

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique Computationnelle

Par

CHADLI Hayat

Sur le thème

Résolution numérique de l'équation de chaleur à une dimension

Soutenu le : 17/07/2019 devant le jury composé de :

Mr. LASRI Boumediene	Pr.	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Président
Mr. SAHABI Toufik	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Encadreur
Mr. DJAAFRI Abd El Kader	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur
Mr. DOUMI Bendouma	MCA	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur

Année Universitaire 2018 - 2019

Table des matières

Liste des figures	03
Remerciement	04
INTRODUCTION GENERALE	05
Références.....	08
1 RAPPEL SUR LA THERMODYNAMIQUE	09
1.1 Introduction	10
1.2 Notions de base	10
1.2.1 La Température	10
1.2.2 La chaleur	10
1.2.3 Transfert de chaleur	12
1.2.4 Modes de transfert de chaleur.....	12
(a) Conduction	12
(b) Rayonnement.....	13
(c) Convection	14
1.3 Premier principe de la thermodynamique : Équivalence énergie chaleur	15
1.3.1 Énoncé du premier principe de la thermodynamique	15
1.3.2 Expression mathématique du premier principe de la thermodynamique	15
1.3.3 Application du premier principe de la thermodynamique	15
a) Transformation cyclique	15
b) Transformation adiabatique	16
c) Transformation à volume constant	16
d) Transformation à pression constante: l'Enthalpie, Fonction d'état	16
1.4 Capacité Calorifique molaire d'une substance	18
1.5 Chaleur spécifique	19
1.6 Thermométrie	19
1.6.1 Les thermomètres à dilatation	19
1.6.2 Les thermomètres électroniques	20
1.6.3 Les thermomètres à rayonnement	20
Références.....	22
2 Équations différentielles.....	23
2.1 Introduction	24
2.2 Les types des équations différentielles	24
2.2.1 Équations différentielles partielles	24
2.2.2 Équations différentielles ordinaire	24
2.3 Exemples des équations différentielles au 1 ^{ier} ordre	24
2.3.1 Equation à coefficients constants.....	25
2.3.2 Equation linéaire	25
2.3.3 Equation de Bernoulli.....	25
2.3.4 Equation de Clairaut.....	26
2.3.5 Equation de Riccati	26
2.4 Exemples des équations différentielles au 2 ^{iem} ordre	27
2.4.1 Equations différentielles a coefficients constants	27

2.4.2	Equation de Bessel.....	27
2.4.3	Equation différentielle erreur	27
2.4.4	Equation différentielle d'Hermite.....	28
2.5	Application d'équations différentielles.....	28
2.5.1	Mécanique	28
2.5.2	Dynamique des Populations	29
2.5.3	Électricité	30
2.5.4	Météorologie.....	31
2.5.5	Cinétique chimique	31
2.6	Discussion sur les méthodes de résolutions numériques d'une équation différentielle	31
2.6.1	Discrétisation spatiale.....	32
2.6.2	Discrétisation temporelle	32
	Références.....	33
3	RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE CHALEUR UNIDIMENSIONNELLE	34
3.1	Introduction.....	35
3.2	Analyse de Fourier	35
3.2.1	Loi de Fourier	35
3.2.2	Séries de Fourier	35
3.3	Etablissement de L'équation de la chaleur	37
3.4	Conditions initiales et aux limites	39
3.5	L'équation de chaleur à une dimension	39
3.5.1	Méthode de résolution analytique.....	40
3.5.2	Méthode de résolution numérique	40
3.6	Méthode de calcul.....	43
3.6.1	Introduction en Maple	43
3.6.2	Procédure de calcul	43
3.6.3	Discrétisation	43
	Références.....	47
5	Conclusion générale	48
6	Résumé	49

Liste des Figures

Figure (1.1) Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique	11
Figure (1.2) Les trois mécanismes de transfert de la chaleur : Conduction : transfert dans la masse, rayonnement : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée, et convection : transfert par transport. A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur	12
Figure (1.3) Le thermomètre a dilatation	20
Figure (1.4) Le thermomètre électronique	20
Figure (1.5) Le thermomètre rayonnement	21

REMERCIEMENT

Je remercie DIEU le tout puissant et miséricordieux pour la volonté, la santé et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

*Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon mentor **SAÏBI Toufik** pour avoir suivi l'évolution de ce travail tout au long de l'année.*

Pour tous les efforts consentis à mon endroit.

*Je suis très reconnaissant envers les membres du jury **Mr. LASRI Boumediene Président et Mr. DJAAFRI Abd El Kader et Mme. DOUMI Ben douma Examineur**, pour le temps qu'ils m'ont consacré en examinant ce travail et le grand honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer autant que jury.*

Toute œuvre qui résulte d'un effort humain est explicitement ou implicitement toujours le fruit d'une vaste collaboration. Ainsi, que tous ceux qui de près ou de loin ont pris une part active dans la réalisation de ce mémoire puissent trouver dans ces lignes l'expression de notre profonde gratitude Cette œuvre réalisée avec beaucoup d'enthousiasme est dédiée à ma famille. Mes parents qui depuis mon cursus primaire, secondaire et universitaire m'ont apporté leur soutien spirituel, moral et financier ; recevez chers parents ce document comme mon entière reconnaissance pour tous les efforts consentis à mon endroit.

Je souhaite également exprimer mes remerciements à toute ma famille et à mes amis qui m'ont toujours encouragée.

Enfin je suis très heureuse de remercier tous ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail ainsi que tous mes amis et collègues du département

Introduction Générale

Jusqu'au début du vingtième siècle, le transfert de la chaleur n'était pas connu comme branche de la physique, telle la mécanique, l'électricité etc. Il faisait uniquement l'objet d'études ponctuelles quand la nécessité faisait sentir. Ce n'est qu'en 1921 que le premier ouvrage fut imprimé dans ce domaine. Depuis, les lois du transfert de la chaleur ont pris la forme d'une doctrine très générale, valable à tous les champs d'application des sciences ou ingénieurs, physiciens, chimistes, biologistes en manifestent le besoin de leurs connaissances. On distingue trois modes différents du transfert de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. En pratique ces trois modes sont souvent combinés et constituent les trois fondamentales du transfert de chaleur .

Le développement rapide des techniques ces dernières décennies fait que le problème du transfert de la chaleur continue d'occuper une place d'actualité dans les domaines des investigations et de la recherche. Il n'est pas à ignorer qu'avec le développement sont apparus de nouveaux paramètres, autres que les caractéristiques thermo-physiques des corps considérés.

On ne peut parler de transfert de chaleur sans évoquer sa principale constituante qu'est l'équation de la chaleur. Celle-ci ramène le problème à l'étude de la distribution du champ de la température et de ce fait permet de porter un jugement sur celui-ci, car en définitive on peut apprécier ou estimer n'importe quel transfert d'énergie à travers une distribution de champ de température .

La grande variété des situations, des positions et des problèmes et des hypothèses fait que l'équation de la chaleur devienne un domaine de recherche très vaste. Elle a fait l'objet de plusieurs travaux et restera dans le futur un champ très approprié pour les spécialistes en la matière, sachant que la technologie moderne exige une connaissance précise des phénomènes physiques. [1].

L'équation de la chaleur est soumise aux principes thermodynamiques et est elle-même une branche de la physique qui s'est développée au cours du XVIIIème Siècle, elle avait alors comme objet principal l'étude des échanges de chaleurs et d'énergies. C'est son essor qui fût à l'origine de la révolution industrielle grâce, notamment, au développement de moteurs à vapeur qui permirent la mise au point de nouveaux moyens de transport et de machines industrielles. Par la suite la thermodynamique englobât aussi l'étude des conditions d'équilibres des systèmes physiques et chimiques en fonction des grandeurs qui les caractérisent (température, pression, quantité de matière, activité chimique etc.).

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en fin de 19^{iem} siècle. Il modélisa l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a ainsi obtenu une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques [2].

La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. Les transferts d'énergies sont déterminés à partir de l'évolution de la température dans le temps et dans l'espace. Pour déterminer l'évolution de cette température, il faut résoudre les équations de conduction de chaleur correspondant en connaissant les conditions initiales et les conditions aux limites. [2].

La résolution de ces équations sont faites par plusieurs méthodes de résolution analytique et parmi ces méthodes, il est utilisé la méthode des séries de Fourier, transformées de Fourier, et les transformées de Laplace. L'objet de notre étude est de résoudre les équations de conduction de chaleur en régime variable en une seule dimension dans une tige par la méthode numérique de différences finies. Pour cela, nous avons résumé notre mémoire de la manière suivante: Nous allons d'abord donner une introduction complète à notre recherche, suivie du premier chapitre, qui comprend les concepts et les principes de la thermodynamique. Le deuxième chapitre va traiter le sujet des équations différentielles et leurs intérêts, tandis que le troisième chapitre est consacré au détail de notre algorithme pour résoudre l'équation différentielle de chaleur à une dimension par la méthode de différences finies.

Références

- [1] TAOULI MOUNA et KHAMEZ FATIMA ZAHRA, *Équation de la chaleur de dimension un*, mémoire pour l'obtention du grade de licence en mathématiques, UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN, Année Universitaire 2012-2013
- [2].BENHAMMA SALIMA, *Equation de la Chaleur en Coordonnées Cartésiennes et en Axisymétrie 3D*, Mémoire du diplôme de Master en Mathématiques UNIVERSITE DE BEJAIA, Année 2015/2016

Chapitre 1
RAPPEL SUR LA THERMODYNAMIQUE

1.1 Introduction

La thermodynamique est la branche de la physique consacrée à la chaleur et aux notions connexes. La partie de la thermodynamique qui s'applique particulièrement aux réacteurs nucléaires traite des principes gouvernant le transfert de la chaleur d'une forme à un autre. Le transfert de chaleur dans un générateur de vapeur ou encore la transformation de chaleur en travail dans une turbine en sont deux exemples.

Il faut d'abord définir clairement un système thermodynamique. Par exemple, un système peut être aussi simple qu'une pompe à vélo ou aussi compliqué qu'un réacteur. Des variables comme le volume, la température, la pression, l'énergie interne, l'enthalpie et l'entropie permettent de définir l'état d'un système. A mesure que vous progresserez dans ce module, vous comprendrez comment les changements de ces variables modifient les systèmes thermodynamiques.

Dans ce chapitre, on va présenter brièvement les concepts de base de la thermodynamique en commençant par la température, puis la chaleur et ces modes de transferts

1.2 Notions de base

1.2.1 La Température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique voir figure 1.1 [1]. La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules. L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu.

1.2.2 La chaleur

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. L'équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité: le joule. A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de

température. Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée. Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps.

La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique. Ce second principe met en évidence la notion d'irréversibilité : La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail [2].

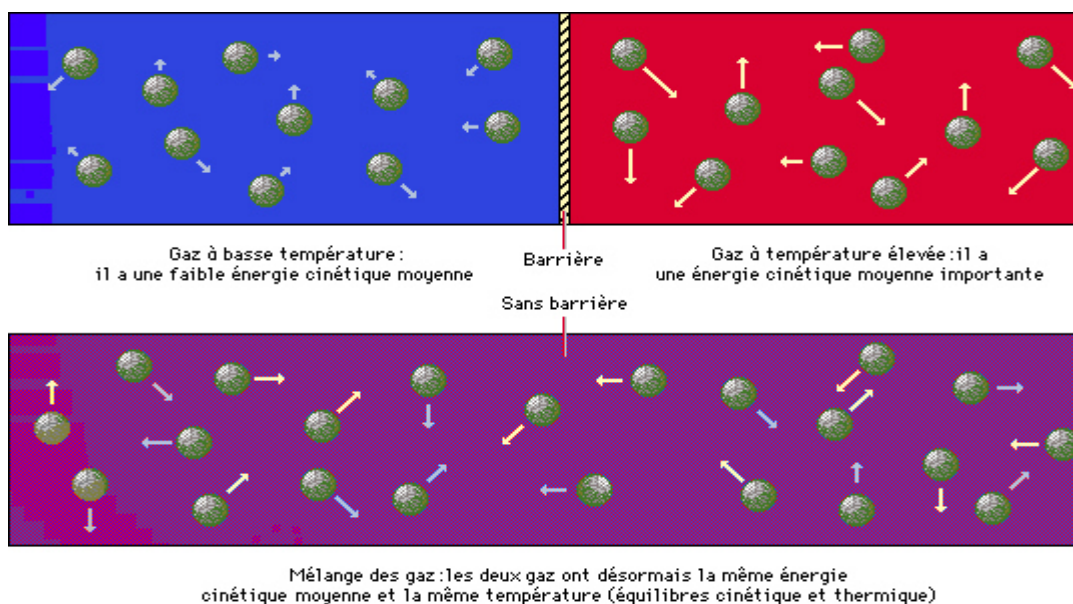


Figure 1.1 Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur [1]

$$\varphi = \frac{1}{S} * \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.1)$$

où S est l'aire de la surface, Q la quantité de chaleur, et t le temps.

1.2.3 Transfert de chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. Un transfert thermique, appelé plus communément chaleur, est un transfert d'énergie microscopique désordonnée. Cela correspond en réalité à un transfert d'agitation thermique entre particules, au gré des chocs aléatoires qui se produisent à l'échelle microscopique [2,3].

1.2.4 Modes de transfert de chaleur

On distingue trois mécanismes d'échange de chaleur entre milieux matériels voir figure 1.2

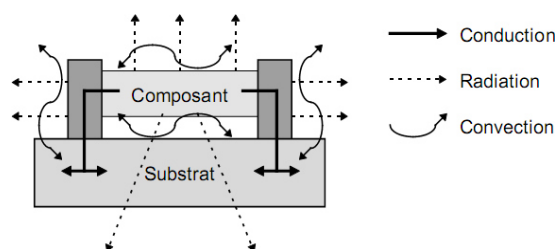


Figure 1.2 Les trois mécanismes de transfert de la chaleur : Conduction : transfert dans la masse, rayonnement : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée, et convection : transfert par transport. A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur

(a) Conduction

La conduction est une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu matériel, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre. Au plan corpusculaire, l'interprétation est la suivante: Une zone chaude est occupée par des particules à vitesse élevée, par définition même de la température. Le mouvement brownien (aléatoires) fait constamment passer des particules d'une zone à l'autre ; mais entre zones à températures inégales, les particules ont des énergies cinétiques différentes ; le brassage a pour effet de transférer de l'énergie cinétique d'agitation, des zones chaudes vers celles qui le sont moins. La manifestation macroscopique en est un transfert de chaleur. C'est

donc un mécanisme de chocs qui intervient. [4].

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc. [5].

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

(b) Rayonnement

Le rayonnement est une transmission d'énergie à distance, entre deux corps séparés ou non par un milieu matériel (transformation d'énergie thermique d'un émetteur en énergie électromagnétique, propagation, transformation partielle en énergie thermique sur un corps récepteur). C'est le cas de l'énergie qui nous vient du soleil. L'interprétation physique est la suivante: Tout corps émet des particules désignées par "photons"; ceux-ci se déplacent à la vitesse de la lumière et transportent une énergie fonction de leur "longueur d'onde"]. Un corps C émettant des photons dans toutes les directions possibles, certains d'entre eux sont reçus par l'autre corps C', éventuellement absorbés, en tout ou partie. Bien entendu, le corps C' émet aussi des photons dont certains seront reçus et absorbés par C. Le bilan net se traduit par un échange d'énergie entre C et C'. Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent [5]

- Le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.),
- La cuisson (teintures, apprêts, enductions...),
- Le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...),
- Les polymérisations (encres, revêtements, emballages...),
- La stérilisation (flacons pharmaceutiques, produits alimentaires divers...).

Le rayonnement ultraviolet est constitué des photons dont l'énergie est de l'ordre de

grandeur de l'énergie des liaisons atomiques. Ceux-ci agissent sur la matière par déplacement des électrons vers des niveaux énergétiques supérieurs. Lorsque la matière soumise au rayonnement y est sensible, il s'y produit des réactions chimiques. La partie du rayonnement ultraviolet absorbée par la matière et qui n'est pas utilisée à la réaction chimique est transformée en chaleur. Dans la pratique, cet échauffement reste faible et le rayonnement ultraviolet est principalement utilisé dans le domaine des réticulations de films plastiques et des polymérisations de produits organiques comme les encres d'imprimerie, les laques, et vernis, opérations qui sont souvent appelées improprement séchages [4].

(c) Convection

La convection est le phénomène observé entre un fluide en mouvement et une paroi, phénomène principal dans la plupart des échangeurs de chaleur. La cause profonde est encore une agitation des particules fluides, mais à une échelle beaucoup moins microscopique. Les parcelles de matière au contact de la paroi (chaude par exemple) s'échauffent par conduction ; le mouvement du fluide reporte ces parcelles dans la masse où elles cèdent par mélange une partie de la chaleur reçue; d'autres les remplacent à la paroi et ainsi de suite.

Quant au mouvement du fluide, il peut avoir deux causes. Ou bien il est imposé de l'extérieur par une machine (pompe, ventilateur, compresseur); c'est la convection forcée, ou bien le contact du fluide avec la paroi plus chaude ou plus froide crée des différences de masse volumique, génératrices de mouvement au sein du fluide; c'est la convection naturelle. Rigoureusement, même en convection forcée, les différences de densité créent un écoulement parasite, en général insignifiant par rapport à l'écoulement principal. On parle de convection mixte quand les deux phénomènes ont de l'importance [4].

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur. La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud. Dans ce qui suit nous considérerons la conduction plus significative que la convection.

1.3 Premier principe de la thermodynamique : Equivalence énergie chaleur

1.3.1 Enoncé du premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique, encore appelé principe de conservation de l'énergie peut s'exprimer de plusieurs façons. Un premier énoncé est le suivant : L'énergie se conserve : Elle ne peut que se transformer. Il existe une fonction d'état extensive appelée énergie interne (U). [6]

1.3.2 Expression mathématique du premier principe de la thermodynamique

La variation de l'énergie interne d'un système au cours d'une transformation est égale à la somme du travail (W) et de la chaleur (Q) échangés avec le milieu extérieur. Pour une transformation finie, on écrit donc :

$$\Delta U_{\text{système}} = U_{EF} - U_{EI} = Q_{\text{échangée}} + W_{\text{échangé}} \quad (1.2)$$

Pour indiquer le caractère de fonction d'état de U nous écrivons, pour une variation infinitésimale :

$$dU_{\text{système}} = \delta Q_{\text{échangée}} + \delta W_{\text{échangé}} \quad (1.3)$$

dU est une différentielle totale exacte et a une signification mathématique. Par contre δQ et δW ne sont pas des différentielles totales exactes. Il s'agit uniquement de grandeurs physiques représentant respectivement les échanges élémentaires de travail et de chaleur mis en jeu lorsque varie de la quantité élémentaire. [6].

1.3.3 Application du premier principe de la thermodynamique

a) Transformation cyclique

Au cours d'une transformation cyclique, le système revient à l'état initial.

$$\begin{aligned}
\Delta U &= U_A - U_A \\
&= \Delta U_1 + \Delta U_2 \\
&= (Q_1 + W_1) + (Q_2 + W_2) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

alors

$$(Q_1 + W_1) = -(Q_2 + W_2) \tag{1.5}$$

b) Transformation adiabatique

Au cours d'une transformation adiabatique, un système ne peut pas échanger de chaleur avec le milieu extérieur ($\delta Q = 0$)

$$\begin{aligned}
dU &= \delta Q + \delta W \\
&= -P_{ext}dV
\end{aligned}
\tag{1.6}$$

c) Transformation à volume constant

D'après le premier principe, La variation d'énergie interne se réduit à la quantité de chaleur échangée

$$dU = \delta Q \tag{1.7}$$

puisque $\delta W = -P_{ext}dV = 0$ (car $V = cte$)

Dans ce cas, l'énergie thermique Q_V échangée à volume constant ne dépend que de l'état final et l'état initial du système étudié parce que sa variation est déterminée par celle d'une fonction d'état U .

d) Transformation à pression constante: l'Enthalpie, Fonction d'état

La plupart des transformations sont effectuées à pression constante et le plus souvent sous la pression atmosphérique. Le système peut alors échanger de la chaleur et du travail avec le milieu extérieur. Pour une évolution entre deux états 1 et 2

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

$$\begin{aligned}
&= Q_P - PdV \\
&= Q_P - PV_2 + PV_1
\end{aligned} \tag{1.8}$$

soit

$$\begin{aligned}
Q_P &= (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) \\
&= H_2 - H_1
\end{aligned} \tag{1.9}$$

avec

$$\begin{cases} H_2 = U_2 + PV_2 \\ H_1 = U_1 + PV_1 \end{cases} \tag{1.10}$$

La quantité de chaleur échangée sous pression constante est donc égale à la variation d'une nouvelle fonction, définie par

$$H = U + PV \tag{1.11}$$

Cette nouvelle fonction, appelée enthalpie, est une fonction d'état puisqu'elle est définie par des variables qui ne dépendent que de l'état du système (U , P et V). L'enthalpie H est une fonction extensive. Nous pouvons alors écrire pour une transformation élémentaire

$$\begin{aligned}
\delta Q_P &= dH \\
&= dU + d(PV) \\
&= dU + PdV
\end{aligned} \tag{1.12}$$

car $VdP = 0$ ($P = cte$). Et pour une transformation finie

$$\begin{aligned}
Q_P &= H_2 - H_1 \\
&= \Delta U + PdV
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Cette relation est générale et peut être appliquée aux transformations réversibles comme aux transformations irréversibles.

1.4 Capacité Calorifique molaire d'une substance

La capacité calorifique molaire d'une substance est la chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'une mole de cette substance. Elle est différente selon qu'elle est mesurée à pression constante (C_p) ou à volume constant (C_v). Pour un système idéalisé

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_p = \frac{\delta Q_p}{\delta T} = \frac{dH}{dT} \quad (1.14)$$

et

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_v = \frac{\delta Q_v}{\delta T} = \frac{dU}{dT} \quad (1.15)$$

Les capacités calorifiques molaires C_p et C_v d'un corps pur sont donc respectivement les dérivées de son enthalpie et de son énergie interne par rapport à la température. Cette définition nous permet d'écrire

$$\delta Q_p = dH = C_p dT \quad (1.16)$$

et

$$\delta Q_v = dU = C_v dT \quad (1.17)$$

La quantité de chaleur nécessaire pour faire passer la température de n moles d'un corps pur de T_1 à T_2 sera donc

$$\Delta H = Q = n \int_{T_1}^{T_2} C_p dT \quad (P = cte) \quad (1.18)$$

$$\Delta U = Q = n \int_{T_1}^{T_2} C_v dT \quad (V = cte) \quad (1.19)$$

Les capacités calorifiques sont des fonctions de la température. Elles sont données par des formules empiriques représentant au mieux les valeurs mesurées expérimentalement. Leur forme générale est une équation à quatre paramètres :

$$C = a + bT + cT^{-2} + dT^2 \quad (J.K^{-1}.mol^{-1}) \quad (1.20)$$

1.5 Chaleur spécifique

La chaleur massique (ou capacité thermique massique) d'une substance, désignée par la lettre c , est une propriété caractéristique. Elle donne la capacité précise de cette substance d'absorber ou dégager de la chaleur. Elle est déterminée par la quantité d'énergie à apporter pour élever d'un degré la température de l'unité de masse d'une substance. En d'autres mots, la capacité thermique massique est la quantité de chaleur qu'un gramme d'une substance doit absorber pour que sa température s'élève d'un degré Celsius. Il peut s'agir aussi de la quantité de chaleur qu'un gramme de cette substance doit perdre pour que sa température baisse d'un degré Celsius. [6]

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (1.22)$$

1.6 Thermométrie

La thermométrie est une branche de la physique qui a pour objet la mesure des températures. [7]

1.6.1 Les thermomètres à dilatation

Thermomètre à liquide (mercure ou alcool par exemple), à gaz ou à solide. Plage d'utilisation : -25°C à 1000°C . Le fonctionnement de celui-ci est basé sur la variation des propriétés physiques (dilatation thermique, pression, etc.) en fonction du changement de température. Le thermomètre peut être constitué d'une tige de verre munie d'un réservoir à son extrémité et contenant un liquide comme du mercure ou de l'alcool. Quand ce liquide entre en contact avec un élément plus chaud, ceci agite les particules du liquide que contient le thermomètre, ce qui le dilate et fait grimper le mercure, par exemple, le long de l'échelle, à l'intérieur du thermomètre. Lorsque le liquide rencontre un milieu plus froid, l'effet inverse se produit (cf. Fig. 1.3).



Figure 1.3 Le thermomètre à dilatation

1.6.2 Les thermomètres électroniques

Ils comportent une sonde de température (à variation de résistance ou à thermocouple) associé à un système électronique (cf. Fig. 1.4) ; ce dernier permet d'afficher directement la valeur de la température. Ce sont les plus utilisés actuellement.



Figure 1.4 Le thermomètre électronique

1.6.3 Les thermomètres à rayonnement

L'analyse de la lumière émise par un corps nous renseigne sur sa température. Actuellement, les pyromètres numériques infrarouges portables à visée laser permettent, par simple visée sur un corps (cf. Fig. 1.5), de mesurer rapidement une température allant de moins 50 °C à plus de 1 800 °C. Le thermomètre médical auriculaire analyse le

rayonnement infrarouge émis par le tympan et détermine ainsi rapidement et sans contact, la température du corps humain. Il remplace le thermomètre médical à mercure.



Figure 1.5 Le thermomètre rayonnement

Références

- [1] Pierre Cormault, «*Cours de Thermique théorique et pratique*», Edition Janvier, 1999.
- [2] Yves JANNOT, «*TRANSFERTS THERMIQUES* », Ecole des Mines Nancy 2ème année, 2012, 5,6
- [3] «*Transfert thermique* », http://fr.wikipedia.org/wiki/Transfert_thermique, Dernière modification de cette page le 26 mars 2013 à 16:25
- [4] Dominique Marchio et Paul Reboux, «*Introduction Aux Transferts Thermiques* », École des mines de Paris, ISBN : 978291176293, 2008, 6,7.
- [5] René LELEU, «*Transferts De Chaleur* » J 1 080, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales, 2,4, 10.
- [6] . Matlosz, R. L., S. Leipziger et T. P. Torda. 1972. « *Investigation of liquid drop evaporation in a high temperature and high pressure environment* ». International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, n° 4, p. 831-846. P
- [7] Amor GHARSALLI ,*Mesures et Instrumentations Mesure de la Température*, Université Virtuelle de Tunis

Chapitre 2

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

2.1 Introduction

Une équation différentielle (ED) est une équation qui comprend des dérivées de la fonction inconnue de un ou plusieurs variables. Si la fonction inconnue dépend de seulement une variable, l'équation est dite équation différentielle ordinaire (EDO). Si la fonction inconnue dépend de plus d'une variable, l'équation est dite équation aux dérivées partielles (EDP). Dans ce chapitre, on va aborder brièvement le sujet des équations différentielles, leurs types, leurs applications, et leurs méthodes de résolutions numériques.

2.2 Les types des équations différentielles

La forme générale d'une équation différentielle est

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Il existe deux types

2.2.1 Équations différentielles partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation qui implique une variable indépendante et des dérivées partielles par rapport à ces variables. [1].

2.2.2 Équations différentielles ordinaire

En mathématiques, une équation différentielle ordinaire (parfois simplement appelée équation différentielle et abrégée en EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. [2].

2.3 Exemples des équations différentielles au 1^{er} ordre

Une classe restreinte, mais importante, d'équations différentielles ont des solutions mathématiques sous la forme de fonctions transcendantes ou de fonctions spéciales en général. Nous allons donc donner un rapide aperçu de ces équations différentielles particulières qui

contiennent en autres quelques équations différentielles non-linéaires, dont l'immense majorité ne peut être résolue que numériquement.

2.3.1 Equation à coefficients constants

Les équations différentielles à coefficients constants a , et b de forme générale

$$a \frac{dy}{dx} + by(x) = c(x) \quad (2.2)$$

ont pour solution générale

$$y(x) = e^{-b/ax} \left(\int dt \frac{c(t)}{a} e^{b/at} + cste \right) \quad (2.3)$$

2.3.2 Equation linéaire

Une équation différentielle linéaire a pour forme générale

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y(x) = g(x) \quad (2.4)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions arbitraires. La solution de cette équation est

$$y(x) = e^{-\int f(u)du} \left(\int dt g(t) e^{f(u)du} + Cste \right) \quad (2.5)$$

2.3.3 Equation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli a pour forme générale [3]

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y(x) + g(x)y(x)^a = 0 \quad (2.6)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions arbitraires, et a est une constante. En introduisant le changement de fonction

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-a}} \quad (2.7)$$

l'équation (2.7) devient une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = (a - 1)(u(x)f(x) + g(x)) \quad (2.8)$$

qui s'intègre alors comme une équation différentielle linéaire.

2.3.4 Equation de Clairaut

Une équation de Clairaut est une équation introduit une fonction g . Sa forme est [3]

$$y(x) = x \frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.9)$$

Ce type admet une solution linéaire de la forme

$$y(x) = Cx + g(C) \quad (2.10)$$

où C est une constante arbitraire. On peut aussi exprimer la solution de l'équation sous forme paramétrique

$$x(s) = -\dot{g}(s) \quad (2.11)$$

$$y(s) = g(s) - s\dot{g}(s) \quad (2.12)$$

2.3.5 Equation de Riccati

La forme d'une équation de Riccati [3] est donnée par l'expression suivante

$$\frac{dy}{dx} - f(x)y(x)^2 - g(x)y(x) - h(x) = 0 \quad (2.13)$$

ou $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions arbitraires. Il n'y a pas de solutions générales pour l'équation de Riccati. Quand $h(x) = 0$, on retrouve la forme d'une équation de Bernoulli dont la solution a été donnée plus haut. La forme dite spéciale de l'équation de Riccati est définie par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dy}{dx} - ay(x)^2 - bx^c = 0 \quad (2.14)$$

Si de plus c est de la forme

$$c = \frac{-4*i}{2i-1} \quad (2.15)$$

avec i entier relatif, on peut obtenir une expression analytique de l'équation différentielle de Riccati.

2.4 Exemples des équations différentielles au 2^{iem} ordre

2.4.1 Equations différentielles a coefficients constants

Les équations différentielles à coefficients constants a , b , et c de forme générale

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy(x) = d(x) \quad (2.16)$$

ont pour solution complète

$$y(x) = \sum_{i=1}^2 e^{u_i x} \left(c_i + \left(e^{-\frac{bx}{a}} \int dt \frac{2ad(t)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} e^{-u_j t} \right) \right) \quad (2.17)$$

où les c_i sont des constantes, et les u_i sont les solutions de l'équation caractéristique

$$au^2 + bu + c = 0 \quad (2.18)$$

u_j est la seconde racine de l'équation caractéristique quand u_i est la première.

2.4.2 Equation de Bessel

Les équations différentielles de Bessel [4] sont définies par les équations suivantes

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (2.19)$$

et

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (2.20)$$

ce qui donne respectivement pour solutions les équations de Bessel J et Y pour la première et les équations de Bessel modifiées I et K pour la seconde.

2.4.3 Equation différentielle erreur

On appelle équation différentielle erreur l'équation suivante

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2ny(x) = 0 \quad (2.21)$$

où n est un entier. Pour $n = 0$, la solution est de la forme

$$y(x) = c + derf(x) \quad (2.22)$$

c et d sont des constantes arbitraires. Dans le cas où $n = 1$, la solution est de la forme

$$y(x) = cx + d(e^{-x^2} + \sqrt{\pi}erf(x)x) \quad (2.23)$$

De manière générale, la solution est une combinaison générale de fonction de Whittaker.

2.4.4 Equation différentielle d’Hermite

L’équation différentielle d’Hermite est très proche de l’équation différentielle précédente, puisque on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny(x) = 0 \quad (2.24)$$

De manière générale, la solution est aussi une combinaison générale de fonction de WhittakerM.

2.5 Application d’équations différentielles

L’usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d’un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun a plusieurs disciplines ou sous disciplines, on commence par donner quelques exemples d’équations différentielles issues de différentes disciplines [5].

2.5.1 Mécanique

La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d’équations différentielles. Dans un système d’unités adaptées, elle s’écrit

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (2.25)$$

où x désigne la position de la particule, \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et ou f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x , est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse à un instant origine : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Il est utile de remarquer que cette équation du second

ordre est équivalente à un système différentiel de 2 équations du 1er ordre. En effet, introduisons la vitesse $v \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} \quad (2.26)$$

Le plan (x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases. Dans le cas particulier où f ne dépend pas de x c'est-à-dire $f = f(v, t)$ dans le cas des mouvements dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse $\dot{v} = f(v, t)$ peut être résolue indépendamment de x . On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$. Si par contre f ne dépend que de x c'est-à-dire $f = f(x)$, l'équation obtenue, en divisant les deux équations différentielles, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v} \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (2.27)$$

On obtient donc encore une équation différentielle du 1er ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie).

2.5.2 Dynamique des Populations

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d

$$\begin{cases} \dot{N} = bN - dN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (Modèle logistique) qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.29)$$

où α et k sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = k$.

2.5.3 Electricité

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Et les différentes lois de l'électricité montrent que cet état est régi par un système d'équations différentielles. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C , le comportement de la résistance étant régi par la loi d'Ohm généralisée

$$U_R = F(I_R) \quad (2.30)$$

On a les équations différentielles

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = U_L \\ C \frac{dU_C}{dt} = I_C \end{cases} \quad (2.31)$$

Assorties des relations

$$U_C = U_L + U_R \quad (2.32)$$

$$I_R = I_L = -I_C \quad (2.33)$$

Notez qu'il y a de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ C \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (2.34)$$

Dans le cas particulier où $F(x) = x^3 - x$, ce système est connu sous le nom d'équation de Van der Pol.

2.5.4 Météorologie

Les équations qui permettent de modéliser l'évolution des différents paramètres météorologiques (température, humidité, pression, etc...) sont très complexes. Un système très simple mais qui permet de retrouver plusieurs des caractéristiques de ces équations a été proposé par Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires en dimension 3

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx + -y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.35)$$

2.5.5 Cinétique chimique

Considérons une réaction chimique sur trois espèces : $Y_3 \xrightarrow{K_3} Y_2 \xrightarrow{K_2} Y_1 \xrightarrow{K_1} Y_2$. L'évolution de la concentration $(y_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des trois espèces $(Y_i)_{1 \leq i \leq 3}$ satisfait le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ \dot{y}_2 = k_1 y_1 - k_2 y_2 + k_3 y_3 \\ \dot{y}_3 = -k_3 y_3 \end{cases} \quad (2.36)$$

Dans ce genre de problème, on observe typiquement de grandes disparités dans les coefficients k_i . Le système dynamique contient donc des échelles de temps très différentes. Il faut évidemment tenir compte de cette information pour discrétiser les équations de manière efficace. Dans l'exemple précédent, si k_3 est très grand par rapport à k_1 et k_2 , on comprend que très rapidement, la concentration de Y_3 tend vers 0. On peut donc légitimement se demander si on ne peut pas construire analytiquement un modèle plus simple, seulement sur les concentrations des espèces Y_1 et Y_2 . [6,7].

2.6 Discussion sur les méthodes de résolutions numériques d'une équation différentielle

On appellera calcul numérique tout calcul (évaluation d'un nombre, d'une fonction, d'une matrice,...) qui est effectué au moyen d'une machine et/ou de tables de valeurs numériques. On peut définir l'analyse numérique comme l'étude théorique des méthodes constructives de l'algèbre et de l'analyse mathématique. Par méthode constructive il faut comprendre une méthode qui fournit le moyen d'obtenir la solution d'un problème, ou, à tout le moins, une

approximation de celle-ci. Ainsi, un théorème qui établit l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy (cf. cours d'analyse) ne sera d'aucune utilité au numéricien s'il n'indique pas comment construire effectivement la solution du problème .

2.6.1 Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale des équations, la méthode des différences finies (cf. sous paragraphe 3.5.2) centrées d'ordre deux sur un maillage décalé a été retenue dans ce travail. Pour cette méthode, chaque grandeur (pression, composantes du vecteur vitesse,...) est définie sur un maillage décalé d'un demi pas d'espace suivant chaque direction. [8]

2.6.2 Discrétisation temporelle

Une discrétisation temporelle semi-explicite est couramment utilisée pour résoudre numériquement les équations. La discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles 2-D et 3-D peut être effectuée par la méthode d'Euler implicite. Cela permet d'éviter le traitement implicite des termes non-linéaires.

Un système dynamique est décrit par des équations gouvernantes découlant des relations d'équilibre. Ces équations gouvernantes résultent généralement en des équations aux dérivées partielles dans lesquelles certains termes peuvent varier en fonction du temps. Les méthodes dites temporelles sont des méthodes qui permettent d'analyser directement dans le temps un phénomène dynamique, à partir de ses équations gouvernantes, de ses conditions aux frontières et de ses conditions initiales. La résolution du problème se fait en fonction de la variable temporelle, pas à pas, suivant un schéma temporel donné, c'est-à-dire que l'état du système à un instant donné est évalué à partir de l'état du système déjà évalué aux instants précédents. Pour chaque pas de temps, la solution est calculée simultanément pour l'ensemble des points du domaine considéré. [8]

Références

- [1] JOHNSON, W. (1913) *A Treatise on Ordinary and partial Differential Equations*. University of Michigan Historical Math Collection: John Wiley and Sons.
- [2] B. Helffer à partir du texte établi par Thierry Ramond (Cours) Université Paris-Sud Version de Janvier-Mai 2007
- [3] Zied AMMARI, ED1 - *Équation Différentielle*, texte
- [4] Thierry Lubin, *Équations aux dérivées partielles (EDP), Méthode de résolution des EDP par séparation de variables ; Applications*, cours
- [5] Rienhard.H, *Equations différentielles, fondements et applications*. Dunod, Paris, 1982.
- [6] F. Legoll and M. Lewin. *Mathématiques des modèles multi-échelles*. Cours ENPC.
- [7] J.-N. Roux and G. Stoltz. *Physique statistique et mécanique quantique*. Cours ENPC
- [8] Mohamed Sabeur BINOUS, *Simulations d'écoulements an isothermes turbulents : application à la cavité ventilée*, these, UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA, Soutenue le 28 Octobre 2017

Chapitre 3

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE CHALEUR UNIDIMENTIONNELLE

3.1 Introduction

En général, les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique, parabolique et hyperbolique. L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique. Dans ce chapitre, on va exposer l'origine de l'équation de chaleur, ainsi ses différents types de conditions aux bords, puis, on va expliquer notre travail de calcul numérique pour résoudre l'équation de chaleur unidimensionnelle par la méthode de différences finies.

3.2 Analyse de Fourier

3.2.1 Loi de Fourier

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier [1] : En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique est proportionnelle au gradient de la température.

$$\vec{\phi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}$$

or

$$\vec{\phi} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (3.1)$$

avec $\vec{\phi}$: Densité du flux de chaleur transmis par conduction ($W m^{-2}$), λ : Conductivité thermique du milieu ($W m^{-1}K^{-1}$), T : Champ de température (K), $\vec{\phi}$: Flux de chaleur conductrice (W), et S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2). En un point quelconque M du milieu, on a, à tout instant

$$dT = \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \overrightarrow{dM} \quad (3.2)$$

Si l'on considère le déplacement élémentaire \overrightarrow{dM} sur l'isotherme passant par le point M, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \overrightarrow{dM} = dT = 0 \quad (3.3)$$

On en conclue que le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point. Il en résulte que les lignes de courant sont également normales aux surfaces isothermes. Ainsi, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant.

3.2.2 Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} et telle que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. On dit qu'une fonction f périodique de période T satisfait aux conditions de Dirichlet si :

- Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce i.e. les limites à droite et à gauche en points d'intervalle existent mais non égaux; et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.
- La fonction f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a [2]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases} \quad (3.4)$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue. Les notations $f(x+0)$, et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x . Pour la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l \quad (3.5)$$

on a

$$a_0 = \frac{2\omega}{\pi} \int_{-\frac{\omega}{\pi}}^{+\frac{\omega}{\pi}} f(x) dx = \frac{2}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) dx \quad (3.6)$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\omega}{\pi}}^{+\frac{\omega}{\pi}} f(x) \cos(nwx) d(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad (3.7)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\omega}{\pi}}^{+\frac{\omega}{\pi}} f(x) \sin(nwx) d(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad (3.8)$$

et l'intégrale de Fourier se donne par

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right] d\alpha \quad (3.9)$$

Sa forme complexe est

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha \quad (3.10)$$

3.3 Etablissement de L'équation de la chaleur

Considérons un champ de température $T(x; y; z; t)$ dans un volume Δ limité par une surface Σ d'un corps quelconque de masse volumique ρ , de chaleur massique a volume constant C_v et de conductivité thermique λ . En un point M de la surface Σ , considérons un élément de surface dS et n le vecteur unitaire de la normale en M orienté vers l'extérieur. La quantité de chaleur d^2Q_1 qui pénètre dans le volume Δ à travers dS pendant l'intervalle de temps dt , se donne par la formule [1]

$$d^2Q_1 = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt \quad (3.11)$$

La quantité de chaleur totale qui pénètre dans le volume Δ à travers la surface Σ pendant dt est alors donnée par

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} \lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt \quad (3.12)$$

Transformons cette intégrale de surface en une intégrale de volume à l'aide de l'expression

$$\iiint_{\Delta} \overrightarrow{\text{div } F} \cdot dV = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.13)$$

On obtient

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} \lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt = \iiint_{\Delta} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad } T}) \cdot dV \cdot dt \quad (3.14)$$

Où dV est un élément de volume pris à l'intérieur de Δ . Calculons maintenant la quantité de chaleur Q_2 créée dans le volume Δ . En effet dans le cas général d'un corps quelconque il peut y avoir création de chaleur dans la masse. Soit $P(x; y; z; t)$ le flux de chaleur créé par unité de volume. Q_2 est alors donnée par la formule

$$Q_2 = \iiint P(x, y, z, t) \cdot dV \cdot dt \quad (3.15)$$

Faisons maintenant le bilan énergétique pour le volume Δ , ce qui nous permet de décrire

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (3.16)$$

où Q_3 représentera la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température du volume Δ . Si $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ représente la variation de température du volume dV pendant dt , l'équation de la calorimétrie permet décrire

$$d^2 Q_3 = \rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot dV \quad (3.17)$$

et

$$Q_3 = \iiint_{\Delta} \rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot dV \quad (3.18)$$

d'où l'équation de bilan

$$\iiint_{\Delta} \text{div}(\overrightarrow{\lambda \text{grad } T}) \cdot dV \cdot dt + \iiint_{\Delta} p(x, y, z, t) \cdot dV \cdot dt = \iiint_{\Delta} \rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot dV \quad (3.19)$$

où encore

$$\text{div}(\overrightarrow{\lambda \text{grad } T}) + P(x, y, z, t) = \rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.20)$$

En développant $\text{div}(\overrightarrow{\lambda \text{grad } T})$ il vient

$$\lambda \Delta T + \overrightarrow{\text{grad } \lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} + p = \rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.21)$$

L'expression ainsi obtenue représente l'équation de la chaleur régissant les transferts par conduction en régime variable des températures avec création de chaleur dans la masse et une conductivité λ fonction des variables spatiales et éventuellement du temps. En coordonnées cartésiennes

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.22)$$

En coordonnées cylindriques (r, z, θ)

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique $T = f(r)$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} \quad (3.24)$$

Et en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (3.25)$$

3.4 Conditions initiales et aux limites

L'équation générale de la chaleur exprime une relation entre la fonction température T et les variables $x; y; z$ et t . La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, sa résolution nécessite la connaissance, d'une part de la condition initiale c'est à dire la répartition initiale des températures en tout point du milieu $T(x; y; z; 0)$, d'autre part la loi de variation en fonction du temps de la température ou de sa dérivée normale sur la surface S . Ce sont les Conditions aux limites spatio-temporelles. Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

- La température est imposée sur la surface S (problème de Dirichlet)
- La densité de flux est imposée en surface (problème de Neumann)

3.5 L'équation de chaleur à une dimension

L'équation de la chaleur en une dimension est donnée par l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \quad x \in R, t > 0 \quad (3.26)$$

où $c > 0$ est une constante donnée, T est la fonction température inconnue réelle de deux variables x et t . Nous voulons donc résoudre le problème pour une tige de longueur L mis à la distribution initiale $f(x)$, dont les extrémités sont maintenues aux températures fixes a , et b (conditions de Dirichlet) [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t), x \in R, t > 0 \\ T(x; 0) = f(x), x \in R \\ T(0, t) = a \\ T(L, t) = b \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

3.5.1 Méthode de résolution analytique

Par la méthode de séparation de variables, et pour $a = b = 0$, l'équation de la chaleur admet une solution unique donnée par

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \quad (3.28)$$

où les h_k sont les coefficients de Fourier du prolongement de h . Notons qu'on peut également construire une solution de l'équation de la chaleur en utilisant la transformée de Fourier, et la transformée de Laplace. Voir les références.

3.5.2 Méthode de résolution numérique

Dans ce sous paragraphe, on va présenter notre algorithme de calcul pour résoudre l'équation de chaleur (3.27) basé sur la méthode de différences finies. Le développement de Taylor au 1^{er} ordre

$$f(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + f(x_0) + 0(x - x_0)^2 \quad (3.29)$$

d'où, on tire

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \quad (3.30)$$

On pose $x = x_0 + d$, avec $d \ll 1$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{f(x_0 + d) - f(x_0)}{d} \quad (3.31)$$

Sur des intervalles décrets, on a

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f_i \\ f(x_0 \pm d) &= f_{i \pm 1}, \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Alors on obtient

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{d} \quad (3.33)$$

Le développement de Taylor pour 2^{ème} ordre s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2} + O(x - x_0)^3 \quad (3.34)$$

or

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} = 2 \frac{f(x) - f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x-x_0)}{(x-x_0)^2} \quad (3.35)$$

Selon les deux cas :

- $x = x_0 + d$, on trouve

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} = 2 \frac{f(x_0+d) - f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} d}{d^2} \quad (3.36)$$

- $x = x_0 - d$, on obtient

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} = 2 \frac{f(x_0-d) - f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} d}{d^2} \quad (3.37)$$

et par sommation de (3.36) et (3.37), on obtient

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{d^2} \quad (3.38)$$

Pour l'équation de chaleur (3.27), la température se discrétise également : $T(x, t) = T_{i,j}$, et on trouve l'équation discrétisée grâce aux deux relations (3.33) avec un pas temporel τ , et (3.38) avec un pas spatial d

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\tau} = c \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{d^2} \quad (3.39)$$

Si on pose

$$\alpha = \frac{c\tau}{d^2} \quad (3.40)$$

on arrive à la relation

$$T_{i,j+1} - T_{i,j} = \alpha(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}) \quad (3.41)$$

Cette relation est de caractère explicite [3] puisque les $T_{i,j+1}$ s'obtiennent directement de $T_{i,j}$. Elle n'est pas stable (les valeurs de $T_{i,j}$ ne divergent pas) que pour

$$\alpha \leq 1/2 \quad (3.42)$$

Il y en a aussi une relation dite implicite de forme

$$T_{i,j+1} - T_{i,j} = \alpha(T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1}) \quad (3.43)$$

qui est toujours stable quel que soient les valeurs de α . On s'intéresse par suite par la relation explicite en fixant $\alpha = 1/2$. Alors, on trouve

$$T_{i,j+1} = (1 - 2\alpha)T_{i,j} + \alpha(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \quad (3.44)$$

Cette relation exprime une récurrence simple au cours de temps. De côté expérimentale, On étudie la distribution de chaleur à travers une tige de longueur L mis à l'instant $t = 0$ à un choc thermique, et dont les deux extrémités maintenues aux températures constantes. Cela est traduit par les conditions initiales, et les conditions aux limites de type Dirichlet respectivement

$$T_{i,0} = C_i \quad \forall i \in [0, L] \quad (3.45)$$

et

$$T_{0,j} = C_0,$$

$$T_{L,j} = C_L, \quad \forall j \in [0, H] \quad (3.46)$$

H ici est l'intervalle temporel.

$$T_{i,0} = C_i \quad \forall i$$

Ainsi, on obtient tous les éléments de la matrice T représentant la solution discrète de notre équation (3.27)

3.6 Méthode de calcul

3.6.1 Introduction en Maple

Le Maple permet de faire des calculs mathématiques avancés. Plusieurs bibliothèques de fonctions et opérations mathématiques populaires sont déjà implémentées. Le logiciel offre un environnement de travail facile à utiliser et permet une grande rapidité de développement. Celui-ci permet à un utilisateur de faire différents calculs symboliques et numériques. On appellera calcul numérique tout calcul (évaluation d'un nombre, d'une fonction, d'une matrice,...) qui est effectué au moyen d'une machine et/ou de tables de valeurs numériques.

3.6.2 Procédure de calcul

Dans notre programme, on considère une tige de longueur $L = 20$ unités qu'on va l'étudier pendant une 200 unité de temps qu'on note H . on fixe la valeur de α à 0.5, et on génère une série aléatoire de nombres notée C entre 0 et 10^0 c qui sont nos conditions initiales. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet aux deux points 0, et L

$$T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad (3.47)$$

Ensuite, notre relation de récurrence (3.41) nous donne les solutions $T(x, t)$ (sous forme de la matrice M dans l'annexe), et on représente les résultats dans les deux graphes (1), et (2). Le premier graphe nous explique le comportement d'un point (parmi les $L+1$ points) au cours de temps (chaque point a son propre couleur). On remarque que les températures tendent exponentiellement vers la valeur nulle de façon sinusoïdale. Cela est en total concordance avec les résultats connus (équation (3.28)). Le deuxième graphe n'est qu'une autre vision de résultats. A chaque instant on trace une courbe (caractérisée par un couleur) donnant les valeurs de températures sur la barre. La dernière courbe se rapproche (ce qui est prévu) à la ligne horizontale $T = 0$.

3.6.3 Discrétisation

with(linalg), with(RandomTools[MersenneTwister]), with(LinearAlgebra), with(Statistics), with(plots, implicitplot) :

$$L := 20 \quad 20 \quad (3.48)$$

$$H := 200 \quad 200 \quad (3.49)$$

$$\text{alpha} := 0.5 \quad 0.5 \quad (3.50)$$

$$\text{Digits} := 3 \quad 3 \quad (3.51)$$

$$C := \langle \text{seq}(\text{GenerateInteger}(\text{range}=1..10), x=0..L) \rangle$$

$$\left[\begin{array}{l} 1..21 \text{ Vector}_{\text{column}} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right] \quad (3.52)$$

$$C(2) \quad 2 \quad (3.53)$$

```

for x from 1 to L - 1 do T(x, 0) := C(x + 1) end do;
for t from 0 to H do T(0, t) := 0; T(L, t) := 0 end do;
for t from 1 to H do
for x from 1 to L - 1 do
T(x, t) := alpha · (T(x + 1, t - 1) + T(x - 1, t - 1)) - (1 - 2 alpha) · T(x, t - 1);
end do
end do
Matrix(L - 1, H, T)

```

$$\left[\begin{array}{l} 19 \times 200 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right] \quad (3.54)$$

```

for x from 1 to L + 1 do for t from 1 to H - 1 do T1(x, t) := T(x - 1, t - 1) end do end do
M := Matrix(L + 1, H + 1, T1)

```

$$\left[\begin{array}{l} 21 \times 201 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right] \quad (3.55)$$

$$\text{Col} := \text{Vector}[\text{row}]([\text{color} = \text{gold}, \text{color} = \text{violet}, \text{color} = \text{blue}, \text{color} = \text{green}, \text{color} = \text{yellow}, \text{color} = \text{orange}, \text{color} = \text{red}, \text{color} = \text{brown}, \text{color} = \text{black}])$$

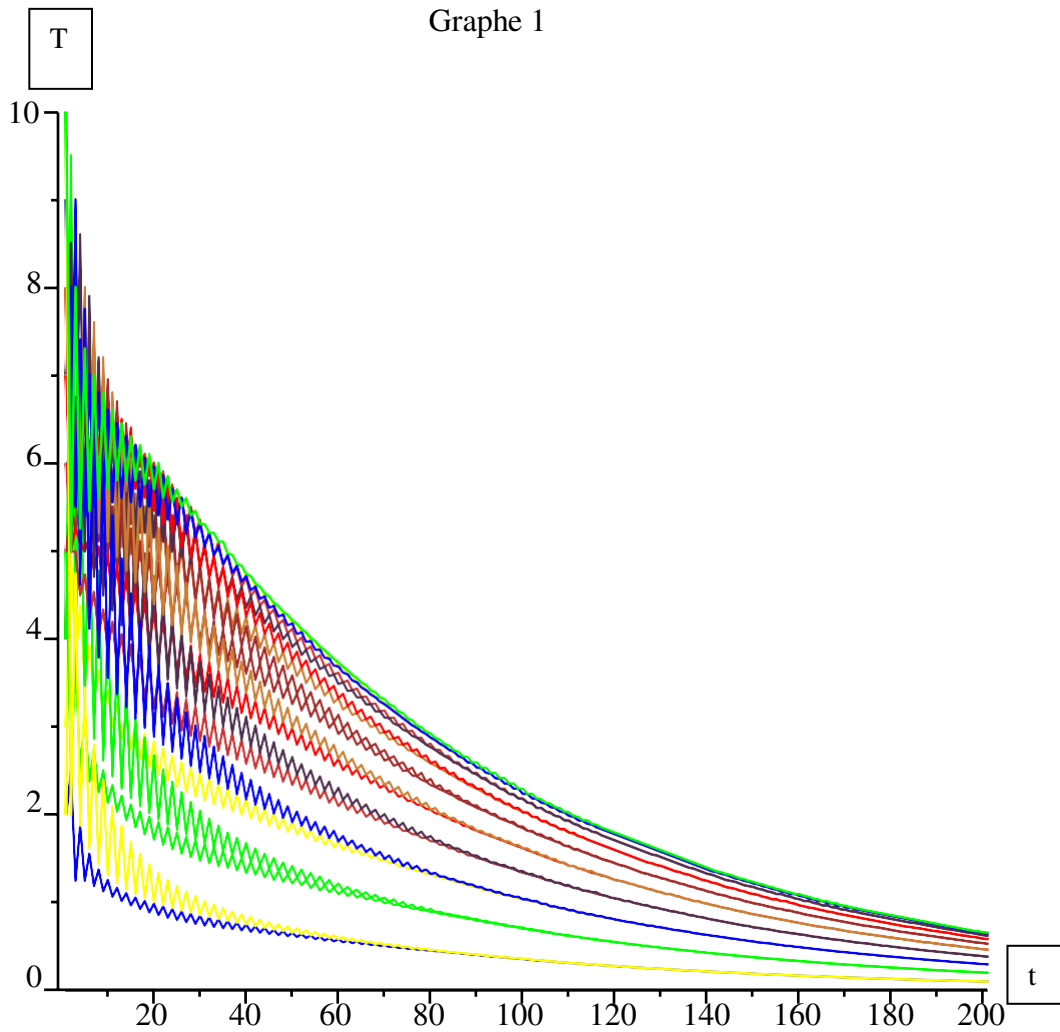
$$[\text{color} = \text{gold}, \text{color} = \text{violet}, \text{color} = \text{blue}, \text{color} = \text{green}, \text{color} = \text{yellow}, \text{color} = \text{orange}, \text{color} = \text{red}, \text{color} = \text{brown}, \text{color} = \text{black}] \quad (3.56)$$

$$\text{Col}(9 \bmod 8 + 1) \quad \text{color} = \text{violet} \quad (3.57)$$

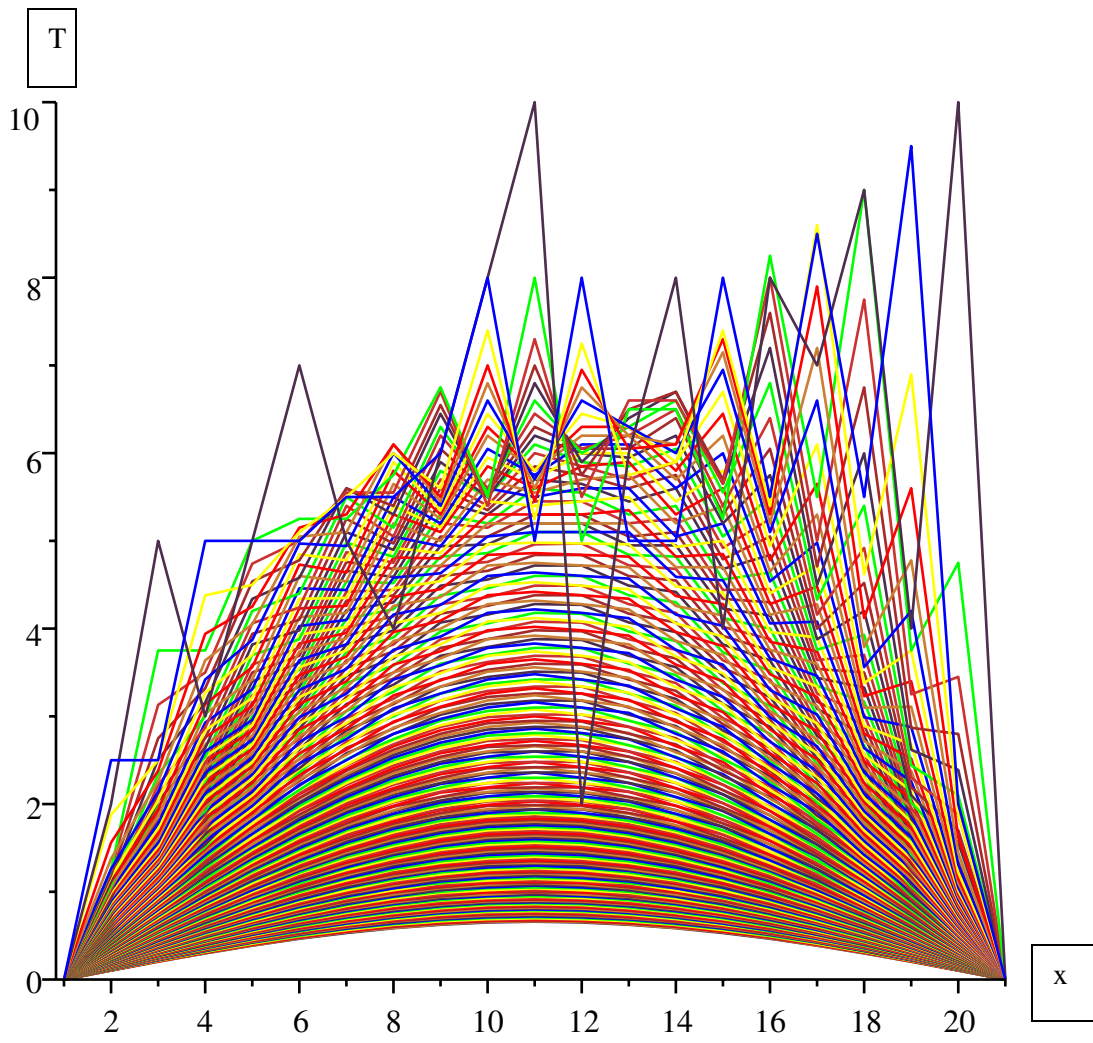
```

p1 := (x) → plot(⟨seq(t, t = 1 ..H + 1)⟩⟨seq(TI(x, t), t = 1 ..H + 1)⟩, style = line, Col(x mod 8 + 1));
p2 := (t) → plot(⟨seq(x, x = 1 ..L + 1)⟩⟨seq(TI(x, t), x = 1 ..L + 1)⟩, style = line, Col(t mod 8 + 1));
x → plot(⟨seq(t, t = 1 ..H + 1)⟩⟨seq(TI(x, t), t = 1 ..H + 1)⟩, style = line, Col(x mod 8 + 1))
t → plot(⟨seq(x, x = 1 ..L + 1)⟩⟨seq(TI(x, t), x = 1 ..L + 1)⟩, style = line, Col(t mod 8 + 1))    (3.58)
plots[display]({seq(p1(x), x = 1 ..L + 1)});
plots[display]({seq(p2(t), t = 1 ..H + 1)});

```



Graphe 2



Références

[1] TAOULI MOUNA et KHAMEZ FATIMA ZAHRA, *Équation de la chaleur de dimension un*, mémoire.

[2] BENHAMMA SALIMA, *Équation de la Chaleur en Coordonnées Cartésiennes et en Axisymétrie 3D*, mémoire.

.

Conclusion générale

Dans ce travail, on a réalisé un programme de Maple pour étudier la diffusion de chaleur au cours de temps sur une tige unidimensionnelle. On a pris des conditions aux limites nulles de type de Dirichlet, et on a obtenu des résultats de forme approché que ceux obtenus analytiquement. A titre de recherche, on peut considérer d'autres conditions aux limites non nulles et voir l'évolution de la chaleur en comparant les résultats avec les solutions analytiques.

Résumé

Le phénomène de diffusion de chaleur est un sujet de recherche très actif grâce à son importance dans la vie quotidienne. Dans ce mémoire, on a considéré un cas le plus simple de ce phénomène qui est le cas unidimensionnel temporel. On a réalisé un programme de Maple basé sur la méthode de différences finies, et on a vu que la chaleur décroît de façon exponentielle et sinusoïdale vers les températures isotherme imposés aux limites. Plusieurs propositions sont ouvertes dans ce contexte, comme par exemple l'étude de même phénomène en prenant d'autres valeurs ou types de conditions aux limites, ainsi que le passage aux dimensions plus élevées.

ملخص

ظاهرة انتشار الحرارة هي موضوع بحث نشط للغاية بسبب أهميته في الحياة اليومية. في هذه الرسالة، نظرنا في أبسط حالة لهذه الظاهرة، وهي الحالة الزمنية أحادية البعد. لقد تم تحقيق طريقة فرق محدود من MAPLE، وقد تبين أن الحرارة تنخفض بشكل كبير وحي نحو درجات الحرارة متساوية الحرارة المفروضة على الحدود. هناك العديد من المقترحات مفتوحة في هذا السياق، مثل دراسة الظاهرة نفسها التي تأخذ قيمًا أو أنواعًا أخرى من الظروف الحدودية، بالإضافة إلى الانتقال إلى أبعاد أعلى.

Abstract

The phenomenon of heat diffusion is a very active research topic because of its importance in everyday life. In this thesis, we considered a simplest case of this phenomenon, which is the one-dimensional temporal case. A finite difference method of Maple has been realized, and it has been shown that the heat decreases exponentially and sinusoid ally towards the isothermal temperatures imposed at the boundaries. Several propositions are open in this context, such as the study of the same phenomenon taking other values or types of boundary conditions, as well as the transition to higher dimensions.