République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Résultat d'existence pour quelques classes d'EDP elliptiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Sellakh **I**thar [1]

Sous la direction de

Dr A. Matallah

Soutenue le 13/07/2019 devant le jury composé de

Dr. S.Benmansour	M.C.B à l'ESM de Tlemcen	Présidente
Dr. A.Matallah	M.C.A à l'ESM de Tlemcen	Encadreur
Dr. N.Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mlle. H.Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : nsellakh@yahoo.fr

Dédicace

Je dédie ce travail :

● A mes trés chers parents,
pour leurs encouragements et soutiens,
je leur témoigne ma profonde gratitude.
Que Dieu les protèges.

● A mes chers frères **: Nasrallah** et **Ryadh.**

● A ma chère sœur **: kaouther.**

● A toute ma familles et à mes camarades.

●A tous ceux que j'aime.

●A mes enseignants.

Remerciements

Tout d'abord, louange à Allah pour tous ses bienfaits innombrables.

En premier lieu, je remercie chaleureusement Madame **Atika Matallah** pour sa patience, sa disponibilité et pour le soutien d'accompagnement qu'elle m'a accordé.

Je tiens à remercier, également, Mme. **Safia Benmansour** pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Mme. **Nouria Bekkouche** et Mme. **Hafida Abbes** pour l'honneur d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je suis particulièrement sensible à la présence de Mme **Hayet Benchira**. Je la remercie chaleureusement pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail, pour ses encouragements, ses orientations et ses conseils.

Mes remerciements vont particulièrement à Monsieur le Chef de département de mathématiques et le Doyen de la faculté des sciences, chacun à son nom.

Enfin, Je remercie tous les membres de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements particulièrement, ma mère, mon père, mes soeurs et frères

Table des matières

Abreviations

- EDP: Equations aux dérivées partielles.
- $p.p$: Presque partout.
- $P-S$: Palais Smale.
- $i.e$: c'est à dire.

Notations

- $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$: Elément de $\mathbb{R}^N$.
- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$: Gradient de u.
- Δu est le laplacien de la fonction $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $i.e.$ $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div} \nabla u$
- 2_*: Exposant critique de Sobolev, $2_* = \dfrac{2N}{N-2}$.
- $B_r(a)$ est la boule de centre a et de rayon r.
- $\partial\Omega$: Frontière de Ω.
- $supp(u)$: Support de la fonction u.
- $\langle ., . \rangle$: Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$/ crochet de dualité V, V'.
- $C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur Ω.
- $C_0(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur Ω à support compact.
- $C^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω.
- $C^\infty(\Omega) = D(\Omega)$: Espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ /u$ mesurable; $\int\limits_\Omega |u|^p < \infty$, $1 \leq p < \infty\}$.
- $L^{p'}(\Omega)$: Espace dual de $L^p(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$

- $L^\infty = \{u : \Omega \to \mathbb{R}/u$ mesurable; $\exists C$ tel que $|u| \leq C$ p.p $x \in \Omega\}$.

- $H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ tel que $\nabla u \in L^2(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega\}$.

- $\longrightarrow$: Convergence forte.

- $\rightharpoonup$: Convergence faible.

- $\hookrightarrow$: Injection continue.

- $\hookrightarrow\hookrightarrow$: Injection compacte.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles abrégées EDP sont les outils mathématiques dont l'importance prime par le fait de modéliser des phénomènes naturels, pour cette raison, elles demeurent fortement sollicitées dans différents contextes tels que : physique, mécanique, chimie, biologie, sociologie,...

Les équations de type elliptique interviennent trés souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Depuis leurs découverte, plusieurs méthodes ont été mises en évidence pour l'existence et les propriétés qualitatives de leurs solutions, notamment les méthodes variationnelle, les méthodes topologiques et les méthodes numériques.

Les méthodes variationnelles consistent à formuler faiblement un problème, par exemple si on a le problème (formulation forte) suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ et f définie sur $L^2(\Omega)$, alors la formulation variationnelle ou formulation faible correspondante est la suivante:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Une solution du premier problème (formulation forte) est toujours solution du second (formulation faible), mais la réciproque n'est pas toujours vraie: c'est d'ailleurs pour cette raison qu'une solution de la formulation variationnelle est parfois appelée solution faible, qui est un poit critique de la fonctionnelle d'énergie

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

La théorie des points critiques a subi une implusion nouvelle en 1973 avec la parution d'un article d'Ambrosetti et Rabinowitz dans lequel figure le Théorème du Col, et elle a connu un essor avec l'apparition de la condition de Palais Smale pour montrer l'existence d'une valeur critique.

Ce mémoire comprend trois chapitres.

Dans le chapitre 1, nous rapellons les principaux résultats utilisés par la suite.

Dans le chapitre 2, on étudie l'existence des solutions du problème régulier suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2} u + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, $2 < p < 2_*$, $2_* = \dfrac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et λ est un paramètre réel positif.

Dans le chapitre 3, on s'intèresse à l'existence des solutions du problème singulier suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x|^2} = \lambda \dfrac{u}{|x|^\alpha} + \dfrac{|u|^{p-2}}{|x|^\beta} u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ avec $0 \in \Omega$, $0 \leq \beta < 2$, $0 \leq \alpha < 2$, λ et μ sont des paramètres positifs tels que $0 \leq \mu < \bar{\mu} = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$, $\bar{\mu}$ est la meilleure constante de Hardy et $2 < p < 2_*(\beta)$ avec $2_*(\beta) = \dfrac{2(N-\beta)}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev Hardy.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

On note:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

la norme dans l'espace de Lebasgue $L^p(\Omega)$.

Définition 1.2 Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit q'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si:

$$f/1_k \in L^p(\Omega) \text{ pour tout compact } k \subset \Omega.$$

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone)
Soit f_n une suit croissante de fonction de $L^1(\Omega)$ telle sup $\displaystyle\int |f_n| \, dx < \infty$. Alors $f_n(x)$ converge p.p sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$ de plus $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Théorème 1.2 (Thérème de convergence dominée de Lebsgue)

Soit f_n une suite de fonction de $L^1(\Omega)$. On suppose que :

a) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω,

b) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n; $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure da Lebesgue. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonction mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme correspondante.

Théorème 1.3 L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est à-dire que tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Théorème 1.4 (Brézise-Lieb)

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suit bornée de fonction de $L^p(\Omega)$ convergent p.p. vers f, alors $f \in L^p(\Omega)$ et:

$$\|f\|^p_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} (\|f_n\|^p_{L^2(\Omega)} - \|f - f_n\|^p_{L^2(\Omega)}).$$

1.1.1 Dérivation faible

La notion de dérivée faible est une extension de la notion de dérivé usuelle des fonctions qui ne sont pas forcément dérivables, c'est un cas particulier de la dérivation au sens des distributions. Ce concept est trés utile dans la résolution des équations aux dérivés partielles.

On définit tout d'abord la concept de dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

Définition 1.3 Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonction $\omega_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ telle que pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_\Omega \omega_i(x) \Phi(x) dx$$

chaque ω_i est appelée la i-éme dérivée partielle faible de v et est notée $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Lemme 1.1 Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et pour tout indice $i \in \{1, \ldots, N\}$, on a

$$\left| \int_\Omega u(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \left\| \Phi \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors u est dérivable au sens faible.

Dérivée directionnelle:

Définition 1.4 Soit A une partie d'un espace de Banach V et $I : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in A$ et $z \in V$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tz \in A$; on dit que I admet (au poit u) une dérivée dans la direction z si la limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{I(u + tz) - I(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite $I'(u)$.

On notera qu'une fonction I peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $z \in V$; sans pour autant être continue. Lorsque la dérivée directonnelle de I existe pour certains $z \in V$ on introduit la notion de dérivée au sens de Gateaux.

Dérivée au sens de Gateaux:

Définition 1.5 Soit A une partie d'un espace de Banach V et $I : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si $u \in A$ on dit que I et dérivable au sens de Gateaux (ou G-Différentiable en u) s'il existe $l \in V^{'}$ tel que dans chaque direction z ou $I(u + tz)$ exist pour $t > 0$ assez petit la dérivée directionnelle $I_{z}^{'}(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^{+}} \frac{I(u + tz) - I(u)}{t} = \langle l, z \rangle$$

On posera $I^{'}(u) := l$.
On remarquera de nouveau qu'une fonction G-dérivable n'est pas nécessairemment continue.
On introduit enfin la dérivée classinque (ou F-dérivée au sens de Fréchet).

Dérivée au sens de Fréchet:

Définition 1.6 Soient V espace de Banach; A un ouvert de V et $I : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $u \in A$, on dit que I est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $l \in V^{'}$, tel que:

$$I(v) - I(u) = \langle l, v - u \rangle + o \langle v - u \rangle , \quad \forall u \in A$$

Si I est différentiable, I est unique et on note $I^{'}(u) := l$. L'ensemble des fonction différentiables de $A \rightarrow \mathbb{R}$ sera noté $\mathcal{C}^{1}(A, \mathbb{R})$.
On notera que si I est differetiable au sens de Fréchet alors I est continue.

1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont les espaces "naturels" des solutions d'équation saux dérivées partielles. On les appelle aussi espaces d'énergiecarils s'interprètent naturellement comme les espaces de fonction d'énergie bornée. Nous rappellerons ici les définitions et les résultats qui seront utilisés par la suite.

1.2.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.7 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ \text{ tel que } \ \forall i \in \{1, \dots, N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\},$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v.

Proposition 1.1 L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.5 (de densité)

Si Ω est un ouvert bornée régulier de classe $\mathcal{C}^1$; ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$; ou encore si $\Omega = \mathbb{R}^N$; alors $\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

1.2.2 L'espace $H^1_0(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ qui nous sera trés utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.8 Soit $\mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega})$ l'espace des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$.

1.2.3 L'espaces $W^{k,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert bornée ou pas et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.9 Soit $k > 1$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. On définit:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \forall \alpha \text{ multi-indice avec } \quad |\alpha| \leq k / \exists g_\alpha \in L^p(\Omega),$$

tel que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})\}.$$

Notons que par récurrence on a:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, N\}.$$

L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition 1.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif si $1 < p < \infty$. Il est séparable si $1 \leq p < \infty$.

1.2.4 L' espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.10 :Soit $1 \leq p \leq \infty$; on note par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réfléxif si $1 < p < \infty$.

1.2.5 Injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont trés utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebegues .

Théorème 1.6 (Inégalité de Sobolev)

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante C (dépendante de N et p) avec $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$, telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\Omega)}; \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ on a le résultat suivant.

Théorème 1.7 Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, $k \geq 1$ et $p \in [1, \infty]$. Alors

1. si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N}$ on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N}$

2. si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N}$ on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ pour tout $q \in [p, \infty]$ (mais pas pour $q = \infty$)

3. si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N} < 0$ on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{s,\beta}(\Omega)$, avec injections continues.

Théorème 1.8 (Théorème de Rellich- Kondrachov)

On suppose que Ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$. On a

- si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p^*[$, où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$

- si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$.

- Pour tout $q \in [N, +\infty[$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \overline{C(\Omega)}$.

La condition sur le domaine est nécessaire. Si Ω n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général.

Proposition 1.4 (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$;

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx$$

1.3 Théorème de Passe Montagne (Lemme du Col)

Si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B, celui qui monte le moins haut.

1.3.1 Point critique

Définition 1.11 Soit V un espace de Banach on dit que $u \in V$ est un point critique de I si $I^{'}(u) = 0$ sinon u est dit un point régulier.
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de I s'il existe un point critique $u \in V$ tel que $I(u) = c$. Sinon c est dite une valeur réguliére.
La notion de point critique peut étre intepré tée comme minimum local d'une fonctionelle, mais en générale ceci ne se produit qu'en présence d'une certaine proprité de compacité par exemple pour la fonction $I(u) = exp(-u)$ la valeur $c = 0$ n'est jamais atteinte. Pour cela on exige que I satisfais un certain condition de compacité.
Ainsi, pour prouver la convergence forte des suites minimisantes ou de façon générale des suites qui convergent vers un point présentant une condidature à devenir un point critique, on a souvent recours à la dite condition de Palais Smale.

1.3.2 Condition de Palais Smale

Définition Soient $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. On dit que I satisfait la condition de Palais Smale en c si $\forall (u_n) \in V$,

$$\begin{cases} I(u_n) \to c \\ I^{'}(u_n) \to 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ converge à extraction près.}$$

Example 1 Dans $\mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^2$ satisfait la condition de Palais Smale en 0 tandis que $x \longrightarrow e^{-x}$ ne la satisfait pas, car la suite $u_n = n$ vérifie $e^{-n} \longrightarrow 0$ et un $u_n \longrightarrow \infty$

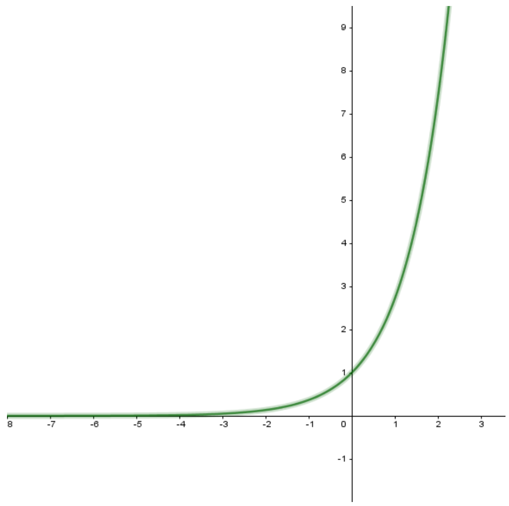

Fig 1: $x \longrightarrow e^x$

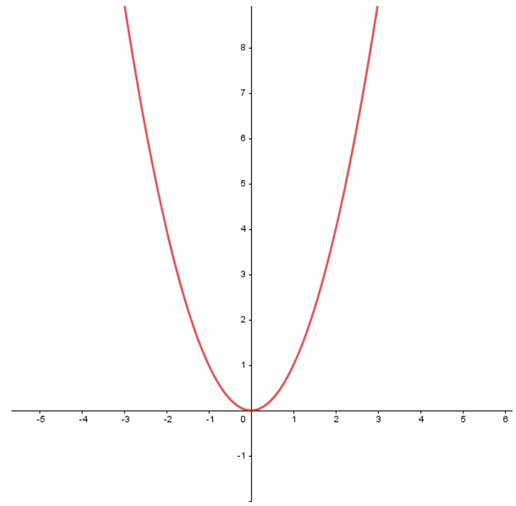

Fig 2: $x \longrightarrow x^2$

Lemme 1.4 (Lemme du Col)

Soit $E \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, satisfaisant $(P-S)$, supposons que:

(i) $E(0) = 0$.

(ii) $\exists \rho > 0;\ \alpha > 0 : \|u\| = \rho \implies E(u) \geq \alpha$.

(iii) $\exists u_1 \in V : \|u_1\| \geq \rho$ et $E(u_1) < \alpha$.

On définit

$$P = \{p \in C([0,1]\,; V) p(0) = 0; p(1) = u_1\}.$$

Alors

$$c = \inf_{p \in P} \sup_{u \in p} E(u) \geq \alpha,$$

est une valeur critique.

1.4 Multiplicateurs de Lagrange

Définition 1.12 Soient X un espace de Banach, $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes de la forme

$$F := \{v \in X : I(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $v \in F$, on a $I'(v) \neq 0$.
Si $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, on dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J sur F s'il existe $v \in F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(v) = c$ et $J'(v) = \lambda I'(v)$.
Le point v est un point critique de J sur F et le réel est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c.

Proposition 1.5 Sous les hypothèses et notations de la définition précédente, on suppose que $v_0 \in F$ te que $J(v_0) = \inf_{v \in F} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(v_0) = \lambda I(v_0).$$

Chapitre 2

Résultat d'existence pour un problème elliptique régulier

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions pour le problème elliptique régulier suivant:

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-2}\,u + \lambda u \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, $2 < p < 2_*$, $2_* = \dfrac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et λ est un paramètre positif inférieure à λ_1, où λ_1 est la première valeur propre de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \text{ dans } \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et qui est caractérisée par

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)/\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 dx}.$$

2.2 Préliminaires et résultat d'existence

La norme standard de l'espace $H_0^1(\Omega)$ est notée par

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Il est bien connu que les solutions du problème $(\mathcal{P}_1)$ sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx.$$

La fonctionnelle I_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H_0^1(\Omega)$ et sa différentielle est donnée par

$$\langle I_1'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx - \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En plus, les points critiques de I_1 sont des solutions du problème $(\mathcal{P}_1)$.

Notre résultat est le théorème suivant.

Théorème 2.1 On suppose que $2 < p < 2_*$ et $\lambda < \lambda_1$, alors le problème $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution positive u_1 dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1

Premièrement, vérifions que I_1 satisfait les conditions géométriques du Lemme du Col.

Lemme 2.1 Supposons que $2 < p < 2_*$, alors pour tout $\lambda \in (0, \ \lambda_1)$, la fonctionnelle I_1 vérifie les conditions géométriques suivantes:

i) il existe $\alpha_1 > 0$ et $\rho_1 > 0$ tels que $I_1(u) \geq \alpha_1$ pour $\|u\| = \rho_1$,

ii) il existe $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|v_1\| > \rho_1$ et $I_1(v_1) < 0$.

Preuve

i) Soit $u \in H_0^1(\Omega)/\{0\}$, alors par la caractérisation de λ_1 on a

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

D'autre part, par l'inégalité de Sobolev on a

$$\int_\Omega |u|^p\, dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{p}{2}},$$

pour certaine $C > 0$.

Donc, pour $\lambda < \lambda_1$ et $p > 2$ on obtient

$$\begin{aligned} I_1(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{C}{p}\|u\|^p \\ &\geq \frac{\lambda_1 - \lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{C}{p}\|u\|^p. \end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons la fonction

$$g(\rho) = \frac{\lambda_1 - \lambda}{2\lambda_1}\rho^2 - \frac{C}{p}\rho^p.$$

Il est facile de monter que

$$\max g(\rho) = g(\rho_1) = C\frac{p-2}{2p}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{C\lambda_1}\right)^{\frac{p}{p-2}} > 0$$

avec

$$\rho_1 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{C\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Donc, pour $\|u\| = \rho_1$, on obtient

$$I_1(u) \geq \alpha_1$$

avec

$$\alpha_1 = C\frac{p-2}{2p}\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{C\lambda_1}\right)^{\frac{p}{p-2}}.$$

ii) Soit $\Phi \in H_0^1(\Omega)/\{0\}$, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$I_1(t\Phi) = \frac{t^2}{2}\left[\|\Phi\|^2 - \lambda\int_\Omega \Phi^2 dx\right] - \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\Phi|^p\, dx.$$

Quand $t \to +\infty$, on a $I_1(t\Phi) \longrightarrow -\infty$. Donc il existe $t_0 > \dfrac{\rho_1}{\|\Phi\|}$ tel que $I_1(t_0\Phi) < 0$. En prenant $v_1 = t_0\Phi$, le point ii) est établi.■

Maintenant, on va montrer que I_1 sataisfait la condition de Palis Smale.

Lemme 2.2 Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ une suite de Palais Smale de niveau c_1, alors

$$u_n \rightharpoonup u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

pour certaine $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ avec $I_1'(u_1) = 0$.

Preuve

Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ une suite de Palais Smale de niveau c_1, donc

$$c_1 + o_n(1) = I_1(u_n) \text{ et } o_n(1) = \langle I_1'(u_n), u_n\rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} c_1 + o_n(1) &= I_1(u_n) - \frac{1}{p}\langle I_1'(u_n), u_n\rangle \\ &= \frac{p-2}{2p}||u_n||^2 - \lambda\frac{p-2}{2p}\int_\Omega u_n^2 dx, \\ &\geq \frac{p-2}{2p}||u_n||^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{p-2}{2p}||u_n||^2, \\ &\geq \frac{p-2}{2p}\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\right)||u_n||^2. \end{aligned}$$

D'où (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui permet d'en déduire que:

$$u_n \rightharpoonup u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$
$$u_n \to u_1 \text{ p.p dans } \Omega,$$
$$u_n \to u_1 \text{ dans } L^p(\Omega).$$

On obtient alors

$$\langle I_1'(u_n), \Phi\rangle = 0 \text{ pour tout } \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent

$$\langle I_1'(u), \Phi\rangle = 0 \text{ pour tout } \Phi \in H_0^1(\Omega),$$

c'est à dire $I_1'(u) = 0$.

Finalement; on va montrer que (u_n) converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la fonction u qui est non nulle.

Lemme 2.3 Soit (u_n) une suite de Palais Smale de niveau $c_1 \in \mathbb{R}$ telle que $u_n \rightharpoonup u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$. Alors (u_n) converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la fonction non nulle u_1.

Preuve

On a

$$c_1 + o_n(1) = I_1(u_n)$$

et

$$o_n(1) = \langle I_1'(u_n), u_n\rangle,$$

Par Lemme 2.2 on a

$$u_n \rightharpoonup u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$
$$u_n \to u_1 \text{ p.p dans } \Omega,$$
$$u_n \to u_1 \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Posons

$$w_n = u_n - u_1.$$

Alors

$$w_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$
$$w_n \to 0 \text{ p.p dans } \Omega,$$
$$w_n \to 0 \text{ dans } L^p(\Omega).$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} w_n^2 dx &= \int_{\Omega} (u_n - u_1)^2 \, dx \\
&= \int_{\Omega} u_n^2 dx + \int_{\Omega}^{2} u_1 dx + \int_{\Omega} u_n . u_1 dx \\
&= \int_{\Omega} u_n^2 dx + \int_{\Omega}^{2} u_1 dx + o_n (1) .
\end{aligned}$$

Ensuite, par le lemme de Brezis-Lieb on a

$$\int_{\Omega} |u_n|^p \, dx = \int_{\Omega} |w_n|^p \, dx + \int_{\Omega} |u_1|^p \, dx + o_n (1) .$$

D'autre part, comme $u_n \rightharpoonup u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\|w_n\|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 \, dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla (u_n - u_1)|^2 \, dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \, dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u_1 dx \\
&= \|u_n\|^2 + \|u_1\|^2 + o_n (1) .
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I_1'(u_n), u_n \rangle \\
&= \langle I_1'(u_1), u_1 \rangle + \|w_n\|^2 + \int_\Omega w_n^2 dx + \int_\Omega |w_n|^p \, dx.
\end{aligned}
$$

On a par Lemme 2.2 $\langle I_1'(u_1), u_1 \rangle = 0$, et comme $2 < 2_*$ et $p < 2_*$ alors

$$
\int_\Omega w_n^2 dx \to 0,
$$

et

$$
\int_\Omega |w_n|^p \, dx \to 0.
$$

Par conséquent

$$
\|w_n\|^2 = o_n(1),
$$

ce qui donne

$$
u_n \to u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega). \blacksquare
$$

Conclusion Par les Lemme 2.2 et 2.3 I_1 satisfait les hypothèses du Théorème de Passe

Montagne et on obtient un point critique u_1 dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$
I_1'(u_1) = 0 \ ,
$$

$$
I_1(u_1) = c_1,
$$

où

$$
c_1 := \inf_{\gamma \in \Gamma_1} \max_{t \in [0,1]} I_1(\gamma(t)) \geq \alpha_1 > 0,
$$

avec

$$
\Gamma_1 := \left\{ \gamma \in C\left([0,1], \ H_0^1(\Omega)\right), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_1 \right\}.
$$

Comme

$$I_1(0) = 0 \text{ et } I_1(u_1) = c_1 > 0$$

alors $u_1 \not\equiv 0$. Donc u_1 est une solution non triviale de notre problème.

Chapitre 3

Résultat d'existence pour une équation elliptique avec singularité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions non triviales du problème semilinéaire suivant

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x|^2} & = \lambda \dfrac{u}{|x|^\alpha} + \dfrac{|u|^{p-2}}{|x|^\beta} u, \text{ dans } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ avec $0 \in \Omega$, $0 \leq \mu < \bar{\mu} := [N-2)/2]^2$, $\bar{\mu}$ est la meilleure constante de Hardy, $0 \leq \alpha < 2,$, $0 \leq \beta < 2$, $2 < p < 2_* (\beta)$ et $2_* (\beta) = 2 (N - \beta) / (N - 2)$ est l'exposant critique de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$, λ est un paramètre positif inférieure à $\lambda_1 (\mu)$, où $\lambda_1 (\mu)$ est la première valeur propre de

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x|^2} & = \lambda \dfrac{u}{|x|^\alpha}, \text{ dans } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et qui est caractérisée par

$$\lambda_1(\mu) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)/\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2} \right) dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^\alpha} dx}.$$

Remarque On a $2_*(2) = 2$ et $2_*(0) = 2_*$.

3.2 Préliminaires et résultat d'existence

Pour $0 \leq \mu < \bar{\mu}$, on munit l'espace de Hilbert $H_\mu(\Omega) := H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - \mu \frac{uv}{|x|^2} \right) dx, \quad \forall u, v \in H_\mu(\Omega).$$

et on définit la norme

$$\|u\|_\mu^2 := \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2} \right) dx, \quad \forall u \in H_\mu(\Omega).$$

Par l'inégalité de Hardy, cette norme est équivalente à la norme standard de $H_0^1(\Omega)$.

Il est bien connu que les solutions du problème $(\mathcal{P}_2)$ sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie I_2 associée au problème $(\mathcal{P}_2)$, définie par

$$I_2(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\mu^2 - \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta} dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^\alpha} dx, \quad \forall u \in H_\mu(\Omega).$$

La fonctionnelle I_2 est bien définie et de classe C^1 sur $H_\mu(\Omega)$ et sa différentielle est donnée par

$$\langle I_2'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega \mu \frac{u}{|x|^2} v dx - \int_\Omega \frac{|u|^{p-2}}{|x|^\beta} uv \, dx - \lambda \int_\Omega \frac{u}{|x|^\alpha} v dx, \quad \forall v \in H_\mu(\Omega).$$

Une fonction $u \in H_\mu(\Omega)$ est dite solution faible de $(\mathcal{P}_2)$ si elle satisfait

$$\int_\Omega \left(\nabla u \nabla v dx - \frac{\mu}{|x|^2} uv - \frac{|u|^{p-2}}{|x|^\beta} uv - \frac{\lambda}{|x|^\alpha} uv \right) dx = 0, \quad \forall v \in H_\mu(\Omega).$$

Lemme 3.1 Supposons que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$, $0 \leq \alpha < 2$, $0 \leq \beta < 2$ et $1 < p < 2_*(\beta)$. Alors il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que les inégalités suivantes sont vérifées pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{gathered} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \frac{1}{\overline{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx; \\ \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^\alpha} dx \leq C_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx; \\ \left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{gathered}$$

Lemme 3.2 On a les injections suivantes

$$\begin{aligned} & H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2*(\beta)}\left(\Omega, |x|^{-\beta}\right); \\ & H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p\left(\Omega, |x|^{-\beta}\right) \text{ pour } p < 2_*(\beta); \\ & H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2\left(\Omega, |x|^{-2} dx\right); \\ & H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2\left(\Omega, |x|^{-\alpha} dx\right) \text{ pour } \alpha < 2. \end{aligned}$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant:

Théorème 3.1 On suppose que $0 < \mu < \overline{\mu}$, $\lambda < \lambda_1(\mu)$, $0 \leq \alpha < 2$, $0 < \beta < 2$ et $2 < p < 2_*(\beta)$. Alors le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet une solution positive u_2 dans $H_\mu(\Omega)$ pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1(\mu))$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1

Premièrement, nous vérifions que I_2 satisfait les conditions géométriques du Lemme du Col.

Lemme 3.3 Sous les hypothèses du Théorème 3.1, la fonctionnelle I_2 vérifie les conditions géométriques suivantes:

i) il existe $\delta_2, \rho_2 > 0$ tels que $I_2(u) \geq \delta_2$ pour $\|u\|_\mu = \rho_2$.

ii) il existe $v_2 \in H_\mu(\Omega)$ tel que $\|v_2\| > \rho_2$ et $I_2(v_2) < 0$.

Preuve

Soient $u \in H_\mu(\Omega)/\{0\}$ et $\rho = \|u\|_\mu$

$$I_2(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^\beta}dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^\alpha}dx.$$

Donc, pour $\lambda < \lambda_1$ et $p > 2$ on obtient par Lemme 3.1

$$\begin{aligned} I_1(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1(\mu)}\|u\|_\mu^2 - \frac{C}{p}\|u\|_\mu^p \\ &\geq \frac{\lambda_1(\mu) - \lambda}{2\lambda_1(\mu)}\|u\|^2 - \frac{C}{p}\|u\|^p. \end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons la fonction

$$f(\rho) = \frac{\lambda_1(\mu) - \lambda}{2\lambda_1(\mu)}\rho^2 - \frac{C}{p}\rho^p.$$

Il est facile de montrer que

$$\max f(\rho) = f(\rho_2) = C\frac{p-2}{2p}\left(\frac{\lambda_1(\mu) - \lambda}{C\lambda_1(\mu)}\right)^{\frac{p}{p-2}} > 0,$$

avec

$$\rho_2 = \left(\frac{\lambda_1(\mu) - \lambda}{C\lambda_1(\mu)}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Donc, pour $\|u\|_\mu = \rho_2$, on obtient

$$I_1(u) \geq \delta_2$$

avec

$$\delta_2 = C\frac{p-2}{2p}\left(\frac{\lambda_1(\mu)-\lambda}{C\lambda_1(\mu)}\right)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Pour le point ii), on peut écrire que, pour t suffisamment grand et $\Phi \in H_\mu(\Omega)/\{0\}$, on a

$$I_2(t\Phi) = \frac{t^2}{2}\|\Phi\|_\mu^2 - \frac{t^p}{p}\int_\Omega \frac{|\Phi|^p}{|x|^\beta}dx - \frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega \frac{\Phi^2}{|x|^\alpha}dx$$

quand $t \to +\infty$, on a $I_2(t\Phi) \longrightarrow -\infty$. Donc il existe $t_0 > \dfrac{\rho_1}{\|\Phi\|_\mu}$ tel que $I_2(t_0\Phi) < 0$. En prenant $v_2 = t_0\Phi$, le point ii) est établi.

Condition de Palais Smale (globale)

Lemme 3.4 Soit $(u_n) \subset H_\mu(\Omega)$ une suite de Palais Smale de niveau c_2, alors

$$u_n \rightharpoonup u_2 \text{ dans } H_\mu(\Omega)$$

pour certaine fonction $u_2 \in H_\mu(\Omega)$ avec $I_2'(u_2) = 0$.

Preuve

Soit $(u_n) \subset H_\mu(\Omega)$ une suite de Palais Smale pour la fonctionnelle I_2 c'est à dire

$$c + o_n(1) = I_2(u_n) \text{ et } o_n(1) = \langle I_2'(u_n), u_n\rangle.$$

Comme

$$I_2(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_\mu^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^\beta}dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x|^\alpha}dx,$$

et

$$\langle I_2'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega \mu\frac{u_n^2}{|x|^2}dx - \int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^\beta}\,dx - \lambda\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^\alpha}dx,$$

alors

$$
\begin{aligned}
2c + o_n(1) &= 2I_2(u_n) - \langle I_2'(u_n), u_n \rangle \\
&= \frac{p-2}{p} \int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^\beta} dx. \\
&\leq C \frac{p-2}{p} \|u_n\|_\mu^p .
\end{aligned}
$$

ce qui implique que (u_n) est bornée dans $H_\mu(\Omega)$, donc il existe une sous suite (notée (u_n) et une fonction $u_2 \in H_\mu(\Omega)$ telles que:

$$
\begin{aligned}
& u_n \rightharpoonup u_2 \ H_\mu(\Omega), \\
& u_n \rightarrow u_2 \ L^2(\Omega, |x|^{-\alpha} dx), \\
& u_n \rightarrow u_2 \ L^p(\Omega, |x|^{-\beta} dx) \\
& u_n \rightarrow u_2 \text{ p.p. dans } \Omega,
\end{aligned}
$$

On déduit alors que

$$
\begin{aligned}
\langle I_2'(u_n), v \rangle &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega \mu \frac{u_n}{|x|^2} v dx - \lambda \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^\alpha} v dx - \int_\Omega \frac{|u_n|^{p-2} u_n}{|x|^\beta} v \ dx \\
&\rightarrow \int_\Omega \nabla u_2 \nabla v dx - \int_\Omega \mu \frac{u_2}{|x|^2} v dx - \lambda \int_\Omega \frac{u_2}{|x|^\alpha} v dx - \int_\Omega \frac{|u_2|^{p-2} u_2}{|x|^\beta} v \ dx \\
&= \langle I_2'(u_2), v \rangle ; \ \forall v \in H_\mu(\Omega).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\langle I_2'(u_2), v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in H_\mu(\Omega),
$$

c'est à dire u_2 est une solution faible du problème $(\mathcal{P}_2)$.

Maintenant, on va montrer que (u_n) converge fortement dans $H_\mu(\Omega)$ vers la fonction u_2.

Lemme 3.5 Soit (u_n) une suite de Palais Smale de niveau c_2 telle que $u_n \rightharpoonup u_2$ dans $H_\mu(\Omega)$. Alors (u_n) converge fortement vers u_2 dans $H_\mu(\Omega)$.

Preuve

Soient (u_n) une suite de Palais Smale de I_2 telle que $u_n \rightharpoonup u_2$.

Donc

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I_2'(u_n), u_2 \rangle \\
&= \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_2 dx - \mu \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^2} u_2 dx - \int_\Omega \frac{|u_n|^{p-2} u_n}{|x|^\beta} u_2 dx - \lambda \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^\alpha} u_2 dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I_2'(u_n), u_n \rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega \mu \frac{u_n^2}{|x|^2} dx - \int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^\beta} dx - \lambda \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^\alpha} dx.
\end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{w}_n = u_n - u_2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\tilde{w}_n \rightharpoonup 0 \ H_\mu(\Omega), \\
&\tilde{w}_n \to 0 \ L^2(\Omega, |x|^{-\alpha} dx), \\
&\tilde{w}_n \to 0 \ L^p(\Omega, |x|^{-\beta} dx) \\
&\tilde{w}_n \to 0 \text{ p.p. dans } \Omega,
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\tilde{w}_n^2}{|x|^\alpha} dx &= \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} (u_n - u_2)^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^\alpha} dx + \int_\Omega \frac{u_2^2}{|x|^\alpha} dx + \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^{\alpha/2}} \frac{u_2}{|x|^{\alpha/2}} dx \\
&= \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^\alpha} dx + \int_\Omega \frac{u_2^2}{|x|^\alpha} dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega}\frac{|u_n|^p}{|x|^\beta}dx=\int_{\Omega}\frac{|\tilde{w}_n|^p}{|x|^\beta}dx+\int_{\Omega}\frac{|u_2|^p}{|x|^\beta}dx+o_n(1).$$

D'autre part, comme $u_n \rightharpoonup u_2$ dans $H^1_\mu(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\|\tilde{w}_n\|_\mu^2 &= \int_{\Omega}\left(|\nabla \tilde{w}_n|^2-\mu\frac{\tilde{w}_n^2}{|x|^2}\right)dx \\
&= \int_{\Omega}\left(|\nabla (u_n-u_2)|^2-\mu\frac{(u_n-u_2)^2}{|x|^2}\right)dx \\
&= \int_{\Omega}\left(|\nabla u_n|^2-\mu\frac{u_n^2}{|x|^2}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla u_2|^2-\mu\frac{u_2^2}{|x|^2}\right)dx+2\int_{\Omega}\nabla u_n\nabla u_2dx+2\int_{\Omega}\frac{u_n}{|x|^{\alpha/2}}\frac{u_2}{|x|^{\alpha/2}}dx \\
&= \|u_n\|_\mu^2+\|u_2\|_\mu^2+o_n(1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I_2'(u_n),u_n\rangle \\
&= \langle I_2'(u_2),u_2\rangle+\|\tilde{w}_n\|_\mu^2+\int_{\Omega}\frac{\tilde{w}_n^2}{|x|^\alpha}dx+\int_{\Omega}\frac{|\tilde{w}_n|^p}{|x|^\beta}dx.
\end{aligned}$$

On a par Lemme 3.2 $\langle I_1'(u_2),u_2\rangle=0$, et comme $\alpha<2$ et $p<2_*(\beta)$ alors

$$\int_{\Omega}\frac{\tilde{w}_n^2}{|x|^\alpha}dx\to 0,$$

et

$$\int_{\Omega}\frac{|\tilde{w}_n|^p}{|x|^\beta}dx\to 0.$$

Par conséquent

$$\|\tilde{w}_n\|_\mu^2=o_n(1),$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2-\mu\frac{u_n^2}{|x|^2}dx\to\int_{\Omega}|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}dx.$$

D'où

$$u_n \longrightarrow u_2 \text{ dans } H^1_\mu(\Omega).\blacksquare$$

Conclusion Par les Lemme 3.2 et 3.3 la fonctionnelle I_2 satisfait les hypothèses du Théorème de Passe Montagne et on obtient un point critique u_2 dans $H^1_\mu(\Omega)$ tel que

$$I_2'(u_2) = 0 \ ,$$
$$I_2(u_2) = c_2,$$

où

$$c_2 := \inf_{\gamma\in\Gamma_2} \max_{t\in[0,1]} I_2(\gamma\,(t)) \geq \delta_1 > 0,$$

avec

$$\Gamma_2 := \left\{\gamma \in C\left([0,1]\,,\ H^1_\mu(\Omega)\right), \gamma\,(0) = 0, \gamma\,(1) = v_1\right\}.$$

On a $I_2\,(0) = 0$ et $I_2\,(u_2) = c_2 > 0$donc $u_2 \not\equiv 0$. Comme $I_2(u_2) = I_2\,(|u_2|)$, alors le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet une solution non négative.

Donc u_2 est une solution non triviale de notre problème.

Conclusion

Nous avons traité des problèmes semi linéaires de type elliptiques sous critiques régulier et singulier, et nous avons utilisé quelques injections compacte. Pour montrer l'existence des solutions on applique le théorème du Col.

Bibliographie

[1] A.Ambrosetti et P.H. Rabinowitz, variational methods in critical point theory and applications, Journal of Functional Analysis 14, 349-381 (1973).

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications Dunod, Paris (1999).

[3] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson Paris New york Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).

[4] H. Brézis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. A.M.S 88, 486-490 (1983).

[5] H. Brezis and L. Nirenberg, solutions positive pour equation elliptique non-linéaire impliquant l'exposant critique de Sobolev, Comm. Pure Appl. Math. 36,437-477 (1983).

[6] K. Chou et C. Chu. On the best constant for a weighted Sobolev -Hardy inequality,J. London Math. Soc. 48, 137-151 (1993).

[7] A. Ferrero et F. Gazzola, Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations, J. Di erntial Equations 177,494-522 (2001).

[8] G. Hardy, J, E. Polya; Inequalities. Cambridge Univ. Press, Cambidge, UK (1934).

[9] J.García Azorero, I.Peral, Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, J.Di . Eq. Vol. 144, 441-476 (1998).

[10] N. Ghoussoub, X, S. Kang; Hardy-Sobolev critical eliptic equations with boundary singularities, AIHP-Analyse non linéaire 21, 767-793 (2004).

[11] N. Ghoussoub, C. Yuan ; Multiple solutions for quasi-linear PDES involving the critical Soboev and Hardy exponents, Trans. Amer. Math. Soc. 352, 5703-5743 (2000).

[12] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critique, Edition : Springer, France, Paris (1993).

[13] S. Terracini, On positive entier solutions to a class of equations with singular coeffecient and critical exponent, Adv. Di . Equ. 1,2,241-264(1996).