République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Contribution à la résolution de certains problèmes avec opérateurs concaves

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Mathématique

par

Taoui **R**ahma [1]

Sous la direction de

Dr. A. Matallah

Soutenue le 13/07/2019 devant le jury composé de

Dr S. Benmansour	M.C.A à l'ESM de Tlemcen	Présidente
Dr A. Matllah	M.C.A à l'ESM de Tlemcen	Encadreur
Dr N. Bekkouche	M.C.A à Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mlle H. Abbas	M.C.A à Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : Taouirahouma@gmail.com

Table des Matières

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu le Tout Puissant de m'avoir donné la force pour terminer ce modeste travaile, ainsi que le courage pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à remercier vivement ma directrice Mme **Atika Matallah**, pour avoir accepté de diriger ce travail. Son soutien, sa clairvoyance et ses compétences m'ont été d'une aide inestimable.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi à Mme **Safia Benmansour** pour son implication dans la réalisation de ce mémoire et pour avoir accepté de présider mon jury.

Je remercie également, mes enseignantes Mme Nouria Bekkouche et Mlle Hafida Abbas d'avoir accepté de juger mon travail.

À tous mes professeurs particuliérement ceux qui m'ont enseigné en Licence et en Master.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissance et de remerciement

À mes chers parents...

Mes frères et mes chéres soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité et toute ma famille.

Mes chères amis et mes camarades et à toute ma promotion pour leurs encouragements et leur soutien.

Introduction

La théorie du point fixe est un outil d'une importance capitale dans la résolution des équations opérateurs non linéaires; plus précisèment cette théorie a de tout le temps apporté réponses aux problèmes d'existence des solutions pour ce type d'équations. Les résultats fondamentaux qui constituent les fondements de ce principe ont été introduits en premier lieu par Banach en 1922 travers son fameux Théorème de l'application contractante. Ce principe ayant été fortement sollicité dans l'analyse non linéaire, il a été développé par plusieurs mathématiciens qui ont fourni des efforts pour diversifier et améliorer les résultats; nous en citons : Picard, Shauder puis Krasnoselskii.

L'objectif de ce mémoire est de faire usage du principe du point fixe pour étudier l'existence des solutions pour des équations opérateurs non linéaires qui sont étroitement, liés aux équations différentielles non linéaires et équations intégrales qu'ont fait l'objet d'études intensives ces dernières décennies. Ainsi, on va s'intéresser aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions positives pour l'équation d'opérateur du type $x = Ax + x_0$ dans un espace de Banach ordonné où : A est un opérateur monotone général $\alpha-$concave.

Ce travail est réparti en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires. On trouve des définitions et propriétés de base.

Le deuxième chapitre, on introduit la notion d'opérateurs $\alpha-$concaves et $\alpha-$concaves généralisés; puis on s'étend aux résultats d'existence pour des équations opérateurs type:

$x = Ax + x_0$. On déduit les conditions sur l'opérateur A qui s'impliquent pour établir l'existence et l'unicité des solutions pour ces équations. L'approche que nous développons dans cette partie se base particulièrement, sur celle développée dans [12].

Enfin, le troisième chapitre est dédié à l'application des résultats obtenus dans le chapitre deux concernant les opérateurs $\alpha-$concaves généralisés à une èquation du second ordre avec conditions de Neumann sur le bord. Les résultats de ce passage se trouvent dans [16].

Chapitre 1

Préliminaires

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite dans notre travail.

1.1 Généralités

Définition 1.1 Soit E un espace de Banach réel. Un sous ensemble convexe P de E est dit un cône s'il satisfait :

$$x \in P \text{ et } \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$$

$$x \in P \text{ et } -x \in P \Rightarrow x = \theta \text{ où } \theta \text{ est l'élément nul de } E$$

Définition 1.2 Posons $\overset{\circ}{P} = \{x \in p/x \text{ est un point intérieur de } P\}$.
P est dit cône solide si $\overset{\circ}{P}$ est non vide.

Définition 1.3 P est dite cône normal s'il existe une constante $N > 0$ telle que pour tout :

$$x, y \in P \ \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|$$

N est dite constante de normalité de P.

Définition 1.4 On dit que E est partiellement ordonné par le cône P si : $x \leq y$ si et seulement si $y - x \in P$.

Si x_1, $x_2 \in E$, l'ensemble $\{x_{1,}x_2\} = \{x \in E/x_1 \leq x \leq x_2\}$ est dit intervalle ordonné entre x_1 et x_2.

Définition 1.5 On dit qu'un opérateur $A : E \rightarrow E$ est croissant (décroissant) si :

$$x \leq y \Rightarrow Ax \leq Ay(Ax \geq Ay)$$

pour tout x, $y \in E$, la notation $x \sim y$ montre qu'ils existent $\lambda > 0$, $\mu > 0$ telles que :

$$\lambda x \leq y \leq \mu x$$

$\sim$ est une relation d'équivalence.

Soit donné $h > \theta$ (i.e: $h \geq \theta$ et $h \neq \theta$).

On note par P_h l'ensemble $P_h = \{x \in E/\exists\lambda(x),\, \mu(x) > 0 \text{ tels que } \lambda(x)h \leq x \leq \mu(x)h\}$.

Il est clair que $P_h \subset P$.

Soit $D \subset E$, un opérateur $A : D \rightarrow E$ est dit compact si pour tout ensemble S borné dans D, $A(S)$ est relativement compact. De plus A est dit complétement continu s'il est continu et compact.

1.2 Fonction de Green

La résolution de certaines équations différentielles fait appel aux fonctions de Green. Dans cette partie on va voir comment intervient cette fonction dans la résolution d'une équation pour un opérateur du type Sturm-Liouville en dimension 1.

Soit (a, b) un intervalle fini, $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue. On considère l'équation :

$$(Lf)(x) = -f^{''}(x) + q(x)f(x) = h(x) \tag{1.1}$$

où : h est une fonction donnée supposée continue par morceau et :

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

est l'opérateur différentiel du type Sturm-Liouville, avec les conditions aux limites suivantes :

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \quad (1.2)$$

$$\alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \quad (1.3)$$

où : α_i, β_i sont des constantes données.
Dans le cas où $\alpha_i = 0$ on a des conditions de Neumann.
Dans le cas où $\beta_i = 0$ on a des conditions de Dirichlet.
La méthode de Green consiste à résoudre pour chaque y fixé dans (a, b) l'équation différentielle:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right] G(x, y) = \delta(x - y) \quad (1.4)$$

où : la fonction de Green doit satisfaire les mêmes conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$ que la solution f de (1.1). Si on arrive à déterminer G, la solution f de (1.1) s'obtient :

$$f(x) = \int_a^b G(x, y) h(y) dy$$

δ étant une distribution, l'équation(1.4) s'interprète dans un sens distributionnel par :

$$L_x G = \delta(x - y)$$

1.2.1 Détermination de la fonction de Green

Pour $y \in (a, b)$ fixé, on détermine $G(x, y)$ en tant que fonction de x par les conditions suivantes :
Elle doit satisfaire l'équation différentielle $L_x G = 0$ sur (a, y) et (y, b).
Elle doit satisfaire les conditions aux limites (1.2) et (1.3) en $x = a$ et $x = b$.
Elle doit être continue au point $x = y$.
La dérivée doit avoir une discontinuité de -1 au point $x = y$ (i.e : la deuxième dérivée

de G au point $x = y$ est égale à $-\delta(x-y)$).

Désignons par g_a une solution de $LG = 0$ qui satisfait la condition (1.2) et par g_b une solution de $LG = 0$ qui satisfait la condition(1.3).

g_a et g_b sont déterminées à des coefficients multiplicatifs près. On suppose qu'on peut les choisir linéairement indépendantes sur (a, b),

(i.e **:** $\lambda g_a + \mu g_b = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$) ($g_a$ n'est pas proportionnelle à g_b).

Alors pour y fixé, ils existent des constantes γ et k qu'on peut déterminer à partir des conditions (1.2) et (1.3) qui peuvent dépendre de y telles que :

$$G(x,y) = \begin{cases} \gamma g_a(x) & \text{si } x < y \\ k g_b(x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

On déterminer γ et k à partir de (1.2) et (1.3) au point $x = y$, on obtient :

$$G(x,y) = \frac{-1}{W(y)} \begin{cases} g_a(x) g_b(y) \text{ si } x < y \\ g_a(y) g_b(x) \text{ si } x < y \end{cases}$$

où : $W(y) = g_a(y) g_b'(y) - g_a'(y) g_b(y)$ est le Wronskien de g_a, g_b.

1.3 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

soit $1 \leq p \leq \infty$, p' l'exposant conjugué de p :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

soit $f \in L^P$ et $g \in L^{p'}$ alors $f \cdot g \in L^1$ et :

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Inégalité de Young

soit $1 < p < \infty$ alors :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},\ \forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0$$

Inégalité de poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ où : λ_1 est la plus petite valeur propre de $-\triangle$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

soient $(x, y \in E(E, \|.\|)$ est un espace préhilbertien alors :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire dans E.

Chapitre 2

Points fixes pour les opérateurs e-concaves généralisés

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions des opérateurs e-concaves généralisés qui sont, comme l'indique leur apellation, des généralisations des opérateurs e-concaves. On y prouve l'existence et l'unicité de leurs points fixes.

Enfin, nous appliquerons les résultat aux problémes aux limites pour quelques équations différentielles du second ordre.

Soit E un espace de Banach réel, P un cône dans E et "$\leq$" est l'ordre partiel défini par P :

$$e \in P - \{\theta\}$$

et :

$$C_e = \{x \in E \mid \exists \alpha,\ \beta > 0 \text{ telles que } \alpha e \leq x \leq \beta e\}$$

Posons :

$$E_e = \{x \in E \mid \exists \lambda > 0 \text{ telle que } -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}$$

et :

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 \mid -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}, \ \forall x \in E_e$$

Il est facile de voir que E_e devient un espace linéaire normée sous la norme $\|.\|_e$.

2.2 Résultat d'existence

Rappelons que le cône P est dit normal s'il existe une constante possitive N telle que :

$$\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|$$

la plus petite valeur N est appelé la constante de normalité de P.

Définition 2.1 *Soit $A : P \to P$ un opérateur et $e > \theta$. On suppose que :*
(i) $Ae \in C_e$
(ii) Il existe un nombre réel $\eta = \eta(x,t) > 0$ tel que :

$$A(tx) \geq t(1+\eta)Ax, \ \forall x \in C_e, \ 0 < t < 1 \tag{2.1}$$

Alors A est appelé un opérateur e-concave généralisé.

Proposition 1 *(2.1) implique :*

$$A(\lambda x) \leq \lambda \left[1 + \eta\left(\lambda x, \frac{1}{\lambda}\right)\right]^{-1} Ax, \ \forall x \in C_e, \ \lambda > 1 \tag{2.2}$$

inversement (2.2) implique (2.1)

Remarque 2 *Si nous remplaçons la condition (i) de définition (2.1) par ce qui suit*
(i)' Pour tout $x \in P - \{\theta\}$, $Ax \in C_e$, alors A est appelé un opérateur e-concave.
De toute évidence, un opérateur e-concave est un opérateur e-concave généalisé.

Remarque 3 *Soit :*$E = C[0,1]$, $P = \{x(t) \in E : x(t) \geq 0, \ \forall t \in [0,1]\}$, $0 < \alpha < 1$

$$e(t) = t$$

$$a(t) = \begin{cases} 1-2t & [0,\frac{1}{2}) \\ 0 & [\frac{1}{2},1] \end{cases}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & [0,\frac{1}{2}) \\ 2t-1 & [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$k_1(t,s) = \begin{cases} t & t \leq s \\ s & t > s \end{cases}, \qquad Au(t) = \int_0^1 k_1(t,s)a(s)(u(s))^\alpha dt, \ \forall u \in P$$

Il est claire que :

$$Ae(t) \geq e(t)\int_0^1 sa(s)(e(s))^\alpha ds, \qquad Ae(t) \leq e(t)\int_0^1 a(s)(e(s))^\alpha dt$$

c'est $Ae \in C_e$*, il est facile de montrer que* (ii) *est vérifiée, alors* A *est un opérateur e-concave généralisé.Mais* A *n'est pas un opérateur e-concave puisque :*

$$u_1(t) \in P - \{\theta\}, \ Au_1(t) \equiv \theta \notin C_e$$

Introduisons les hypothèses suivantes :
(H_1) $\inf\limits_{x \in C_e} \eta(x,t) > 0.$
(H_2) Pour tout $t \in (0,1)$, $\eta(x,t)$ est non croissant par rapport à $x \in C_e$ et il existe $\omega_0 \in C_e$ tel que $A\omega_0 \leq \omega_0$.
(H_3) Pour tout $t \in (0,1)$, $\eta(x,t)$ est non décroissante par rapport à $x \in C_e$ et il existe $v_0 \in C_e$ tel que $Av_0 \leq v_0$.
(H_4) Pour tout $t \in (0,1)$, $\eta(x,t)$ est non décroissante par rapport à $x \in C_e$ et il existe $x_0 \in C_e$ de telle sorte que $\lim\limits_{t \to 0} \eta(x_0,t) = +\infty$
Le théorème suivant est notre résultat principal.

Théorème 4 *Soit* $A : P \to P$ *un opérateur e-concave généralisé et croissant. Alors :*
(i) *A possède au plus un point fixe dans* C_e.
(ii) *Supposons que* P *est un cône normal de* E *et l'une des conditions* $(H_1) - (H_4)$ *est*

satisfaite. Alors A à un point fixe dans C_e.

(iii) Si A à un point fixe positif, $x^* \in C_e$ en construisant successivement, la suite $x_n = Ax_{n-1} (n = 1, 2, \ldots)$ pour tout point initial $x_0 \in C_e$, on a :

$$\|x_n - x^*\|_e \to 0 \ (n \to \infty) \tag{2.3}$$

(iv) Si A à un point fixe possitif $x^* \in C_e$ alors :

$$\max\{\bar{x}\} = x^* = \min\{\bar{y}\}$$

où :

$$\bar{x} \leq A\bar{x}, \quad A\bar{y} \leq \bar{y}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in C_e \tag{2.4}$$

Preuve: **(i)** Supposons que $\theta < x_1, x_2 \in C_e$ sont deux points fixes de A. Alors, il existe des nombres possitifs α_1, α_2, β_1, β_2 tels que :

$$\alpha_1 e \leq x_1 \leq \beta_1 e, \quad \alpha_2 e \leq x_2 \leq \beta_2 e \tag{2.5}$$

de (2.5) nous avons :

$$x_1 = Ax_1 \geq \alpha_1 e = \frac{\alpha_1}{\beta_2}\beta_2 e \geq \frac{\alpha_1}{\beta_2}Ax_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_2}x_2$$

soit :

$$t_0 = \sup\{t > 0 : x_1 \geq tx_2\}$$

on voit que $0 < t_0 < +\infty$. Maintenant, prouvons que $t_0 \geq 1$. En fait, si $0 < t_0 < 1$, alors de (2.1), il existe $\eta_0 > 0$ tel que :

$$x_1 = Ax_1 \geq A(t_0 x_2) \geq (1 + \eta(x_2, t_0))t_0 Ax_2 = (1 + \eta(x_2, t_0))t_0 x_2$$

Ce qui contredit la définition de t_0. Par conséquent $t_0 \geq 1$ et ainsi $x_1 \geq x_2$.
De la même maniére, nous pouvons prouver que $x_2 \geq x_1$. Ainsi $x_2 = x_1$
(ii) Lorsque (H_1) est satisfaite, posons :

$$\xi(t) = \inf_{x \in C_e} \eta(x,t), \; 1 > t_0 > 0$$

tel que : $t_0 e \leq Ae \leq (t_0)^{-1} e$. Alors, il existe un nombre réel $k_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, $(1+\xi(t_0))^{k_0} \geq \dfrac{1}{t_0}$.
Soit :

$$v_0 = t_0^{k_0} e, \quad w_0 = t_0^{-k_0} e, \quad v_n = Av_{n-1}, \quad w_n = Aw_{n-1}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

alors :

$$v_0, w_0 \in C_e, \;\; v_0 \leq w_0, \;\; v_0 = t_0^{2k_0} w_0$$

et :

$$v_1 = A(t_0^{k_0} e) \geq t_0(1+\xi(t_0))A(t_0^{k_0-1} e) \geq \cdots \geq t_0^{k_0}(1+\xi(t_0))^{k_0} Ae \geq v_0 \tag{2.7}$$

$$w_1 = A(t_0^{-k_0} e) \leq t_0^{-1}(1+\eta(t_0^{-k_0} e, t_0))^{-1} A(t_0^{-k_0+1} e) \leq \cdots \leq t_0^{-k_0}(1+\xi(t_0))^{-k_0} Ae \leq w_0$$

Maintenant, il est facile de montrer que :

$$v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0 \tag{2.8}$$

de la définition de v_0 et w_0, nous pouvons voir que :

$$v_n \geq v_0 \geq t_0^{2k_0} w_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Soit :

$$r_n = \sup\{r > 0 \mid u_n \geq r w_n\}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

alors :

$$v_n \geq r_n w_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

et :

$$0 < t_0^{2k_0} \leq r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n \leq \ldots \leq 1 \tag{2.12}$$

nous pouvons prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 1 \tag{2.13}$$

dans le cas contraire si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = a < 1$, alors de la définition de A et de (2.11), nous avons:

$$v_{n+1} \geq A(r_n w_n) \geq \frac{r_n}{a} A(aw_n) \geq r_n(1+\xi(a))Aw_n = r_n(1+\xi(a))w_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

ce qui donne :

$$r_{n+1} \geq r_n(1+\xi(a)) \geq r_1(1+\xi(a))^n \tag{2.15}$$

d'où la contradiction avec (2.12). Ainsi, (2.13)on affirme que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1$.
Il résulte de (2.8) et (2.11)

$$\theta \leq v_{n+k} - v_n \leq w_n - v_n \leq (1 - r_n)w_0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

et donc, de la normalité de P. On a :

$$\|u_{n+k} - v_n\| \leq N(1 - r_n)\|w_0\|$$

où : N est la constante de normalité de P. Par conséquent u_n converge vers $v^* \in C_e$. De la même manière, nous pouvons prouver que $w_n \to w^* \in C_e$. De (2.8) nous avons :

$$v_n \leq v^* \leq w^* \leq w_n,\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et donc :

$$v_{n+1} = Av_n \leq Av^* \leq Aw^* \leq Aw_n = w_{n+1}$$

faisant tendre $n \to 0$, on a :

$$v^* \leq Av^* \leq Aw^* \leq w^* \tag{2.17}$$

Maintenant de (2.16) et (2.17) , on obtient :

$$\theta \leq w^* - v^* \leq w_n - v_n \leq (1 - r_n)w_0$$

ce qui implique que $v^* = w^*$. Par conséquent de (2.17) , on a :

$$v^* = Av^* = Aw^* = w^*$$

Maintenant, en prenant $x^* = v^* = w^*$.

On déduit que x^* est un point fixe de A dans C_e.

Lorsque (H_2) est satisfaite, choisissons $0 < t_0 < 1$, $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$t_0 e \leq Ae \leq (t_0)^{-1}e, \quad t_0^{k_0} e \leq w_0 \leq (t_0)^{-1}e, \quad (1 + \eta(e, t_0))^{k_0} \geq \frac{1}{t_0}$$

Soit :

$$v_0 = t_0^{k_0} e, \;\; v_n = Av_{n-1}, \quad w_n = Aw_{n-1}, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

Alors : $v_0 \in C_e$, $v_0 \leq w_0$ et :

$$t_0^{k_0 - 1} e \leq t_0^{k_0 - 2} e \leq t_0 e \leq e$$

puisque $\eta(x, t)$ est monotone décroissante par raport à x, nous avons:

$$\eta(t_0^{k_0-1}e, t_0) \geq \eta(t_0^{k_0-2}e, t_0) \geq \ldots \geq \eta(t_0 e, t_0) \geq \eta(e, t_0)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= A(t_0^{k_0}e) \geq t_0(1 + \eta(t_0^{k_0-1}e, t_0))A(t_0^{k_0-1}e) \geq (1 + \eta(t_0^{k_0-1}e, t_0))(1 + \eta(t_0^{k_0-2}e, t_0))t_0^2 A(t_0^{k_0-2}e) \\ &\geq \ldots \geq (1 + \eta(e, t_0))^{k_0} t_0^{k_0} Ae \geq v_0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

par conséquent (2.8) est vérifiée. Soit r_n défini comme dans (2.10), alors:

$$v_n \geq v_0 = t_0^{k_0} e \geq t_0^{k_0+1} w_0 \geq t_0^{k_0+1} w_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

nous pouvons prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = 1$$

Dans le cas contraire,si $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = a < 1$, alors, à partir de la définition de A et (2.11), nous avons :

$$v_{n+1} \geq \frac{r_n}{a} A(a w_n) \geq r_n (1+\eta(w_n, a)) A w_n \geq r_n (1+\eta(w_0, a)) w_{n+1}, \; n = 1, 2, \ldots, N \tag{2.21}$$

ce qui donne :

$$r_{n+1} \geq r_n (1 + \eta(w_0, a)) \geq r_1 (1 + \eta(w_0, a))^n \tag{2.22}$$

en remplaçant (2.6), (2.7), (2.9), (2.14), (2.15), par (2.18) (2.19) (2.20) (2.21) (2.22) respectivement, nous complèterons la preuve.

Lorsque (H_3) est satisfaite, choisissons $0 < t_0 < 1$ tel que

$$t_0 e \leq Ae \leq t_0^{-1} e, \; t_0^{-k_0} e \geq v_0 \geq t_0 e, \; (1 + \eta(e, t_0))^{k_0} \geq \frac{1}{t_0}$$

Posons :

$$w_0 = t_0^{-k_0} e, \, v_n = A v_{n-1}, \, w_n = A w_{n-1}, \, n = 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

alors : $w_0 \in C_e$, $v_0 \leq w_0$ et :

$$t_0^{-k_0} e \geq t_0^{-k_0+1} e \geq t_0^{-k_0+2} e \geq \ldots \geq t_0^{-1} e \geq e$$

puisque $\eta(x, t)$ est monotone croissante sur x, on a :

$$\eta(t_0^{-k_0} e, t_0) \geq \eta(t_0^{-k_0+1} e, t_0) \geq \eta(t_0^{-k_0+2} e, t_0) \geq \ldots \geq \eta(t_0^{-1} e, t_0) \geq \eta(e, t_0)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= A(t_0^{-1}t_0^{-k_0+1}e) \leq t_0^{-1}(1+\eta(t_0^{-k_0}e,t_0))^{-1}A(t_0^{-k_0+1}e) \\ &\leq (1+\eta(t_0^{-k_0+1}e,t_0))^{-1}(1+\eta(t_0^{-k_0+2}e,t_0))^{-1}t_0^{-2}A(t_0^{-k_0+2}e) \\ &\leq \ldots \leq (1+\eta(e,t_0))^{-k_0}t_0^{-k_0}Ae \leq w_0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

par conséquent (2.8) est vérifiée. Soit r_n défine dans (2.10) alors :

$$v_n \geq v_0 = t_0^{k_0}e \geq t_0^{k_0+1}w_0 \geq t_0^{k_0+1}w_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.25}$$

Nous pouvons prouver que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$. Dans le cas contraire, si $\lim_{n\to+\infty} r_n = a < 1$, alors de la définition de A et (2.11), nous avons :

$$v_{n+1} \geq \frac{r_n}{a}A(aw_n) \geq r_n(1+\eta(w_n,a))Aw_n \geq r_n(1+\eta(v_0,a))w_{n+1}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.26}$$

Ce qui donne :

$$r_{n+1} \geq r_n(1+\eta(v_0,a)) \geq r_1(1+\eta(v_0,a))^n \tag{2.27}$$

Remplaçant (2.6), (2.7), (2.9), (2.14), (2.15) par (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), respectivement, nous achevons la preuve.

Lorsque (H_4) est satisfaite, du fait que $\lim_{n\to+\infty} \eta(x_0, t) = +\infty$, il existe des nombres réels $0 < t_0 < 1 < s_0$ tels que :

$$\frac{1}{1+\eta(x_0,t_0)}x_0 \leq Ax_0 \leq \left(1+\eta(x_0,\frac{1}{s_0})\right)x_0 \tag{2.28}$$

Soit $v_0 = t_0x_0$, $w_0 = s_0x_0$, alors $v_0 = t_0s_0^{-1}w_0$.

De (2.1), (2.2), (2.28), nous avons $Av_0 \geq v_0$, et

$$Aw_0 = A(s_0x_0) \leq s_0\left(1+\eta(s_0x_0,\frac{1}{s_0})\right)^{-1}Ax_0 \leq s_0\left(1+\eta(x_0,\frac{1}{s_0})\right)^{-1}Ax_0 \leq w_0$$

En adaptant la même manière que pour (H_2) ou (H_3), nous terminons la preuve.

(iii) Choisissons un réel positif $l_0 < 0$ de telle sorte que :

$$l_0^{-\frac{1}{2}} e \leq x_0 \leq l_0^{-\frac{1}{2}} e, \quad l_0^{\frac{1}{2}} e \leq x^* \leq l_0^{-\frac{1}{2}} e$$

et soit :

$$v_0 = l_0 x^*, \; w_0 = l_0^{-1} x^*, \; x_n = A x_{n-1}, \, v_n = A v_{n-1}, \; w_n = A w_{n-1}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.29}$$

alors :

$$v_1 = A(l_0 x^*) \geq l_0 A x^* = v_0, \; w_1 = A(l_0^{-1} x^*) \geq l_0^{-1} A x^* = w_0 \tag{2.30}$$

de (2.29), (2.30) et, nous avons $v_0 \leq x_0 \leq w_0$ et :

$$v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq x^* \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0$$

$$v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0 \tag{2.31}$$

$$l_0^2 w_0 \leq v_0 \leq w_0$$

Soit $r_n = \sup\{t > 0 \mid t x^* \leq v_n, \, t w_n \leq x^*\}$ alors :

$$r_n x^* \leq v_n, \, r_n w_n \leq x^*, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.32}$$

et :

$$l_0 \leq r_0 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_n \leq 1 \tag{2.33}$$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = r < 1 (r > l_0)$ il résulte de(2.29) et (2.32), que :

$$v_{n+1} \geq A(r_n x^*) \geq \frac{r_n}{r} A(r x^*) \geq r_n (1 + \eta(x^*, r)) A x^* \geq r_n (1 + \eta(x^*, r)) x^* \tag{2.34}$$

$$w_{n+1} \leq \frac{r}{r_n} A(r^{-1} x^*) \leq r_n^{-1} (1 + \eta(r^{-1} x^*, r))^{-1} A x^* \leq r_n^{-1} (1 + \eta(r^{-1} x^*, r))^{-1} x^*$$

de (2.33) et (2.34) . nous obtenons $r_{n+1} \geq r_n d \geq r_1 d^n$, $n = 1, 2, \ldots$

où : $d = \min\{(1+\eta(x^*, r)), (1+\eta(r^{-1}x^*, r))\} > 1$; ce qui centredit (2.33). Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$$

De (2.31) et (2.32), nous avons :

$$r_n x^* \leq v_n \leq x_n \leq w_n \leq r_n^{-1} x^*$$

$$(r_n - 1) l_0^{\frac{1}{2}} e \leq x_n - x^* \leq (r_n^{-1} - 1) l_0^{-\frac{1}{2}} e \tag{2.35}$$

par conséquent, on peut déduire (2.3) de (2.35).

(iv) Supposons que $(\bar{x}, \bar{y})$ satisfait (2.4). Alors, il existe un nombre réel α_1 tel que :

$$\alpha_1 e \leq x^* \leq \alpha_1^{-1} e,\ \alpha_1 e \leq A\bar{x} \leq \alpha_1^{-1} e,\ \alpha_1 e \leq A\bar{y} \leq \alpha_1^{-1} e$$

donc :

$$\bar{y} \geq A\bar{y} \geq \alpha_1^2 x^*, \quad \bar{x} \leq A\bar{x} \leq \alpha_1^{-2} x^* \tag{2.36}$$

Posons :

$$t_0 = \sup\{t > 0 \mid t\bar{x} \leq x^*, t x^* \leq \bar{y}\}$$

de (2.36), nous affirmons que $t_0 > 0$.

Si $t_0 < 1$ alors :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\leq A\bar{x} \leq A(t_0^{-1} x^*) \leq t_0^{-1}(1 + \eta(t_0^{-1} x^*, t_0))^{-1} x^* \\ \bar{y} &\geq A\bar{y} \geq A(t_0 x^*) \geq t_0(1 + \eta(x^*, t_0)) x^* \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de t_0 donc $t_0 \geq 1$. Par conséquent, nous avons $\bar{x} \leq x^* \leq \bar{y}$ satisfont (2.4) aussi **(iv)** est vérifiée. ■

Du théorème précédent, découle le résultat qui suit.

Corollaire 2.1 *Soit $A : P \to P$ un opérateur e-concave et A est croissant, P un cône* *normal de E. On suppose que l'une des conditions $(H_1), (H_3)$ est satisfaite. Alors :*

(i) A a exactement un point fixe possitif x^*.

(ii) Il existe des nombres réeles $\beta > \alpha > 0$ tels que :

$$\alpha e \leq x^* \leq \beta e$$

(iii) En construisant successivement la suite

$$x_n = Ax_{n-1},\ (n = 1, 2, \ldots)$$

pour toute donnée initiale $x_0 > \theta$, on a :

$$\|x_n - x^*\|_e \to 0,\ \ n \to \infty$$

2.3 Application

Maintenant, nous appliquons les résultats obtenus pour le problème aux limite, suivant :

$$\begin{cases} -u'' = \lambda(a_0(t) + a_1(t)u^\alpha + a_2(t)u),\ t \in (0, 1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

où : $a_i(t)(i = 0, 1, 2)$ sont des fonctions continues non négatives dans $I = [0, 1]$.

Théorème 2.1 *Supposons que $0 < \alpha < 1$, $\min\limits_{t\in[0,1]}\{a_0(t) + a_1(t)\} > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$ le problème (2.37) a exactement une solution non négligeable non négative $\phi^\lambda(t)$ qui appartient à $C^2(I)$ et satisfait :*

(1) $\alpha_\lambda x \leq \phi^\lambda(t) \leq \beta_\lambda x$, où α_λ, β_λ sont des constantes possitives.

(2) Construisons successivement la suite de fonctions

$$h_0^\lambda(t) = h_0(t)$$

$$h_{n+1}^{\lambda} = \int_0^1 s(a_0(s) + a_1(s)(h_n^{\lambda}(s))^{\alpha} + a_2(s)(h_n^{\lambda}(s)))ds \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$+t\int_0^1 (a_0(s) + a_1(s)(h_n^{\lambda}(s))^{\alpha} + a_2(s)(h_n^{\lambda}(s)))ds$$

pour toute fonction initiale $h_0(t)$ qui est continue positive et non identiquement nulle, alors la suite $\{h_n^{\lambda}(s)\}$ doit converger uniformèment vers $\phi^{\lambda}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Preuve: Il est bien connu que le problème (2.37) est équivalent à l'équation intégrale

$$u(t) = \lambda\int_0^1 k(t,s)(a_0(s) + a_1(s)(u(s))^{\alpha} + a_2(s)u(s))ds$$

où :

$$k(t,s) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Soit :

$$E = C(I) \qquad P = \{x(t) \mid x(t) \in E,\ x(t) \geq 0\},$$
$$e = t \in P - \{0\} \qquad f(t,x) = a_0(t) + a_1(t)(x)^{\alpha} + a_2(t)x$$
$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))ds, \quad \forall x(t) \in P - \{\theta\}$$

il est claire que P est un cône normal de E, $A : P \to P$ est un opérateur croissant, $x^*(t)$ est une solution positive du problème (2.37) si et seulement si $x^*(t)$ est un point fixe de A. Evidemment $\forall x \in P - \{\theta\}$, on a :

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))ds \leq e(t)\int_0^1 f(s,x(s))ds \tag{2.38}$$

Un calcul simple va assurer l'existence d'un intervalle $[c_1, c_2] \subset (0,1)$ et des nombres positifs d_1, l tels que :

$$f(t, x(t)) \geq d_1,\ \forall t \in [c_1, c_2],\ \int_{c_1}^{c_2} k(t,s)ds \geq le(t)$$

par conséquent

$$Ax(t) \geq \int_0^1 k(t,s) f(s, x(s)) ds \geq l d_1 e(t)$$

en combinant l'inégalité ci dessus et de (2.38), nous avons $Ax \in C_e$. Soit

$\tau = \min\limits_{t\in I}\{a_0(t) + a_1(t)\}$, $\quad \bar{a_2} = \max\limits_{t\in I}(a_2(t))$, $\quad R = \frac{\tau}{a_2}$

$x = \max\limits_{t\in I} x(t)$, $\quad M_x = \max\limits_{t\in I}\{\bar{x}, 1\}$

Il est facile de prouver que $a_0(t) + a_1(t) \geq Ra_2(t)$ et :

$$a_0(t) + a_1(t)(x(t))^\alpha \geq \begin{cases} Ra_2(t)x(t) & \text{si } \bar{x} \leq 1 \\ \dfrac{R}{x} a_2(t) x(t) & \text{si } \bar{x} > 1 \end{cases}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} a_0(t) + a_1(t)(x(t))^\alpha &\geq \frac{R}{R + M_x} f(t, x(t)), \\ \int_0^1 k(t,s)\left[f(s, rx(s)) - rf(s, x(s))\right] ds &\geq \frac{R}{R+M_x}(r^\alpha - r) \int_0^1 k(t,s) f(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

oú $0 < r < 1$, d'où:

$$A(rx) \geq r\left[1 + \frac{R}{R+M_x}(r^{\alpha-1} - 1)\right] Ax$$

Ainsi A est un opérateur e-concave, $\eta(x,t) = \dfrac{R}{R+M_x}(t^{\alpha-1} - 1)$ est décroissante en x, d'après le le corollaire(2.1), nous affirmons la conclusion du Théorème (2.1). ■

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions pour quelques problèmes aux limites

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et unicité des solutions positives pour certaines classes de problèmes aux limites du type Neumann. En faisant intervenir le théorème du point fixe pour des opérateurs $\alpha-$concaves généraux dans un cône, on montre l'existence d'une solution unique pour l'équation différentielle du second ordre à conditions sur le bord, suivante :

$$(P)\begin{cases} -u"(t)+m^2u(t)=f(t,u(t))+g(t),\ 0<t<1 \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

où : m est une constante positive, $f:[0,1)\to[0,+\infty)$ et $g:[0,1)\to[0,+\infty)$ sont continues.

Il est bien connu que les problèmes aux limites de Neumann pour les équations différentielles ordinaires ainsi que les équations elliptiques, constituentest un type important de problème ce qui a attiré l'attention de nombreux chercheurs.

3.1 Résultats d'existence pour l'équation $x = Ax + x_0$

Dans ce passage, nous allons donner les résultats d'existence de points fixes pour une équation opérateur du type $x = Ax + x_0$ qui servira pour démontrer le résultat principal.

Rappelons qu'une solution positive de (P) est une fonction $u(t) \in C^2[0,1]$, qui est positive sur $0 < t < 1$ et satisfait l'équation différentielle et les conditions aux limites dans (P).

Nous donnons maintenant un théorème de point fixe des opérateurs généraux $\alpha-$concaves qui sera utilisé dans la démonstration de notre résultat principal.

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et P est un cône sur E, θ est l'élément nul. Etant donné $h > \theta$ (i.e : $h \geq \theta$ et $h \neq \theta$, on note par P_h l'ensemble :

$$P_h = \{x \in P | \exists \lambda(x),\ \mu(x) > 0 \text{ telles que } \lambda(x)h \leq x \leq \mu(x)h\}$$

Théorème 5 *Supposons que le cône P est normal et que l'opérateur A satisfait les conditions suivantes:*

(B_1) $A : P_h \to P_h$ *est croissant dans* P_h

(B_2) *Pour tout* $x \in P_h$ *et* $t \in [0,1]$, *il existe* $\alpha(t) \in (0.1)$ *telle que* $A(tx) \geq t^{\alpha(t)}Ax$

(B_3) *Il existe une constante* $l \geq 0$ *telle que* $x_0 \in [\theta, lh]$. *Alors, l'équation* $x = Ax + x_0$ *a une solution unique dans* P_h.

Remarque 6 *Un opérateur A est dit général $\alpha-$concave si A satisfait la condition (B_2).*

Soient les hypothèses suivantes:

(H_1) $f(t,x)$ est croissante en x pour t fixé.

(H_2) Pour tout $\gamma \in b\ (0,1)$ et $x \geq 0$, il existe $\varphi(\gamma) \in (\gamma, 1)$ telle que $f(t, \gamma x) \geq \varphi(\gamma)$ $f(t,x)$ pour $t \in [0,1]$.

(H_3) Pour tout $t \in [0,1]$, $f(t,a) > 0$, où : $a = 1/2(\cosh m + 1)$.

Dans ce qui suit, nous travaillerons dans l'espace de Banach $C[0,1]$ muni de la norme du sup.

Soit $P = \{x \in C[0,1], | \ x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$, le cône standard. Il est facile de voir que P est un cône normal.

Soit $G(t,s)$, la fonction de Green pour le problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2 u(t) = 0, \ 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

alors :

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \Psi(s)\Psi(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \Psi(t)\Psi(1-s) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \rho &= m \cdot \sinh m \\ \Psi(t) &= \cosh mt \end{aligned}$$

Il est évident que $\Psi(t)$ soit croissante sur $[0,1]$ et :

$$0 < G(t,s) \leq G(t,t), \ 0 \leq t,s \leq 1 \tag{3.2}$$

Lemme 7 *Soit $G(t,s)$ la fonction de Green pour le problème* (3.1), *alors:*

$$G(t,s) \geq \frac{1}{\cosh^2 m} \cosh mt \cdot \cosh(1-t)m \cdot G(t_0,s), \ \ t, t_0, s \in [0,1]$$

3.2 Résultat principal

Le théorème qui suit, exprime le résultat principal de cette partie.

Théorème 8 *Supposons que les hypothèses (H_1)-(H_3) soient vérifiées. Alors le problème (p) possède une solution positive unique u^* dans P_h où :*

$$h(t) = \Psi(t)\Psi(1-t) = \left(\frac{1}{2}\right)(\cosh m + \cosh(m - 2mt)), t \in [0,1]$$

Remarque 9 *Soit* $b = \frac{1}{2}(e^m + e^{-m})$. *Alors, il est facile de vérifier que :*

$$\begin{aligned} a &= \min\{h(t) : t \in [0,1]\} = \left(\frac{1}{2}\right)(\cosh m + 1), \\ b &= \max\{h(t) : t \in [0,1]\} = \cosh m. \end{aligned}$$

Preuve: Il est bien connu que u est une solution du problème (P) si et seulement si :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\,[f(s,u(s)) + g(s)]\,ds$$

où : $G(t,s)$ est la fonction de Green pour (3.1).

Pour tout $u \in P$, nous définissons :

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds, \;\; x_0(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds$$

Il est facile de vérifier que $A : P \to P$.

De (H_1), nous savons que $A : P \to P$ est un opérateur croissant. Montrons que A vérifie les conditions (B_1), (B_2) du théorème (5).

De (H_2), pour tout $\gamma \in (0,1)$ et $u \in P$, il existe $\varphi(\gamma) \in (\gamma, 1)$ telle que :

$$A(\gamma u)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,\gamma u(s))ds \geq \int_0^1 G(t,s)\varphi(\gamma)f(s,u(s))ds = \varphi(\gamma)Au(t),\; t \in [0,1]$$

d'où : $A(\gamma u) \geq \varphi(\gamma)Au$, pour tout $u \in P, \gamma \in (0,1)$.

Soit :

$$\alpha(\gamma) = \frac{\ln \varphi(\gamma)}{\ln \gamma}$$

alors $\alpha(\gamma) \in (0,1)$ et :

$$A(\gamma u) \geq \gamma^{\alpha(\gamma)} Au, \;\text{pour } \gamma \in (0,1), \; u \in P \tag{3.3}$$

Dans ce qui suit, nous montrons que $A : P_h \to P_h$. D'une part, il découle de $(H_1), (H_3)$, du lemme (7) et de remarque (9), que :

$$\begin{aligned}
Ah(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,h(s))ds \\
&\geq \int_0^1 \frac{1}{\cosh^2 m}\Psi(t)\Psi(1-t)G(t_0,s)f(s,a)ds \\
&= \frac{1}{\cosh^2 m}h(t)\int_0^1 G(t_0,s)f(s,a)ds,\ t\in[0,1]
\end{aligned}$$

D'autre part, de(3.2), (H_1), et remarque (9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Ah(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,h(s))ds \leq \int_0^1 G(t,t)f(s,b)ds \\
&= \frac{1}{\rho}h(t)\int_0^1 f(s,b)ds, t\in[0,1]
\end{aligned}$$

Soient :

$$r_1 = \min_{t\in[0,1]} f(t,a), \quad r_2 = \max_{t\in[0,1]} f(t,b)$$

alors $0 \leq r_1 \leq r_2$ et :

$$\int_0^1 G(t_0,s)ds = \frac{1}{\rho}\int_0^{t_0}\Psi(s)\Psi(1-t_0)ds + \frac{1}{\rho}\int_{t_0}^1 \Psi(t_0)\Psi(1-s)ds = \frac{1}{m^2}$$

$$\frac{r_1}{\cosh^2 m}\cdot\frac{1}{m^2}h(t) \leq Ah(t) \leq r_2\cdot\frac{1}{m\sinh m}h(t),\ t\in[0,1]$$

$Ah \in P_h$. Pour tout $u \in P_h$, on peut choisir $t_0 \in (0,1)$ suffissament petit tel que :

$$t_0 h \leq u \leq \frac{1}{t_0}h$$

de (3.3) on a :

$$A\left(\frac{1}{\gamma}u\right) \leq \frac{1}{\gamma^{\alpha(\gamma)}}Au,\ \forall\gamma\in(0,1), u\in P \tag{3.4}$$

de (3.3), (3.4), on a :

$$Au \geq A(t_0 h) \geq t_0^{\alpha(t_0)} Ah$$

$$Au \leq \left(A\frac{1}{t_0}h \right) \leq \frac{1}{t_0^{\alpha(t_0)}} Ah$$

Ainsi, $Au \in P_h$. Par conséquent, $A : P_h \to P_h$. Ceci et (3.3) impliquent que A est général $\alpha-$concave.

Donc, A vérifie les conditions $(B_1), (B_2)$ du théorème (5).

Ensuite, nous montrons que la condition (B_3) est satisfaite. Si :

$$g(t) \equiv 0 \text{ et } x_0(t) \equiv 0$$

$$g(t) \equiv 0,\ l = \rho \max_{t\in[0,1]} g(t), \text{ puis } l > 0$$

Il est facile de prouver que :

$$0 \leq x_0(t) \leq \frac{1}{\rho} \int_0^1 G(t,t)ds = lh(t)$$

avec $0 \leq x_0 \leq lh$. Enfin, en utilisant le théorème (5), l'équation $u = Au + x_0$ à une solution unique u^* dans P_h. Par conséquent, u^* est une solution positive unique du problème (P) dans P_h. ■

Pour illustrer comment nos principaux résultats peuvent être utilisés dans la pratique, nous présentons deux exemples.

3.3 Exemple

Exemple 10 *Considérez le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + (\ln 2)^2 u(t) = u^\beta(t) + q(t) + t^2,\ \ 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

où : $\beta \in (0,1)$ *et* $q : [0,1] \to [0,+\infty)$ *est une fonction continue. Dans cet exemple, nous laissons:*

$$\begin{aligned} m &= \ln 2 \\ f(t,x) &= x^{\beta} + q(t) \\ g(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Après un simple calcul, nous obtenons un $a = 9/8$, $b = 5/4$ *et :*

$$h(t) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}(2^{1-2t} + 2^{2t-1}), t \in [0,1]$$

Evidemment, $f(t,x)$ *augmente pour* $x \geq 0$, *et* $g(t) \neq 0$

$$f(t,a) = \left(\frac{9}{8}\right)^{\beta} + q(t) > 0$$

De plus, réglez $\varphi(\gamma) = \gamma^{\beta}$, $\gamma \in (0,1)$ *alors :*

$$f(t,\gamma x) = \gamma^{\beta} x^{\beta} + q(t) \geq \gamma^{\beta}(x^{\beta} + q(t)) = \varphi(\gamma) f(t,x),\ \ x \geq 0$$

Par conséquent, toutes les conditions du théorème 8 sont satisfaites. Une application du théorème 8 implique que (3.5) a une solution positive unique u^* *dans le* P_h.

Exemple 11 *Considérez le problème suivante :*

$$\begin{cases} u''(t) + (\frac{\pi}{3})^2 u(t) = u^{\frac{1}{3}}(t) + q(t) + t^3,\ \ 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

où : $q : [0,1] \to [0,+\infty]$ *est une fonction continue. Dans cet example, on prend :*

$$\begin{aligned} m &= \pi/3 \\ f(t,x) &= x^{1/3}q(t) \\ g(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Ensuite, $m \in (0,\pi/2)$ *et :*

$$h(t) = \cos\frac{\pi}{3}t\cos\frac{\pi}{3}(1-t),\ t \in [0,1]$$

de tout évidence, $f(t,x)$ *augmente pour* $x \geq 0$*, et* $g(t) \neq 0$

$$f(t,\cos^2\frac{\pi}{3}) + q(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + q(t) > 0$$

de plus, réglez $\varphi(\gamma) = \gamma^{\frac{1}{3}}$*,* $\gamma \in (0,1)$*. Alors :*

$$f(t,\gamma x) = \gamma^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + q(t) \geq \gamma^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + q(t)) = \varphi(\gamma)f(t,x),\ x \geq 0$$

Par conséquent, le probléme (3.6) a une solution positive unique u^* *dans le* p_h*.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité des solutions pour des équations opérateurs non linéaires du type $x = Ax + x_0$ dans un espace de Banach ordonné où A est un opérateur monotone général $\alpha-$concave; en se basant sur une approche typiquement topologique à savoir le principe du point fixe. Nous avons mis en évidence les résultats obtenus sur un problème à valeurs sur le bord de Neumann.

Bibliographie

[1] A. Bensedik and M.Bouchekif, "Symmetry and uniqueness of positive solutions for a Neumann boundary value problem," Applied Mathematics Letters, vol.20, no.4, pp $419 - 426, 2007$.

[2] A.Cabada and R.L.Pouso, "Existence result for the problem $(\varphi(u'))' = f(t, u, u')$ with periodic and Neumann boundary conditions,"Nonlinear Analysis :Theory,Methods & Applications,vol.30,no.3,pp.$1733 - 1742, 1997$.

[3] A.Cabada and L.Sanchez, "A positive operator approach to the Neumann problem for a second order ordinary differential equation,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.204, no.3, pp.$774 - 785, 1996$.

[4] J.Chu, X.Lin, D.Jiang, D.O'Regan, and R.P.Agarwal, "Positive solutions for second-order superlinear repulsive singular Neumann boundary value problems,"Positivity, vol.12, no.3, pp.$555 - 5, 69, 2008$.

[5] D-Q.Jiang and H-Z.Liu,"Existence of positive solutions to second order Neumann boundary value problems,"Journal of Mathematical Research and Exposition, vol.20, no.3, $pp.360 - 3642000$.

[6] Krasnosel'skii, possitves solutions of Operator Equations Noordhoff, Groningen, The Netherlands 1964.

[7] Li Fuyi, liang Zhandong, Fixed point of ϕ-concave ($-\phi$-concave) operator and application, J.System Sci, Math sci, $14(4)(1994)335 - 360$(in chinese).

[8] J-P.Sun, and W-T. Li, and S.S.Cheng,"Three positive solutions for second-order Neumann boundary value problems,"Applied Mathematics Letters, vol.17, no.9, pp.$1079-1084, 2004$.

[9] Y-P.Sun and Y. Sun,"Positive solutions for singular semi-positone Neumann boundary-value problems,"Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2004, no.133, pp.$1-8$, 2004.

[10] J-P.Sun and W.-T.Li,"Multiple positive solutions to second-order Neumann boundary value problems,"Applied Mathematics and Computation, vol.146, no.1, pp.$187-194, 2003$.

[11] N.Yazidi,"Monotone method for singular Neumann problem,"Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, vol.49, no.5, pp.$589-602, 2002$.

[12] Zengquin Zhao, Du Xinsheng, Fixed points of generalized $e-$concave (generalized $e-$convex) operators and thier application. J. Math. Anal. App. $334(2007)1426-1438$.

[13] Zengquin Zhao, Iterative solution of systems of operator equations in ordered Banach spaces and application, Nonlinear Anal.$26(6)(1996)1043-1052$.

[14] Zengquin Zhao, Uniqueness and existence of possitive solutions for Hammertein integral equation of polynomial type, Nonlinear Anal.$32(6)(1996)795-805$.

[15] C-B.Zhai, C.Yang, and C.M. Guo,"Positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications,"Computers & Mathematics with Applications, vol. 56, no.12, pp.$3150-3156, 2008$.

[16] J.Zhang, C.B Zhai, Existence and uniquess resultat for perturbed Neumann boundary value problems, Bound value problem, doi $10.1155-2010-494210$.