



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2018/2019



Courbes obliques et de Legendre sur le produit tordu de variétés

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Meghit Khadra¹

Sous la direction de

Pr F. Hathout

Soutenue le 15/07/2019 devant le jury composé de

Dr H. M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Pr F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
Mr O. Bennehi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. e-mail : meghit.miss@gmail.com

Table des matières

Introduction	3
1 Variétés Riemanniennes	5
1.1 Variétés différentiables	5
1.2 Espace et fibré tangent	6
1.2.1 Espace tangent	6
1.2.2 Fibré tangent	8
1.2.3 Champ de vecteurs	8
1.3 Métriques Riemanniennes	9
1.4 Connexion	10
1.5 Repère de Serret-Frenet	11
2 Produit Tordu de Variétés (P.T.V)	13
2.1 Produit de Variétés	13
2.1.1 Connexion linéaire sur le produit de variétés	14
2.2 Produit Tordu de Variétés	14
2.2.1 Métrique du P.T.V	14
2.2.2 Connexion de Levi-Civita de la variété P.T	15
3 Courbes obliques et de Legendre sur P.T.V	16
3.1 Courbes obliques et de Legendre sur P.T.V	17
3.2 Classification et l'invariant de Lancet sur P.T.V	20
3.3 Courbure moyenne	24
3.4 Exemples	27
Conclusion	32

Remercients

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant "ALLAH" qui nous a réussi à achever ce travail.

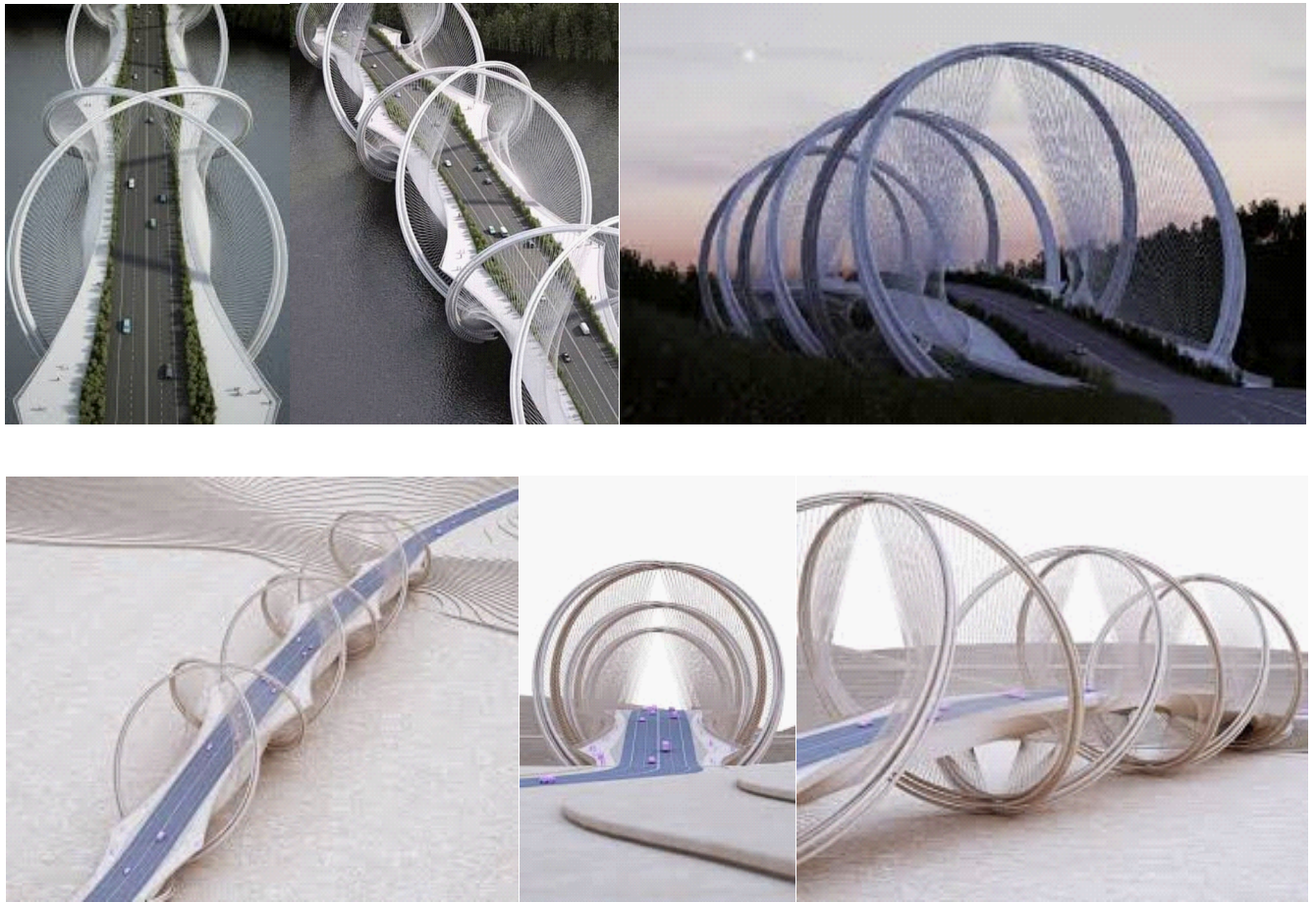
Et puis, je tiens à remercier PR. FOUZI HATHOUT, mon encadreur qui a su me laisser accomplir ce travail, tout en y gardant un œil critique et avisé, puis je remercie les membres de jury présidé par DR. H. M. DIDA et assistés de MR. B. SAADLI et MR. O. BENNEHI qui ont consenti et accepté de participer à mon jury de Mémoire. Je remercie encore les membres du Département de Mathématiques pour leur accueil, leur soutien et leur confiance.

Mes vifs remerciements sont également exprimés à l'égard des responsables, personnel et enseignants de la faculté des sciences de l'université de Saïda.

C'est avec plaisir que je remercie toutes les personnes qui m'ont accompagné durant ce voyage appelé la vie, je pense très particulièrement à mes chers parents.

Je tiens à remercier également tous mes amis les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions.

Introduction



Modèle des courbes hélices ; Pond de Pékin la Chine
”*San Shan*”.

La notion de ”produit tordu” a été introduite par R. L. Bishop et B. O’Neill (1964), qui l’utilisaient pour construire une grande classe de variété avec une courbure négative. Cependant, les produits tordus de l’appréciation sont apparus dans la littérature mathématique et physique avant 1964.

Une variété produit tordu est une variété Riemannienne dont la métrique Riemannienne peut se décomposer en un produit cartésien de la géométrie ” y ” et de la géométrie ” x ”, sauf que la seconde partie est déformée, c’est-à-dire qu’elle est rescalée par une fonction scalaire des

autres coordonnées "y". Il est bien connu que la notion du produit tordu joue un rôle important dans le domaine de la géométrie différentielle et celui de la physique, en particulier dans la relativité générale.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude d'une courbe γ située dans une variété produit tordu définie par $M^3 = I \times_{f^2} \mathbb{E}^2$, où γ est définie par la propriété que le champ de vecteurs tangent T fait un angle constant θ avec un champ de vecteurs fixé qu'on l'appelle le champ de vecteurs vertical E_3 . On classifions les courbes obliques et de Legendre dans la variété produit tordu et même que l'invariant de Lancet en fonction de la courbure et de la torsion

$$Lancet(\gamma) = \frac{\cos \theta}{|\sin \theta|} = \frac{\tau}{\kappa}. \quad (1)$$

voir [2].

L'objet principal de ce Mémoire est donc d'étudier les courbes obliques et de Legendre de variétés introduits par Bishop et O'Neill "variété produit tordu" et donner leurs forme explicite.

Ce Mémoire est partagé en 3 chapitres:

Le chapitre 1, il contient des généralités sur les notions de la géométrie Riemannienne nécessaires pour le reste de ce Mémoire. En particulier, nous rappelons les variétés différentiables, l'espace et fibré tangent, métrique Riemannienne, la connexion et le repère de Serret-Frenet en dimension m sur une variété Riemannienne.

Quant au chapitre 2, il est consacré à la notion de la variété Riemannienne produit tordu. Nous rappelons quelques propriétés de la variété Riemannienne produit et en donnant un type de métrique Riemannienne qu'on peut définir sur une variété produit tordu, nous donnons aussi leurs connexions.

Enfin, dans le dernier chapitre on s'intéresse à étudier les courbes obliques et de Legendre sur le produit tordu de variétés. En donnant leurs courbure et leurs torsion comme on détermine l'Invariant de Lancet et on termine par la courbure moyenne avec des exemples.

Chapitre 1

Variétés Riemanniennes

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1 On dit que M est une variété topologique de dimension $m \in \mathbb{N}$ si pour tout point p de M possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ i.e. il existe une application bijective

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow U$$

tel que φ et son inverse φ^{-1} sont continues.

Un point p de U est repéré par les coordonnées $(p_1, \dots, p_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(p)$. Alors, on dit que U est un ouvert de coordonnées locales de M au voisinage de p . La paire (U, φ) est appelée carte locale et $(p_1, \dots, p_m) = \varphi^{-1}(p)$ seront les coordonnées locales de p .

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telle que l'intersection U et V soit non vide alors un point $p \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées $(p_1, \dots, p_m)$ dans U et ses coordonnées $(p'_1, \dots, p'_m)$ dans V . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \psi^{-1}(U \cap V) & & \end{array}$$

est commutatif alors on a

$$(p'_1, \dots, p'_m) = \psi^{-1} \circ \varphi(p_1, \dots, p_m)$$

où l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée changement de coordonnées de la carte (U, φ) vers la carte (V, ψ) .

On appelle atlas définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i$; un tel objet sera toujours noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

Définition 1.2 *On dira que M est une variété différentiable si elle est une variété topologique et l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^∞ .*

1.2 Espace et fibré tangent

On considère par la suite par M une variété différentiable de dimension finie m .

1.2.1 Espace tangent

Définition 1.3 *Soit M une variété différentiable et p un point de M .*

1. *Un germe d'une fonction en p est une classe d'équivalence des fonctions définies dans des voisinages ouvertes de p , où on considère f et g comme d'équivalentes si elles sont égales dans un voisinage de p comprise dans le domaine de définition de f et de g .*
2. *Un germe de courbe en p est une classe d'équivalence des courbes passant par p , où on considère deux courbes $\gamma_1 :] - a, a[\longrightarrow M$, $\gamma_1(0) = p$ et $\gamma_2 :] - a', a'[\longrightarrow M$, $\gamma_2(0) = p$ comme équivalentes si $\gamma_1 = \gamma_2$ sur un voisinage de 0.*

On désigne le germe d'une fonction f par $[f]$ et le germe d'une courbe γ par $[\gamma]$.

On dit que deux courbes γ_1 et γ_2 passant par p définissent la même tangente en p si pour tout fonction définie dans un voisinage de p et dérivable en p on a :

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)|_0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)|_0.$$

En fait, cette notion ne dépend que des germes $[f]$, $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ et sur les germes de courbes passant par p cela définit une relation d'équivalence.

Remarque 1.4 *Soient $(p_1, \dots, p_m)$ des coordonnées locales autour de p . Une courbe $x(t)$ est déterminée par son vecteur $X(t)$ de coordonnées $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ et le vecteur tangent associé*

$\dot{x}(0)$ est uniquement déterminé par le vecteur

$$X(0) = \dot{x}(0) = (x'_1(0), \dots, x'_m(0)).$$

L'ensemble des vecteurs tangents en p est un espace vectoriel de dimension m . On désigne par $\frac{\partial}{\partial x_k}$ le vecteur tangent qui correspond au k -ième vecteur unité. Chaque vecteur tangent s'écrit comme suit

$$X(0) = \sum_k x'_k(0) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

où $\frac{\partial}{\partial x_k}$ désigne la base de l'espace vectoriel de dimension m .

Définition 1.5 On note par $T_p M$, l'ensemble des vecteurs tangents en p qui est un espace vectoriel de dimension m .

Si ξ est le vecteur tangent défini par la courbe γ , alors pour chaque fonction f dérivable autour de p , l'expression

$$X_\xi(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_0$$

dépend que du vecteur tangent défini par γ et s'appelle la dérivation de f dans la direction de ξ . On peut donc identifier un vecteur tangent avec sa dérivation directionnelle associée.

X_ξ est une application linéaire

$$\{\text{germes en } p \text{ de fonctions dérivables}\} \xrightarrow{X_\xi} \mathbb{R},$$

qui obéit la règle de Leibnitz

$$X_\xi(f.g) = X_\xi(f)g(p) + f(p)X_\xi(g).$$

Une telle application s'appelle dérivation en p .

La remarque précédente montre qu'on peut identifier les vecteurs tangents en p avec (certaines) dérivations en p . En effet, toutes ces dérivations peuvent être obtenues comme une dérivation directionnelle.

1.2.2 Fibré tangent

Les espaces tangents $T_p M$ où p parcourt la variété M forment une variété différentiable définie par la définition suivante.

Définition 1.6 *On définit le fibré tangent par*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

TM est une variété différentiable de dimension $2m$. Un élément de TM est un couple $(p; u)$ où p est un point de M et u est un vecteur tangent à M en p .

L'application $\pi : (p; u) \in TM \longrightarrow p \in M$ est différentiable appelée la projection canonique du fibré tangent TM .

1.2.3 Champ de vecteurs

Soit M une variété différentiable de dimension finie m .

Définition 1.7 *On appelle un champ de vecteurs sur M toute section C^∞ de TM i.e.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ & \searrow Id & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

telle que $\pi \circ X = Id$.

Le champ de vecteurs X en tout point $p \in M$ est un vecteur $X(p)$ tangent à M en p de façon à ce que la variation de $X(p)$ (en fonction de p) soit différentiable.

L'ensemble $\chi(TM)$ est l'ensemble des champs de vecteurs sur M .

Localement, pour que $X_1, \dots, X_m$ soit une base de $\chi(M)$ il faut que $X_1(p), \dots, X_m(p)$ soit une base de $T_p M$ donc $\partial_1, \dots, \partial_m$ est une base de $\chi(M)$ tel que

$$\begin{aligned} \partial_i : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (\partial_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \end{aligned}$$

Un champ de vecteur définit aussi une dérivation sur $C^\infty(M)$ il s'écrit localement par

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X_i(p)(\partial_i)_p$$

1.3 Métriques Riemanniennes

Soit M une variété différentiable de dimension finie m .

Définition 1.8 Une métrique Riemannienne g sur la variété M est une application,

$$g : \chi(TM) \times \chi(TM) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$ —bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive i.e.

1. $g(X, X') = g(X', X)$, (symétrique)
2. $g(X, X) = 0 \implies X = 0$, (non dégénérée)
3. $g(X, X) \geq 0$, (définie positive)

pour tout $X, X' \in \chi(TM)$.

Si (U, φ) est une carte sur M et $(\partial_i)_{i=1, \dots, m}$ la base locale associée, alors g est donnée localement par

$$g = \sum_{i,j=1}^k g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{1.1}$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelées composantes de la métrique relativement à la carte (U, φ) .

Localement, si $X = X^i \partial_i$ et $X' = X'^j \partial_j$ on a

$$g(X, X') = g_{ij} X^i X'^j.$$

Pour tout $p \in M$ on a

$$g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où $T_p M$ désigne l'espace tangent au point p .

Exemple 1.9 Si (U, x) est une carte sur M , alors $(\partial_1, \dots, \partial_m)$ forme une base pour $T_p M$ sa base duale est $dx_{i,j=1,\dots,m}$, alors la métrique g est donnée par $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$.

1.4 Connexion

Soit M une variété différentiable de dimension finie m .

Définition 1.10 Une connexion linéaire sur une variété M est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(TM) \times \chi(TM) &\longrightarrow \chi(TM) \\ (X, X') &\longmapsto \nabla_X X' \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X (X' + X'') = \nabla_X X' + \nabla_X X''$,
2. $\nabla_X (fX') = X(f)X' + f\nabla_X X'$,
3. $\nabla_{fX+gV} X' = f\nabla_X X' + g\nabla_V X'$,

pour tout $X, X', X'', V \in \chi(TM)$ et $f, g \in C^\infty(M)$.

Définition 1.11 Une section $X' \in \chi(TM)$ est dite parallèle par rapport à la connexion ∇ si

$$\nabla_X X' = 0$$

pour tout $X \in \chi(TM)$.

Définition 1.12 Soit g une métrique Riemannienne sur M . On dit que la métrique g est compatible avec la connexion ∇ (ou parallèle), si

$$\nabla g = 0 \tag{1.2}$$

i.e

$$(\nabla_X g)(X', X'') = 0$$

où

$$X(g(X', X'')) = g(\nabla_X X', X'') + g(X', \nabla_X X'') \tag{1.3}$$

pour tout $X, X', X'' \in \chi(TM)$.

Définition 1.13 Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire et compatible avec g et sans torsion i.e.

$$\nabla_X X' + \nabla_{X'} X + [X, X'] = 0$$

pour tout $X, X' \in \chi(TM)$.

Définition 1.14 La formule de KOSZUL est donnée par

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X X', X'') &= X(g(X', X'')) + X'(g(X'', X)) - X''(g(X, X')) \\ &+ g(X'', [X, X']) + g(X', [X'', X]) - g(X, [X', X'']), \end{aligned} \quad (1.4)$$

pour tout $X, X', X'' \in \chi(TM)$.

Définition 1.15 Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ un chemin de classe C^k . On appelle champ de vecteurs le long de la courbe γ un chemin $X : [a, b] \longrightarrow TM$ relevant γ i.e. $\pi(X(t)) = c(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Exemple 1.16 $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ est un champ de vecteurs le long de la courbe γ .

Proposition 1.17 Soient M une variété différentiable munie d'une connexion affine ∇ , $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ une courbe de classe C^k dans M et X un champ de vecteurs le long de γ . Alors on peut définir un champ de vecteurs de classe C^{k-1} le long de γ , noté $D_t X$ appelé dérivée covariante de X satisfaisant à :

1. D_t est $\mathbb{R}$ -linéaire, i.e. $\forall a, b \in \mathbb{R}, X, X' \in \chi(\gamma), D_t(aX + bX') = aD_t X + bD_t X'$.
2. $D_t(fX) = \frac{df}{dt}X + fD_t X, \forall f \in C^\infty(I) (I \subseteq \mathbb{R})$
3. Pour tout $X' \in \chi(M)$ et $X(t) = X'(\gamma(t))$, on a : $D_t X = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X'$.

Définition 1.18 Un champ de vecteurs X le long de γ est dit parallèle pour la connexion ∇ si $D_t X \equiv 0$. Un chemin $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est appelé une géodésique si son champ tangent est parallèle.

1.5 Repère de Serret-Frenet

Nous rappelons la notion de courbe de Frenet dans un variété Riemannien (M^m, g) . Lisser r est un entier avec $1 \leq r \leq m$. La courbe $\gamma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ paramétrée par la longueur

d'arc s est appelée une courbe r -Frenet sur M s'il existe r champs vectoriels orthonormaux $(E_1 = \gamma', \dots, E_r)$ le long de γ et des fonctions positives différentiables $\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1}$ de s avec

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\gamma'} E_1 \\ \nabla_{\gamma'} E_2 \\ \nabla_{\gamma'} E_3 \\ \vdots \\ \nabla_{\gamma'} E_{r-1} \\ \nabla_{\gamma'} E_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1(s) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\kappa_1(s) & \ddots & \kappa_2(s) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2(s) & \ddots & \kappa_3(s) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\kappa_3(s) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \kappa_{r-1}(s) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{r-1}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_{r-1} \\ E_r \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

La fonction $\kappa_j(s)$ est appelée la $J^{\text{ème}}$ courbure de γ , la courbe γ est:

- (1) *une géodésique* si $r = 1$, donc nous obtenons l'équation bien connue $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$,
- (2) *un cercle* si $r = 2$ et $\kappa_1(s)$ est une constante, nous avons donc $\nabla_{\gamma'} E_1 = \kappa_1(s) E_2$ avec $\nabla_{\gamma'} E_2 = -\kappa_1(s) E_1$,
- (3) *une hélice* d'ordre r si $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{r-1}(s)$ sont des constantes.

La courbe de Frenet γ est appelée non géodésique si $\kappa_1(s) > 0$ partout sur I .

Chapitre 2

Produit Tordu de Variétés (P.T.V)

2.1 Produit de Variétés

Définition 2.1 Soient B et N deux variétés de classe C^∞ et de dimension b et n respectivement. Le produit direct de B par N noté $B \times N$ est muni de l'atlas W défini par

$$W = \{(U \times V, \varphi \times \phi) / (U, \varphi) \in \text{atl}(B), (V, \phi) \in \text{atl}(N)\}$$

est dit variété produit de dimension $b + n$.

Propriétés 2.2 1. Si B et N sont deux variétés de classe C^∞ , alors les projections canoniques $\pi : B \times N \longrightarrow B$ et $\eta : B \times N \longrightarrow N$ sont des submersions et de classe C^∞ .

2. Pour tout $(p, q) \in B \times N$ les sous-espaces $B \times \{q\}$ et $\{p\} \times N$ sont deux sous-variétés de la variété produit $B \times N$.

3. Pour tout $(p, q) \in B \times N$ on a :

$$T_{(p,q)}B \times N \cong T_pB \times T_qN.$$

4. Soient X et X' deux champs de vecteurs sur B et N respectivement, le couple (X, X') défini par

$$\begin{aligned} (X, X') : B \times N &\longrightarrow TB \times TN \\ (p, q) &\longmapsto (X_p, X'_q) \end{aligned}$$

est un champ de vecteurs sur la variété produit $B \times N$ et il est donné par l'équation suivante

$$\bar{X} = X + X'$$

2.1.1 Connexion linéaire sur le produit de variétés

Proposition 2.3 Soient B et N deux variétés. Si ∇^B et ∇^N sont deux connexions linéaires sur B et N respectivement, alors il existe une unique connexion linéaire ∇ sur $B \times N$ telle que pour tous $X_1, X_2 \in \chi(B)$ et $X'_1, X'_2 \in \chi(N)$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{(X_1, X'_1)}(X_2, X'_2) &= (\nabla_{X_1}^B X_2, 0) + (0, \nabla_{X'_1}^N X'_2) \\ \nabla_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_2 &= (\nabla_{X_1}^B X_2, 0) \\ \nabla_{\widehat{X'_1}} \widehat{X'_2} &= (0, \nabla_{X'_1}^N X'_2) \\ \nabla_{\tilde{X}_1} \widehat{X'_2} &= \nabla_{\widehat{X'_1}} \tilde{X}_2 = 0 \end{aligned}$$

où $\tilde{X} = (X, 0) \in \chi(B \times N)$, $\widehat{X'} = (0, X') \in \chi(B \times N)$, définissent des relèvements de champ de vecteurs à $\chi(B \times N)$.

∇ est appelé connexion linéaire produit.

2.2 Produit Tordu de Variétés

2.2.1 Métrique du P.T.V

Définition 2.4 Soient (B, g_B) et (N, g_N) deux variétés Riemanniennes de dimensions b et n respectivement et $f \in C^\infty(B)$ une fonction non nulle. La variété produit tordu $B \times_{f^2} N$ est définie comme étant la variété $B \times N$ munie de la métrique G_{f^2} telle que

$$G_{f^2} = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \eta^* g_N$$

où $\pi : B \times N \longrightarrow B$ et $\eta : B \times N \longrightarrow N$ désignent les projections canoniques. Si $X, X' \in \chi(B \times N)$ on a

$$G_{f^2}(X, X') = g_B(d\pi(X), d\pi(X')) + (f \circ \pi)^2 g_N(d\eta(X), d\eta(X'))$$

Remarque 2.5 *Relativement à des cartes locales $(U, x^i) \in \text{atl}(B)$ et $(V, y^i) \in \text{atl}(N)$, la matrice associée à G_{f^2} est donnée par*

$$\begin{pmatrix} g_{Bij} & 0 \\ 0 & f^2 g_{Nlk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} g_B^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} g_N^{lk} \end{pmatrix}$$

2.2.2 Connexion de Levi-Civita de la variété P.T

La connexion de Levi-Civita de $B \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de B et de N comme suit.

Proposition 2.6 *Soient (B, g_B) et (N, g_N) deux variétés Riemanniennes. Si ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associée à la variété produit $(B \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ associée à la variété produit tordu $(B \times_{f^2} N, G_{f^2})$ est donnée par*

$$\tilde{\nabla}_X X' = \nabla_X X' + \frac{1}{2f^2} X_1(f^2)(0, X'_2) + \frac{1}{2f^2} X'_1(f^2)(0, X_2) - \frac{1}{2} g_N(X_2, X'_2) (\text{grad}(f^2), 0)$$

pour tout $X_1, X'_1 \in \chi(B)$, $X_2, X'_2 \in \chi(N)$, $X = (X_1, X_2)$ et $X' = (X'_1, X'_2)$.

Chapitre 3

Courbes obliques et de Legendre sur P.T.V

Soit $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ le plan Euclidien (espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et I un intervalle ouvert réel. On considère dans ce chapitre la variété produit tordu définie par $M^3 = I \times_f \mathbb{E}^2$ où $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est appelée la fonction de déformation donnée par $f = f(z)$.

On associe à M^3 la métrique Euclidienne g donnée par

$$g = dz^2 + f(z)^2(dx^2 + dy^2)$$

où x, y sont des coordonnées canoniques dans $\mathbb{E}^2$ et z sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

Le champ vectoriel principal $\partial/\partial z = \partial_z$ on M^3 est appelé le champ vectoriel vertical.

Notons par $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de (M^3, g) et considérons la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, où

$$F = \log f$$

3.1 Courbes obliques et de Legendre sur P.T.V

Soit γ une courbe de 3-Frenet dans $M^3 = I \times_f \mathbb{E}^2$ ($r = m = 3$), pour laquelle on désigne le repère de Frenet $(T = \gamma', N, B)$, et les équations de Frenet Eq.(1.5) sont

$$\begin{cases} \nabla_T T = \kappa N, \\ \nabla_T N = -\kappa T + \tau B, \\ \nabla_T B = -\tau N. \end{cases} \quad (3.1)$$

où κ est la courbure de γ et τ sa torsion.

Définition 3.1 Soit γ une courbe de (M^3, g) de vecteur vitesse noté par $T = \dot{\gamma}(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s))$, et soit la fonction $\theta : J \longrightarrow [0, 2\pi)$ appelée l'angle structurel de γ si

$$\cos \theta(s) = g(T(s), \partial_z) = \eta(T(s)) \quad (3.2)$$

où η est le dual du champ vectoriel vertical i.e. $\eta = dz$.

Définition 3.2 Soit γ une courbe de (M^3, g) , la courbe γ est appelée une courbe oblique (ou plus précisément une θ -courbe oblique) si θ est une fonction constante.

Dans le cas particulier où $\theta \equiv \pi/2$ (ou $3\pi/2$), γ est appelée une courbe de Legendre.

Proposition 3.3 Soit $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à la variété produit tordu (M^3, g) . Notons par U, V le relèvement à M^3 de champs de vecteur tangents à $\mathbb{E}^2$. On a

$$\tilde{\nabla}_U V = D_U V - F'g(U, V)\partial_z, \quad (3.3)$$

$$\tilde{\nabla}_U \partial_z = \tilde{\nabla}_{\partial_z} U = F'U, \quad (3.4)$$

$$\tilde{\nabla}_{\partial_z} \partial_z = 0 \quad (3.5)$$

où D est le dérivé covariant sur $\mathbb{E}^2$ et $(')$ désigne le dérivé par rapport à la variable z .

Exemple 3.4 Les courbes intégrales du champ vectoriel vertical ∂_z sont des courbes obliques avec $\theta \equiv 0$. Ces courbes sont $\gamma(s) = (x_0, y_0, s + z_0)$ avec $s \in J = \mathbb{R}$ et $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ le point initial. À partir de Eq.(3.5), ces courbes sont des géodésiques de la métrique déformée g .

Dans ce qui suit, on suppose que γ est non géodésique i.e. $\kappa > 0$ et donc γ ne peut pas être une courbe intégrale de ∂_z i.e. $\theta \neq 0, \pi$.

Proposition 3.5 *Soient γ une courbe oblique, et $\partial/\partial z = \partial_z$ est le champ vectoriel vertical. La dérivée covariante du vecteur ∂_z le long de la courbe γ est donnée par*

$$\nabla_T \partial_z = F'(T - \cos \theta \partial_z). \quad (3.6)$$

Preuve. Pour la preuve, on suppose que $T(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s) = \cos \theta)$. D'après les formules (3.4) et (3.5), on a

$$\begin{aligned} \nabla_T \partial_z &= \nabla_{T_1 E_1 + T_2 E_2 + T_3 E_3} \partial_z \\ &= \nabla_{(T_1, T_2, 0)} \partial_z \\ &= F'(T_1, T_2, 0) \\ &= F'(T - T_3 E_3) \\ &= F'(T - \cos \theta \partial_z). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.6 *Soit γ une courbe oblique. La courbe de Frenet γ est une courbe θ -oblique si et seulement si le long de la courbe γ on a*

$$\eta(N) = -\frac{F'}{\kappa} \sin^2 \theta. \quad (3.7)$$

Preuve. La dérivée covariante de la relation (3.2) le long de la courbe γ est:

$$\begin{aligned} 0 = -\theta' \sin \theta &= g(\kappa N, \partial_z) + g(T, F'(T - \cos \theta \partial_z)) \\ &= \kappa g(N, \partial_z) + F'(g(T, T) - \cos \theta g(T, \partial_z)) \\ &= \kappa \eta(N) + F' \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

qui donne Eq.(3.7). ■

Proposition 3.7 *Soit γ une courbe θ -oblique, et soit ∂_z est le champ vectoriel vertical. L'expression de ∂_z suivant le repère de Serret-Frenet est*

$$\partial_z = \cos \theta T + \left(-\frac{F'}{\kappa} \sin^2 \theta \right) N + \eta(B) B,$$

une condition nécessaire pour γ soit θ —oblique est

$$|\sin \theta| \leq \min \left\{ 1, \frac{\kappa}{|F'|} \right\} \quad (3.8)$$

si f n'est pas une fonction constante.

Preuve. La preuve de la proposition découle du fait que la courbe γ est θ —oblique et du Théorème (3.6). ■

Corollaire 3.8 *Puisque ∂_z est un champ de vecteur unitaire, alors on obtient:*

$$1 = \cos^2 \theta + \frac{F'^2 \sin^4 \theta}{\kappa^2} + \eta(B)^2,$$

donc $\eta(B)$ existe seulement si la condition $|F' \sin \theta| \leq \kappa$ détient, ce qui signifie que Eq.(3.8) est satisfaite.

Remarque 3.9 *i. La décomposition de ∂_z suivant le repère de Serret-Frenet d'une courbe θ —oblique est donnée par*

$$\partial_z = \cos \theta T + \left(-\frac{F'}{\kappa} \sin^2 \theta \right) N + \left(\frac{|\sin \theta| \sqrt{\kappa^2 - F'^2 \sin^2 \theta}}{\kappa} \right) B; \quad (3.9)$$

et puis, pour une courbe de Legendre, ∂_z est dans le plan traversé par N et B .

ii. l'égalité $|\sin \theta| = \kappa / |F'|$ implique $\eta(B) = 0$, d'où ∂_z se décompose comme suit

$$\partial_z = \cos \theta T \pm |\sin \theta| N$$

et sa dérivée covariante est

$$\nabla_T \partial_z = (\cos \theta) \kappa N \pm |\sin \theta| (-\kappa T + \tau B);$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \nabla_T \partial_z &= F'(T - \cos \theta \partial_z) \\ &= F'(T - \cos \theta (\cos \theta T \pm |\sin \theta| N)) \end{aligned}$$

par comparésant du coéfficient de B , on obtient $\tau = 0$, puis γ peut être pensé à comme un cercle. En outre, il s'ensuit que $F' < 0$.

3.2 Classification et l'invariant de Lancret sur P.T.V

Dans le théorème suivant, nous classons toutes les courbes de θ —oblique sur le produit tordu de variétés.

Théorème 3.10 Soit $\gamma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$ une courbe θ —oblique. γ est explicitement donnée par

$$\gamma(s) = \left(|\sin \theta| \int^s \frac{\zeta(t)dt}{f(t \cos \theta)}, s \cos \theta \right) \quad (3.10)$$

où $\zeta(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ est un vecteur unitaire avec $\alpha \in C^\infty(J)$, est une paramétrisation arbitraire du cercle de l'unité $\mathbb{S}^1$.

Preuve. En utilisant la preuve de la proposition (3.5), le vecteur vitesse de γ est

$$T(s) = (T_1(s), T_2(s), \cos \theta)$$

avec $\|T\|^2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \langle T, T \rangle \\ &= g_{ij} T^i T^j \\ &= g_{11} T^1 T^1 + g_{12} T^1 T^2 + g_{13} T^1 T^3 + g_{21} T^2 T^1 + g_{22} T^2 T^2 + g_{23} T^2 T^3 \\ &\quad + g_{31} T^3 T^1 + g_{32} T^3 T^2 + g_{33} T^3 T^3 \\ &= g_{11} (T^1)^2 + g_{22} (T^2)^2 + g_{33} (T^3)^2 \\ &= f^2(z) (T_1^2 + T_2^2) + \cos^2 \theta \\ 1 &= f^2(s \cos \theta) (T_1^2 + T_2^2) + \cos^2 \theta \end{aligned}$$

qui donne

$$T_1^2 + T_2^2 = \frac{\sin^2 \theta}{f^2(s \cos \theta)}$$

on dérive par le seconde membre

$$\left(\frac{f(s \cos \theta).T_1}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\frac{f(s \cos \theta).T_2}{\sin \theta} \right)^2 = 1$$

cette dernière équation admet une solution pour

$$T_1 = \frac{|\sin \theta|}{f(s \cos \theta)} \cos \alpha(s), \quad T_2 = \frac{|\sin \theta|}{f(s \cos \theta)} \sin \alpha(s)$$

où $\alpha(s)$ c'est une fonction arbitraire. Alors on obtient la forme explicite de la courbe γ par intégration par son vecteur vitesse T . ■

Maintenant, nous sommes en mesure de calculer les invariants Frenet (la courbure et la torsion).

Théorème 3.11 *Soit $\gamma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$ une courbe θ -oblique. La courbure et la torsion de γ sont données par*

$$\kappa = |\sin \theta| \sqrt{(\alpha')^2 + (F')^2}, \quad (3.11)$$

$$\tau = |\alpha'| \cos \theta - \frac{|\alpha'| F'' \cos \theta - \text{sgn}(\alpha') \alpha'' F'}{(\alpha')^2 + (F')^2}, \quad (3.12)$$

où $\text{sgn}(\alpha') = \alpha' / |\alpha'|$ et $\alpha \in C^\infty(J)$ définie au Théorème (3.10).

Preuve. D'après le Théorème (3.10), on a

$$\gamma(s) = \left(|\sin \theta| \int^s \frac{\cos \alpha(t) dt}{f(t \cos \theta)}, |\sin \theta| \int^s \frac{\sin \alpha(t) dt}{f(t \cos \theta)}, s \cos \theta \right).$$

Le vecteur vitesse de γ est donné par

$$T = \left(|\sin \theta| \frac{\cos \alpha(s)}{f(s \cos \theta)}, |\sin \theta| \frac{\sin \alpha(s)}{f(s \cos \theta)}, \cos \theta \right).$$

En utilisant la formule (3.3) qui donne

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= D_T T - F' g(T, T) \partial_z \\
&= \left(|\sin \theta| \left(\frac{\cos \alpha(s)}{f(s \cos \theta)} \right)', |\sin \theta| \left(\frac{\sin \alpha(s)}{f(s \cos \theta)} \right)', -F' g(T, T) \right) \\
&= \begin{pmatrix} |\sin \theta| \left(\frac{-\alpha'(s) \sin \alpha(s) f(s \cos \theta) - f'(s \cos \theta) \cos \alpha(s)}{f^2(s \cos \theta)} \right) \\ |\sin \theta| \left(\frac{\alpha'(s) \cos \alpha(s) f(s \cos \theta) - f'(s \cos \theta) \sin \alpha(s)}{f^2(s \cos \theta)} \right) \\ -F' (f^2(s \cos \theta)(T_1^2 + T_2^2) + \cos^2 \theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{|\sin \theta|}{f(s \cos \theta)} \left(-\alpha'(s) \sin \alpha(s) - \frac{f'(s \cos \theta) \cos \alpha(s)}{f(s \cos \theta)} \right) \\ \frac{|\sin \theta|}{f(s \cos \theta)} \left(\alpha'(s) \cos \alpha(s) - \frac{f'(s \cos \theta) \sin \alpha(s)}{f(s \cos \theta)} \right) \\ -F' (f^2(s \cos \theta)(T_1^2 + T_2^2) + \cos^2 \theta) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{|\sin \theta|}{f} (-\alpha' \sin \alpha(s) + F' \cos \theta \cos \alpha(s)), \frac{|\sin \theta|}{f} (\alpha' \cos \alpha(s) + F' \cos \theta \sin \alpha(s)), -F' \sin^2 \theta \right)
\end{aligned}$$

et de $\kappa^2 = \|\nabla_T T\|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla_T T\|^2 &= \left(\frac{|\sin \theta|}{f} (-\alpha' \sin \alpha(s) + F' \cos \theta \cos \alpha(s)) \right)^2 + \left(\frac{|\sin \theta|}{f} (\alpha' \cos \alpha(s) + F' \cos \theta \sin \alpha(s)) \right)^2 \\
&\quad + (-F' \sin^2 \theta)^2 \\
&= \left(\frac{|\sin \theta|}{f} \right)^2 ((-\alpha' \sin \alpha(s))^2 + 2(-\alpha' \sin \alpha(s))(F' \cos \theta \cos \alpha(s)) + (F' \cos \theta \cos \alpha(s))^2 \\
&\quad + (\alpha' \cos \alpha(s))^2 + 2(\alpha' \cos \alpha(s))(F' \cos \theta \sin \alpha(s)) + (F' \cos \theta \sin \alpha(s))^2 + (F' \sin^2 \theta)^2) \\
&= |\sin \theta|^2 ((\alpha')^2 + (F')^2) \\
&= \kappa^2.
\end{aligned}$$

Pour Eq.(3.12), on dérive de façon covariée la relation (3.7), on a

$$\nabla_T \eta(N) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{F'}{\kappa} \right) \sin^2 \theta,$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla_T \eta(N) &= \nabla_T g(N, \partial_z) \\
&= g(\nabla_T N, \partial_z) + g(N, \nabla_T \partial_z) \\
&= g(-\kappa T + \tau B, \partial_z) + g(N, F'(T - \cos \theta \partial_z))
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds} \left(\frac{F'}{\kappa} \right) \sin^2 \theta &= g(-\kappa T + \tau B, \partial_z) + g(N, F'(T - \cos \theta \partial_z)) \\
&= -\kappa g(T, \partial_z) + \tau g(B, \partial_z) + F'(g(N, T) - g(N, \partial_z) \cos \theta) \\
&= -\kappa \cos \theta + \tau \eta(B) + \frac{(F')^2}{\kappa} \cos \theta \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

En utilisant $\eta(B)$ du relation (3.9). Alors on obtient l'expression de la torsion de la courbe θ -oblique γ . ■

Remarque 3.12 1. Revenant aux remarques (3.9), l'égalité $|\sin \theta| = \kappa / |F'|$ implique que $\tau = 0$ i.e. $\alpha' = 0$, alors α est une fonction constante i.e. $\alpha(s) = \alpha_0 \in \mathbb{R}$.

2. La caractérisation (3.7) devient après qu'on mettait Eq.(3.11) dans Eq.(3.7) on obtient alors

$$\eta(N) = -\frac{F' |\sin \theta|}{\sqrt{(\alpha')^2 + (F')^2}}. \quad (3.13)$$

Un autre résultat principal donne l'invariant de Lancret pour les courbes obliques.

Proposition 3.13 Soit $\gamma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$ une courbe θ -oblique, κ, τ sa courbure et torsion. Si γ est une courbe non géodésique ($\kappa > 0$) alors il a le Lancret Invariant

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau}{\kappa} \frac{((\alpha')^2 + (F')^2)^{3/2}}{|\alpha'| ((\alpha')^2 + (F')^2 - F'')} + \frac{sgn(\alpha') \alpha'' F'}{|\alpha'| ((\alpha')^2 + (F')^2 - F'') |\sin \theta|}. \quad (3.14)$$

avec $sgn(\alpha') = \alpha' / |\alpha'|$ et $\alpha \in C^\infty(J)$.

Preuve. Soit l'expression $Lancret(\gamma) = \frac{\cos \theta}{|\sin \theta|}$, de Eq.(3.11) et Eq.(3.12) on obtient

$$\begin{aligned}
|\sin \theta| &= \frac{\kappa}{\sqrt{(\alpha')^2 + (F')^2}}, \\
\cos \theta &= \frac{\tau((\alpha')^2 + (F')^2) - sgn(\alpha') \alpha'' F'}{|\alpha'| ((\alpha')^2 + (F')^2 - F'')}
\end{aligned}$$

et donc le Lancret Invariant pour une courbe θ -oblique donné par la formule (3.14).

En particulier, si $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ les courbes de Legendre ont

$$\kappa = \sqrt{((\alpha')^2 + (F')^2)}, \quad \tau = \frac{sgn(\alpha') \alpha'' F'}{(\alpha')^2 + (F')^2},$$

impliquant que les courbes de Legendre avec α' constante sont des courbes planes i.e. $\tau = 0$, elles sont considérées comme des cercles. ■

3.3 Courbure moyenne

On notera par $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire Euclidien usuel de $\mathbb{R}^m$ (et de $\mathbb{R}^{m-1}$).

Définition 3.14 On appelle première forme quadratique fondamentale de la variété M dans la carte (U, φ) , la forme quadratique dans $\mathbb{R}^{m-1}$ associée à la matrice

$$g(u) = (g_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq m-1} = \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u) \right\rangle \right)_{1 \leq i, j \leq m-1},$$

pour tout $u \in U$.

C'est la matrice de Gram associée à la base du plan tangent canoniquement associée à la carte considérée.

La première forme quadratique fondamentale permet de lire la norme des vecteurs tangents à M sur les coordonnées d'un tel vecteur dans la base issue de la carte.

Définition 3.15 Soient $(B, g_B), (N, g_N)$ deux variétés Riemanniennes et $\psi : (B, g_B) \longrightarrow (N, g_N)$ une application différentiable de classe C^∞ . La seconde forme fondamentale de l'application ψ est la dérivée covariante de la 1-forme vectoriel $d\psi$, définie par

$$\nabla d\psi(X, X') = \nabla_X^\psi d\psi(X') - d\psi(\nabla_X^B X'),$$

pour tout $X, X' \in \chi(TM)$.

La forme vectoriel h de l'application ψ vérifie:

$$\begin{aligned} (\nabla d\psi)(\alpha.X, \beta.X') &= \alpha\beta(\nabla d\psi)(X, X') \\ (\nabla d\psi)(X, X') &= (\nabla d\psi)(X', X) \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ et $X, X' \in \chi(TM)$.

Définition 3.16 La courbure moyenne H est la trace de la seconde forme fondamentale définie par $h(X, X') = -g(D_X \eta, X')$ avec η la normale unitaire rentrante.

Puisque les courbes sont des cas particuliers d'applications. On note par h la seconde forme fondamentale de la courbe γ définie par

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (M, g)$$

et par H son champ de courbure moyenne

$$H = Tr(h) = h(T, T) = \nabla_T T. \quad (3.15)$$

Alors γ est appelée une courbe avec un champ de vecteur propre de courbure moyenne s'il existe $\lambda \in C^\infty(\gamma)$ tel que

$$\Delta H = \lambda H. \quad (3.16)$$

En particulier, si $\lambda = 0$ alors γ est une courbe avec champ de vecteur de courbure moyenne harmonique. Ici l'opérateur de Laplace Δ agit sur la fonction à valeur vectorielle H , donné par

$$\Delta H = -\nabla_T^3 T = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T. \quad (3.17)$$

En utilisant les équations de Frenet Eq.(3.1), on peut réécrire Eq.(3.16) comme suit:

$$\begin{aligned} \Delta H &= -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T \\ &= -\nabla_T \nabla_T (\kappa N) \\ &= -\nabla_T (\kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)) \\ &= -((-3\kappa' \kappa)T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa \tau^2)N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau')B) \\ &= -(-\kappa^2 - \tau^2)(\kappa N) \\ \implies \Delta H &= \lambda H, \end{aligned}$$

ce qui signifie que κ et τ sont des constantes.

Et, pour $\kappa \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda(-\kappa N) &= (-3\kappa' \kappa)T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa \tau^2)N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau')B \\ &= (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa \tau^2)N \\ \implies \langle \lambda(-\kappa)N, N \rangle &= \langle \kappa(-\kappa^2 - \tau^2)N, N \rangle \\ \implies \lambda &= \kappa^2 + \tau^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

qui donne la proposition suivante.

Proposition 3.17 *La courbe oblique γ à un champ de vecteur propre de courbure moyenne si et seulement si les expressions*

$$\begin{cases} (\alpha')^2 + (F')^2, \\ |\alpha'| \cos \theta - \frac{|\alpha'| F'' \cos \theta - \operatorname{sgn}(\alpha') \alpha'' F'}{(\alpha')^2 + (F')^2} \end{cases} \quad (3.19)$$

sont des constantes (équivalentes, il s'agit d'une hélice de l'ordre 3), donc

$$\lambda = ((\alpha')^2 + (F')^2) \sin^2 \theta + \left(|\alpha'| \cos \theta - \frac{|\alpha'| F'' \cos \theta - \operatorname{sgn}(\alpha') \alpha'' F'}{(\alpha')^2 + (F')^2} \right)^2. \quad (3.20)$$

Preuve. La constance des expressions ci-dessus signifie la constance de la courbure et la torsion, tandis que l'expression (3.20) est l'application de la formule (3.18) avec κ et τ à partir de Eq.(3.11) et Eq.(3.12), on a

$$\begin{aligned} \lambda &= \kappa^2 + \tau^2 \\ &= \left(|\sin \theta| \sqrt{(\alpha')^2 + (F')^2} \right)^2 + \left(|\alpha'| \cos \theta - \frac{|\alpha'| F'' \cos \theta - \operatorname{sgn}(\alpha') \alpha'' F'}{(\alpha')^2 + (F')^2} \right)^2 \\ &= |\sin \theta|^2 ((\alpha')^2 + (F')^2) + \left(|\alpha'| \cos \theta - \frac{\frac{1}{|\alpha'|} [(|\alpha'|)^2 F'' \cos \theta - \alpha' \alpha'' F']}{[(\alpha')^2 + (F')^2]} \right)^2 \\ &= \sin^2 \theta ((\alpha')^2 + (F')^2) + \left(|\alpha'| \cos \theta - \frac{[(|\alpha'|)^2 F'' \cos \theta - \alpha' \alpha'' F']}{|\alpha'| [(\alpha')^2 + (F')^2]} \right)^2. \end{aligned}$$

Une observation importante est que la première condition (3.19) est universelle, c'est-à-dire ne dépend pas de l'angle oblique θ . Par conséquent, les mêmes conditions sont requises pour les courbes de Legendre, pour

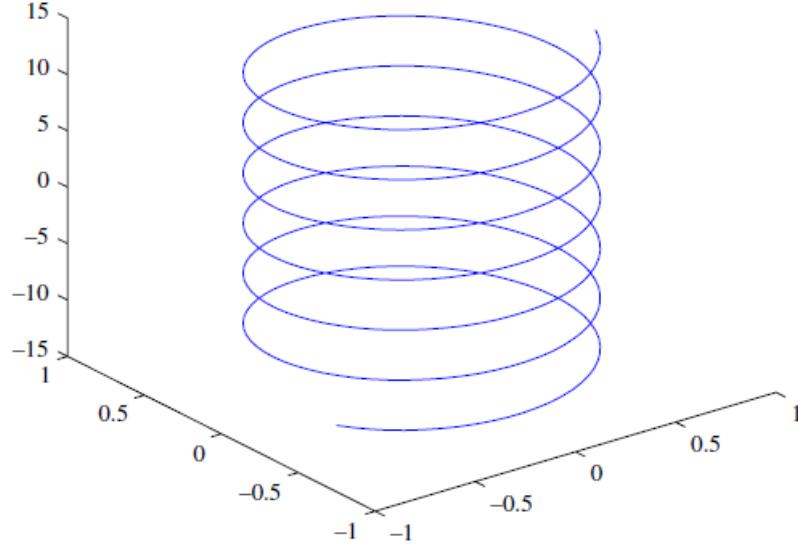
$$\begin{aligned} \lambda &= \kappa^2 + \tau^2 \\ &= ((\alpha')^2 + (F')^2) \sin^2 \theta + \left(|\alpha'| \cos \theta - \frac{[(|\alpha'|)^2 F'' \cos \theta - \alpha' \alpha'' F']}{|\alpha'| [(\alpha')^2 + (F')^2]} \right)^2 \\ &= (\alpha')^2 + (F')^2 + \frac{(\alpha' \alpha'' F')^2}{(\alpha')^2 ((\alpha')^2 + (F')^2)^2}. \end{aligned}$$

■

3.4 Exemples

Exemple 3.18 *L'espace Euclidien $\mathbb{E}^3$ est un produit déformé trivial, qui a $f \equiv 1$ et $F \equiv 0$. Soit la courbe*

$$\gamma(s) = (|\sin \theta| \sin s + x_0, -|\sin \theta| \cos s + y_0, s \cos \theta + z_0) \quad (3.21)$$



Courbe θ -oblique pour $\theta = \pi/4$

est une courbe θ -oblique (elle correspond à $\alpha(s) = s$) et de repère de Serret-Frenet

$$\begin{cases} T(s) = (|\sin \theta| \cos s, |\sin \theta| \sin s, \cos \theta), \\ N(s) = (-\sin s, \cos s, 0), \\ B(s) = (-\cos \theta, -\cos \theta \sin s, |\sin \theta|), \end{cases}$$

avec $\gamma(0) = (x_0, y_0 - \sin \theta, z_0)$ comme point initial. Aussi, $\kappa(s) = |\sin \theta|$ et $\tau(s) = \cos \theta$.

Donc le cercle de l'unité $\mathbb{S}^1(x_0 = y_0 = 0)$ et ses parallèles (c'est-à-dire, pour chaque $z_0 \in \mathbb{R}$) sont des courbes de Legendre en $\mathbb{E}^3$.

L'invariant de Lancret (3.13) devient $\text{Lancret}(\gamma) = \tau/\kappa$ et nous récupérons l'expression de Lancret (1) de l'introduction. Laissez-nous souligner que, depuis $f' \equiv 0$, les deuxièmes et troisièmes conditions (3.8) ne fonctionnent pas.

On obtient les figures (3.18) et (3.19), qui prouvent que γ appartient au cylindre

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \sin^2 \theta.$$

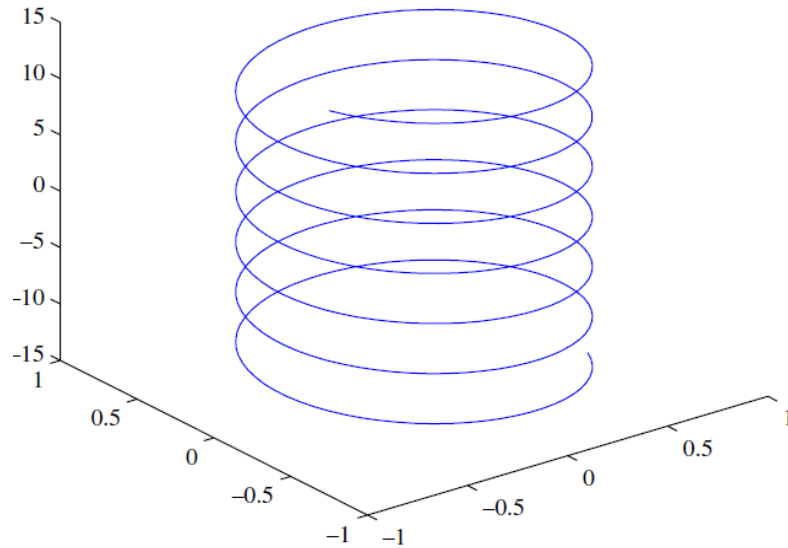
Selon la Proposition (3.19), toutes les courbes obliques en $\mathbb{E}^3$ avec α non affine, c'est-à-dire, $\alpha = as + b$ où $a \neq 0$, ont un champ de vecteur propre de courbure moyenne avec le correspondant $\lambda = a^2$.

Exemple 3.19 Dans ce qui suit, nous donnons un exemple d'une courbe θ -oblique non géodésique dans un produit exponentiel Euclidien dégauchonné avec $\beta > 0$. Nous allons tout d'abord souligner que la variété $\mathbb{E} \times_{\exp z} \mathbb{E}^2$ à une courbure de section constante $c = -1$, et en changeant le z -coordonnée on peut obtenir le modèle de demi-espace supérieur de l'hyperbolique 3-espace. Plus précisément, considérant la nouvelle coordonnée $\tilde{z} = \exp(-z)$, nous voyons que $(\mathbb{E} \times_{\exp z} \mathbb{E}^2, g)$ est isométrique à $(\mathbb{H}_+^3, g_{-1})$ où $\mathbb{H}_+^3 = \{(x, y, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3; \tilde{z} > 0\}$ et

$$g_{-1} = \frac{1}{\tilde{z}^2}(dx^2 + dy^2 + d\tilde{z}^2).$$

Deuxièmement, la courbe θ -oblique

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sin \theta \exp(-\beta s \cos \theta)}{1 + \beta^2 \cos^2 \theta} (\sin s - \beta \cos \theta \cos s, -\cos s - \beta \cos \theta \sin s), s \cos \theta \right) \quad (3.22)$$



Courbe θ -oblique pour $\theta = 3\pi/4$

correspond à $\alpha(s) = s$.

Le champ vectoriel tangent est

$$T(s) = (\sin \theta \cos s \exp(-\beta s \cos \theta), \sin \theta \sin s \exp(-\beta s \cos \theta), \cos \theta)$$

et le point initial $\gamma(0) = (\sin \theta / (1 + \beta^2))(-\beta \cos \theta, -1, 0)$.

Soit la nouvelle base

$$\left\{ E_1 = \exp(-\beta z) \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = \exp(-\beta z) \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

est une base g -orthonormale avec

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = \beta E_1, \quad [E_2, E_3] = \beta E_2,$$

et la connexion de Levi-Civita:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= \nabla_{E_2} E_2 = -\beta E_3, \\ \nabla_{E_1} E_3 &= \beta E_1, \\ \nabla_{E_2} E_3 &= \beta E_2, \end{aligned}$$

le reste étant nul. En conséquence,

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = (\beta \sin \theta \cos \theta \cos s - \sin \theta \sin s) E_1 + (\beta \sin \theta \cos \theta \sin s + \sin \theta \cos s) E_2 - \beta \sin^2 \theta E_3$$

puis

$$\kappa = \sqrt{1 + \beta^2} |\sin \theta|$$

en correspondance avec (3.11). Ensuite, nous avons deux cas:

i. $\theta \in (0, \pi)$. On obtient $\kappa = \sqrt{1 + \beta^2} \sin \theta$ et

$$N(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} ((\beta \cos \theta \cos s - \sin s) E_1 + (\beta \cos \theta \sin s + \cos s) E_2 + (-\beta \sin \theta) E_3).$$

ii. $\theta \in (\pi, 2\pi)$. Nous avons $\kappa = -\sqrt{1 + \beta^2} \sin \theta$ et

$$N(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} ((-\beta \cos \theta \cos s + \sin s) E_1 + (-\beta \cos \theta \sin s - \cos s) E_2 + \beta \sin \theta E_3).$$

Remarquons que l'État (3.8) lit

$$\sin \theta \leq \min \left\{ 1, \sqrt{1 + \beta^2} |\sin \theta| / |\beta| \right\},$$

qui est vrai.

Pour les deux cas, nous tirons que $\tau = \cos \theta$ et nous récupérons l'invariant de Lancret (3.13),

$$\text{Lancret}(\gamma) = (\tau/\kappa) \sqrt{1 + \beta^2}.$$

De la décomposition (3.9) nous avons les expressions

$$B(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} ((-\cos \theta \cos s - \beta \sin s)E_1 + (-\cos \theta \sin s + \beta \cos s)E_2 + \sin \theta E_3)$$

pour le cas (i), et

$$B(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} ((\cos \theta \cos s + \beta \sin s)E_1 + (\cos \theta \sin s - \beta \cos s)E_2 - \sin \theta E_3)$$

pour le cas (ii).

En conclusion, γ est une hélice de l'ordre trois et pour $\beta = 0$ nous récupérons le premier exemple avec $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Pour $\theta = \pi/2$ on obtient la courbe de Legendre

$$\gamma(s) = (\sin s, -\cos s, 0)$$

qui est le cercle d'unité $\mathbb{S}^1$. En outre, nous pouvons appliquer la proposition (3.19) et puis γ est une courbe avec le champ de vecteur propre de courbure moyenne et

$$\lambda = \kappa^2 + \tau^2 = 1 + \beta^2 \sin^2 \theta.$$

Depuis β et θ sont des constantes, N est un vecteur propre pour le Laplacien avec la valeur propre (3.22).

Le théorème de Lancret pour l'espace hyperbolique indique qu'une courbe γ de $\mathbb{H}_+^3$ est une hélice générale si et seulement si l'une ou l'autre:

(1) $\tau \equiv 0$ et γ est une courbe dans un certain plan hyperbolique $\mathbb{H}^2(-1)$, ou

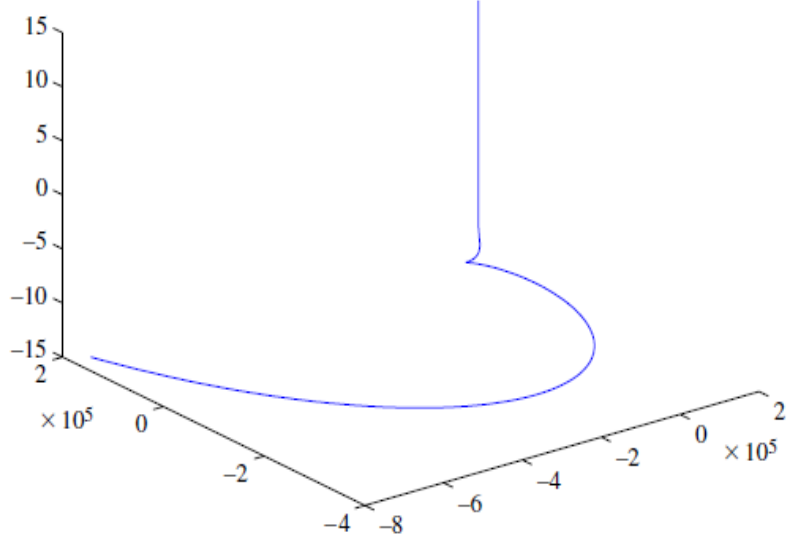


FIG. 3-1 – Cas i. Courbe θ –oblique pour $\beta = 1$ et $\theta = \pi/4$

(2) γ est en $\mathbb{H}_+^3$ avec courbure constante et torsion.

Notre courbe (3.22) appartient au cas (2). Rappelons qu'une hélice générale signifie, l'existence d'un champ vectoriel de Killing V avec une longueur constante le long de γ faire une angle constante avec T . À partir de la dernière ligne de la sous section du repère de Serret-Frenet ci-dessus, nous avons que, pour notre cas $\beta = 1$,

$$V(s) = \cos \varphi T(s) + \sin \varphi B(s)$$

Avec

$$\cot \varphi = \frac{\cos^2 \theta + 1}{\sqrt{2} |\sin \theta| \cos \theta}.$$

On obtient

$$V(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (3 + \sin^2 \theta) \cos^2 \theta}} \times (e^{-s \cos \theta} |\sin \theta| (\cos s - \cos \theta \sin s), \sin s + \cos \theta \cos s, 2 \cos \theta).$$

Conclusion

Les courbes obliques sont des courbes dont leurs vecteurs vitesses fait un angle constant avec une direction fixe et comme cas particulier qu'en l'angle est égale à $\pi/2$ (où $3\pi/2$) elles s'appellent courbes de Legendre. On a caractériser ces courbes en calculant leurs vecteurs vitesses associés T et leurs fonctions de courbures κ et τ dans un produit tordu de variétés de dimension 3. De plus les courbes obliques ont un champ de vecteur propre de courbure moyenne si et seulement si elles sont des hélices avec des conditions supplémentaires.

Bibliographie

- [1] C. Călin and M. Crasmareanu, Slant curves and particles in three-dimensional warped products and their Lancret invariants. Bull. Aust. Math. Soc. 88, 2013, 128–142. doi :10.1017/S0004972712000809.
- [2] M. Baross, General helix and a theorem of Lancret. Proceeding of the American mathematical society, 125(5) : 1997, 1503-1509.
- [3] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés. Publications du centre universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017-2018.