3· *Tout ouvert* Ω *d'une variété* M *est une variété de même dimension, muni de l'atlas* $\mathcal{A}_\Omega = \{(\Omega \cap V), (V, \varphi) \in U\}$

4· $\mathcal{M}_{m,n}$ (*l'espace des matrices* $m \times n$ *sur* $\mathbb{R}$ *est une variété de dimension* $m \times n$

$$(a_i^j)_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,m}} \longrightarrow (a_1^1, \cdots, a_n^1, \cdots, a_1^m, \cdots, a_n^m) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

'

Définition 1.1.6. *Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur* M. *On dit que deux atlas sont équivalents si leur réunions est encore un atlas, c'est-à-dire que,* $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *et* $A' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ *sont équivalents si toutes les cartes* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *et* (V_β, ψ_β) *sont compatibles deux à deux.*

Définition 1.1.7. *Une variété différentiable est le couple* $(M, \mathcal{A})$ *où* M *est la variété topologique de dimension* n *et* $\mathcal{A}$ *est l'atlas maximal de classe* C^∞ *de* M, *on l'appelle aussi la structure différentiable de* M.

Définition 1.1.8. *Soient* $(M^m, \mathcal{A})$ *et* $(N^n, \mathcal{B})$ *deux variétés différentiables. On dit que l'application* $f : M \to N$ *est de classe* C^∞ *si chaque représentation locale de* f *(respectivement* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$*) est de classe* C^∞, *c'est-à-dire, si la composition* $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ *est une application lisse de* $\psi(U \cap f^{-1}V) \to \varphi(V)$ *pour toute carte* $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ *et* $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, *on dit que* $f : M \to N$ *est un difféomorphisme de classe* C^∞ *si* f *et* f^{-1}*sont de classe* C^∞ *;*

Remarques 1.1.1.

1. *Sur un espace non séparé il n'existe pas de métrique, puisque tout espace muni d'une distance est séparé. De même un sous-espace compact n'est pas forcément fermé et l'image d'un compact par une application continue n'est pas toujours compact. C'est pour avoir ce type de propriété que l'on impose à une variété d'être un espace séparé. En revanche, tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.*
2. *Base dénombrable : la classe d'équivalence d'un atlas $\mathcal{A}$ peut être représentée par son atlas maximal qui est l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec celles de $\mathcal{A}$. On veut que la topologie définie par les domaines de ces cartes ait une base dénombrable. Cette hypothèse est importante, sans elle, il est par exemple possible de munir $\mathbb{R}^n$ d'une topologie qui le rende homéomorphe à un $\mathbb{R}^k$ muni de la topologie canonique, pour $k < n$ quelconque.*
3. *On peut construire des cartes incompatibles sur des variétés. Considérons par exemple la droite réelle recouverte d'une part par la carte globale $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ où $\varphi_1 \equiv Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = x$ et d'autre part la carte $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ où $\varphi_2 \equiv Cube : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = x^3$. Les formules de changement de coordonnées sont*

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : z \mapsto y = z^{1/3} \\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto z = y^3 \end{aligned}$$

   On vérifie aisément que ces transformations sont continues mais que $z \mapsto y = z^{1/3}$ n'est pas différentiable en $z = 0$.

Exemples 1.1.2.

1. *$\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte $(\mathbb{R}^n, id)$.*
2. *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, φ). De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, φ).*
3. *L'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est une variété de dimension n : il est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ via le choix d'un système de coordonnées x . L'atlas à une carte $(\mathbb{E}^n, x)$ définit donc une structure différentiable.*

Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.

Exemples 1.1.3.

1. *Le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1, cependant il n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (puisque S^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) :*

$$U_1 = S^1 \backslash \{(1,0)\}; U_2 = S^1 \backslash \{(-1,0)\}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: S^1 \backslash \{(1,0)\} \to]0, 2\pi[: (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta \\ \varphi_2 &: S^1 \backslash \{(-1,0)\} \to]-\pi, \pi[: (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta. \end{aligned}$$

   Les domaines de ces cartes recouvrent clairement le cercle : $U_1 \cup U_2 = S^1$. De plus $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles.Ainsi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas et définit une structure différentiable sur S^1.

2. *La sphère unité*
$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$
est une variété de dimension n. En effet ; on peut construire un atlas en utilisant la projection stériographique, les points $N = (1, 0, ..., 0)$ et $S = (-1, 0, ..., 0)$ désignant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts $U_N = S^n \setminus \{N\}$, et $U_S = S^n \setminus \{S\}$ et les applications :
$$\begin{array}{cccc} \varphi_N : & U_N & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, ..., x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{1-x_1}(x_2, ..., x_{n+1}) \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} \varphi_S : & U_S & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, ..., x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{1+x_1}(x_2, ..., x_{n+1}) \end{array}$$
Déterminons les applications de changement de cartes $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ et $\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui sont des difféomorphismes données par $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Donc $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ définie une structure différentiable sur S^n.(voir figure 03)

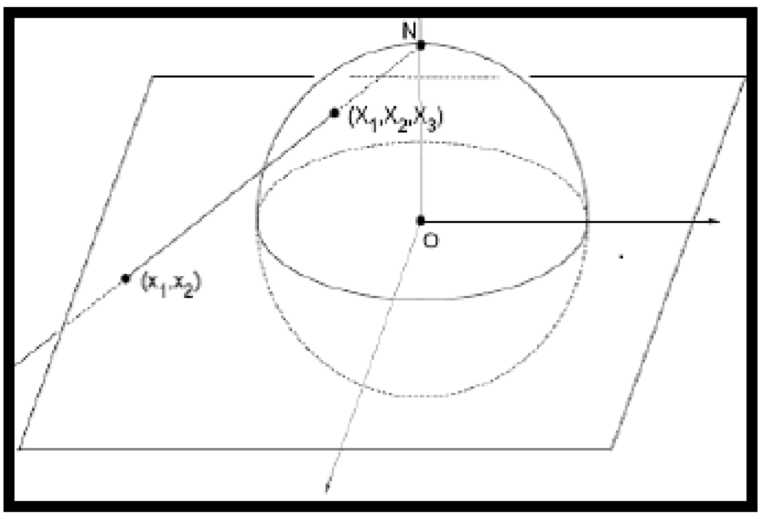


figure 03 :*projection stériographique.*

3. *Tout sous-ensemble ouvert Ω d'une variété différentiable M est lui même une variété différentiable. Sa structure différentiable est definie par l'atlas :*
$$A_\Omega = \{(U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha |_{U_\alpha \cap \Omega})\}$$
où $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas de M.
4. *Soitent M et N deux variétés différentiables de dimension m et n et d'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ respectivement. Alors l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $n+m$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$,où $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.*
Le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est une variété, de même que le tore plat de dimension n, $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$.

5. *L'espace projectif réel de dimension n noté $P^n\mathbb{R}$ est l'espace quotion de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ par la relation d'équivalence*

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$$

On peut donc considérer $P^n\mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$.(voir figure 04)

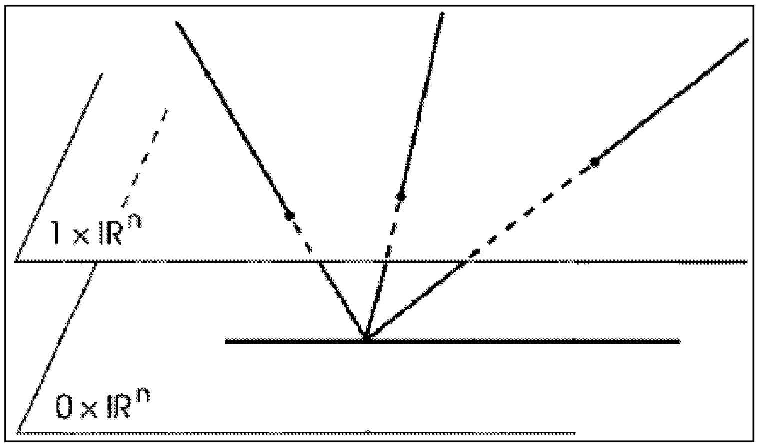


figure 04 *:l'espace projectif réel.*

Remarque 1.1.1. *Pour $i = 0, ..., n$, on considère l'ensemble $V_i \subset P^n\mathbb{R}$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et l'on définit φ_i l'application $V_i \to \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x_i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Pour $(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul, on note $[x_0 : ... : x_n] \in P^n\mathbb{R}$ la droite passant par le point de coordonnées (x_i). Les x_i s'appellent les coordonnées homogènes*

$$[x_0 : ... : x_n] = [y_0 : ... : y_n] \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} \mid (x_0, ..., x_n) = \lambda(y_0, ..., y_n)$$

L'on a $V_i = \{[x_0 : ... : x_n] \mid x_i \neq 0\}$. L'application de carte est

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i : & V_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & [x_0 : ... : x_n] & \mapsto & \frac{1}{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \end{array}$$

Son inverse est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & V_i \\ (y_1, ..., y_n) & \mapsto & [y_1 : ... : y_i : 1 : y_{i+1} : y_n] \end{array}$$

Ceci nous définit des cartes $c_i = (V_i, \varphi_i, \mathbb{R}^n)$. Vérifions que c_1 est compatible avec c_2. D'une part, $\varphi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n\setminus\{y_1 = 0\}$ et $\varphi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n\setminus\{y_1 = 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. L'application de changement de cartes est :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(V_1 \cap V_2) & \to & \varphi_2(V_2 \cap V_1) \\ (y_i) & \mapsto & \frac{1}{y_1}(1, y_2, ..., y_n) \end{array}$$

qui est bien de classe C^1. De la sorte on établit que les cartes sont deux à deux compatibles. Les V_i recouvrant le projectif, les c_i forment donc un atlas.

Définition 1.1.9. *Le* $(n+1)-$ *uple* $x=(x_0,...x_n)$ *est un système de coordonnées homogène de* $p(x)$. *On note* $[x]=[(x_0,...,x_n)]$ *le point de coordonnées homogènes* x. *Nous allons menir* $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ *d'un atlas* $(U_i,\phi_i)_{0\leq i\leq n}$ *et donc en faire une variété. Posons :*

$$V_i=\left\{x=(x_0,...,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\diagup x_i\neq 0\right\}\ \text{où } 0\leq i\leq n$$

Définissons les applications Φ_i *par :*

$$\begin{array}{rccc}\Phi_i: & V_i & \to & \mathbb{R}^n\\ & x & \mapsto & \phi_i(x)=\left(\frac{x_0}{x_i},...,\frac{\widehat{x}_i}{x_i},...,\frac{x_n}{x_i}\right)\end{array}$$

le signifie que le terme correspondant est omis.

i /Ce sont des applications continues et $\Phi_i\,(x)=\Phi_i(y)$ *si et seulement si* $p(x)=p(y)$

ii /D'après les propriétés de la topologie quotiont, $U_i=\Phi_i(V_i)$ *est un ouvert de* $P^n\mathbb{R}$ *et* ϕ_i *passe au quotion et donne une application bijective et continue* ϕ_i *de* U_i *dans* $\mathbb{R}^n$. *Explicitement :* $\phi_i(p(x))=\left(\frac{x_0}{x_i},...,\frac{\widehat{x}_i}{x_i},...,\frac{x_n}{x_i}\right)$

iii /L'application réciproque est donnée par $\phi_i^{-1}(y_0,...,y_{n-1})=p(y_0,...,y_{i-1},1,y_i,...,y_{n-1})$ *ce qui montre que* ϕ_i *est homéomorphisme de* U_i *sur* $\mathbb{R}^n$.

Les fonctions de transition $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ *sont bien des difféomorphismes de* $\phi_i(U_i\cap U_j)$ *sur* $\phi_j(U_i\cap U_j)$, *car pour* $y_j\neq 0$ *on a*

$$\phi_j\circ\phi_i^{-1}(y_0,...,y_{n-1})=(\frac{y_0}{y_j},...,\frac{y_{i-1}}{y_j},\frac{1}{y_j},...,\frac{\widehat{y}_j}{y_j},...,\frac{y_{n-1}}{y_j}).$$

Nous avons ainsi une structure de variété lisse sur $P^n\mathbb{R}$ *de dimension* n.

1.1.2 Espace Tangent

Définition 1.1.10. *(Courbes Parametrées sur une Variété)*
Une courbe paramétrée sur M *est une application* $\gamma:\mathbb{R}\to M$ *de domaine* $I\subset\mathbb{R}$. *Son expression locale dans une carte* $\varphi:U\to\mathbb{R}^m$ *et la courbe :*

$$\begin{array}{rccc}\tilde{\gamma}=\varphi\circ\gamma: & I & \to & \mathbb{R}^m\\ & t & \mapsto & \tilde{\gamma}(t)=(\tilde{\gamma}^1(t),...,\tilde{\gamma}^m(t))=(x^1(\gamma(t)),...,x^m(\gamma(t)))\end{array}$$

La courbe γ *est régulière en* $t\in I$ $(x=\gamma(t)\in M)$, *si pour toute carte* $\varphi:U\to\mathbb{R}^m$ *telle que* U *contient le point* P, *son expression locale* $\tilde{\gamma}=\varphi\circ\gamma$ *est une courbe régulière en* t, *i.e* $\dot{\tilde{\gamma}}(t)=\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t)\neq\overrightarrow{0}$.

Remarque 1.1.2. *Si* γ *est une courbe regulière en* x, *on peut toujours changer sa paramétrisation pour avoir* $\gamma(0)=x$. *Localement, autour de* x, *on peut aussi choisir une carte* φ *telle que* $\varphi(x)=(0,...,0)\equiv\overrightarrow{0}\in\mathbb{R}^m$. *On peut donc toujours avoir une courbe locale* $\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ *regulière en* $\tilde{\gamma}(0)=\overrightarrow{0}$.

Considérons maintenant une variété différentiable M *et un point* x *de* M. *On note* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des courbes dans* M *qui sont différentiables et qui passent par* x *(voir figure 05)*

$$\begin{array}{rccc}\gamma: &]-\varepsilon,\varepsilon[& \to & M\\ & t & \mapsto & \gamma(t)\end{array}\ ;\ \gamma(0)=x$$

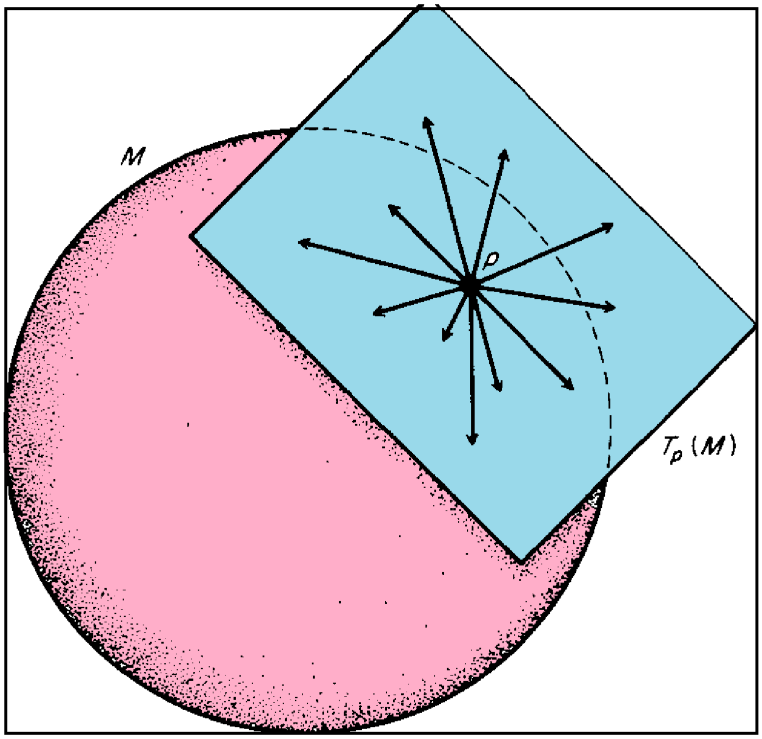


figure 05 :l'espace tangent à M.

Définition 1.1.11. *Un vecteur tangent à M en un point x est le vecteur tangent à une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to M$ au point $\gamma(0) = x$ (où elle est régulière). On appelle espace tangent à M en x l'ensemble T_xM des vecteurs tangent à M en x, c'est- à-dire l'ensemble des vecteurs tangents en x à toutes les courbes sur M qui passent par x qui soient regulières.*

Définition 1.1.12. *Par définition, l'espace tangent en x à M est l'ensemble des classes d'équivalences dans $\mathcal{C}$ pour cette relation. Cette définition signifie donc que T_xM est constitué des« tangentes » des courbes dans M. L'indépendance vis à vis du choix des coordonnées locales est essentielle pour assurer la cohérence de cette définition.*
Il faut cependant souligner qu'un « vecteur tangent » à M n'a pas de sens si M n'est pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. La tangente est plutôt vue ici dans $\mathbb{R}^n$, grâce aux cartes locales.
Bien que nous puissions visualiser les vecteurs (au moins dans $\mathbb{R}^n$), cette définition ne fait pas apparaître une structure d'espace vectoriel de T_xM. C'est pourquoi nous avons recours à une seconde définition.
On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur M,

$$\mathcal{F}(M) = f : M \to \mathbb{R} | f \text{ de classe } C^1$$

Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions : $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Pour $x \in M$, nous définissons sur $\mathcal{F}(M)$ une relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } x \in U, \text{tel que} f_{|U} = g_{|U}$$

On note $C^1_p(M) = \mathcal{F}(M) / \sim$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{F}(M)$ pour cette relation. Le produit sur $\mathcal{F}(M)$ passe au quotient. Donc $C^1_p(M)$ est une algèbre. Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Proposition 1.1.1. *L'espace tangent T_xM est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\mid_x, i = 1, ..., m\}$ forme une base de T_xM en coordonnées locales. Par conséquent, tout vecteur tangent à M en x est de la forme*

$$X_x = \sum X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

où $X^i(x) \in \mathbb{R}$.
Soient M une variété différentiable, $p \in M$,et $\gamma : I \to M$ une courbe de classe C^∞ telle que $\gamma(t) = p$ pour $t \in I$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un ouvert, écrivant

$$C^\infty(p) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U), U \text{ voisinage de } p\}$$

La courbe γ définie une application

$$\begin{array}{cccc} \dot{\gamma}_t : & C^\infty(p) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)'(t) \end{array}$$

On peut interpréter $\dot{\gamma}_t f$ comme la dérivative de f dans la direction de γ au point p.(voir figure 06)

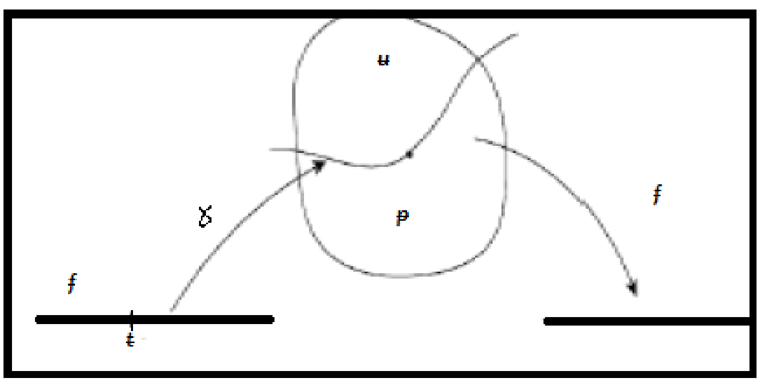


figure06 :la dérivation de f dans la direction de γ *au piont p.*

Définition 1.1.13. *Deux courbes γ_1 et γ_2 sont tangentes au point x si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ et s' il existe une carte locale (U, φ) telle que $x \in U$ et $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$.*
La définition est indépendante de la carte choisie.
En effet ; si (V, ψ) est une autre carte autour de x, on a (voir figure 07)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0) \end{aligned}$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par x : $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si elles sont tangentes en x.
Cette relation signifie que nous considérons deux courbes γ_1 et γ_2 comme équivalentes si elles ont même « vecteur tangent en 0 dans $\mathbb{R}^n$ », sur n'importe quelle carte locale.

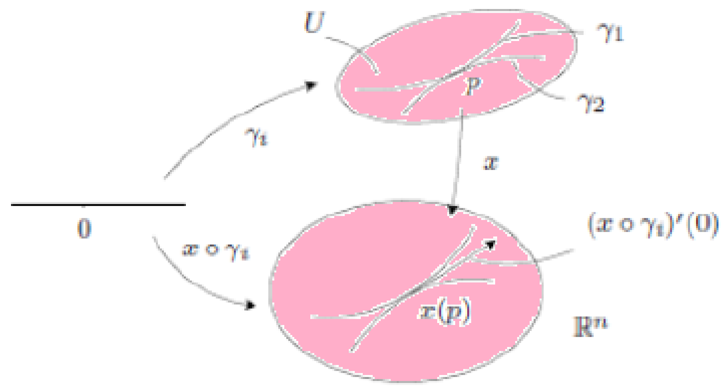


figure07 :deux courbes tangentes au point x.

Exemple 1.1.1. *$M = \mathbb{R}^n$. Si $\gamma = (\gamma_1, .., \gamma_n) : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe lisse et $\acute{\gamma}(t) = (\acute{\gamma}_1(t), ..., \acute{\gamma}_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ est la dérivé de γ au point p, alors*

$$\dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)\acute{}(t) = \acute{f}(p)\acute{\gamma}(t) = \acute{\gamma}(t). \bigtriangledown f(p).$$

En général, l'application $\dot{\gamma}_t$ satisfait à

$$\begin{array}{lll} 1/\ \dot{\gamma}_t(af+bg) & = & a\dot{\gamma}_t f + b\dot{\gamma}_t g, \\ 2/\ \dot{\gamma}_t(fg) & = & g(p)\dot{\gamma}_t f + f(p)\dot{\gamma}_t g. \end{array}$$

Pour tout $f, g \in C^\infty\ (p)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que $\dot{\gamma}_t$ est une dérivation.

Définition 1.1.14. *Une dérivation en x est une application linéaire $D_x : C^1_x(M) \to \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_x est une dérivation si, pour tous réels α et β, et toutes fonctions $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ dans $C^1_x(M)$,*
(i) $D_x{\cdot}(\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha D_x{\cdot}\tilde{f} + \beta D_x \cdot\tilde{g}$ (linéarité),
(ii) $D_x{\cdot}(\tilde{f}.\tilde{g}) = g(x)D_x \cdot\tilde{f} + f(x)D_x{\cdot}\tilde{g}$ (Leibniz)

Définition 1.1.15. *l'espace tangent en x à M, T_xM, est l'espace vectoriel des dérivations sur $C^1_x(M)$.*

Remarque 1.1.3. *la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{F}(M)$ sert à ne faire dépendre $D_x{\cdot}(\tilde{f})$ que des valeurs de f « autour » de x. En effet, la seule information que $\tilde{f}$ puisse conserver de f est son comportement dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de x . Donc aucun autre point que x ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation D_x sur $C^1_x(M)$. Ensuite, la relation de Leibniz assure que cette dépendance ne peut se faire qu'au maximum par la première dérivée de f en x, car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.*

Définition 1.1.16. *Un vecteur tangent de M en $p \in M$ est une application $v : C^{\infty}(p) \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. $v(af + bg) = av(f) + bv(g),\ f, g \in C^{\infty}(p),\ a, b \in \mathbb{R}$;
2. $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$ *(Règle de Leibniz).*

L'espace tangent en p est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel linéaire de vecteur tangent au point p, noté T_pM.

Remarque 1.1.4.

1. *Si $v, w \in T_pM$ et $c, b \in \mathbb{R}$, alors : $cv + bw$ est l'application*

$$X = (av + bw) : \begin{array}{ccc} C^{\infty}(p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & X(f) = cv(f) + bw(f) \end{array}$$

   $cv + bw$ est un vecteur tangent au point p.

2. *On note $vf = v(f)$*
3. *Si $v \in T_pM$ et $c \in C^{\infty}(p)$ est une fonction constante, alors : $cv = 0$.*
4. *Soit U un voisinage de p interprété comme une variété différentiable. Puisque nous utilisons les fonctions en $C^{\infty}(p)$ dans la définition de T_pM, les espaces T_pM et T_pU peuvent être identifiés de façon naturelle.*

Exemple 1.1.2. *Soit (U, x), $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ une carte au point p. On défini un vecteur tangent $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ au point p en fixant*

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p(f) = D_i(f \circ x^{-1})(x(p)), f \in C^{\infty}(p)$$

D_i est la dérivée partielle par rapport à la i-ème variable. On note aussi $(\partial_i)_p = D_{x_i}(p) = (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ Pour toute carte $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ en x_0, on associe n dérivations en x_0 en posant

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_{x_0}(f) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

pour tout $f \in D_{x_0}(M, \mathbb{R})$.(voir figure 8)

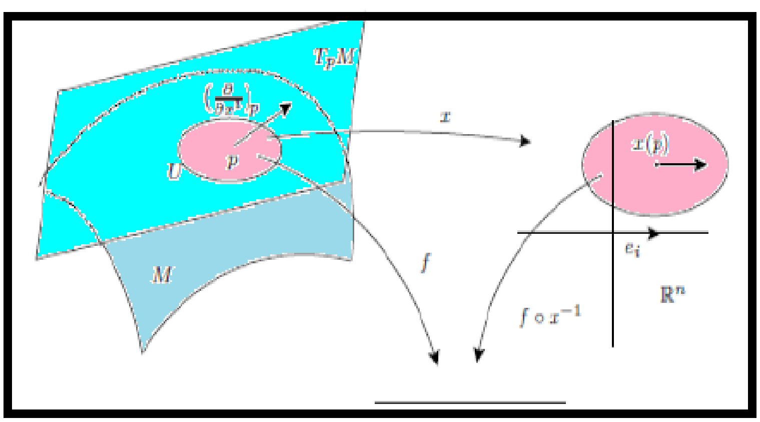


figure 08 :exemple

1.2 Construction du fibré tangent et cotangent

Soient $C^\infty(M)$ et (resp $C^\infty(M,x)$) germe de fonctions (resp germe de fonctions en x) tels que M est une variété différentielle et :
$C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad C^\infty\}$ et $C^\infty(M,x) = \{f : x \in U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad C^\infty\}$
$(C^\infty(M), +, \times, \cdot)$ est une Algèbre.

Définition 1.2.1. *Soit M une variété différentielle de dimension n, $x \in U \subset M$, une courbe passant par x, est une application différentielle $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tel que $0 \in I$ et $\gamma(0) = x$ où I est un interval ouvert de $\mathbb{R}$.*
Posons $K_x = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M,$ courbe passant par $x\}$.
On définit sur K_x une relation d'équivalence :
$\gamma_1,\ \gamma_2 \in K_x\ \gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in atl(M,x)$ *tel que* $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{t=0} \quad$ ***(i)***

Remarque 1.2.1. *En vertu de la compatibilité des cartes, la relation **(i)** est vérifié pour tout élément de l'$atl(M,x)$, si elle est vraie pour une carte quelconque de l'$atl(M,x)$.*

Définition 1.2.2. *L'ensemble quotient $T_xM = K_x/\sim$ est appelé espace tangent à la variété M en x*
La classe d'équivalence $\dot{\gamma}(0)$ est appelé vecteur tangent à M en x

Structure d'espace vectoriel sur T_xM
Soit $(U,\varphi) \in atl(M,x)$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : T_xM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \dot{\gamma}(0) & \longmapsto & \dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} \end{array}$$

en vertu de la définition de l'équivalence des courbes en x l'application $\tilde{\varphi}_x$ est injective.

soit $y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + ty)$ courbe en x telle que $\tilde{\varphi}(\dot{\gamma}(0)) = y$, donc $\tilde{\varphi}_x$ est une application surjective.

Soit $(U,\psi) \in atl(M,x)$, alors

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_x \circ \tilde{\psi}^{-1}(y) & = & \dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1}(\psi(x) + ty))_{t=0} \\ & = & J_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot y \end{array}$$

donc $\tilde{\varphi}_x \circ \tilde{\psi}^{-1}$ est une application linéaire bijective, ce qui nous permet de transporter d'une manière indépendante de la carte choisi, la structure d'espace vectoriele de $\mathbb{R}^n$ à T_xM.

$$\begin{array}{rcl} \dot{\gamma}_1(0) + \dot{\gamma}_2(0) & = & \tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right) + \tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_2(0)\right)\right) \\ & = & \tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0} + \dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{t=0}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot \dot{\gamma}_1(0) & = & \tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\lambda \cdot \dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0}\right) \\ & = & \tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\lambda \cdot \tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right)_{t=0}\right) \end{array}$$

Si $(V,\psi) \in atl(M,x)$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right)+\tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_2(0)\right)\right) &= \tilde{\psi}_x^{-1}\circ\tilde{\psi}_x\circ\tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right)+\tilde{\varphi}_x\left(\dot{\gamma}_2(0)\right)\right)\\
&= \tilde{\psi}_x^{-1}\circ\left(\tilde{\psi}_x\circ\tilde{\varphi}_x^{-1}\right)\left(\tilde{\varphi}_x\circ\tilde{\psi}_x^{-1}\left(\tilde{\psi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right)\right)+\tilde{\varphi}_x\circ\tilde{\psi}_x^{-1}\left(\tilde{\psi}_x\left(\dot{\gamma}_2(0)\right)\right)\right)\\
&\quad \textit{en vertu de la linéarité de } \tilde{\varphi}_x\circ\tilde{\psi}_x^{-1} \textit{ on obtient}\\
&= \tilde{\psi}_x^{-1}\circ\left(\tilde{\psi}_x\circ\tilde{\varphi}_x^{-1}\right)\circ\left(\tilde{\varphi}_x\circ\tilde{\psi}_x^{-1}\right)\left(\tilde{\psi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right)+\tilde{\psi}_x\left(\dot{\gamma}_2(0)\right)\right)\\
&= \tilde{\psi}_x^{-1}\left(\tilde{\psi}_x\left(\dot{\gamma}_1(0)\right)+\tilde{\psi}_x\left(\dot{\gamma}_2(0)\right)\right).
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.2. • *Relativement à cette structure d'espace vectoriel sur T_xM, l'application $\tilde{\varphi}_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

• *Si $(U,\varphi) \in atl(M,x)$, on note $x^i = \varphi^i(x)$, $1 \leq i \leq n$ appelé coordonné de x donc pour la suite on note $(U,x^i)_{1\leq i\leq n}$ une carte de M (on identifie x^i et $\varphi^i(x)$)*

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on note : $\frac{\partial}{\partial x_i}/x$ ou $\frac{\partial_i}{x}$ le vecteur $\tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}/x\right)_{1\leq i\leq n}$ est une base de l'espace vectoriel T_xM relativement à la carte $(U,(x^i)_{1\leq i\leq n})$

pour $1 \leq i \leq n$, la courbe associée au vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial x_i}/x$ est donnée par $\gamma(t) = (\varphi)^{-1}\left(\varphi(x)+te_i\right)$.

• *Si $v \in T_xM$ tel que $\tilde{\varphi}_x(v) = y \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x_i}/x\\
&= y^i\frac{\partial}{\partial x_i}/x \ (\textit{convention d'Einstein})
\end{aligned}$$

Action d'un vecteur sur le germe de fonctions.
Soit $v = \dot{\gamma}(0)$, on pose :

$$\begin{aligned}
v : C^\infty(M,x) &\longrightarrow \mathbb{R}\\
f &\longmapsto v(f) = \frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)_{t=0}
\end{aligned}$$

Opérateur différentielle en x.

Propriété 1.2.1. *on a :*

1. $v(f+g) = v(f)+v(g)$
2. $v(\lambda f) = \lambda v(f)$
3. $v(fg) = f(x)v(g)+g(x)v(f)$ *(formule de leibnitz)*
4. $v(k) = 0$ *(k est une constante)*

Remarque 1.2.3. *Si $(U,x^1,\cdots,x^n)$ une carte de M en x, alors.*
$v = v(x^i)\frac{\partial}{\partial x_i}/x = v(x^i)\partial_i/x$
$v(f) = v(x^i)\frac{\partial}{\partial x_i}/x(f) = v(x^i)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)}$

Proposition 1.2.1. *Soit $L : C^\infty(M,x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$, un opérateur vérifiant 1 et 3 de la propriété précédente, alors il existe un unique vecteur $v \in T_{x_0}M$ tel que $L = v$.*

Preuve. Si $(U, x^1, \cdots, x^n)$ une carte locale de M en x_0, si $f \in C^\infty(M, x_0)$, d'aprés la formule du développement limité on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x^i - x_0^i)\partial_i/x_0\ (f) + (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)a_{ij}$$

d'où

$$\begin{aligned} L(f) &= 0 + L(x^i)\partial_i/x_0\ (f) + 0 \\ &= L(x^i)\partial_i/x_0\ (f) \\ &= v(f) \end{aligned}$$

où $v = L(x^i)\partial_i/x_0$. ∎

Espace tangent à une variété M

Définition 1.2.3. *Soit M une variété de dimension n, on note $TM = \cup_{x \in M} T_x M$ appellé espace tangent à M.*

Soit $K = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M,\ \text{courbe de classe } C^\infty\}$

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(0) = \gamma'(0) \\ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0} \end{cases}$$

alors $TM = K/\sim$

$\tilde{\varphi}$ est une application bijective, et on a relativement à deux cartes (U, φ), (V, ψ).

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}\right)(x, y) &= \left(x, \tilde{\varphi}_x \circ \tilde{\psi}_x^{-1}(y)\right) \\ &= \left(x, D_{\psi(x)}\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right) \cdot y\right) \\ &= \left(x, J_{\psi(x)}\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right) \cdot y\right) \end{aligned}$$

est une application de classe C^∞ de $(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ ceci nous permet de définir une structure de variété sur TM de dimensin $2n$. $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}),\ (U, \varphi) \in atl(M)\}$ est un atlas différentiel sur TM

Remarque 1.2.4. *Si $(U, x^1, \cdots, x^n) \in atl(M)$, $(\partial_1/x\ , \cdots, \partial_n/x)$ base de $T_x M$ et $v \in T_x M$ $v = v^i \partial_i/x$ alors.*

$$\tilde{\varphi}(v) = (x, v^1, \cdots, v^n)$$

on note alors $(\pi^{-1}(U), x^1, \cdots, x^n\ , y^1, \cdots, y^n)$ la carte sur TM

y^i est la $i^{\text{ème}}$ projection relative à la base $(\partial_i/x, \cdots, \partial_n/x)$

Différentielle d'une application :

$f : M \longrightarrow N$ application différentielle $x \in M$ on note

$$\begin{aligned} d_x f :\ T_x M &\longrightarrow T_{f(x)} N \\ \dot{\gamma}(0) &\longmapsto \left(f \dot{\circ} \gamma\right)(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df :\ TM &\longrightarrow T_{f(x)} N \\ \dot{\gamma}(0) &\longmapsto \left(f \dot{\circ} \gamma\right)(0) \end{aligned}$$

df est appellé application tangente de f.

Si $(U,\varphi) \in atl(M)$, $(V,\psi) \in atl(N)$, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\psi}^{-1}(x,y) &= \left(\psi \circ f \circ \psi^{-1}(x), D_x\left(\psi \circ f \circ \psi^{-1}\right) \cdot y\right) \\ &= \left(\psi \circ f \circ \psi^{-1}(x), J_x\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \cdot y\right)\end{aligned}$$

donc df est de classe C^∞.

Si $f :\ M \longrightarrow N,\ C^\infty,\ \ g :\ N \longrightarrow N'\ \ C^\infty$
alors $g \circ f :\ M \longrightarrow N'\ \ C^\infty$ et on a :

$$\begin{aligned} d(g \circ f) &= dg \circ df \\ d_x(g \circ f) &= d_{f(x)}g \circ d_x f. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.5. *Si U est un ouvert de M alors, $T_xU = T_xM$ et $TU = \cup_{x\in U}T_xM$*

Définition 1.2.4. ***L'espace cotangent*** *à M en $x \in M$ est l'espace vectoriel T_x^*M dual linéaire de l'espace tangent T_xM, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires $\omega_x :\ T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$, qui s'appellent* ***covecteurs****. L'espace cotangent T_x^*M a donc la même dimension de l'espace tangent T_xM, c'est-à-dire la dimension de la variété M.*

Proposition 1.2.2. *Pour toute carte (U,φ) autour de $x \in M$, l'ensemble $\{dx_x^i,\ i = 1,\cdots,m\}$ des différentielles des fonctions coordonnées sur U est une base de l'espace cotangent T_x^*M, dual de la base $\{\partial_j/x\ ,j = 1,\cdots,m\}$ de T_xM.*

Preuve. Soient $x^i :\ U \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées sur U, avec $i = 1,\cdots,m$. Pour tout i, la différentiable dx_x^i est l'application linéaire

$$dx_x^i :\ T_xU \cong T_xM \longrightarrow T_{x^i}(x)\mathbb{R} \cong \mathbb{R},\quad dx_x^i\left(\gamma'(0)\right) = \left(x^i \circ \gamma\right)'(0) = \frac{d\tilde{\gamma}^i(0)}{dt}.$$

Montrons que $dx_x^i\left(\partial_i/x\right) = \delta_j^i$. On a $\partial_j/x = \gamma_j'(0)$, où $\gamma_j(t) = \varphi^{-1}(0,\cdots,t,\cdots,0)$,
Soient $\tilde{\gamma} = \varphi\circ\gamma$ la courbe γ en coordonnées locales, donc $\tilde{\gamma}_j(t) = (0,\cdots,t,\cdots,0)$ et $\tilde{\gamma}_j^i = \delta_j^i t$, d'ou suit $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_j^i(0) = \delta_j^i$. Tout covecteur $\omega_x \in T_x^*M$ s'exprime donc, en coordonnées locales, comme combinaison

$$\omega_x = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(x)dx_x^i, \qquad \textit{avec } \omega_i \in C^\infty(U).$$

■

Définition 1.2.5. *On appelle fibré cotangent sur M l'union disjointe des espaces cotangents $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$*

1.2.1 Champ de vecteur

Définition 1.2.6. *Un Champ de vecteur est une application $X :\ M \longrightarrow TM$ différentielle telle que $\pi \circ X = Id$.*
On note $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Si U est un ouvert de M, alors TU est un ouvert de TM. Si X est un champ de vecteur sur M, alors $X_{|_U}$ est un champ de vecteur sur U

$$\begin{array}{rcl} X_{|_U} : U & \longrightarrow & TU \\ x & \longmapsto & X_x \end{array}$$

Soit $(U, x^1, \cdots, x^n)$ une carte locale pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ on pose

$$\begin{array}{rcl} \partial_i : U & \longrightarrow & TU \subset TM \\ x & \longmapsto & \partial_{i|x} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \end{array}$$

est un champ de vecteur sur U.
Pour tout $x \in U$, $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ est une base de T_xM donc $(\partial_1, \cdots, \partial_n)$ est une base locale de champ de vecteur.

Chapitre 2

Variété Riemannienne

2.1 Définitions et exemples

Une variété riemannienne est une variété différentielle ayant une structure supplémentaire permettant de définir le longeur d'un chemin entre deux points de la variété.

Définition 2.1.1. *([1]) Une variété riemannienne de classe C^∞ est un couple (M^n, g) où M^n est une variété de classe C^∞ et g une métrique riemannienne C^∞, c'est-à-dire que pour chaque $x \in M$, $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ est symétrique et définie positive et dépend que de façon C^∞ sur x.*

Exemple 2.1.1. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard*

$$g_0(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

où $v = (v_1, \cdots, v_n)_x, \quad w = (w_1, \cdots, w_n)_x \in T_x\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.2. *Dans la boule*

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$$

on considére le tenseur g_H défini par

$$g_H(v, w) = \frac{4}{1 - \|x\|^2} g_0(v, w), \quad v, w \in T_x\mathbb{R}^n, \ x \in \mathbb{D}^n.$$

g_H est appelée la métrique hyperbolique sur $\mathbb{D}^n$

Exemple 2.1.3. *Soit M une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in M$, on a $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n$. En posant*

$$g(v, w) = g_0(v, w) \quad v, w \in T_xM$$

on obtient la métrique Riemannienne induite par g_0 sur M.

Remarque 2.1.1. *soient* (M,g) *une variété Riemannienne, de dimension* n *et* (U,φ) *(resp* (V,ψ)*) une carte de* M *avec les champs de bases associés* $\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ *(resp*$\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}$*). Si* g_{ij} *(resp* $\tilde{g}_{kl}$*) désignent les composantes de* g *relativement à la carte* (U,φ) *(resp* (V,ψ)*), alors pour tout* $x\in\varphi(U\cap V)$*, le changement de coordonnées est donné par*

$$y=y(x)=(y^1,\cdots,y^n)=\psi o\varphi^{-1}(x)$$

$$g_{ij}=\sum_{k;l=1}^{n}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\tilde{g}_{kl},$$

pour la preuve, remarquons que pour tout $i=1,\cdots,n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Définition 2.1.2. ***Image inverse d'une métrique***
Soient (N,h) *une variété Riemannienne, de dimension* n*,* M *une variété différentiable, de dimension* m*, et* $f:M\longrightarrow N$ *une immersion. Alors*

$$f^*h:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ *et* $x\in M$ *par*

$$f^*h(X,Y)_x=h_{f(x)}(d_xf(X_x),d_xf(Y_x)),$$

est une métrique sur M*, appelée métrique inverse.*

Expression locale de la métrique f^*h
Soient (U,φ) *une carte de* M *de base associée* $(\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n})$*, alors*

$$\begin{aligned}(f^*h)_{ij} &= f^*h\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\ &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}h\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)of\\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}(h_{\alpha\beta}of).\end{aligned}$$

2.2 Connexion linéaire sur une variété

Définition 2.2.1. *Soit* M *une variété de dimension* n*. Une connexion linéaire sur* M *(ou dérivée covariante de champ de vecteurs) est une application :*

$$\begin{aligned}\nabla:\ \mathcal{H}(M)\times\mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M)\\ (X,Y) &\longmapsto \nabla_XY\end{aligned}$$

telle que :

1) ∇ *est* $C^\infty(M)-$*linéaire par rapport à* X *c-à-d*

$$\nabla_{fX+X'}Y = f\nabla_X Y + \nabla_{X'}Y, \qquad \forall f \in C^\infty,\ \forall X, X', Y \in \mathcal{H}(M)$$

2) ∇ *est* $\mathbb{R}-$*linéaire par rapport à* Y *c-à-d*

$$\nabla_X(\lambda Y + Y') = \lambda\nabla_X Y + \nabla_X Y', \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad X, Y, Y' \in \mathcal{H}(M).$$

3) $\forall f \in C^\infty(M), \quad X, Y \in \mathcal{H}(M) \qquad \nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$

$\nabla_X Y$ *est la dérivée covariante de* Y *par rapport à* X.

Propiétés de la dérivée covariante

Proposition 2.2.1. *Soit* $X, X' \in \mathcal{H}(M)$*, si* U *est un ouvert telle-que* $X|_U = X'|_U$ *alors pour tout* $Y \in \mathcal{H}(M)$

$$(\nabla_X Y))\,|_U = (\nabla_{X'}Y)\,|_U$$

Preuve. Puisque ∇ est linéaire par rapport X il suffit de montrer la proposition pour $X|_U = 0$.
Soit $x \in U$, il existe $V \subset U$ ouvert et $h \in C^\infty(M)$ tel-que
$x \in U$ $h|_U = 1$ et $h|_{U^c} = 0$
on a : $hX = 0$ alors $(\nabla_{hX}Y)_y = 0 \quad \forall y \in M$
d'où $0 = (\nabla_{hX}Y)_x = h(x)\,(\nabla_X Y)_x = (\nabla_X Y)_x \quad \forall x \in U$ donc $(\nabla_X Y)\,|_U = 0$

■

Proposition 2.2.2. *Si* $Y|_U = 0$*, alors* $(\nabla_X Y)\,|_U = 0$

Preuve. Soit $x \in U, \quad V \in \mathcal{V}(x), \quad V \subset U$ ouvert et $h \in C^\infty(M)$ tel-que $h|_V = 1$et $h|_{U^c} = 0$
on a $hY = 0$ et $\nabla_X hY = X(h)Y + h\nabla_X Y$
$\forall y \in V$ on a

$$\begin{aligned} 0 &= X_y(h)Y_y + h(y)\,(\nabla_X Y)_y \\ &= 0 + (\nabla_X Y)_y \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.1. *Si* $Y|_U = Y'|_U$ *alors* $(\nabla_X Y)\,|_U = (\nabla_X Y')\,|_U$

2.3 Connexion linéaire associée à une métrique Riemannienne

2.3.1 Connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent TM

Théorème 2.3.1. *([1]) Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, l'application :*

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$$

donnée par la formule de Kozul :

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\}, \tag{2.1}$$

est une connexion sur le fibré (TM, π, M), appelée connexion de Levi-Civita

Théorème 2.3.2. *Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de levi-Civita est l'unique connexion compatible avec la métrique g et sans torsion.*

preuve : D'aprés la formulle de Kozul, nous avons :

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y Z, Y) = \frac{1}{2}\{g(Z,[X,Y]) - g(Z,[Y,X]) = g(Z,[X,Y])\}$$

donc ∇ est de torsion nulle. De plus

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z)) + X(g(Z,Y))\} = X(g(Y,Z))$$

ce qui prouve que ∇ est compatible avec la metrique riemannienne g. $\square$

Coefficients de Christoffel

Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension m et ∇ sa connexion de Levi-civita associeé. Si (U, φ) est une carte locale de M de base locale de champs de vecteurs associé $(\partial_1, \partial_2, ..., \partial_m)$. Alors d'aprés la formule de Kozul, on obtient :

$$2g(\nabla_{\partial_i}, \partial_j, \partial_k) = \partial_i g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g(\partial_i, \partial_k) - \partial_k g(\partial_i, \partial_j) \tag{2.2}$$

on pose :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^s_{ij}\partial_s$$

la formule (2.2) devient :

$$2g(\Gamma^s_{ij}\partial_s, \partial_k) = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$$

$$\Gamma^s_{ij} g_{sk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

on déduit :

$$\Gamma^s_{ij} = \frac{1}{2} g^{sk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \tag{2.3}$$

où (g^{sk}) désigne la matrice inverse de (g_{sk})
Γ^s_{ij} sont appelés les coefficients de Christoffel.

Remarque 2.3.1. *:*

1. *L'egalité (2.3) prouve l'unicité de la connexion de Levi-civita .*

2. *Si la variété* $(\mathbb{R}^n, g)$ *est munie de la métrique euclidienne* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *alors les coefficients de Christoffel sont nulls :*
$$\Gamma_{ij}^s = 0$$

Définition 2.3.1. ***Métrique Riemannienne***

Soit M *une variété Riemannienne de dimension* n *et* x *un point de cette variété de coordonnées* $(x_1, \cdots, x_n)$. *Alors la métrique* g *de cette variété au point* x *est une matrice carrée de dimension* n, *définie positive, telle que l'élément de longueur infinitésimal* ds^2 *s'écrive :*

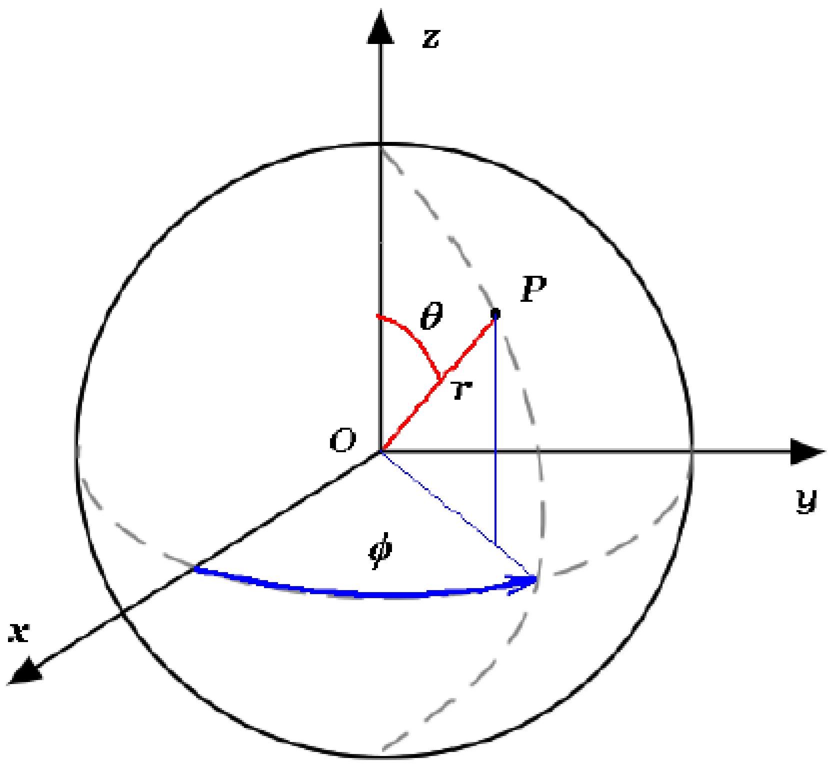
$$ds^2 = (dx_1, \cdots, dx_n) g \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Et cette métrique g *dépend du point* x.

2.4 Exemple de la sphère

Une sphère de rayon $r = 1$ peut être représentée comme l'immersion dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z) d'une portion du plan muni des coordonnées (θ, ϕ) où θ et ϕ sont deux angles tels que $\theta \in [0; \pi]$ et $\phi \in [0; 2\pi]$. Et la fonction d'immersion f permettant de passer de l'un à l'autre s'écrit :

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} x = \sin\theta\cos\phi \\ y = \sin\theta\sin\phi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$



Métrique Riemannienne de la sphère en coordonnées sphériques

L'élément infinitésimal de longueur dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit $ds^2(x, y, z) = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ce qui peut se réécrire en fonction de θ et ϕ comme :

$$ds^2(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = dx^2(\theta, \phi) + dy^2(\theta, \phi) + dz^2(\theta, \phi)$$

D'où

$$ds^2(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 = dS^2(\theta, \phi)$$

On peut réécrire ds^2 sous forme matricielle ce qui fait alors apparaitre la métrique g de la variété comme ceci :

$$ds^2 = (d\theta, d\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

D'où, la métrique associée à la sphère en coordonnées sphériques est symétrique et s'écrit :

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

les symboles de Christoffel associés à la métrique. On rappelle que ces symboles s'écrivent :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

et que g étant symétrique les Γ_{ij}^k le sont également, i.e. : $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. D'autre part, la matrice des g^{ij} qui est la matrice inverse de g, est telle que $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^j$ et donc g^{-1} est symétriques. D'où :

$$g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Ainsi : $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$.

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$.

$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(g_{im,j} + g_{jm,i} + g_{ij,m}\right)$ la somme tanque :

$g_{im,j} = \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j}$ $\quad et \quad i, j, m, k = \overline{1,2}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{11}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{11}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{11}}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1(0+0-0) + \frac{1}{2} \times 0(0+0-0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{11}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{11}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{11}}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 0(0+0-0) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2\theta}(0+0-0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{21}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1(0+0-0) + \frac{1}{2} \times 0(0+2\cos\theta\sin\theta-0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{11}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{21}}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1(0+0-0) + \frac{1}{2} \times 0(2\cos\theta\sin\theta+0-0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 0(0+0-0) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2\theta}(0+2\cos\theta\sin\theta-0) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{11}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{21}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{21}}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 0(0+0-0) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2\theta}(2\cos\theta\sin\theta+0-0) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \phi}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1(0+0-(2\cos\theta\sin\theta)) + \frac{1}{2} \times 0(0+0-0) = -\cos\theta\sin\theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \phi}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 0(0+0-(2\cos\theta\sin\theta)) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2\theta}(0+0-0) = 0.
\end{aligned}$$

Donc on a les Γ^k_{ij} est nul partout sauf $\Gamma^1_{22} = -\cos\theta\sin\theta$ et $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Chapitre 3

Courbures et opérateurs sur la variété riemannienne

Ce chapitre présente d'abord une définition sur la dérivé de lie, puis il définit les courbures :courbure sectionnelle , courbure scalaire, courbure de Ricci ; enfin il cite les opérateurs remarquables à savoir : le gradient, la divergence, le hessien et laplacien, ainsi que leurs propriétés.

3.0.1 Dérivée de lie

Définition 3.0.1. *Soit M une variété différentiable, et soit X un champ de vecteurs sur M. le flot de X, noté $\phi_X : I \to$ Diff(M)$, t \mapsto \phi_{X,t}$ $(0 \in I \subset \mathbb{R})$, est l'unique solution de l'équation différentielle de condition initiale :*

$$\frac{d\phi_{X,t}(x)}{dt} |_t = X_{\phi x,t(x)}, \qquad \phi_{X,0}(x) = x, \qquad \forall x \in M.$$

Définition 3.0.2. *soit M une variété différentiable, et soit X, Y deux champ de vecteur sur M. la derivée de lie de Y par rapport à X est définie par :*

$$(\mathcal{L}_X Y)_x = \frac{d}{dt} \left(\phi^*_{X,t} Y \right)(x) |_{t=0}$$

Où ϕ_x est le flot de $X, \phi^*_{X,t}$ est son pull-back :

$$\phi^*_{X,t} : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \qquad \phi^*_{X,t} Y = d\phi^{-1}_{X,t} o Y o \phi_{X,t}$$

Proposition 3.0.1. *([8]) Pour tout X et Y de $\Gamma(TM)$, on a : $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

Proposition 3.0.2. *([8])([4]) Soit M une variété différentiable , alors :*

1. $\mathcal{L}_X f = X(f), \forall X \in \Gamma(TM), \forall f \in C^\infty(M), \forall X \in \Gamma(TM)$
2. $\mathcal{L}_X (fY) = f[X, Y] + X(f) Y, \forall X, Y \in \Gamma(TM), \forall f \in C^\infty(M)$.

3. $(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]), \forall X, Y \in \Gamma(TM), \forall \omega \in \Gamma^*(TM)$
4. $\forall T \in \Gamma(TM \otimes ... \otimes TM \otimes T^*M \otimes ... \otimes T^*M)$, *on a :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)(\omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., Y_s) &= X(T(\omega_1, ..., \omega_r, ..., Y_1, ..., Y_s)) \\ &- T(\mathcal{L}_X \omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., Y_s) \\ &- -T(\omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., \mathcal{L}_X Y_s) \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.1. *Soit (M,g) une variété Riemannienne, alors :*

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi), \qquad \forall \xi, X, Y \in \Gamma(TM).$$

Preuve. .soit $\xi, X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) &= \xi(g(X,Y)) - g(\mathcal{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathcal{L}_\xi Y) \\ &= g(\nabla_\xi X, Y) + g(\nabla_\xi X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) \\ &= g(\nabla_\xi X, Y) + g(\nabla_\xi X, Y) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi) \\ &= (\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi). \end{aligned}$$

■

Définition 3.0.3. *Soit (M,g) (N,h) deux variétés Riemanniennes , $\varphi \in C^\infty(M,N)$ la seconde forme fondamentale de l'application φ est définie par :*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi\left(\nabla_X^M Y\right), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Propriété 3.0.1. *soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application différentiable, la seconde forme fondamentale de l'application φ est symétrique. C'est à dire :*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla d\varphi(Y,X),$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve. on a :([3])

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi(X,Y) &= \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi\left(\nabla_X^M Y\right) \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]) - d\varphi\left(\nabla_X^M Y\right) \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) - d\varphi\left(\nabla_Y^M X\right) \\ &= \nabla d\varphi(Y,X) \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

■

Proposition 3.0.3. *soient $\varphi : M \to N$ et $\psi : N \to P$ deux application différentiable entre des variétés Riemanniennes, alors :*

$$\nabla d\left(\psi o\varphi\right) = d\psi\left(\nabla d\varphi\right) + \nabla d\psi\left(d\varphi, d\varphi\right)$$

Preuve. .Soit $X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$, alors :

$$\begin{aligned}
\nabla d\left(\psi\circ\varphi\right)(X,Y) &= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d\left(\psi\circ\varphi\right)(Y) - d\left(\psi\circ\varphi\right)\left(\nabla_X^M Y\right)\\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d\psi\left(d\varphi\left(Y\right)\right) - d\psi\left(d\varphi\left(\nabla_X^M Y\right)\right)\\
&= \nabla^P_{d\psi(d\varphi(X))} d\psi\left(d\varphi\left(Y\right)\right) - d\psi\left(d\varphi\left(\nabla_x^M Y\right)\right)\\
&= \nabla^{\psi}_{d\varphi(X)} d\psi\left(d\varphi(Y)\right) - d\psi\left(d\varphi\left(\nabla_X^M Y\right)\right)\\
&= \nabla d\psi\left(d\varphi\left(X\right), d\varphi\left(Y\right)\right) + d\psi\left(\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi\left(Y\right)\right) - d\psi\left(d\varphi\left(\nabla_X^M Y\right)\right)\\
&= \nabla d\psi\left(d\varphi\left(X\right), d\varphi\left(Y\right)\right) + d\psi\left(\nabla d\varphi\left(X,Y\right)\right)
\end{aligned}$$

■

Définition 3.0.4. *Soit (M, g) et (N, h) des variétés Riemanniennes. Une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ est dite totalement géodisique si $\nabla d\varphi = 0$.*

Définition 3.0.5. *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe C^∞. la trace de la seconde forme fondamentale de l'application φ est appelé champ de tension de l'application φ, noté par :*

$$\tau(\varphi) = tr_g \nabla d\varphi$$

Relativement à une base orthonormée (e_i) sur M on a :

$$\tau(\varphi) = \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)$$

3.1 Courbures

3.1.1 Tenseur de courbure

Définition 3.1.1. *Soit M une variété muni d'une connexion linéaire ∇. On définit le tenseur de courbure, $R : \Gamma\left(TM\right) \times \Gamma\left(TM\right) \times \Gamma\left(TM\right) \longrightarrow \Gamma\left(TM\right)$ associé à ∇, par :*

$$R\left(X,Y\right)V = \nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_{[X,Y]}V$$

pour tout $X, Y, V \in \Gamma\left(TM\right)$.

Propriété 3.1.1.

1. *La courbure R est $C^\infty\left(M\right)$ $3 - linaire$*
2. *$R\left(X,Y\right)V = -R\left(Y,X\right)V pour\ tout\ X, Y \in \Gamma\left(TM\right) et\ V \in \Gamma\left(TM\right)\left(antisymtrie\right)$*

Définition 3.1.2. *Sur une variété Riemannnienne (M,g), le tenseur de courbure de la connexion de levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne .*
le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de christoffel :

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_K = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ljk}\partial_l$$

$$R^l_{ijk} = \partial_i\left(\Gamma^l_{jk}\right) - \partial_j\left(\Gamma^l_{ik}\right) + \sum_{m=1}^{n}\{\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}\}$$

où,$(\partial_i)_{i=1..n}$ *est une base locale de champs de vecteur sur* M.

Proposition 3.1.1. *Soit (M,g) une variété Riemannienne.le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :*

1. *R est un champ de tenseurs de type $(1;3)$.*
2. *$g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$.*
3. *$g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.*
4. *R vérifie l'identitée de Bianchi algébrique.*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

.

5. *R vérifie de Bianchi différentielle.*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$$

.

$\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$

3.1.2 Courbure sectionnelle

Définition 3.1.3. *Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 2$ et P un $2-$plan de T_xM de base $\{X,Y\}$. on appelle courbure sectionnelle en x de p .*

$$K_x(P) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer X par λX pour $\lambda \neq 0$ et Y par $Y - g(X,Y)X$.On peut donc supposer que $\{X,Y\}$ est une base orthonormale .Dans ce cas .

$$K_x(P) = g(R(X,Y)Y,X)$$

On vérifie que $K_x(P)$ ne dépend pas de la base orthonormée de P :En effet, si $\{Z,T\}$ est une autre base orthonormale il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2+b^2=1$ avec

$$Z = aX + bY \qquad , T = -bX + aY$$

une simple vérification montre que $g\left(R\left(X,Y\right)Y,X\right) = g\left(R\left(Z,T\right)T,Z\right)$.

Définition 3.1.4. *Soit (M,g) une variété Riemannienne, de dimension n .On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \ \in M$ et tout $2-$plan de T_xM, on a .*

$$K_x(P) = K$$

Remarque 3.1.1. *. (Résultats algébriques)*
Soient (M,g) une variété Riemannienne, de dimension n, $x \in M$, $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..n}$ une base de T_xM et $(e_i)_{i=1..n}$ base orthonormée de T_xM soient

$$\begin{array}{rcl} A : TxM & \longrightarrow & T_xM \\ B : T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \end{array}$$

des applications linéaire et

$$C : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

une application bilinéaire, on pose

$$\begin{array}{rcl} B1 : T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ u & = & \sharp B(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C1 : T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \\ u & \longrightarrow & C(u,.) \\ C2 : T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ u & = & \sharp C1(u) \\ & = & \sharp C(u,.) \end{array}$$

On a :

3.1.3 Courbure de Ricci

Définition 3.1.5. *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^m, g) de dimension m est un tenseur de type $(0,2)$ définie par*

$$\begin{aligned} Ric\,(X,Y) &= traceR\,(*,X)\,Y \\ &= \sum_{i=1}^{m} g\,(R\,(e_i,X)\,Y,e_i) \end{aligned}$$

pour tout $X,Y\in\Gamma\ (TM)$, *où* (e_i) *est une base orthonormée locale sur* M, *et*

$$\begin{aligned} R\,(*,X)\,Y:\Gamma\,(TM) &\rightarrow \Gamma\,(TM) \\ Z &\mapsto R\,(Z,X)\,Y \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} Ric:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\mapsto Ric\,(X,Y) \end{aligned}$$

La courbure de Ricci, Ric est une forme bilinéaire symétrique, en effet

$$\begin{aligned} Ric\,(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} g\,(R\,(e_i,X)\,Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g\,(R\,(Y,e_i)\,e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g\,(R\,(e_i,Y)\,X,e_i) \\ &= Ric\,(Y,X) \end{aligned}$$

Relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=..m}$ les composantes du tenseur de Ricci sont donnés par

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= Ric(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= traceR(*,\frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= g^{kl}g(R(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^l}) \\ &= g^{kl}R^s_{kij}g_{ls} \\ &= \delta_{ks}R^s_{kij} \\ &= R^k_{kij} \end{aligned}$$

Définition 3.1.6. *Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne, (M^m, g), est un tenseur de type $(1,1)$, définie par*

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^{m} R\,(X, e_i)\,e_i$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, où $(e_i)_{i=1..m}$ est une base orthonormée locale sur M.

Remarque 3.1.2. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, de dimension m, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a*

$$Ric\,(X, Y) = g\,(Ricci(X), Y)$$

3.1.4 Courbure scalaire

Définition 3.1.7. *On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne (M^m, g) la fonction définie sur M par*

$$S = trace_g Ric = \sum_{i,j=1}^{m} g\,(R\,(e_i, e_j)\,e_j, e_i)$$

où $(e_i)_{i=1..m}$ une base orthonormée locale sur M.

Proposition 3.1.2. *Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante K si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$R\,(X, Y)\,Z = K\,(g\,(Y, Z)\,X - g\,(X, Z)\,Y)$$

Pour tout X, Y et $Z \in \Gamma(TM)$

Corollaire 3.1.1. *Si (M^m, g) est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante K, alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a*

1. $Ricci(X) = (m-1)\,KX$
2. $Ric\,(X, Y) = (m-1)\,kg\,(X, Y)$
3. $S = m\,(m-1)\,K$

Exemple 3.1.1. *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du repère canonique $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, du produit scalaire euclidien $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$, où $g_{ij} = \delta_{ij}$. On vérifie immédiatement que $\Gamma_{ij}^k = 0, R_{ijk}^l = 0$ donc $R = 0$. En particulier, la courbure sectionnelle de $(\mathbb{R}^{\ltimes}, g_0)$ est nulle.*

3.2 Opérateurs sur une variété Riemannienne

3.2.1 Opérateur gradient

Définition 3.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par*

$$\begin{array}{rcl} grad : C^{\infty}(M) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ f & \longmapsto & grad\ f = \sharp df \end{array}$$

Où df est la différentielle de la fonction f .

Proposition 3.2.1. *(Expression du gradient en coordonneés locales).*
Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $m, (U, \varphi)$ une carte sur M avec les champs de base associées $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$ alors pour tout $f \in C^{\infty}(M)$, on a

$$(grad\ f) \mid_U = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{3.1}$$

soit $\{e_1, ..., e_m\}$une base orthonormée (M, g), alors :

$$grad\ f = \sum_{i=1}^{m} e_i(f) e_i$$

De la proposition 3.2.1 on déduit

Proposition 3.2.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne . pour tout champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$ et toute fonction $f \in C^{\infty}(M)$ on a*

$$df(X) = X(f) = g(gradf, X) \tag{3.2}$$

Propriétés 3.2.1. *soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^{\infty}(M)$ on a*

1. $grad(f + h) = grad\ f + grad\ h$
2. $grad(fh) = h\ grad\ f + f\ grad\ h$
3. $(grad\ f)(h) = (grad\ h)(f)$

Preuve. Soit $f, h \in C^{\infty}(M)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

(1)

$$\begin{array}{rcl} g(grad(f + h), X) & = & X(f + h) \\ & = & X(f) + X(h) \\ & = & g(grad\ f, X) + g(grad\ h, X) \\ & = & g(grad\ f + grad\ h, X) \end{array}$$

(2)

$$\begin{aligned} g\left(grad\left(fh\right),X\right) &= X\left(fh\right) \\ &= hX\left(f\right)+fX\left(h\right) \\ &= hg\left(grad\ f,X\right)+fg\left(grad\ h,X\right) \\ &= g\left(grad\ f+grad\ h,X\right) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \left(grad\ f\right)\left(h\right) &= g\left(grad\ h,grad\ f\right) \\ &= g\left(grad\ f,grad\ h\right) \\ &= \left(grad\ h\right)\left(f\right) \end{aligned}$$

■

3.2.2 Opérateur divergence

a) Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteur sur une variété Riemannienne (M,g) on a

$$\begin{aligned} \nabla X : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z X \end{aligned} \tag{3.3}$$

est une application C^∞ linéaire (∇X *est un tenseur de type* $(1,1)$).
si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} \left(\nabla X\right)_x : T_xM &\longrightarrow T_xM \\ v &\longmapsto \left(\nabla_v X\right)_x \end{aligned} \tag{3.4}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

Définition 3.2.2. *Soit (M,g) une variété Riemannienne. la divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $divX$ est une fonction sur M définie par*

$$divX = tr_g(\nabla X)$$

pour tout $x \in M$, on a

$$\left(divX\right)\left(x\right) = tr_g\left(\left(\nabla X\right)_x\right)$$

En coordoonée locale ($Voir$ la remarque $(3.1.2)$), on a

$$\begin{aligned} divX &= dx^i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X\right) \\ &= g^{ij} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned}$$

Si (e_i) est une base orthonormée locale sur M on a

$$divX = \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i}X, e_i\right)$$

b)- Divergence d'une forme differentielle

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$ une 1-forme sur une variété Riemannienne (M, g), on a

$$\begin{array}{rcl} \nabla_\omega : \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(T^*M) \\ Z & \longmapsto & \nabla_Z\omega. \end{array} \tag{3.5}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇_ω *est un tenseur de type* $(0,2)$)
. si $x \in M$,alors

$$\begin{array}{rcl} (\nabla\omega)_x : T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \\ v & \longmapsto & (\nabla_v\omega)_x \end{array} \tag{3.6}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 3.2.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'une $1-forme$ $\omega \in \Gamma(T^*M)$, notée* ***div(ω)*** *est une fonction sur M définie par*

$$div\ (\omega) = tr_g\left(\nabla\omega\right)$$

pour tout $x \in M$ on a

$$(div\left(\omega\right)) = tr_g\left(\left(\nabla\omega\right)_x\right)$$

De la remarque (3.1.2), on obtient localement

$$\begin{aligned} div\ \omega &= \sum_{i=1}^{m} \left(\nabla_{e_i}\omega\right)(e_i) \\ &= \sum_{i=j=1}^{m} g^{ij}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right). \end{aligned}$$

C) Expression locale de la divergence

Proposition 3.2.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m, pour tout $X \in \Gamma\left(TM\right)$ on a localement*

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j\Gamma_{ij}^i\right)$$

où $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Preuve. :Localement, on

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad et \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

.

$$\begin{aligned}
div\ X &= \sum_{i=1}^{m} dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial X^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i \right)
\end{aligned}$$

■

Propriété 3.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a*

1. $div\,(X + Y) = div\ X + divY$
2. $div(fX) = fdiv\ X + X(f)$

Preuve. :on applique directement la définition du divergence, soit (e_i) une base orthonormée locale sur$M$, on a

1)

$$\begin{aligned}
div\,(X + Y) &= \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} (X + Y), e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) + \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} Y, e_i\right) \\
&= divX + divY.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
div\,(fX) &= \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} fX, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g\left(e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(f) g\left(X, e_i\right) + \sum_{i=1}^{m} fg\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) \\
&= X(f) + fdivX
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Hessienne d'une fonction

Définition 3.2.4. *([1]) soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. la Hessienne de la fonction f noté $Hess(f)$, est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire , définie par :*

$$\begin{array}{rcl} Hess(f) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & g\left(\nabla_X grad(f), Y\right). \end{array}$$

Proposition 3.2.4. *soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$.la Hessienne $Hess(f)$, est une application symétrique.*

Preuve. En tenant compte que le tenseur de torsion associé à la métrique g est nul, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} Hess(f)\,(X, Y) & = & g\left(\nabla_X grad(f), Y\right) \\ & = & X\left(g\left(grad(f), Y\right)\right) - g\left(grad(f), \nabla_X Y\right) \\ & = & X\left(Y(f)\right) - \nabla_X Y(f) \\ & = & [X, Y] + Y\left(X(f)\right) - \nabla_X Y(f) \\ & = & Y\left(X(f)\right) - \nabla_Y X(f) \\ & = & Y\left(g\left(grad(f), X\right)\right) - g\left(grad(f), \nabla_Y X\right) \\ & = & g\left(\nabla_Y grad(f), X\right) \\ & = & Hess(f)\,(Y, X). \end{array}$$

■

3.2.4 Opérateur laplacien

Définition 3.2.5. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur laplacien noté Δ, sur M par*

$$\begin{array}{rcl} \Delta : C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ f & \longmapsto & \Delta(f) = div\left(grad\ f\right) = trace_g\left(Hess(f)\right) \end{array}$$

appelé aussi opérateur de laplace-Beltrami.

Propriété 3.2.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a*

$$\begin{array}{rcl} \Delta\left(f + h\right) & = & \Delta(f) + \Delta(h) \\ \Delta(fh) & = & h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g\left(grad\ f, grad\ h\right). \end{array}$$

Preuve. Soit $f, h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateurs *grad et div* et le fait que $X(f) = g\left(grad(f), X\right)$, on obtient

1.

$$\begin{array}{rcl} \Delta\left(f + h\right) & = & div\left(grad(f + h)\right) \\ & = & div\left(grad\ f + grad\ h\right) \\ & = & div\left(grad\ f\right) + div\left(grad\ h\right) \\ & = & \Delta(f) + \Delta(h). \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= div\,(grad(fh)) \\
&= div\,(f\ grad\ h + hgrad\ f) \\
&= div\,(f\ grad\ h) + div\,(h\ grad\ f) \\
&= fdiv\,(grad\ h) + (grad\ h)\,(f) + h\ div\,(grad\ f) + (grad\ f)\,(h) \\
&= f\Delta(h) + h\Delta(f) + 2g\,(grad\ f, grad\ h)
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.5. (*premire expression du laplacien en coordonnes locales*)
Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\Delta(f) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \tag{3.7}$$

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= div\,(grad\ f) \\
&= g^{ij} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\ f, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g(grad\ f, \frac{\partial}{\partial x^j}) - g(grad\ f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\right) \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j}) - \Gamma^k_{ij} g(grad\ f, \frac{\partial}{\partial x^k})\right) \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k})
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.2.1. *Soit $\mathbb{R}^>$ muni du produit scalaire standard $g_0, (g_{ij} = \delta_{ij})$, alors pour tous fonction différentiable $f$sur $\mathbb{R}^m$ et $X = (X^1, ..., X^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^>$ on a*

1.

$$\begin{aligned}
grad\ f &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^m})
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
divX &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + ... + \frac{\partial X^m}{\partial x^m}
\end{aligned}$$

3.

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Chapitre 4

Solitons de Ricci et les applications harmoniques

Ce chapitre est l'essence même de ce projet ; initialisé par la définition d'une application harmonique avec des exemples, ainsi la définition d'un soliton de Ricci, puis des exemples, puis la définition d'un gradient de Ricci, puis la définition du gradient soliton de Ricci ; illustré par quelques propriétées renommés étudiés d'une maniére détaillée.

4.1 Applications harmoniques

Définition 4.1.1. *([3]) une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞, entre deux variétées riemanniennes est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle d'énergie $E(\varphi; D)$, ie :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D) \mid_{t=0} = 0$$

pour tout domaine compact D et toute variation φ_t de à support $D(i.e\ une\ famille\ d'applications\ lisses$ qui dépendent d'une façon lisse du paramètre $t \in (-\epsilon, \epsilon), avec\ \varphi_0 = \varphi)$

Premiére variation de l'énergie

Théorème 4.1.1. *soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, alors :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D) \mid_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))\, v_g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt} \mid_{t=0}$ dénote le champ de vecteur de variation de $\{\varphi_t\}$,

$$\tau(\varphi) = trace \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi\left(\nabla^{M}_{e_i} e_i\right)\}$$

Preuve.
Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur $M\ et\ \{\frac{d}{dt}\}$ base sur $(-\epsilon, \epsilon)$ alors $\{(e_i, 0)\}, \left(0, \frac{d}{dt}\right)\}$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, et

on a le crochet de Lie $[(e_i,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)]=0$ pour tout $i=1,...,m$, on a $d\phi(e_i,0)=d\varphi(e_i)$ *et* $d\phi(0,\frac{d}{dt})=v$, En effet, remarquons que

$$d\phi(e_i,0):M\times(-\epsilon,\epsilon))\longrightarrow TN,$$

D'aprés la formule de leibniz :

$$\begin{aligned} d\phi\left(e_i,0\right)_{(x,0)} &= d_x\phi_0\left(e_i\mid_x\right)+d_0\phi_x(0)\\ &= d_x\phi_0\left(e_i\mid_x\right)\\ &= d_x\varphi\left(e_i\mid_x\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right)_{(x,0)} &= d_x\phi_0\left(0\mid_x\right)+d_0\phi_x\left(\frac{d}{dt}\mid_t=0\right)\\ &= d\phi_x\left(\frac{d}{dt}\right)\mid_t=0\\ &= v(x)\end{aligned}$$

avec $\phi_0(x)=\phi(x,0)$ *et* $\phi_x(t)=\phi(x,t)$.Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E\left(\varphi_t,D\right)\mid_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h\left(d\varphi_t(e_i,d\varphi_t(e_i)\right)v_g\mid_{t=0}\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h\left(d\phi\left(e_i,0\right),d\phi\left(e_i,0\right)\right)v_g\mid_{t=0}\\ &= \frac{1}{2}\int_D\frac{\partial}{\partial t}h\left(d\phi\left(e_i,0\right),d\phi\left(e_i,0\right)\right)\mid_{t=0}v_g\\ &= \int_D h\left(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\left(e_i,0\right),d\phi\left(e_i,0\right)\right)\mid_{t=0}v_g\\ &= \int_D h\left(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}(e_i,0)d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right),d\phi\left(e_i,0\right)\right)\mid_{t=0}v_g\\ &= \int_D h\left(\nabla^N_{d\varphi(e_i)}v,d\varphi(e_i)\right)v_g\\ &= \int_D h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,d\varphi(e_i)\right)v_g. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Soit ω la forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X)=h\left(v,d\varphi(X)\right),X\in\Gamma(TM)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} div\ \omega &= \left(\nabla_{e_i}\omega\right)(e_i)\\ &= e_i\left(\omega(e_i)\right)-\omega\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\\ &= e_i\left(h\left(v,d\varphi(e_i)\right)-h\left(v,d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)\right)\right)\\ &= h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,d\varphi(e_i)\right)+h\left(v,\tau(\varphi)\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

et comme le théorème le Stokes affirme que :

$$\int_D div\ \omega\ v_g = 0$$

D'aprés les formules (4.1) et (4.2) on obtient :

$$\frac{d}{dt}E\left(\varphi_t, D\right)|_{t=0} = -\int_D h\left(v, \tau(\varphi)\right) v_g$$

■

Par un théorème de J. Eells et J. H. Sampson on a :

Théorème 4.1.2. *([6]) Soit $\varphi : M \to N$ une application lisse, alors φ est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = 0$*

Théorème 4.1.3. *Une application $\varphi \in C^{\infty}(M, N)$ entre deux variétés riemanniennes est harmonique si et seulement :*

$$\tau(\varphi) = trace\nabla d\varphi = 0$$

Localement, on a :

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\beta N}{x_j}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} o\varphi - \frac{\partial\varphi_\gamma M}{\partial x_k}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma} o\varphi.$$

4.1.1 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 4.1.1. *Toute application constante est harmonique.*

Exemple 4.1.2. *L'application identité est harmonique.*

Exemple 4.1.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f : M \to \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= trace\nabla df \\
&= \nabla df\left(e_i, e_i\right) \\
&= \nabla^f_{e_i} df\left(e_i\right) - df\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right) \\
&= e_i\left(e_i(f)\right) - \left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)(f) \\
&= g\left(\nabla_{e_i} grad\ f, e_i\right) \\
&= div\ grad\ f \\
&= \Delta(f)
\end{aligned}$$

Exemple 4.1.4. *Si on travaille avec les fonctions réelles, c'est-à-dire que notre variété d'arrivée est simplement $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique eucledienne, on retombe bien sur la notion classiqque d'harmonicité. Une fonction f est harmonique si et seulement si chacune de ses* *coordonnées est harmonique de la variété du départ dans* $\mathbb{R}$. *En d'autre termes soit* $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0), \varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$:

$$\tau(\varphi) = (\Delta(\varphi_1), ..., \Delta(\varphi_n)),$$

d'où, l'application φ *est harmonique si est seulement si* $\Delta(\varphi_\alpha) = 0$.

Exemple 4.1.5. *Le composé de deux applications harmoniques n'est pas en générale une application harmonique, en particulier si* ϕ *est harmonique et si* ψ *est totalement géodisique c'est-à-dire* $\nabla d\psi = 0$, *alors* $\psi o \phi$ *est harmonique .les applications* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0)$ *et* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, *sont hramoniques, mais remarquons que le composé :*

$$\begin{array}{rcl} \psi o \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est non harmonique, car $\tau(\psi o \varphi) = 2$.

4.2 Soliton de Ricci

4.2.1 Définitions et notations

Définition 4.2.1. *Un soliton de Ricci, noté* (M, g, ξ, λ), *est une variété Riemannienne, tel que :*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g = \lambda g \tag{4.3}$$

où Ric *est la coubure de Ricci de* $(M, g), \xi$ *un champ de vecteurs sur* M, $\mathcal{L}_\xi g$ *la dérivée de lie de la métrique* g *par rapport à* ξ *,et* $\lambda \in \mathbb{R}$

Si ξ *est le gradient d'une fonction différentiable* f *sur* M, (M, g, ξ, λ) *est dit soliton de Ricci de type gradient, noté* $(M, g, \nabla_f, \lambda)$, *l'equation (4.3) devient :*

$$Ric + Hessf = \lambda g \tag{4.4}$$

Définition 4.2.2. *Un soliton de Ricci* (M, g, ξ, λ) *est dit :*
- *stable, si* $\lambda = 0$
- *exepansif, si* $\lambda < 0$
- *rétractif,si* $\lambda > 0$

Remarque 4.2.1. *soit* (M, g, ξ, λ) *un soliton de Ricci, si de plus* ξ *est un champ de killing* $(i.e. \mathcal{L}_\xi = 0)$, *alors* (M, g) *est une variété d'Einstien* $(Ric = \lambda g)$

4.2.2 Exemples des solitons de Ricci

Exemple 4.2.1. *Un exemple fondamental est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de la métrique standard g, et $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{4} \mid x \mid^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2)$, est un soliton de Ricci de type gradient.En effet ;montrons que $Ric{+}Hessf = \frac{1}{2}g$ .La courbe de Ricci de $\mathbb{R}^n$ est nulle ,et on a :*

$$\begin{aligned}(Hessf)_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ij} \\ &= \frac{1}{2}g_{ij}\end{aligned}$$

Exemple 4.2.2. *(Le sigar soliton Σ).En dimension $n = 2$, Hamilton a découvert le solition stable $\Sigma = (\mathbb{R}^2, g, f, 0)$, avec :*

$$g = ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}, f = -\log(1 + x^2 + y^2).$$

Montrons que Σ est un soliton de Ricci de type gradient :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Les symboles de christoffel sont :

$$\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{21}^2 = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{21}^1 = \frac{y}{1 + x^2 + y^2};$$

La courbure de Ricci est :

$$Ric_{1,1} = Ric_{1,1} = \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, Ric_{1,2} = Ric_{2,1} = 0,$$

$(Hessf)_{ij}$ *sont :*

$(Hessf)_{1,1} = (Hessf)_{2,2} = \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2}$, $(Hessf)_{1,2} = (Hessf)_{2,1} = 0.$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}Ric_{1,1} + (Hessf)_{1,1} &= 0 \\ Ric_{2,2} + (Hessf)_{2,2} &= 0 \\ Ric_{1,2} + (Hessf)_{1,2} &= 0 \\ Ric_{2,1} + (Hessf)_{2,1} &= 0\end{aligned}$$

Théorème 4.2.1. *Soit* $(M_1, g_1, \xi_1, \lambda)$ *et* $(M_2, g_2, \xi_2, \lambda)$*, deux solitons de Ricci, alors la variété produit* $(M_1 \times M_2, g, \xi, \lambda)$ *est un soliton de Ricci, où* $g = g_1 \oplus g_2$ *est la métrique diagonale et* $\xi = (\xi_1, \xi_2)$*.*

Preuve. Soit $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$, et soit $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$, on a :

$$Ric^{M_1}(X_1, Y_1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi_1} g_1(X_1, Y_1) = \lambda g_1(X_1, Y_1)$$

c'est-à-dire :

$$Ric^{M_1}(X_1, Y_1) + \frac{1}{2} g_1(\nabla^{M_1}_{X_1}\xi_1, Y_1) + \frac{1}{2} g_1(\nabla^{M_1}_{Y_1}\xi_1, X_1) = \lambda g_1(X_1, Y_1) \tag{4.5}$$

et de même :

$$Ric^{M_2}(X_2, Y_2) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi_2} g_1(X_2, Y_2) = \lambda g_1(X_2, Y_2)$$

$$Ric^{M_2}(X_2, Y_2) + \frac{1}{2} g_2(\nabla^{M_2}_{X_2}\xi_2, Y_2) + \frac{1}{2} g_2(\nabla^{M_2}_{Y_2}\xi_2, X_2) = \lambda g_2(X_2, Y_2) \tag{4.6}$$

Soit Ric la courbure de Ricci de $M_1 \times M_2$, alors :

$$Ric\left((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\right) = Ric^{M_1}(X_1, Y_1) + Ric^{M_2}(X_2, Y_2). \tag{4.7}$$

Soit $\mathcal{L}_\xi$ la dérivé de Lie sur $M_1 \times M_2$ par rapport à ξ, et soit ∇ sa connextion de Levi-Cività associée à g :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi g)\left((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\right) &= g\left(\nabla_{(X_1,X_2)}\xi, (Y_1, Y_2)\right) + g\left(\nabla_{(Y_1,Y_2)}\xi, (X_1, X_2)\right) \\
&= g\left(\left(\nabla^{M_1}_{X_1}\xi_1, \nabla^{M_2}_{X_2}\xi_2\right), (Y_1, Y_2)\right) + g\left((\nabla^{M_1}_{Y_1}\xi_1, \nabla^{M_2}_{Y_2}\xi_2), (X_1, X_2)\right) \\
&= g_1\left((\nabla^{M_1}_{X_1}\xi_1, Y_1\right) + g_2\left((\nabla^{M_2}_{X_2}\xi_2, Y_2\right) + g_1\left((\nabla^{M_1}_{Y_1}\xi_1, X_1\right) + g_2\left((\nabla^{M_2}_{Y_2}\xi_2, X_2\right) \\
&= g_1\left(\nabla^{M_1}_{X_1}\xi_1, Y_1\right) + g_1\left(\nabla^{M_1}_{Y_1}\xi_1, X_1\right) + g_2\left(\nabla^{M_2}_{X_2}\xi_2, Y_2\right) + g_2\left(\nabla^{M_2}_{Y_2}\xi_2, X_2\right) \\
&= \left(\mathcal{L}_{\xi_1} g_1\right)(X_1, Y_1) + \left(\mathcal{L}_{\xi_2} g_2\right)(X_2, Y_2)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

D'aprés (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) :

$$\begin{aligned}
Ric\left((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g\left((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\right) &= Ric^{M_1}(X_1, Y_1) + Ric^{M_2}(X_2, Y_2) \\
&+ \mathcal{L}_{\xi_1} g_1(X_1, Y_1) + \mathcal{L}_{\xi_2} g_1(X_2, Y_2) \\
&= Ric^{M_1}(X_1, Y_1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi_1} g_1(X_1, Y_1) \\
&+ Ric^{M_2}(X_2, Y_2) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi_2} g_1(X_2, Y_2) \\
&= \lambda g_1(X_1, Y_1) + \lambda g_2(X_2, Y_2) \\
&= \lambda\left(g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)\right) \\
&= \lambda g((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)).
\end{aligned}$$

■

Exemple 4.2.3. *Soit $M = \mathbb{R} \times S^n$, munie de la métrique diagonale $g = dt^2 + h$, où h est la métrique induite sur la sphère S^n, et soit :*

$$f(t,x) = at^2 + bt + c, \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times s^n,$$

Où $a, b, c \in \mathbb{R}$ .Alors, $(M, g, \nabla f, \lambda)$ est un soliton de Ricci de type gradient, avec

$\lambda = n-1$ et $a = \frac{n-1}{2}$. En effet ;$\forall X, Y \in \Gamma(TS^n)$, on a :

$$\begin{aligned} Ric\left(\left(\frac{d}{dt}, X\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) &= Ric^{\mathbb{R}}\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) + Ric^{S^n}(X,Y) \\ &= 0 + (n-1)\, h(X,Y). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ici, S^n est de courbure constante $K = 1$, donc $Ric = K(n-1)\,h$.D'autre part

$$\begin{aligned} Hessf\left(\left(\frac{d}{dt}, X\right), \left(\frac{d}{dt}, Y)\right)\right) &= g\left(\nabla_{(\frac{d}{dt},X)} grad\ f, \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) \\ &= g\left(\nabla_{(\frac{d}{dt},X)} f'\left(\frac{d}{dt}, 0\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) \\ &= f''g\left(\left(\frac{d}{dt}, 0\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) + f'g\left(\nabla_{(\frac{d}{dt},X)}\left(\frac{d}{dt}, 0\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) \\ &= f'' = 2a \end{aligned} \tag{4.10}$$

D'après(4.9)et (4.10), on obtient :

$$Ric\left(\left(\frac{d}{dt}, X\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) + Hessf\left(\left(\frac{d}{dt}, X\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) = (n-1)\, h(X,Y) + 2a$$

D'où, M est un soliton de Ricci de type gradient si est selement si :

$$\lambda g\left(\left(\frac{d}{dt}, X\right), \left(\frac{d}{dt}, Y\right)\right) = (n-1)\, h(X,Y) + 2a$$

C'est-à-dire $\lambda(1 + h(X,Y)) = (n-1)\, h(X,Y) + 2a$, il suffit de prendre $\lambda = n-1$ et $a = \frac{(n-1)}{2}$

Exemple 4.2.4. *Soit $M = \mathbb{R}^m \times N^k$, munie de la métrique $g = g_{\mathbb{R}^m} + g_{N^K}$, avec N^K est une variété d'Einstein de dimension K, c'est-à-dire $Ric^{N^K} = \lambda g_{N^K}$, et soit :*

$$f : \mathbb{R}^m \times N^k \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,p) = \frac{\lambda}{2} \,||\, x \,||^2 + g_{\mathbb{R}^m}(x, B) + c,$$

où, $c \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}^m$.Alors, $(M, g, \nabla f, \lambda)$ est un soliton de Ricci de type gradient.

En effet; soit $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^m$, *et soit* $X, Y \in \Gamma\left(TN^k\right)$:

$$\begin{aligned} Ric\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, X\right)\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right) &= Ric^{\mathbb{R}^m}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + Ric^{\mathbb{N}^k}(X,Y) \\ &= Ric^{N^k}(X,Y) = \lambda g_{N^k}(X,Y). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ici, $Ric^{\mathbb{R}^m} = 0$.*calculons de* $Hessf$:

$$\begin{aligned} Hessf\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, X\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right)\right) &= g\left(\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i}, x)} grad\ f, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right)\right) \\ &= g\left(\nabla_{(\frac{\partial}{\partial X_i}, X)} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, 0\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right)\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} g_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\delta_{kj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

avec $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda x_i + b_i$, *où* $B = (b_1, ..., b_m)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda \delta_{ij}$:

$$Hessf\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, X\right), \left(\frac{\partial}{\partial X_j}, Y\right)\right) = \lambda \delta_{ij} \tag{4.12}$$

Finalement, d'aprés (4.11) et (4.12) :

$$Ric\left((\tfrac{\partial}{\partial x_i}, X), (\tfrac{\partial}{\partial x_j}, Y)\right) + Hessf\left((\tfrac{\partial}{\partial x_i}, X)\right), \left(\tfrac{\partial}{x_j}, Y\right) = \lambda g_{N^k}(X,Y) + \lambda \delta_{ij},$$

$$\lambda g\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, X\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right)\right) = \lambda \delta_{ij} + \lambda g_{N^k}(X,Y)$$

4.2.3 Quelques propriétés de soliton de Ricci

Soit $(M, g, \nabla f, \lambda)$ un soliton de Ricci de type gradient, alors :

$$\begin{aligned} 1.div\,(Ric)\,(X) &= g\,(Ricci(\nabla f), X)\,, \forall X \in \Gamma\,(TM) \\ 2.(\nabla_X Ric)(Y) - (\nabla_Y Ric)\,(X) &= -R\,(X,Y)\,\nabla f, \forall X, Y \in \Gamma(TM) \\ 3.\sum_{i=1}^{m} (\nabla_{E_i} R)\,(E_i, X, Y) &= R\,(\nabla f, X)\,Y, \forall X, Y \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

Où $\nabla f = grad\ f, et$ $\{E_i\}$ est une base orthonormée sur M.
Preuve.

1. Sur une carte normale en $x \in M(i.e.(\nabla_{E_i}E_j)_x = 0),\ avec\ X = E_k)$, on a :

$$\begin{aligned}
div\,(Ric)\,(X) &= (\nabla_{E_i}Ric)\,(X, E_i) \\
&= E_i\,(Ric\,(X, E_i)) \\
&= E_i\,(\lambda g\,(X, E_i) - Hessf\,(X, E_i)) \\
&= -E_i g\,(\nabla_X grad\ f, E_i) \\
&= -g\,(\nabla_{E_i}\nabla_X grad\ f, E_i) \\
&= -g\,(R\,(E_i, X)\,grad\ f, E_i) - g\,(\nabla_X\nabla_{E_i}grad\ f, E_i) \\
&= -g\,(R\,(grad\ f, E_i)\,E_i, X) - X\,(g\,(\nabla_{E_i}grad\ f, E_i)) \\
&= -g\,(Ricci\,(grad\ f)\,, X) - X\,(Hessf\,(E_i, E_i))\,.
\end{aligned}$$

Ici, $Ric = \lambda g - Hessf$.D'autre part :

$$Ric\,(E_i, E_i) + Hessf\,(E_i, E_i) = \lambda g\,(E_i, E_i)\,,$$

C'est-à-dire $S + \Delta f = \lambda m$, avec m est la dimension de M, d'où :

$$\begin{aligned}
X(S) + X(\Delta f) &= 0 \\
dS(X) + X(\Delta f) &= 0 \\
2div(Ric)(X) + X(\Delta f) &= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$X\,(Hessf(E_i, E_i)) = -2\ div(Ric)(X)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
div(Ric)(X) &= -g\,(Ricci(grad\ f), X) + 2\ div\ (Ric)(X), \\
-div(Ric)(X) &= -g\,(Ricci(grad\ f), X) \\
div(Ric)(X) &= g\,(Ricci(grad\ f), X)\,.
\end{aligned}$$

2. Si $X = E_a, Y = E_b\ et\ Z = E_c, où\ \{E_i\}\ est\ une\ base\ orthonorme\ sur\ M\ tel\ que\ (\nabla_{E_i}, E_j)_x = 0, \forall i, j = 1, ..., m\,(x \in M)$, on a :

$$\begin{aligned}
g\,(R, (X, Y)\,grad\ f, z) &= g\,(\nabla_X\nabla_Y grad\ f - \nabla_Y\nabla_X grad\ f, Z) \\
&= Xg\,(\nabla_Y grad\ f, Z) - Yg\,(\nabla_X grad\ f, Z) \\
&= X\,(Hessf\,(Y, Z)) - Y\,(Hessf\,(X, Z)) \\
&= X\,(\lambda g\,(Y, Z) - Ric\,(Y, Z)) - Y\,(\lambda g\,(X, Z) - Ric\,(X, Z)) \\
&= -\,(\nabla_X Ric)\,(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)\,(X, Z)
\end{aligned}$$

3. De même, on obtient :

$$\begin{aligned}
g\,((\nabla_{E_i}R)\,(E_i, X, Y)\,, Z) &= g\,(\nabla_{E_i}R\,(E_i, X)\,Y, Z) \\
&= E_i g\,(R\,(E_i, X)\,Y, Z) \\
&= g\,(\nabla_{E_i}R\,(Y, Z)\,E_i, X)\,.
\end{aligned}$$

D'après l'identité de Bianchi :

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\nabla_{E_i} R\right)\left(E_i, X, Y\right), Z\right) &= -g\left(\nabla_Y R\left(Z, E_i\right) E_i, X\right)-g\left(\nabla_Z R\left(E_i, Y\right) E_i, X\right) \\
&= -Y g\left(R\left(Z, E_i\right) E_i, X\right)-Z g\left(R\left(E_i, Y\right) E_i, X\right) \\
&= -Y Ric(Z, X)+Z Ric(Y, X) \\
&= -Y(\lambda g(Z, X)-Hess f(Z, X))-Z(\lambda g(Y, X)-Hess f(Y, X)) \\
&= Y(Hess f(Z, X))-Z(Hess f(Y, X)) \\
&= Y g\left(\nabla_Z grad\ f, X\right)-Z g\left(\nabla_Y grad\ f, X\right) \\
&= Y g\left(\nabla_X grad\ f, Z\right)-Z g\left(\nabla_Y grad\ f, X\right) \\
&= g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right)-g\left(\nabla_Z \nabla_Y grad\ f, X\right) \\
&= g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right)-g(R(Z, Y) grad\ f, X)-g\left(\nabla_Y \nabla_Z grad\ f, X\right) \\
&= g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right)-g(R(Z, Y) grad\ f, X)-Y g\left(\nabla_Z grad\ f, X\right) \\
&= g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right)-g(R(Z, Y) grad\ f, X)-Y g\left(\nabla_X grad\ f, Z\right) \\
&= g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right)-g(R(Z, Y) grad\ f, X)-g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right) \\
&= g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right)-g(R(grad\ f, X) Z, Y)-g\left(\nabla_Y \nabla_X grad\ f, Z\right) \\
&= -g(R(grad\ f, X) Z, Y) \\
&= g(R(grad\ f, X) Y, Z)
\end{aligned}$$

$$D'où\left(\nabla_{E_i} R\right)\left(E_i, X, Y\right)=R(grad\ f, X) Y, puisque\ g\ est\ non\ dégénerée.$$

■

Théorème 4.2.2. *Soit (M^m, g, ξ, λ) un soliton de Ricci. Si $\tilde{g}=Ric$ est une métrique Riemannienne sur M, alors l'application identité $Id:(M, g) \longrightarrow(M, \tilde{g})$ est harmonique.*

Pour la démonstration , on prouve d'abord les lemmes suivants :

Lemme 4.2.1. *soit (M^m, g, ξ, λ) un soliton de Ricci, et soit S la courbure scalaire de M, alors :*
•$S=\lambda m-div\ \xi$.
•$trace \nabla Ricci=\frac{1}{2} grad\ S$.

Preuve. . soit $x \in M$ et soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M. On a :

$$Ric\left(e_i, e_i\right)+\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\xi} g\left(e_i, e_i\right)=\lambda g\left(e_i, e_j\right)$$

et d'aprés la définition de la courbure scalaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\xi} g\left(e_i, e_i\right)+\lambda g\left(e_i, e_i\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(g\left(\nabla_{e_i} \xi, e_i\right)+g\left(\nabla_{e_i} \xi, e_i\right)\right)+\lambda m \\
&= -g\left(\nabla_{e_i} \xi, e_i\right)+\lambda m \\
&= -div \xi+\lambda m .
\end{aligned}$$

On pose $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0, \forall i, j = 1, ..., m$ on obtient $(en\ x)$:

$$\begin{aligned} trace\nabla Ricci &= (\nabla_{e_i} Ricci)\, e_i \\ &= \nabla_{e_i} Ricci(e_i) - Ricci\,(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= \nabla_{e_i} R\,(e_i, e_j)\, e_j. \end{aligned}$$

D'autre part pour tout $X = e_k$:

$$\begin{aligned} div\ Ric\,(X) &= (\nabla_{e_i} Ric)\,(e_i, X) \\ &= \nabla_{e_i} Ric\,(e_i, X) - Ric\,(\nabla_{e_i} e_i, X) - Ric\,(e_i, \nabla_{e_i} X) \\ &= \nabla_{e_i} Ric\,(e_i, X) \\ &= \nabla_{e_i} g\,(R\,(e_i, e_j)\, e_j, X) \\ &= g\,(\nabla_{e_i} R\,(e_i, e_j)\, e_j, X)\,. \end{aligned}$$

d'où, $div\ Ric\,(X) = g\,(trace\nabla Ricci, X)$.

Sachant que $dS = 2\ divRic$, on déduit que :

$$\frac{1}{2} dS\,(X) = g\,(trace\nabla Ricci, X)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} g\,(grad\ S, X) = g\,(trace\nabla Ricci, X)$$

et comme g est non dégénérée, on a bien :

$$\frac{1}{2} grad\ S = trace\nabla Ricci.$$

■

Lemme 4.2.2. *Soit (M^m, g, ξ, λ) un soliton de Ricci, alors :*

$$trace\nabla^2 \xi = -Ricci\ \xi$$

Preuve. Sachant que :

$$\nabla^2_{X,Y} = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

On obtient $(sur\ une\ carte\ normale\ en\ x \in M)$:

$$\begin{aligned} trace\nabla^2 \xi &= g\,(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \xi, e_j)\, e_j \\ &= e_i\,(g\,(\nabla_{e_i} \xi, e_j))\, e_j \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$(\mathcal{L}_\xi g)\,(e_i, e_j) = g\,(\nabla_{e_i} \xi, e_j) + g\left(\nabla_{e_j} \xi, e_i\right)$$

d'où :

$$trace\nabla^2\xi = e_i\left(\left(\mathcal{L}_\xi g\right)(e_i, e_j)\right)e_j - e_i\left(g\left(\nabla_{e_j}\xi, e_i\right)\right)e_j$$

de plus M est un soliton de Ricci vérifiant :

$$Ric\,(e_i, e_j) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g\,(e_i, e_j) = \lambda g\,(e_i, e_j)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} trace\nabla^2\xi &= -2e_i\left(Ric\,(e_i, e_j)\right)e_j + 2e_i\left(\lambda g\,(e_i, e_j)\right)e_j - e_i\left(g\left(\nabla_{e_j}\xi, e_i\right)\right)e_j \\ &= -2e_i\left(Ric\,(e_i, e_j)\right)e_j - e_i\left(g\left(\nabla_{e_j}\xi, e_i\right)\right)e_j \\ &= -2e_i\left(g\left(Ricci\,(e_i)\,, e_j\right)\right)e_j - e_i\left(g\left(\nabla_{e_j}\xi, e_i\right)\right)e_j \\ &= -2e_i\left(g\left(Ricci\,(e_i)\,, e_j\right)\right)e_j - g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\xi, e_i\right)e_j \end{aligned}$$

Or :

$$R\,(e_i, e_j)\,\xi = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\xi - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi - \nabla_{[e_i,e_j]}\xi$$
$$\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\xi = R\,(e_i, e_j)\,\xi + \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi$$

d'où :

$$\begin{aligned} trace\nabla^2\xi &= -2e_i\left(g\left(Ricci\,(e_i)\,, e_j\right)\right)e_j - g\left(R\,(e_i, e_j)\,\xi, e_i\right)e_j - g\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi, e_i\right)e_j \\ &= -2trace\nabla\ Ricci - Ricci\ \xi - grad\ div\ \xi \end{aligned}$$

D'aprés le lemme précédent , on a :

$$\begin{aligned} trace\nabla Ricci &= \frac{1}{2}grad\ S \\ &= \frac{1}{2}grad\,(\lambda m - div\ \xi) \\ &= -\frac{1}{2}grad\ div\ \xi \end{aligned}$$

Finalement, $trace\nabla^2\xi = -Ricci\ \xi$.

■

Preuve. du théorème(4.2.2)
Soient $x \in M, \{e_i\}$ une base orthonormée sur M tel que $\left(\nabla_{e_i}e_j\right)_x = 0$, et $\tilde{\nabla}$ la connexion de levi-Civita de la métrique $\tilde{g} = Ric$.

En utilisant la formule de Kaszul :

$$\begin{aligned} 2Ric\left(\tilde{\nabla}_{e_i}e_i, e_j\right) &= e_i\left(Ric\,(e_i, e_j)\right) + e_i\left(Ric\,(e_j, e_i)\right) - e_j\left(Ric\,(e_i, e_i)\right) \\ &+ Ric\,(e_j, [e_i, e_i]) + Ric\,(e_i, [e_j, e_i]) - Ric\,(e_i, [e_i, e_j])\,. \\ &= 2e_i\left(Ric\,(e_i, e_j)\right) - e_j\left(Ric\,(e_i, e_i)\right) \\ &= 2e_i\left(Ric\,(e_i, e_j)\right) - e_j\,(S)\,. \end{aligned}$$

Où S est la courbure scalaire de (M,g).D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} 2e_{e_i}\left(Ric\left(e_i,e_j\right)\right) &= 2e_i\left(\lambda g\left(e_i,e_j\right)-\mathcal{L}_\xi g\left(e_i,e_j\right)\right)\\ &= -e_i\left(\mathcal{L}_\xi g\left(e_i,e_j\right)\right)\\ &= -e_i\left(\left(g\left(\nabla_{e_i}\xi,e_j\right)\right)+g\left(\nabla_{e_j}\xi,e_i\right)\right)\\ &= -g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\xi,e_j\right)-g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\xi,e_i\right)\\ &= -g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\xi,e_j\right)-\left(g\left(R\left(e_i,e_j\right)\xi,e_i\right)+g\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi,e_i\right)\right)\\ &= -g\left(trace\nabla^2\xi,e_j\right)-g\left(R\left(\xi,e_i\right),e_i,e_j\right)-e_j\left(g\left(\nabla_{e_i}\xi,e_i\right)\right)\\ &= -g\left(trace\nabla^2\xi,e_j\right)-g\left(Ricci\xi,e_j\right)-e_j\left(div\xi\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2Ric\left(\tilde{\nabla}_{e_i},e_j\right) &= -g\left(\left(trace\nabla^2\xi,e_j\right)\right)-g\left(Ricci\ \xi,e_j\right)-e_j\left(div\ \xi\right)-e_j\left(S\right)\\ &= -g\left(trace\nabla^2\xi+Ricci\ \xi,e_j\right)-e_j\left(div\ \xi+S\right) \end{aligned}$$

Or,

$$trace\nabla^2\xi+Ricci\ \xi=0, et\ div\ \xi+S=\lambda m.Par\ conséquent :$$

$$\begin{aligned} 2Ric\left(\tilde{\nabla}_{e_i}e_i,e_j\right) &= e_j\left(\lambda m\right)\\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où, $\tilde{\nabla}_{e_i}=e_i=0$ (car Ric est non dégénérée).Calculons le champ de torsion :

$$\begin{aligned} \tau(Id) &= trace\nabla Id\\ &= \nabla d\left(Id\right)\left(e_i,e_i\right)\\ &= \tilde{\nabla}_{e_i}e_i-\nabla_{e_i}e_i\\ &= 0 \end{aligned}$$

On déduit finalement que l'application $Id:(M,g)\longrightarrow(M,Ric)$ est harmonique.

■

4.3 Variété d'Einstein

Un problème célèbre en géométrie riemannienne est la recherche de métrique d'Einstein .

Définition 4.3.1. *Une telle métrique g est une métrique riemannienne qui est proportionnelle à son tenseur de Ricci, noté Ric, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ appelé constante d'Einstein tel que :*

$$Ric=\lambda g$$

Cette équation est importante car elle est reliée à l'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu}$$

Définition 4.3.2. *La variété riemannienne M est dite une variété d' Einstein s'il existe un nombre réel k tel que l'on ait*

$$Ric(X, Y) = kg(X, Y), \text{ quels que soient } X, Y \in Tp \text{ et } p \in M. \tag{4.13}$$

Remarque 4.3.1. *Une métrique riemannienne g sur une variété M est dite métrique d'Einstein s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*
$Ric(X; Y) = \lambda g(X; Y) \forall (X; Y) \in TM^2$: De plus, si $\lambda = 0$ alors on dit que g est Ricci-plate.

Définition 4.3.3. *Une variété d'Einstein est une variété riemannienne pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$Ric(g) = \lambda g.$$

Cette équation vient de la physique, mais correspond aussi à une condition naturelle à rechercher sur une métrique. Rechercher un comportement donné sur le tenseur de courbure entier qui a une grande rigidité ne correspond qu'à très peu de géométries. Pour la courbure scalaire, c'est le contraire, c'est une condition très souple et donne donc beaucoup solutions, souvent trop pour être étudiées. La situation intermédiaire de la courbure de Ricci constante apparaît comme bien plus intéressante. En dimension 2, toutes les courbures se confondent et toute surface admet une métrique d'Einstein dite canonique.

Théorème 4.3.1. *Etant donnée une surface fermée Σ, il existe une métrique à courbure constante sur la variété dont le signe ne dépend que de la topologie de la surface Σ.Notons γ_Σ le genre de Σ (le nombre de trous dans la surface) on a plus particulièrement :*

1. *si $\gamma_\Sigma = 0, alors$ il existe une mtrique g de courbure positive sur Σ. C'est le cas de la sphère.*
2. *si $\gamma_\Sigma = 1, alors$ il existe une mtrique g de courbure nulle sur Σ. C'est le cas du tore.*
3. *si $\gamma_\Sigma = 2, alors$ il existe une mtrique $g$de courbure ngative Σ. C'est le cas des surfaces à au moins deux trous.*

Remarque 4.3.2. *En dimension 3 et 4, il existe des contraintes topologiques grâce auxquelles on sait que certaines variétés différentielles ne peuvent pas être équipées de métriques d'Einstein. Le problème est ouvert en dimension supérieure à 5, on ne sait pas à quel point la condition d'Einstein est restrictive.*

Bibliographie

[1] A. M. Cherif Géométrie semi-Riemannienne Cours M2 -015,Université de Mascara.http ://www.cu-relizane.dz /ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif

[2] E.Aubry,Introduction-à-la-géométrie-Riemannienne-2008.https ://math.unice.fr/ eaubry/Enseignement/M2/CoursM2.pdf.

[3] Elsa .Ghandour Applications semi-conformes et solitons de Ricci 2018.

[4] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'Analyse Harmonique,Géométrie Différentielle Master M1 et M2, Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017.

[5] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of Différential Geometry I, II, Interscience Tract 1963, 1969

[6] J. Eells and J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. American Journal of Mathematics, 86,p.p 109-160 The Johns Hopkins University Press 1964.

[7] O'Neil, semi - Riemannian geometry, Academic press, Now york, 1983. Journal of Mathematics, 86,p.p 109-160 The Johns Hopkins University Press 1964.

[8] P.Buser, Géométrie Riemannienne 2003, 2004

[9] P. Pansu . Géométrie différentielle, Cours DEA, Laboratoire de Mathématique

[10] P. Petersen, Riemannian Geometry, Second Edition, Mathematics Subject Classification (2000) : 53-01

[11] P. Topping, lecteures on the Ricci flow 2006.

[12] Richard, Hamilton.A compactness property for solutions of the Ricci flow American journal of Mathematics, 117, 545-572,1992

[13] S. Gudmundsson, An Introduction to Riemannian Geometry, Lund University, Decembre 2001.

[14] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), pp. 201-228. d'Orsay . 27 octobre 2005

[15] T.Ozuchi. Introduction au domaine de recherche Singularités en analyse géométrique :flot de Ricci er 2quation d'Einstein Tristan Ozuchi)