République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

COURBES OBLIQUES ET DE LEGENDRE EN GEOMETRIE DE BIANCHI-CARTAN-VRANCEANU

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Otmani **K**heir-eddine [1]

Sous la direction de

Pr. F.Hathout

Soutenue le 27/06/2019 devant le jury composé de

Mr. D.Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr. F.Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr. B.Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : otmkh3105@gmail.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

- ***Mes très chers parents***
  **** Allah yahfadhoum ! *.***
- ***Toute ma famille.***
- ***Mon enseignant Pr. F.Hathout***
- ***Tous mes enseignants que je les considère comme mes parents.***
- ***Tous mes amis et mes collègues sans exception.***
- ***Tout qui m'encourage et me souhaite le succès.***

Otmani Kheir-eddine.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur, monsieur HATHOUT Fouzi, pour sa patience, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance durant la réalisation de ce travail.

Je remercie également les membres de jury :

- D.Djebbouri: président
- H. M. Dida : examinateur
- B. Saadli : examinateur

D'avoir accepter de lire et d'évaluer ce travail.

Un grand merci adressé aux enseignants du département de mathématique.

Comme je remercie ceux qui m'aident de proche ou de loin à concrétiser ce travail.

Table des matières

Introduction

En 1897 Luigi Bianchi a introduit la métrique $g_{l,m}$ définie par

$$g_{l,m} = \frac{1}{F^2}dx^2 + \frac{1}{F^2}dy^2 + (dz + \frac{ly}{2F}dx - \frac{lx}{2F}dy)^2$$

avec l et m deux nombres réels fixés, plus tard Elie Cartan et Vranceanu ont utilisé cette métrique dans la classification des variétés Riemanniennes de dimensions trois pour obtenir une famille d'espaces connu aujourd'hui sous le nom d'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu, ces espaces jouent un rôle important dans la cosmologie théorique, ils sont utilisés pour construire quelques espaces-temps.

On se place dans notre travail dans un espace de dimension 3, appelé l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu définit par

$$M^3_{bcv} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 1 + m(x^2 + y^2) > 0\}$$

L'espace M^3_{bcv} muni de $g_{l,m}$ est une variété Riemannienne, on s'intéresse à étudier les courbes θ-obliques (appelées aussi les hélices généralisées) dans cet espace, ces courbes sont caractérisées par la propriété que le champ de vecteurs tangent fait un angle constant θ avec un champ de vecteurs fixé qu'on l'appelle le champ de vecteurs vertical et particulièrement lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ ces courbes sont appelées les courbe de Legendre (voir [2]). Le théorème de Lancret nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit une hélice généralisée est que le rapport de la torsion par la courbure soit constant et l'invariant de Lancret est

$$Lancret_{\pm}(\gamma) = \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}.$$

(voir [1]).

Notre objectif est d'étudier les propriétés des courbes θ-obliques et de Legendre et donner leurs formes explicites dans $(M^3_{bcv}, g_{l,m})$ (on donnera leurs forme explicite seulement dans le cas où $m = 0$), l'étude se focalise sur les courbes θ-obliques et de Legendre non géodésiques i.e. le cas où $\theta \neq 0, \pi$.

Ce mémoire se compose de ce qui suit :

Au premier chapitre, on rappelle des notions de base sur les variétés, les champs de vecteurs, l'espace et fibré tangent, les connexions, le repère de Frenet.

Dans le deuxième chapitre, on définit l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu M^3_{bcv} et on détermine la connexion de Levi-Civita associée à $g_{l,m}$.

Finalement, le troisième chapitre est consacré à l'étude des courbes obliques et de Legendre, en déteminant leurs trièdre de Frenet (T, N et B), leurs courbure, leurs torsion et leurs invariant de Lancret, de plus on donnera leurs forme explicite dans le cas particulier $m = 0$ et on déterminera aussi la courbure, la torsion et l'invariant de Lancret dans ce cas. On établira qu'une courbe θ-oblique ayant une courbure moyenne propre sauf si elle est une courbe hélice et on finira par donner des exemples comme le cas euclidien (le cas où $l = m = 0$) et le groupe d'Heisenberg (le cas où $m = 0, l = -2$).

Chapitre 1

Variétés différentiables

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1 *Soit M un espace topologique. Un atlas de dimension n et de classe C^k $k \in \mathbb{N}$ sur M est un ensemble A de couples (U_i, x_i) appelés cartes tel que*
a) Les U_i forment un recouvrement d'ouverts de X i.e $\cup_{i=1}^n U_i = M$
b) Chaque x_i est un homémorphisme de U_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
c) $\forall i, j = 1, ..., n$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de carte $x_{ij} = x_j \circ x_i^{-1}$ défini sur $x_i(U_i \cap U_j)$ à valeurs dans $x_j(U_i \cap U_j)$ est un difféomorphisme de classe C^k(les deux cartes (U_i, x_i) (U_j, x_j) sont dites compatibles).

Définition 1.2 *Une variété différentiable de dimension n et de classe C^k est un espace topologique muni d'un atlas de dimension n et de classe C^k.*

1.2 Espace tangent

Soient M une variété différentiable de classe C^∞, $p \in M$ et f et g deux fonctions C^∞ sur M à valeurs réels,on définit la relation d'équivalence

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists\, U \text{ un voisinage de } p \in M,\ f_{/u} = g_{/u}$$

Si $G(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ est de classe } C^\infty\}$ alors l'ensemble $C_p^\infty(M) = G(M)/\sim$ s'appelle l'ensemble des germes au point p.

Définition 1.3 *Une dérivation est une application linéaire $D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tel que*

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$$

Un vecteur tangent au point $p \in M$ est une dérivation au point p.

L'espace tangent à M au point p est l'ensemble de tous les vecteurs tangents au point p, on le note T_pM.

Remarque 1.4 *Si U est un ouvert de M alors $T_pU = T_pM$.*
T_pM est un espace vectoriel de même dimension que la variété M.

Proposition 1.5 *Soit $(U, x) = (U, x_1, ..., x_n)$ une carte au point p alors la base canonique de T_pM est donnée par*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$$

D'aprés la proposition précédente tout vecteur $v(p) \in T_pM$ s'écrit

$$v(p) = v^i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

où les $v^i(p) \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, ..., n$. Pour simplifier on note par

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i, \ \forall i = 1, ..., n.$$

1.3 Fibré tangent

Définition 1.6 *Soit M une variété différentiable, on définit le fibré tangent noté par TM de M comme l'union disjoint de tous les espaces tangents de M i.e.*

$$TM = \underset{p \in M}{\sqcup} T_pM$$

TM est l'ensemble des couples $(p, v(p))$ avec $p \in M$ et $v(p) \in T_pM$. Le fibré tangent TM a une structure canonique d'une variété, en effet, si $(U, x) = (U, x_1, ..., x_n)$ est une carte de M et $\pi : TM \to M$ est la projection canonique définie par

$$\pi(v) = p, \ v \in T_pM$$

On définit l'application $\widetilde{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ avec $TU = \underset{p\in M}{\sqcup} T_pU = \underset{p\in M}{\sqcup} T_pM$ par

$$\widetilde{x}(v) = (x_1(p), ..., x_n(p), v(x_1), ..., v(x_n))$$

alors les couples $(TU, \widetilde{x})$ forment un atlas de TM.

Remarque 1.7 *Le fibré tangent TM est une variété différentiable de dimension $2n$.*

1.3.1 Champ de vecteurs

Définition 1.8 *Un champ de vecteurs est une section différentiable*

$$\begin{array}{rccl} V: & M & \to & TM \\ & p & \mapsto & V(p) \in T_pM \end{array}$$

On note par $\chi(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M qui est un espace vectoriel en effet si $V, W \in \chi(M)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $aV + bW \in \chi(M)$. Pour que $V_1, ..., V_n$ soit une base de $\chi(M)$ il faut que $V_1(p), ..., V_n(p)$ soit une base de T_pM donc $\partial_1, ..., \partial_n$ est une base de $\chi(M)$ tel que

$$\begin{array}{rccl} \partial_i: & M & \to & TM \\ & p & \mapsto & (\partial_i)_p = (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \end{array}$$

Un champ de vecteur définit aussi une dérivation sur $C^\infty(M)$.

Définition 1.9 *(Crochet de Lie) le crochet de Lie de deux champs de vecteurs V et W est définie par*

$$\begin{array}{rccl} [,]: & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (V, W) & \mapsto & [V, W] = VW - WV \end{array}$$

Le crochet de Lie est anti-symétrique i.e. $[V, W] = -[W, V]$ $\forall V, W \in \chi(M)$ et vérifie l'égalité dite de Jacobi

$$[V, [W, Z]] + [W, [Z, V]] + [Z, [V, W]] = 0 \ \forall V, W, Z \in \chi(M).$$

1.4 Tenseurs

Définition 1.10 *Soit E un espace vectoriel on appelle*

$1-$ *un tenseur k-covariant sur E une application k-linéaire $E^k \to \mathbb{R}$, $E^k = \underbrace{E \times ... \times E.}_{k \text{ fois}}$*

$2-$ *un tenseur, l-contravariant sur E une application l-linéaire $E^{*l} \to \mathbb{R}$ avec E^* est le dual de E et $E^{*l} = \underbrace{E^* \times ... \times E^*}_{l \text{ fois}}$.*

$3-$ *un tenseur k-covariant, l-contravariant (ou un tenseur de type (k, l)) une application $(k+l)$ linéaire $E^k \times E^{*l} \to \mathbb{R}$*

On note par

-$T^k(E)$ l'espace vectoriel des tenseurs k-covariants sur E.

-$T_l(E)$ l'espace vectoriel des tenseurs l-contravariants sur E.

-$T_l^k(E)$ l'espace vectoriel des tenseurs de type (k, l) sur E.

Exemple 1.11 *Soit M une variété différentiable et T_pM l'espace tangent à M au point $p \in M$ alors*

-$T^k(T_pM)$ est l'espace vectoriel des tenseurs k-covariants sur T_pM.

-$T_l(T_pM)$ est l'espace vectoriel des tenseurs l-contravariants sur T_pM.

-$T_l^k(T_pM)$ est l'espace vectoriel des tenseurs de type (k, l) sur T_pM.

1.4.1 Fibré tensoriel

Définition 1.12 *Soit M une variété différentiable,on définit sur M*

1-le fibré des tenseurs k-covariants comme l'union disjoint

$$T^kM = \bigsqcup_{p \in M} T^k(T_pM).$$

2-le fibré des tenseurs l-contravariants comme l'union disjoint

$$T_lM = \bigsqcup_{p \in M} T_l(T_pM).$$

3-le fibré des tenseurs de type (k, l) comme l'union disjoint

$$T_l^kM = \bigsqcup_{p \in M} T_l^k(T_pM).$$

-Les fibrés tensoriels sont des variétés différentiables.

1.4.2 Champ de tenseurs

Définition 1.13 *Soit M une variété différentiable*

1-un champ de tenseurs k-covariants est une application différentiable

$$\begin{array}{cccl} s: & M & \to & T^k M \\ & p & \mapsto & s(p) \in T^k(T_p M) \end{array}$$

2-un champ de tenseurs l-contravariants est une application différentiable

$$\begin{array}{cccl} s: & M & \to & T^l M \\ & p & \mapsto & s(p) \in T^l(T_p M) \end{array}$$

3-un champ de tenseurs de type (k,l) est une application différentiable

$$\begin{array}{cccl} s: & M & \to & T^k_l M \\ & p & \mapsto & s(p) \in T^k_l(T_p M) \end{array}$$

Soient $(U,x) = (U, x_1, ..., x_n)$ une carte et s un champ de tenseurs sur U alors

- $s = s_{1,..,k} dx^1 \otimes ... \otimes dx^k$ si s est un champ de tenseurs k-covariant.

- $s = s^{1,..,l} \partial_1 \otimes ... \otimes \partial_l$ si s est un champ de tenseurs l-contravariant.

- $s = s^{1,...,l}_{1,..,k} dx^1 \otimes ... \otimes dx^k \otimes \partial_1 \otimes ... \otimes \partial_l$ si s est un champ de tenseurs de type (k,l)

avec $s_{1,..,k}$, $s^{1,..,l}$ et $s^{1,...,l}_{1,..,k}$ sont des fonctions C^∞.

.

1.5 Connexion

Définition 1.14 *Soit M une variété différentiable, une connexion affine est une application*

$$\begin{array}{rccl}\nabla : & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M)\\ & (X,Y) & \mapsto & \nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{array}$$

qui vérifie :

1- ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X i.e

$$\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y.$$

$\forall X_1, X_2, Y \in \chi(M)$ *et* $f, g \in C^\infty(M)$

2- ∇ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y i.e

$$\nabla_X aY_1 + bY_2 = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2.$$

$\forall X, Y_1, Y_2 \in \chi(M), \forall a, b \in \mathbb{R}$

3- $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \chi(M)$

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

$\nabla_X Y$ se lit la dérivée covariante de Y suivant la direction de X.
Soit (U, x) une carte locale et $(\partial_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base locale des champs de vecteurs on pose $X = X^i\partial_i, Y = Y^j\partial_j$ alors

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j\\ &= X^i(Y^j\nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(Y^j)\partial_j)\\ &= (X^iY^j\Gamma_{ij}^k + Xb^k)\partial_k\end{aligned}$$

avec $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k$ et Γ_{ij}^k sont des fonctions C^∞ qui s'appellent les symboles de Cristoffel, la connaissance d'une connexion affine ∇ correspond à connaitre ses symboles de Cristoffel.

Définition 1.15 *Soit γ est une courbe C^∞ sur M, alors on définit l'application*

$$\begin{array}{rccl} D_t: & \chi(\gamma) & \to & \chi(\gamma) \\ & V & \mapsto & D_t(V) = D_tV \end{array}$$

1. D_t est $\mathbb{R}$-linéaire i.e $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $V_1, V_2 \in \chi(\gamma)$,$D_t(aV_1 + bV_2) = aD_tV_1 + bD_tV_2$.

2. D_t vérifie : $\forall f \in C^\infty(I), V \in \chi(\gamma)$, $D_t(fV) = fD_tV + \dot{f}V$.

3. Si V est extensible à $Y \in \chi(M)$ i.e $V_t = Y_{\gamma(t)}$ alors $D_tV = \nabla_{\dot{\gamma}}Y$.

D_tV s'appelle la dérivée covariante de V le long de la courbe γ.On dit que $V \in \chi(\gamma)$ est parallèl le long de la courbe γ si $D_tV = 0$.

Définition 1.16 *Soit M une variété différentiable, on définit le tenseur de torsion d'une connexion ∇ par l'application*

$$\begin{array}{rccl} T: & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X, Y) & \mapsto & T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{array}$$

On dit que ∇ est symétrique si $T \equiv 0$.

1.6 Variétés Riemanniennes

1.6.1 Métriques Riemanniennes

Définition 1.17 *Une métrique Riemannienne sur M est un champ de tenseurs g de type (0,2), symétrique (i.e $g(V, W) = g(W, V)$ $\forall$ $V, W \in \chi(M)$) et définie positive (i.e $g(V_p, V_p) > 0$ si $V_p \neq 0$).*

Une variété Riemannienne est une variété différentiable M muni d'une métrique Riemannienne g. Une métrique Riemannienne définie un produit scalaire sur chaque T_pM noté par

$$\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle_p = g(v, w), \forall v, w \in T_pM$$

Localement g est donnée par

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

La norme du vecteur $v \in T_pM$ est

$$|v| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

L'angle entre deux vecteurs non nuls $v, w \in T_pM$ est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{< v, w >}{|v||w|}.$$

1-Si $M = \mathbb{R}^n$,la métrique euclidienne est le produit scalaire usuel définie sur chaque espace tangent $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ tel que

$$g_{eu} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1.7 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.18 *Soit M une variété Riemannniènne et $g = \langle ., . \rangle$ sa métrique, on dit qu'une connexion ∇ est compatible avec g si*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \ \forall X, Y, Z \in \chi(M).$$

Pour une variété Riemannienne (M, g) il existe une unique connexion ∇ qui est symétrique et compatible avec g, ∇ s'appelle la connexion de Levi-Civita.

Proposition 1.19 *(Formule de* KOSUL*) Soient M une variété Riemannienne, g sa métrique et ∇ la connexion de Levi-Civita associée alors*

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \left\{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \right\}.$$

.

Preuve. Soient X, Y et $Z \in \chi(M)$, puisque ∇ est symétrique et compatible avec g

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle.$$

de la même manière on trouve

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle.$$

et

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

donc

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + < Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

alors

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle\right\}.$$

■

1.8 Repère de Serret-Frenet

Nous rappelons la notion de courbe de Frenet dans une variétés de dimension $(2n+1)$. Soit m un entier avec $1 \leq m \leq 2n+1$.La courbe $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ paramétrée par la longueur d'arc s est appelée une courbe m-Frenet dans M s'il existe m champs de veccteurs orthonormés $U_1 = \gamma', U_2, ..., U_m$ et $(m-1)$ fonctions de classe C^∞ positives $k_1, ..., k_{m-1}$ de s tel que :

$$\nabla_{\gamma'} U_1 = \kappa_1 U_2,\ \nabla_{\gamma'} U_2 = -\kappa_1 U_1 + \kappa_2 U_3, ...,\ \nabla_{\gamma'} U_m = \kappa_{m-1} U_{m-1}. \tag{1.1}$$

La fonction κ_j est appelée la $j^{i\grave{e}me}$ courbure de γ, et γ est :

a) une géodésique si $m = 1$,alors nous obtenons l'équation bien connue $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.

b) un cercle si $m = 2$ et κ_1 est une constante : alors nous obtenons $\nabla_{\gamma'} E_1 = \kappa_1 E_2, \nabla_{\gamma'} E_2 = -\kappa_1 E_1$.

c) une hélice d'ordre m si $\kappa_1, ..., \kappa_{m-1}$ sont constantes.La courbe de Frenet γ est appelée non-géodésique si $\kappa_1 > 0$ sur I et en dimension 3 on l'appelle une hélice généralisée si $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \text{cte}$.

Chapitre 2

Strurcture Riemanniènne de l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu $\mathbb{M}^3_{bcv}$

Soient l et m deux nombres réels fixés. On note par $\mathbb{M}^3_{bcv}$ la variété de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, <,>)$ donnée par

$$M^3_{bcv} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; F(x,y,z) = 1 + m(x^2+y^2) > 0\}.$$

La métrique de Bianchi-Cartan-Vranceanu dans M^3_{bcv} est définie par

$$g_{l,m} = \frac{1}{F^2}dx^2 + \frac{1}{F^2}dy^2 + (dz + \frac{ly}{2F}dx - \frac{lx}{2F}dy)^2. \tag{2.1}$$

sa matrice associée est donnée par

$$g_{l,m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{F^2} + \frac{l^2y^2}{4F^2} & -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{ly}{2F} \\ -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{1}{F^2} + \frac{l^2x^2}{4F^2} & \frac{-lx}{2F} \\ \frac{ly}{2F} & \frac{-lx}{2F} & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{M}^3_{bcv}$ muni de cette métique est une variété Riemanniènne.

L'une des caractéristiques importantes de ces métriques est leur $\mathbb{S}^1$-invariance, c'est-à-dire l'invariance via de la transformations

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

On considère la base orthonormale

$$E_1 = F\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ E_2 = F\frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3}$$

Les crochets $< E_i, E_j >= \delta^{ij}\ \forall i, j = 1, 2, 3$, en effet

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_2\rangle &= \begin{pmatrix} F & 0 & -\frac{ly}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{F^2} + \frac{l^2y^2}{4F^2} & -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{ly}{2F} \\ -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{1}{F^2} + \frac{l^2x^2}{4F^2} & \frac{-lx}{2F} \\ \frac{ly}{2F} & \frac{-lx}{2F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{lx}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ \langle E_1, E_3\rangle &= \begin{pmatrix} F & 0 & -\frac{ly}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{F^2} + \frac{l^2y^2}{4F^2} & -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{ly}{2F} \\ -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{1}{F^2} + \frac{l^2x^2}{4F^2} & \frac{-lx}{2F} \\ \frac{ly}{2F} & \frac{-lx}{2F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\langle E_1, E_1\rangle = \begin{pmatrix} F & 0 & -\frac{ly}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{F^2} + \frac{l^2y^2}{4F^2} & -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{ly}{2F} \\ -\frac{l^2xy}{4F^2} & \frac{1}{F^2} + \frac{l^2x^2}{4F^2} & \frac{-lx}{2F} \\ \frac{ly}{2F} & \frac{-lx}{2F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ -\frac{ly}{2} \end{pmatrix} = 1$$

qui donne $|E_1| = 1$. On vérifie de la même manière l'orthogonalité des autres vecteurs.

La base duale est

$$\omega_1 = \frac{dx}{F},\ \omega_2 = \frac{dy}{F},\ \omega_3 = dz + \frac{ly}{2F}dx - \frac{lx}{2F}dy. \tag{2.4}$$

.

Les dérivées covariantes de E_i sont données par la proposition suivante :

Proposition 2.1

$$\nabla_{E_1}E_1 = 2myE_2, \nabla_{E_2}E_2 = 2mxE_1, \nabla_{E_3}E_3 = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}E_2 &= -2myE_1 + \frac{1}{2}lE_3, \nabla_{E_2}E_1 = -2mxE_2 - \frac{1}{2}lE_3 \\ \nabla_{E_1}E_3 &= \nabla_{E_3}E_1 = -\frac{1}{2}lE_2, \nabla_{E_2}E_3 = \nabla_{E_3}E_2 = \frac{1}{2}lE_1.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Preuve. On utilise la formule de KOSUL donnée ci-dessus pour les éléments de la base $(E_i)_{i=\overline{1,3}}$

$$\langle \nabla_{E_i}E_j, E_k\rangle = \frac{1}{2}\{-\langle E_j, [E_i, E_k]\rangle - \langle E_k, [E_j, E_i]\rangle + \langle E_i, [E_k, E_j]\rangle\}\ ;\ i,j,k = \overline{1.3}$$

On calcule par exemple $\nabla_{E_2}E_2$, calculons d'abord les crochets de Lie $[E_2, E_2]$, $[E_1, E_2]$ et $[E_2, E_3]$ on utilise la propriété suivante du crochet de Lie

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

on trouve que

$$\begin{aligned}[E_2, E_2] &= [F\frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}, F\frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= [F\frac{\partial}{\partial y}, F\frac{\partial}{\partial y}] + [F\frac{\partial}{\partial y}, \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}] + [\frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}, F\frac{\partial}{\partial y}] + [\frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= F(\frac{\partial}{\partial y}F)\frac{\partial}{\partial y} - F(\frac{\partial}{\partial y}F)\frac{\partial}{\partial y} + F(\frac{\partial}{\partial y}\frac{lx}{2})\frac{\partial}{\partial z} - \frac{lx}{2}(\frac{\partial}{\partial z}F)\frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + \frac{lx}{2}(\frac{\partial}{\partial z}F)\frac{\partial}{\partial y} - F(\frac{\partial}{\partial y}\frac{lx}{2})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{lx}{2}(\frac{\partial}{\partial z}\frac{lx}{2})\frac{\partial}{\partial z} - \frac{lx}{2}(\frac{\partial}{\partial z}\frac{lx}{2})\frac{\partial}{\partial z} \\ &= 0\end{aligned}$$

sachant que $F = 1 + m(x^2 + y^2)$.

De la même manière on trouve $[E_1, E_2] = -2myE_1 + 2mxE_2 + lE_3$ et $[E_2, E_3] = 0$. Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2} E_2, E_1 \rangle &= \frac{1}{2} \{ - \langle E_2, [E_2, E_1] \rangle - \langle E_1, [E_2, E_2] \rangle + \langle E_2, [E_1, E_2] \rangle \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \langle E_2, [E_1, E_2] \rangle - \langle E_1, [E_2, E_2] \rangle + \langle E_2, [E_1, E_2] \rangle \} \\
&= 2mx \\
\langle \nabla_{E_2} E_2, E_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ - \langle E_2, [E_2, E_2] \rangle - \langle E_2, [E_2, E_2] \rangle + \langle E_2, [E_2, E_2] \rangle \} \\
&= 0 \\
\langle \nabla_{E_2} E_2, E_3 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ - \langle E_2, [E_2, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_2, E_2] \rangle + \langle E_2, [E_3, E_2] \rangle \} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

donc

$$\nabla_{E_2} E_2 = 2mxE_1.$$

Les autres dérivées covariantes se calculent d'une manière similaire. ■

Remarque 2.2 *De l'équation Eq.(2.5) il en résulte que E_3 est un un champ de vecteurs géodésique i.e ces courbes intégrales sont des géodésiques de $g_{l,m}$.*

Chapitre 3

Courbes obliques et de Legendre dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$

3.1 Courbes obliques et de Legendre dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$

Soit γ une courbe 3-Frenet dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ pour laquelle on note le repère de Frenet $(T = \gamma', N, B)$ définie par

$$\begin{cases} \nabla_T T = & & \kappa N & \\ \nabla_T N = & -\kappa T & & +\tau B \\ \nabla_T B = & & -\tau N & \end{cases} \tag{3.1}$$

où κ est la courbure de γ et τ sa torsion.

Proposition 3.1 *Soit γ une courbe dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ alors son vecteur vitesse est donné par*

$$T = \frac{\gamma_1'}{F}E_1 + \frac{\gamma_2'}{F}E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]E_3. \tag{3.2}$$

.

Preuve. *Le vecteur vitessse de* γ, $T = \gamma' = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s), \gamma_3'(s))$ *est donné dans la base* $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ *par*

$$T = \gamma_1'(s)\partial_x + \gamma_2'(s)\partial_y + \gamma_3'(s)\partial_z$$

*en utilisant Eq.(*2.3*),* T *dans la base orthonormée* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *est donné par*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{F} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F} & 0 \\ \frac{l\gamma_2}{2F} & \frac{-l\gamma_1}{2F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{F}\gamma_1' \\ \frac{1}{F}\gamma_2' \\ \gamma_3' - \frac{1}{2F}l\gamma_1\gamma_2' + \frac{1}{2F}l\gamma_2\gamma_1' \end{pmatrix}$$

■

Proposition 3.2 E_3 *est un champ de vecteurs de Killing le long de* γ.

Preuve. Un champ de vecteurs de Killing X vérifie

$$\langle \nabla_V X, W\rangle + \langle V, \nabla_W X\rangle = 0 \ \forall V, W \in \chi(M).$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T E_3, T\rangle + \langle T, \nabla_T E_3\rangle &= 2\langle \nabla_T E_3, T\rangle \\ &= 2\left(\frac{\gamma_1^{'}}{F}\langle \nabla_{E_1} E_3, T\rangle + \frac{\gamma_2^{'}}{F}\langle \nabla_{E_2} E_3, T\rangle\right) \\ &= 2\left(-\frac{\gamma_1^{'}\gamma_2^{'}}{2F^2 l} + \frac{\gamma_1^{'}\gamma_2^{'}}{2F^2 l}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Définition 3.3 *L'angle vertical de la courbe* γ *est la fonction* $\theta : I \to [0, 2\pi[$ *définie par*

$$\cos\theta(s) = \langle T(s), \frac{\partial}{\partial z}\rangle = \langle T(s), E_3\rangle. \tag{3.3}$$

Définition 3.4 *Une courbe* γ *est appelée une courbe oblique (ou plus précisément une courbe* θ*-oblique) si* θ *est une fonction constante. En particulier si* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *la courbe* γ *est appelée une courbe de Legendre.*

Proposition 3.5 *Soit γ une courbe $\theta-$oblique dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ alors*

$$\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3' = \cos\theta. \tag{3.4}$$

et la norme de T vérifie

$$(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = F^2\sin^2\theta. \tag{3.5}$$

Preuve. Puisque γ est une courbe $\theta-$oblique alors

$$\langle T(s), E_3\rangle = \cos\theta.$$

d'autre part, d'aprés Eq.(3.2) on a

$$\begin{aligned}
\langle T(s), E_3\rangle &= \langle \frac{\gamma_1'}{F}E_1 + \frac{\gamma_2'}{F}E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]E_3, E_3\rangle \\
&= \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]\langle E_3, E_3\rangle \\
&= \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3' = \cos\theta.$$

La norme de T est $|T| = 1$, et de l'équation Eq.(3.2) on aura

$$\begin{aligned}
|T| &= \langle \frac{\gamma_1'}{F}E_1 + \frac{\gamma_2'}{F}E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]E_3, \frac{\gamma_1'}{F}E_1 + \frac{\gamma_2'}{F}E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]E_3\rangle \\
&= \frac{(\gamma_1')^2}{F^2} + \frac{(\gamma_2')^2}{F^2} + \left(\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right)^2 \\
&= \frac{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}{F^2} + \cos^2\theta \\
1 &= \frac{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}{F^2} + \cos^2\theta
\end{aligned}$$

d'où $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = F^2\sin^2\theta$.

Théorème 3.6 *Une courbe non-géodésique γ dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ est une courbe θ-oblique si et seulement si son champ de vecteur normal N est $g_{l,m}$-orthogonal à E_3 i.e.*

$$\omega_3(N) = 0. \tag{3.6}$$

Qui donne la décomposition de E_3 dans le repère de Frenet par

$$E_3 = \cos\theta T + |\sin\theta| B. \tag{3.7}$$

La courbe γ est de Legendre si $B = E_3$.

Preuve. De Eq.(3.2) et Eq.(2.6) on a

$$\begin{aligned} \nabla_T E_3 &= \frac{\gamma_1'}{F}\nabla_{E_1}E_3 + \frac{\gamma_2'}{F}\nabla_{E_2}E_3 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right]\nabla_{E_3}E_3 \\ &= \frac{l\gamma_2'}{2F}E_1 - \frac{l\gamma_1'}{2F}E_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

La courbe γ est $\theta-$oblique alors

$$< T, E_3 >= \cos\theta.$$

par dérivation on obtient

$$< \nabla_T T, E_3 > + < \nabla_T E_3, T >= 0$$

et par suite de Eq.(3.8)

$$\begin{aligned} \langle \kappa N, E_3\rangle + \langle T, \frac{l\gamma_2'}{2F}E_1 - \frac{l\gamma_1'}{2F}E_2\rangle &= \\ \langle \kappa N, E_3\rangle + \langle T, \frac{l\gamma_2'}{2F}E_1\rangle - \langle T, \frac{l\gamma_1'}{2F}E_2\rangle &= \\ \langle \kappa N, E_3\rangle + \frac{\gamma_1' l\gamma_2'}{2F^2} - \frac{\gamma_1' l\gamma_2'}{2F^2} &= \\ \langle \kappa N, E_3\rangle &= 0. \end{aligned}$$

alors $\kappa\omega_3(N) = 0$.

Le vecteur normal N est orthogonal à E_3 alors E_3 appartient au plan engendré par T et B alors il se décompose en

$$E_3 = \cos\theta T + |\sin\theta| B.$$

de plus si γ est de Legendre ($\theta = \frac{\pi}{2}$) $E_3 = B$. ■

Dans ce qui suit, on suppose que γ est non géodésique i.e : $\kappa > 0$ (i.e γ ne peut pas être une courbe intégrale de E_3 ce qui veut dire que $\theta \neq 0, \pi$).

Le repère de Frenet de γ par rapport à E_i est donné par la proposition suivante

Proposition 3.7 *Soit γ une courbe θ-oblique dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ alors*

$$\begin{cases} T = \frac{\gamma_1'}{F} E_1 + \frac{\gamma_2'}{F} E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right] E_3, \\ N = \frac{1}{F|\sin\theta|}(-\gamma_2' E_1 + \gamma_1' E_2), \\ B = -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}(\gamma_1' E_1 + \gamma_2' E_2) + |\sin\theta| E_3. \end{cases} \tag{3.9}$$

La courbe de Legendre a

$$\begin{cases} T = \frac{\gamma_1'}{F} E_1 + \frac{\gamma_2'}{F} E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} + \gamma_3'\right] E_3, \\ N = \frac{1}{F}(-\gamma_2' E_1 + \gamma_1' E_2), \\ B = E_3. \end{cases}$$

Preuve. De l'équation Eq.(3.7) le vecteur binormal B est donné par

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|} T + \frac{1}{|\sin\theta|} E_3 \\ &= -\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|} \left(\frac{\gamma_1'}{F} E_1 + \frac{\gamma_2'}{F} E_2 + \cos\theta \ E_3\right) + \frac{1}{|\sin\theta|} E_3 \\ &= -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}(\gamma_1' E_1 + \gamma_2' E_2) + \frac{1}{|\sin\theta|} E_3 \left(1 - \cos^2\theta\right) \\ &= -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}(\gamma_1' E_1 + \gamma_2' E_2) + |\sin\theta| E_3 \end{aligned}$$

le vecteur normal N est donné par

$$\begin{aligned}
N &= B \wedge T \\
&= \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}\gamma_1' & -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}\gamma_2' & |\sin\theta| \\ \frac{\gamma_1'}{F} & \frac{\gamma_2'}{F} & \frac{l(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')}{2F}+\gamma_3' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}\gamma_1' & -\frac{\cos\theta}{F|\sin\theta|}\gamma_2' & |\sin\theta| \\ \frac{\gamma_1'}{F} & \frac{\gamma_2'}{F} & \cos\theta \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{\cos^2\theta}{F|\sin\theta|}\gamma_2' - \frac{\gamma_2'}{F}|\sin\theta|\right)E_1 + \left(\frac{\cos^2\theta}{F|\sin\theta|}\gamma_1' + \frac{\gamma_1'}{F}|\sin\theta|\right)E_2 \\
&= \frac{1}{F|\sin\theta|}\left(-\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\gamma_2'E_1 + \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\gamma_1'E_2\right) \\
&= \frac{1}{F|\sin\theta|}(-\gamma_2'E_1+\gamma_1'E_2)
\end{aligned}$$

Pour la condition de Legendre $\theta = \frac{\pi}{2}$ on trouve

$$\begin{cases} N = \frac{1}{F}(-\gamma_2'E_1+\gamma_1'E_2), \\ B = E_3. \end{cases}$$

■

Lemme 3.8 *Soit γ une courbe dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ alors*

$$\begin{aligned}
\nabla_T E_1 &= \left(\frac{(8m-l^2)(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')}{4F} - \frac{l\gamma_3'}{2}\right)E_2 - \frac{l\gamma_2'}{2F}E_3. \\
\nabla_T E_2 &= \left(\frac{(l^2-8m)(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')}{4F} + \frac{l\gamma_3'}{2}\right)E_1 + \frac{l\gamma_1'}{2F}E_3.
\end{aligned}$$

.

Preuve. D'aprés Eq.(2.5) et Eq.(2.6)

$$\begin{aligned}\nabla_T E_1 &= \frac{\gamma_1^{'}}{F}\nabla_{E_1}E_1 + \frac{\gamma_2^{'}}{F}\nabla_{E_2}E_1 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})}{2F} + \gamma_3^{'}\right]\nabla_{E_3}E_1 \\ &= \left(\frac{(8m - l^2)(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})}{4F} - \frac{l\gamma_3^{'}}{2}\right)E_2 - \frac{l\gamma_2^{'}}{2F}E_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_T E_2 &= \frac{\gamma_1^{'}}{F}\nabla_{E_1}E_2 + \frac{\gamma_2^{'}}{F}\nabla_{E_2}E_2 + \left[\frac{l(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})}{2F} + \gamma_3^{'}\right]\nabla_{E_3}E_2 \\ &= \left(\frac{(l^2 - 8m)(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})}{4F} + \frac{l\gamma_3^{'}}{2}\right)E_1 + \frac{l\gamma_1^{'}}{2F}E_3\end{aligned}$$

.

■

Théorème 3.9 *Soit* $\gamma : I \to (\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ *une courbe* θ*-oblique alors la courbure et la torsion sont :*

$$\kappa = \frac{1}{F|\sin\theta|}\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F} - Fl\gamma_3'\sin^2\theta + \frac{(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')(4m - l^2)\sin^2\theta}{2}\right|, \tag{3.10}$$

$$\tau = \left|\frac{l}{2} + \left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F^2\sin^2\theta} - l\gamma_3' + \frac{(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')(4m - l^2)}{2F}\right|\cos\theta\right|. \tag{3.11}$$

Il s'ensuit que l'invariant de Lancret des courbes obliques dans la géométrie de Bianchi-Cartan-Vranceanu est :

$$Lancret_{\pm}(\gamma) = \frac{2\tau \pm l}{2\kappa}. \tag{3.12}$$

La courbe de Legendre a :

$$\kappa = \frac{1}{F}\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F} - Fl\gamma_3' + \frac{(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')(4m - l^2)}{2}\right|, \ \tau = \frac{|l|}{2}. \tag{3.13}$$

.

Preuve. D'aprés la première équation de Frenet on a

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T T, N\rangle &= \langle \kappa N, N\rangle \\ &= \kappa\end{aligned}$$

par suite

$$\langle \nabla_T T, N\rangle = \frac{1}{F|\sin\theta|}\left(\langle \nabla_T T, -\gamma_2^{'} E_1\rangle + \langle \nabla_T T, \gamma_1^{'} E_2\rangle\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T T, -\gamma_2^{'} E_1\rangle &= \langle T, -\gamma_2^{'} E_1\rangle^{'} - \langle T, \nabla_T - \gamma_2^{'} E_1\rangle \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{\gamma_1^{'}\gamma_2^{'}}{F}\right) + \gamma_2^{'}\langle T, \nabla_T E_1\rangle + \frac{\gamma_1^{'}\gamma_2^{''}}{F}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T T, \gamma_1^{'} E_2\rangle &= \langle T, \gamma_1^{'} E_2\rangle^{'} - \langle T, \nabla_T \gamma_1^{'} E_2\rangle \\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{\gamma_1^{'}\gamma_2^{'}}{F}\right) - \gamma_1^{'}\langle T, \nabla_T E_2\rangle - \frac{\gamma_2^{'}\gamma_1^{''}}{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2^{'}\langle T, \nabla_T E_1\rangle - \gamma_1^{'}\langle T, \nabla_T E_2\rangle &= \left((\gamma_2^{'})^2 + (\gamma_1^{'})^2\right)\left(\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})}{2F^2} - \frac{l\gamma_3^{'}}{F}\right) \\ &= F^2\sin^2\theta\left(\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})}{2F^2} - \frac{l\gamma_3^{'}}{F}\right) \\ &= \frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})\sin^2\theta}{2} - Fl\gamma_3^{'}\sin^2\theta\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{F|\sin\theta|}\left(\langle \nabla_T T, -\gamma_2^{'} E_1\rangle + \langle \nabla_T T, \gamma_1^{'} E_2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{F|\sin\theta|}\left(\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1^{'} - \gamma_1\gamma_2^{'})\sin^2\theta}{2} - Fl\gamma_3^{'}\sin^2\theta + \frac{\gamma_1^{'}\gamma_2^{''} - \gamma_2^{'}\gamma_1^{''}}{F}\right)\end{aligned}$$

et puisque la courbure est supposée positive alors

$$\kappa = \frac{1}{F|\sin\theta|}\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F} - Fl\gamma_3'\sin^2\theta + \frac{(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')(4m-l^2)\sin^2\theta}{2}\right|.$$

D'aprés la troisième équation de Frenet on a

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T B, N\rangle &= \langle -\tau N, N\rangle \\ &= -\tau\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T B, N\rangle &= \langle \frac{l}{2F|\sin\theta|}\left[\gamma_2' E_1 - \gamma_1' E_2\right] - \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}\kappa N, N\rangle \\ &= -\langle \frac{l}{2F|\sin\theta|}\left[\gamma_2' E_1 - \gamma_1' E_2\right], N\rangle - \langle -\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}\kappa N, N\rangle \\ \tau &= \frac{l}{2F^2\sin^2\theta}\left((\gamma_2')^2 + (\gamma_1')^2\right) + \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}\kappa \\ &= \frac{l}{2} + \frac{1}{F\sin^2\theta}\left|\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')\sin^2\theta}{2} - Fl\gamma_3'\sin^2\theta + \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F}\right|\cos\theta\end{aligned}$$

et puisque τ est supposée positive on aura

$$\tau = \left|\frac{l}{2} + \left|\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} - l\gamma_3' + \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F^2\sin^2\theta}\right|\cos\theta\right|.$$

et par suite

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\tau \pm \frac{l}{2}}{\left|\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')}{2F} - l\gamma_3' + \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F^2\sin^2\theta}\right|} \\ &= \frac{\tau \pm \frac{l}{2}}{\left|\frac{F\sin^2\theta(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2') - 2F^2\sin^2\theta l\gamma_3' + 2\left(\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''\right)}{2F^2\sin^2\theta}\right|} \\ \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} &= \frac{\tau \pm \frac{l}{2}}{\left|\frac{F\sin^2\theta(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2') - 2F^2\sin^2\theta l\gamma_3' + 2\left(\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''\right)}{2F^2}\right|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{F|\sin\theta|}\left(\frac{(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')\sin^2\theta}{2} - Fl\gamma_3'\sin^2\theta + \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F}\right) \\ |\sin\theta| &= \frac{\left|\frac{F\sin^2\theta(4m-l^2)(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2') - 2F^2\sin^2\theta l\gamma_3' + 2\left(\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''\right)}{2F^2}\right|}{\kappa}\end{aligned}$$

donc
$$\frac{\tau \pm \frac{l}{2}}{\kappa} = \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}.$$

ce qui donne l'invariant de Lancret

$$Lancret_{\pm}(\gamma) = \frac{2\tau \pm l}{2\kappa}.$$

■

Corollaire 3.10 *Supposons que $l \neq 0$. Une courbe θ-oblique dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ non de Legendre est une courbe de Bertrand.*

Preuve. Rappelons que γ est une courbe de Bertrand s'il existe $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que

$$ak + b\tau = 1. \tag{3.14}$$

De l'invariant de Lancret
$$\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|} = \frac{2\tau \pm l}{2\kappa}$$

donc
$$\frac{\kappa\cos\theta}{|\sin\theta|} = \tau \pm \frac{l}{2}$$

alors
$$\frac{\pm 2\cos\theta}{l\,|\sin\theta|}\kappa \pm \frac{2}{l}\tau = 1$$

ce qui donne Eq.(3.14) avec
$$a = \frac{\pm 2\cos\theta}{l\,|\sin\theta|},\ b = \frac{\pm 2}{l}.$$

..

■

3.2 Formes explicites des courbes obliques et de Legendre dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,0})$

Le cas où $m = 0$, les équations Eq.(3.4) -Eq.(3.5) sont explicitement intégrables alors on peut donné le théorème suivant

Théorème 3.11 *Soit γ une courbe θ-oblique dans $(\mathbb{R}^3, g_{l,0})$ Alors il existe une paramétrisation de longueur unitaire $\zeta(s) = (\cos u(s), \sin u(s))$ du cercle de l'unité S^1 tel que $\gamma = \gamma_u$ a l'expression*

$$\gamma_u(s) = \left(|\sin\theta| \int_0^s \zeta(t)dt \ , \ s\cos\theta - \frac{l\sin^2\theta}{2} \left[\int_0^s \begin{pmatrix} \cos u(t) \int_0^t \sin u(x)dx \\ -\sin u(t) \int_0^t \cos u(x)dx \end{pmatrix} dt \right] \right) \tag{3.15}$$

Sa courbure, sa torsion et son invariant de Lancret sont

$$\begin{gathered} \kappa(s) = |u'(s) - l\cos\theta|\,|\sin\theta|, \\ \tau(s) = \left| \tfrac{l}{2} + |u'(s) - l\cos\theta| \cos\theta \right|, \\ Lancret(\gamma) = \tfrac{2\tau \pm l}{2k}. \end{gathered} \tag{3.16}$$

En particulier,une courbe de Legendre dans $(\mathbb{R}^3, g_{l,0})$ a l'expression

$$\gamma_u^L = \left(\int_0^s \zeta(t), s\cos\theta - \frac{l}{2} \left[\int_0^s \begin{pmatrix} \cos u(t) \int_0^t \sin u(x)dx \\ -\sin u(t) \int_0^t \cos u(x)dx \end{pmatrix} dt \right] \right). \tag{3.17}$$

Sa courbure et sa torsion sont

$$\kappa(s) = |u'(s)|, \ \tau(s) = \frac{|l|}{2}. \tag{3.18}$$

.

Preuve. Puisque $m=0$ on a $F=1$ la relation (3.5) implique que γ est régulière et de plus γ est de classe C^1 alors γ est paramétrée par sa longueur tel que

$$\gamma_1' = |\sin\theta|\cos u(s),\ \ \gamma_2' = |\sin\theta|\sin u(s)$$

et par intégration on aura

$$\gamma = \left(|\sin\theta| \int_0^s \zeta(t)dt, s\cos\theta - \frac{l\sin^2\theta}{2}\left[\int_0^s \begin{pmatrix} \cos u(t)\int_0^t \sin u(x)dx \\ -\sin u(t)\int_0^t \cos u(x)dx \end{pmatrix} dt\right]\right)$$

Pour la courbure et la torsion on remplace par $\gamma_1',\ \gamma_2', \gamma_1'',\ \gamma_2''$ et γ_3' dans Eq.(3.10) et Eq.(3.11) on aura

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{1}{|\sin\theta|}\left| \begin{array}{c} \sin^2\theta u'(s)(\cos^2 u(s)+\sin^2 u(s)) - l\sin^2\theta\left(\cos\theta - \frac{l(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')}{2}\right) \\ -\frac{l^2(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')\sin^2\theta}{2} \end{array} \right| \\ &= |\sin\theta|\,|u'(s) - l\cos\theta| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \left| \frac{l}{2} + \left| \begin{array}{c} \frac{\sin^2\theta u'(s)(\cos^2 u(s)+\sin^2 u(s))}{\sin^2\theta} - \left(l\cos\theta - \frac{l^2(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')}{2}\right) \\ -\frac{l^2(\gamma_2\gamma_1'-\gamma_1\gamma_2')\sin^2\theta}{2} \end{array} \right| \cos\theta \right| \\ &= \left| \frac{l}{2} + |u'(s) - l\cos\theta|\cos\theta \right| \end{aligned}$$

et donc

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau \pm \frac{l}{2}}{k}$$

pour une courbe de Legendre on a $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= |u'(s)|, \\ \tau(s) &= \frac{|l|}{2}. \end{aligned}$$

■

Le cas particulier $u(s) = ps$ avec $p \neq 0$ donne la courbe θ-oblique suivante

$$\gamma_p(s) = \left(\frac{|\sin\theta|}{p}(\sin(ps), 1-\cos(ps)), s\cos\theta - \frac{l\sin^2\theta}{2p}\left(\frac{\sin(ps)}{p} - s\right)\right) \tag{3.19}$$

avec

$$\begin{aligned} k(s) &= |p - l\cos\theta||\sin\theta|, \\ \tau(s) &= \left|\tfrac{l}{2} + |p - l\cos\theta|\cos\theta\right| \end{aligned} \tag{3.20}$$

et la courbe de Legendre

$$\gamma_p^L(s) = \frac{1}{p}\left(\sin(ps), 1-\cos(ps), s - \frac{l}{2p}\left(\frac{\sin(ps)}{p} - s\right)\right) \tag{3.21}$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= |p|, \\ \tau(s) &= \frac{|l|}{2}. \end{aligned}$$

3.3 Courbure moyenne

Définition 3.12 *On appelle première forme quadratique fondamentale de la variété M dans la carte (U, φ), la forme quadratique g dans $\mathbb{R}^{n-1}$ associé à la matrice*

$$q(u) = (q_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq n-1} = \left(\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}(u)\right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq m-1}$$

pour tout $u \in U$.
C'est la matrice de Gram associé à la base du plan tangent canoniquement associé à la carte considérée..

.

Définition 3.13 *Soient $(M, g_M), (N, g_N)$ deux variétés Riemanniennes et $f : (M, g_M) \longrightarrow (N, g_N)$ une application différentiable de classe C^∞. La seconde forme fondamentale de l'application γ est la dériveé covariante de la $1-$forme vectoriel $d\gamma$, définie par*

$$\nabla df(X, Y) = \nabla^N_X df(Y) - df(\nabla^M_X Y).$$

pour tout $X, Y \in \chi(TM)$.

La seconde forme fondamentale de l'application f est une forme $C^\infty(M)-$bilinéaire symétrique i.e.

$$\begin{array}{rcl}(\nabla df)(\alpha X, \beta Y) & = & \alpha\beta(\nabla df)(X, Y) \\ (\nabla df)(Y, X) & = & (\nabla df)(X, Y)\end{array}$$

pour tout $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ et $X, Y \in \chi(TM)$

Définition 3.14 *La courbure moyenne H est la trace de la seconde forme fondamentale définie par $h(X, X') = -g(D_X\eta, X')$ avec η la normale unitaire rentrante.*

Pour plus de détail voir [3].

Puisque les courbes sont des cas particuliers d'applications. On note par h la seconde forme fondamentale de la courbe γ définie par

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$$

et par H son champ de courbure moyenne

$$H = trace(h) = h(T, T) = \nabla_T T. \tag{3.22}$$

Alors γ est appelée une courbe avec un champ de vecteur de courbure moyenne propre s'il existe $\lambda \in C^\infty(\gamma)$ tel que

$$\Delta H = \lambda H. \tag{3.23}$$

En particulier, si $\lambda = 0$ alors γ est une courbe avec champ de vecteur de courbure moyenne harmonique. Ici l'opérateur de Laplace Δ agit sur la fonction à valeur vectorielle H,donné par

$$\Delta H = -\nabla_T^3 T = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T. \tag{3.24}$$

En utilisant les équations de Frenet Eq.(3.1), On peut réécrire Eq.(3.23)

$$\begin{aligned}
\Delta H &= -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T \\
&= -\nabla_T \nabla_T (\kappa N) \\
&= -\nabla_T (\kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)) \\
&= -((-3\kappa'\kappa)T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B) \\
&= -(-\kappa^2 - \tau^2)(\kappa N) \\
\Longrightarrow \quad \Delta H &= \lambda H,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que κ et τ sont des constantes.

Et, pour $\kappa \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\lambda(-\kappa N) &= (-3\kappa'\kappa)T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B \\
&= (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N \\
\Longrightarrow \quad \langle \lambda(-\kappa)N, N\rangle &= \langle \kappa(-\kappa^2 - \tau^2)N, N\rangle \\
\Longrightarrow \quad \lambda &= \kappa^2 + \tau^2,
\end{aligned}$$

$$-3k'kT + (k'' - k^3 - k\tau^2)N + (2k'\tau + k\tau')B = -\lambda k N. \tag{3.25}$$

Il en résulte que κ et τ sont des constantes et la fonction λ devient aussi constante tel que

$$\lambda = \kappa^2 + \tau^2 \tag{3.26}$$

.

Théorème 3.15 *Une courbe θ-oblique γ dans $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ admet un champ de vecteurs de courbure moyenne propre si et seulement si γ est une hélice (i.e.$\frac{\tau}{\kappa}$ est une constante) donc*

$$\lambda(:= \lambda_\theta) = \delta^2 + \frac{l^2}{4} + l|\delta|\cos\theta. \tag{3.27}$$

En particulier, une hélice de Legendre satisfait

$$\lambda(:= \lambda_{Legendre}) = \delta^2 + \frac{l^2}{4} > 0 \tag{3.28}$$

Preuve. On calcule λ de Eq.(3.26) en tenant compte que

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{F\sin^2\theta}\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F} - Fl\gamma_3'\sin^2\theta + \frac{(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_1\gamma_2')(4m - l^2)\sin^2\theta}{2} \\
\kappa &= |\delta\sin\theta|, \ \tau = \left|\frac{l}{2} + |\delta|\cos\theta\right|
\end{aligned}$$

■

On introduit la fonction d'angle $\beta = \beta(s)$ donnée par :

$$\gamma_1' = F|\sin\theta|\cos\beta, \ \gamma_2' = F|\sin\theta|\sin\beta. \tag{3.29}$$

Alors on obtient

$$\delta = \beta' + 2m\sin\theta(\gamma_2\cos\beta - \gamma_1\sin\beta) - l\cos\theta. \tag{3.30}$$

En utilisant cette expression on peut caractériser les hélices θ-obliques dans une variété de Bianchi-Cartan-Vranceanu, à savoir k et τ sont constantes si et seulement si δ est constante. La condition $\delta' = 0$ se traduit en

$$\beta'' = 2m\left(\gamma_2'\cos\beta - \gamma_1'\sin\beta - \gamma_2\beta'\sin\beta - \gamma_1\beta'\cos\beta\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta''}{\beta'} &= -2m\left|\sin\theta\right|\left(F\left|\sin\theta\right|\left(\sin\beta\cos\beta - \sin\beta\cos\beta\right) - \gamma_2\sin\beta - \gamma_1\cos\beta\right) \\
&= 2m\left|\sin\theta\right|\left(\gamma_1\cos\beta + \gamma_2\sin\beta\right)
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} F' &= 2m(\gamma_1'\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2') \\ &= 2mF|\sin\theta|(\gamma_1\cos\beta + \gamma_2\sin\beta) \\ \frac{F'}{F} &= 2m\left|\sin\theta\right|(\gamma_1\cos\beta + \gamma_2\sin\beta) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\beta''}{\beta'} = \frac{F'}{F}$$

et alors $a\beta'(s) = F(\gamma(s))$ avec a un nombre positif. Par intégration de Eq.(3.29)

Théorème 3.16 *Une hélice θ-oblique dans $(M^3_{bcv}, g_{l,m})$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \gamma_a(s) &= (a|\sin\theta|\sin\beta(s) + c_1, -a|\sin\theta|\cos\beta(s) + c_2, s\cos\theta \\ &\quad + \frac{l\sin\theta}{2}[as\sin\theta + c_1\int_0^s \sin\beta(t)dt - c_2\int_0^s \cos\beta(t)dt]). \end{aligned} \tag{3.31}$$

avec c_1, c_2 sont des constantes réelles ; ici $\beta = \beta(s)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$a\beta' = 1 + m\left[(a\sin\theta\sin\beta + c_1)^2 + (-a\sin\theta\cos\beta + c_2)^2\right]. \tag{3.32}$$

qui détermine également le possible F où Eq.(3.31) est vérifiée. Pour : $c_1 = c_2 = 0$ on obtient

$$\gamma_a(s) = \begin{pmatrix} a|\sin\theta|\sin\left(\left(\frac{1}{a} + ma\sin^2\theta\right)s\right) \\ -a|\sin\theta|\cos\left(\left(\frac{1}{a} + ma\sin^2\theta\right)s\right) \\ \left(\cos\theta + \frac{la\sin^2\theta}{2}\right)s \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa &= \left|\left(\frac{1}{a} - ma\sin^2\theta - l\cos\theta\right)\sin\theta\right|, \\ \tau &= \left|\frac{l}{2} + \left|\frac{1}{a} - ma\sin^2\theta - l\cos\theta\right|\cos\theta\right|. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Les hélices de Legendre sont

$$\gamma_a(s) = \left(a\sin\left(\frac{1}{a} + ma\right)s\right), -a\cos\left(\left(\frac{1}{a} + ma\right)s, \frac{la}{2}s\right). \tag{3.35}$$

avec

$$\kappa = \left|\frac{1}{a} - ma\right|, \ \tau = \frac{|l|}{2}, \ \lambda_{Legendre} = \left(\frac{1}{a} - ma\right)^2 + \frac{l^2}{4}. \tag{3.36}$$

3.4 Exemples

3.4.1 Géométrie Euclidienne $(\mathbb{E}^3, g_{euc})$

Pour les valeurs de $l = m = 0$, La variété $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ coïncide avec $(\mathbb{E}^3, g_{euc})$. En utilisant les équations Eq.(3.15) et Eq. (3.16), la forme explicite des courbes obliques est

$$\gamma_u(s) = \left(|\sin\theta| \int_0^s \zeta(t)dt, s\cos\theta\right) \tag{3.37}$$

de courbure et de torsion

$$\kappa(s) = |u'(s)||\sin\theta| = \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{|\sin\theta|}, \tag{3.38}$$

$$\tau(s) = |u'(s)|\cos\theta. \tag{3.39}$$

L'invariant de Lancret est

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau}{\kappa}.$$

Les courbes de Legendre sont

$$\gamma_u^L(s) = \left(\int_0^s \zeta(t)dt, 0\right) \tag{3.40}$$

avec

$$\kappa(s) = |u'(s)| = \gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1'', \tag{3.41}$$

$$\tau(s) = 0. \tag{3.42}$$

Il est bien connu que la courbure d'une courbe plane à vitesse unitaire est $\kappa(s) = \gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''$.

Nous obtenons que γ_u de (3.37) est une hélice si et seulement si u' est constante, qu'on la note p. Alors γ_u est exactement γ_p donnée par Eq.(3.19) avec $l = 0$ donc

$$\lambda_\theta = \lambda_{Legendre} = \lambda_u = (u')^2 = p^2$$

.Une autre expression équivalente est donnée par

$$\gamma_u(s) = \left(a|\sin\theta|\sin\frac{s}{a}, -a|\sin\theta|\cos\frac{s}{a}, s\cos\theta\right) \tag{4.1 helices}$$

avec

$$\kappa = \frac{|\sin\theta|}{a} \; et \; \tau = \frac{|\cos\theta|}{a}.$$

3.4.2 Groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_3$

Le cas où $m = 0, l = -2$, La variété $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ est le groupe d'Heisenberg. En utilisant les équations Eq.(3.15) et Eq. (3.16), la forme explicite des courbes obliques est

$$\gamma_u(s) = \left(|\sin\theta|\int_0^s \zeta(t)dt, s\cos\theta + \sin^2\theta\left[\int_0^s\left(\cos u(t)\int_0^t \sin u(x)dx - \sin u(t)\int_0^t \cos u(x)dx\right)dt\right]\right)$$

de courbure et de torsion

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= (|u'(s) + 2\cos\theta||\sin\theta|, \\ \tau(s) &= |-1 + |u'(s) + 2\cos\theta|\cos\theta|, \end{aligned} \tag{3.43}$$

L'invariant de Lancret

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau \pm 1}{\kappa}.$$

Eq.(3.17) et Eq.(3.18) deviennent

$$\gamma_u(s) = \left(\int_0^s \zeta(t)dt, s\cos\theta + \int_0^s\left(\cos u(t)\int_0^t \sin u(x)dx - \sin u(t)\int_0^t \cos u(x)dx\right)dt\right). \tag{3.44}$$

avec

$$\kappa(s) = |u'(s)|, \tau(s) = 1. \tag{3.45}$$

Eq.(3.27) et Eq.(3.28) se lisent

$$\lambda_\theta = \delta^2 + 1 - 2|\delta|\cos\theta, \lambda_{Legendre} = \delta^2 + 1. \tag{3.46}$$

d'où, d'aprés Eq.(3.30), $\delta(s) = u'(s) + 2\cos\theta$.

Les hélices θ-oblique Eq.(3.33) sont

$$\gamma_a(s) = \left(a|\sin\theta|\sin\frac{s}{a}, -a|\sin\theta|\cos\frac{s}{a}, (\cos\theta - a\sin^2\theta)s\right). \tag{4.9 helices}$$

avec

$$\kappa = \left|\left(\frac{1}{a} + 2\cos\theta\right)\sin\theta\right|,\ \tau = \left|\frac{l}{2} + \left|\left(\frac{1}{a} + 2\cos\theta\right)\right||\cos\theta|\right|.$$

tandis que les hélices de Legendre sont

$$\gamma_a(s) = \left(a\sin\frac{s}{a}, -a\cos\frac{s}{a}, -as\right). \tag{4.11 helices}$$

avec

$$\kappa = \left|\frac{1}{a}\right|,\ \tau = 1.$$

3.4.3 Sphère $\mathbb{S}^3(m) \subset \mathbb{R}^3$

Pour $4m = l^2$, La variété $(\mathbb{M}^3_{bcv}, g_{l,m})$ coïncide avec $\mathbb{S}^3(m)$, en particulier si $m = 1, l = -2$ on a $\mathbb{S}^3$. En utilisant les équations Eq.(3.10) et Eq.(3.11) la courbure et la torsion pour une courbe oblique dans $\mathbb{S}^3$ sont donnée par

$$\kappa(s) = \frac{1}{|\sin\theta|(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)}\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{1+\gamma_1^2+\gamma_2^2} + 2(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)\gamma_3'\sin^2\theta\right|, \tag{3.47}$$

$$\tau(s) = \left|\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{\sin^2\theta(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)^2} + 2\gamma_3'\right|\cos\theta - 1\right| \tag{3.48}$$

tandis que Eq.(3.12) donne l'invariant de Lancret

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau \pm 1}{\kappa} \tag{3.49}$$

La courbure et la torsion pour une courbe de Legendre dans $\mathbb{S}^3$

$$\kappa(s) = \frac{1}{(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)}\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{1+\gamma_1^2+\gamma_2^2} + 2(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)\gamma_3'\right|, \tau(s) = 1. \tag{3.50}$$

Cas : 4.4.Si $m > 0$ et $l = 0$ alors on a : $M^3_{bcv} = \mathbb{S}^2(4m) \times \mathbb{R}$

Cas : 4.5.Si $m < 0$ et $l = 0$ alors on a : $M^3_{bcv} = \mathbb{H}^2(4m) \times \mathbb{R}$ où $\mathbb{H}^2(4m)$ est le plan hyperbolique de courbure Gaussienne constante $\kappa < 0$.Pour les deux cas 4.4 et 4.5 une courbe oblique a :

$$\kappa(s) = \frac{1}{F|\sin\theta|}\left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F} + 2F\gamma_3'\sin^2\theta\right|, \tag{3.51}$$

$$\tau(s) = \left|\frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{F^2\sin^2\theta} + 2\gamma_3'\right||\cos\theta|. \tag{3.52}$$

ce qui signifie que les courbes de Legendre dans ces variétés ont une torsion nulle.

4.6.Si $m > 0$ et $l \neq 0$ on obtient : $SU(2)\backslash\{\infty\}$.La courbe de Legendre de cette variétés a une torsion constante non nulle.

4.7.Si $m < 0$ et $l \neq 0$ on a : $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$. Dans la suite,revenons au cas général que nous utilisons le long de γ les coordonnées cylindriques $x(s) = r(s)\cos\beta(s), y(s) = r(s)\sin\beta(s), z(s) = z(s)$ et Eq.(3.5) devient

$$(r')^2 + r^2(\beta')^2 = [1 + mr^2]^2\sin^2\theta \tag{3.53}$$

ce qui donne

$$(\beta')^2 = \frac{[1 + mr^2]^2\sin^2\theta - (r')^2}{r^2} \tag{3.54}$$

Maintenant, nous faisons le choix d'une constante réelle positive $r = r_0$ alors

$$\beta(s) = \pm\frac{(1 + mr_0^2)\sin\theta}{r_0}s. \tag{3.55}$$

Finalement on obtient l'expression de la courbe pour le signe positif dans Eq.(3.55)

$$\gamma_{r_0} = \left(r_0\cos\left(\frac{(1 + mr_0^2)\sin\theta}{r_0}s\right), r_0\sin\left(\frac{(1 + mr_0^2)\sin\theta}{r_0}s\right), \left(\cos\theta + \frac{lr_0}{2}\right)s\right). \tag{3.56}$$

Cette courbe est une hélice avec

$$\begin{aligned} \kappa &= \left|\frac{(1 + mr_0^2)\sin^2\theta}{r_0} - l\sin\theta\cos\theta\right|, \\ \tau &= \left|\frac{l}{2} + \left|\frac{(1 + mr_0^2)\sin\theta}{r_0} - l\cos\theta\right|\cos\theta\right|. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Pour les exemples 4.4 et 4.5, cela donne des hélices avec

$$\kappa = \frac{(1 + m r_0^2)\sin^2\theta}{r_0}, \tau = \frac{(1 + m r_0^2)\sin\theta\cos\theta}{r_0}. \tag{3.58}$$

Nous pouvons utiliser la relation Eq.(3.58_1) pour obtenir des courbes obliques avec une courbure comme dans le cas 4.5.

Conclusion

Les courbes obliques dans la géométrie de Bianchi-Cartan-Vranceanu sont une généralisation des hélices caractérisées par l'invariant de Lancret $Lancret_{\pm}(\gamma) = \frac{2\tau \pm l}{2\kappa}$, d'aprés l'étude qu'on a fait ci-dessus à chaque fois qu'on donne au deux réels m et l une valeur fixée, ces courbes coïncident sous certaines conditions avec des hélices lorsqu'elle ont un champ de vecteurs de courbure moyenne propre.

Perspective

Notre travail mérite d'être un point de départ pour des études plus compliquées, il est intéressant de pousuivre l'étude des courbes oblique et de Legendre dans d'autres variétés riemannienne de dimension 3 afin de comparer les résultats obtenus avec ce qu'on a trouvé dans cette étude.

Bibliographie

[1] M. Barros, General helices and a theorem of Lancret. Proceedings of the American mathematical society, 125(5) : 1997, 1503-1509.

[2] C. Călin, M. Crasmareanu et Iaşi, Slant and Legendre curves in Bianchi-Cartan-Vranceanu geometry Czechostvak Mathematical Journal, 64(4) : 2014, 945-960.

[3] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés. Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017.