République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothéque

Année univ.: 2018/2019

Degré topologique en dimension finie et infinie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie différentielle

par

Hemamed **Y**ahia [1]

Sous la direction de

Mr.A.Halimi

Soutenue le 14/07/2019 devant le jury composé de

Pr. S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr. A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr. B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme. N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. hmamedyahya92@gmail.com

Remerciements

Louanges A'Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maître Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons .

Je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés.

J'exprime ma peofonde gratitude et remerciment à Monieur mon encadrer ***Mr.Halimi. Abderrazak*** pour la bienveillance avec laquelle il a encadré ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt .

Je tiens à remercier également les membres du jury pour avoir accepté de se prononcer sur ce travail.

Je remercie également Monieur aussi , mon frére et mon ami M.A ***B. Saadli*** car donné information .

Je désire aussi remercier tous les professeurs de Math à l'université Dr Tahar Moulay - Saïda pour son aide durant toutes ces années.

Que soient,enfin,je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de prés ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail .

Dédicaces

***T**out d'abord, je remercie mon Seigneur de m'avoir donné la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail humble je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humit et de gratitude à :*

***M**es parents, les êtres les plus chers a mon coeur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.*

***M**es trés chéres fréres : **A**bderrazak,**S**alah- eddin et **A**bdelkhalk .*

***M**a trés chére soeur :**C**hahira,**N**ajate et **S**aïda.*

***T**ous mes amis surtout : **A**ziz, **T**ouati, **E**lAïd et **S**ahraoui et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.*

***E**t à ma chére tante : **R**ebha qui m'a soutenu beaucoup.*

***E**t ma chére ma fiancée :**B**.*

***E**t ma grand-mère bien-aimée : **E**L **H**adja **K**heira.*

***T**ous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.*

***T**ous mes amies et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années us ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment .*

Table des matières

Introduction **5**

1 Degré topologique en dimension finie **6**

1.1 Degré de Brouwer 6

1.2 Extension de la définition du degré 7

1.3 Propriétés principales du degré 14

1.4 Conséquences des propriétés 16

1.5 Théorème de point fixe de Brouwer 20

2 Degré topologique en dimension infinie **22**

2.1 Degré de Leray-Schauder 22

2.1.1 Théorème de point fixe de Schauder 25

2.1.2 Alternative non linéaire de Leray-Schauder 25

2.2 Degré de Mawhin 26

2.2.1 Application de Fredholm 26

2.2.2 Définition des applications projections 26

2.2.3 Définition du degré de Mawhin 27

2.3 Théorème de continuation 28

3 Existence de solutions périodiques positives **32**

3.1 Existence de solutions 32

Annexe **40**

3.2 Théorème d'Ascoli 40

3.3 Théorème de la valeur moyenne 41

3.4 Théorème d'inversion locale 41

Bibliographie **43**

Introduction

Ces dernières années, le degré topologique s'est révélé un outil très puissant pour la résolution de certains problèmes associés à des équations différentielles ordinaires et fonctionelles. Pour cela on va présenter, dans ce travail, la théorie du degré topologique en dimension finie et infinie.

En 1869 Kronecker [8] a introduit la notion du degré pour les applications de C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Poincaré[4], Böhler [11] et Hadamard [5] l'ont ensuite développé au début des années 1890 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer[7] le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en 1883, 1884). Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications C^0 ont été dt́éveloppées par Nagumo [9] et Heinz [9]. Cependant, les théorèmes du point fixe restérent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.
Ce mémoire devise en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons le degré topologique de Brouwer avec ses propriétés principales.

Le deuxième chapitre contient les deux types du degré en dimension infinie ; le degré de Shauder et le degré de Mawhin. Nous termines notre travail, par un resultat d'existence de solutions périodiques positives, pour une équation différentielle fonctionelle.

Chapitre 1

Degré topologique en dimension finie

Ce chapitre sera consacré à la définition, à l'étude des propriétés du degré topologique en dimension finie (degré de Brouwer).

1.1 Degré de Brouwer

Considérons un ouvert borné Ω dans $\mathbb{R}^n$, $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désignera l'espaces des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, k fois continûment différentiables sur Ω, continues sur $\overline{\Omega}$, cet espace sera muni de sa topologique usuelle, $J_F(x)$ désigne la valeur du Jacobien de F au point x, $J_F(x) = det[\frac{\partial F}{\partial x_i}]$, $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω avec $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$.
Soit $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, on désigne par S l'ensemble $S = \{x \in \Omega, J_F(x) = 0\}$.
Soit $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b \notin F(\partial\Omega) \cup F(S)$.
Si $x \in F^{-1}(b)$ et $J_F(x) \neq 0$ donc par le théorème d'inversion locale (voir l'annexe), F est un difféomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de b.
$F^{-1}(b)$ est donc discret et compact, il ne contient donc qu'un nombre fini de points i.e $F^{-1}(b) = \{\xi_1, ..., \xi_k\}$ et $J_F(\xi_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, ..., k$.

Définition 1.1.1. [6] *Soit $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $b \notin F(\partial\Omega) \cup F(S)$. Le degré topologique de l'application F au point b, relativement à Ω, est l'entier*

$$deg(F, \Omega, b) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Omega \cap F^{-1}(b)} sign J_F(x) & \\ 0 & si \quad \Omega \cap F^{-1}(b) = \emptyset \end{cases}$$

Le degré que nous venons de définir s'appelle le degré de Brouwer.

Exemple 1.1.1. [13]

Soit $\Omega = B(0,R), b = (1,0)$ *et* $F(x,y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$.
on va calculer $deg(F,\Omega,b)$.
Alors

$$F(x,y) = (1,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0) \quad ou \quad (\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad ou \quad (\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}) \in \partial\Omega.$$

On remarque qu'au moins le point $(1,0)$ *est sur la frontère de la boule unité quelle que soit la norme usuelle que l'on considère sur* $\mathbb{R}^2$. *Par conséquent,le degré n'est pas défini si* $R = 1$.
Si $0 < R < 1$, *alors* $B(0,R) \cap F^{-1}(b) = \emptyset$ *et donc*

$$deg(F,B(0,R),b) = 0.$$

Enfin, si $R > 1$,*alors le degré est bien défini.*
De plus, on a :

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2 + 3x^2 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$J_F(x,y) = (3x^2 - 3y^2)^2 + 36x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Les trois point sont alors réguliers et comme $sgn(J_F(x,y)) > 0, \forall (x,y) \neq (0,0)$
Alors :

$$deg(F,\Omega,y) = 3.$$

1.2 Extension de la définition du degré

Nous allons étendre la définition du degré aux applications continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, et relativement à des points pouvant appartenir à $F(S)$, on note par $\|.\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.1. [6] *Soient* $\alpha > 0$, $\varphi : [0,+\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[0,+\infty[$, *on dit que* φ *est une fonction poids d'indice* α, *s'il existe* $\delta \in [0,\alpha]$ *telle que* $\varphi(t) = 0$ *pour* $t \notin [\delta,\alpha]$ *et on note par* W_α *l'ensemble des fonctions poids d'indice* α.

Remarques 1.2.1. *1) Si* $\varphi \in W_\alpha$ *et*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \varphi(\|x\|_2). \end{array}$$

Alors g *est une fonction continue a support compact dans* $\mathbb{R}^n$
Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2)dx \qquad \text{est bien définie .}$$

2)On note par $W_\alpha^1 = \{\varphi \in W_\alpha \ \ ; \ \ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2)dx = 1\}$.

Définition 1.2.2. [6] *Soient* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* C^1 *sur un ouvert borné* Ω*, et* b *un point de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $b \notin F(\partial\Omega)$*, alors le degré de* F *au point* b *dans* Ω *est défini par*

$$deg(F, \Omega, b) = \int_\Omega \varphi(\|F(x) - b\|_2)J_F(x)dx.$$

Où $\varphi \in W_\alpha^1$ *une fonction poids d'indice* α *tel que* $0 < \alpha < \gamma = min\{\|F(x) - b\|_2 \ ; \ x \in \partial\Omega\}$.

Définition 1.2.3. [6] *Soient* $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue sur* Ω *un ouvert borné alors pour tout* $b \notin F(\partial\Omega)$ *le degré de* F *au point* b *dans* Ω *est défini par*

$$deg(F, \Omega, b) = \lim_{k \longmapsto \infty} deg(F_k, \Omega, b).$$

Où $F_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une suite de fonctions de classe* C^1 *sur* $\overline{\Omega}$ *avec*
$\lim_{k \longmapsto \infty} \|F_k - F\|_\Omega = 0$.

Proposition 1.2.1. [6] *Soient* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* C^1 *sur* Ω *un ouvert borné,* $b \notin F(\partial\Omega)$ *si pour tout* $x \in \Gamma = \{x \in \Omega \ \ ; \ \ F(x) = b\}$, $F'(x) \neq 0$ *alors* Γ *contient un nombre fini de points, c-a-d*
$\exists\ \widehat{\alpha} \quad 0 < \widehat{\alpha} < \gamma = min\{\|F(x) - b\|_2 \ ; \ x \in \partial\Omega\}$ *telle que* $\forall \varphi \in W_\alpha^1$ *avec* $\alpha \in [0, \widehat{\alpha}]$

$$deg(F, \Omega, b) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} signJ_F(x_i) & si\ x_i \in \Gamma = \{x_1, ..., x_m\} \\ 0 & si\ \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Preuve :
1) $\Gamma = \emptyset$ i.e $b \notin F(\overline{\Omega})$.
Alors par la compacité de $\overline{\Omega}$,on a

$$\gamma_2 = min\{\|F(x) - b\|_2 \ / \ x \in \overline{\Omega}\} > 0$$

Donc pour $\hat{\alpha} = \gamma_2$ et $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$

$$\varphi(\|F(x) - b\|_2) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \varphi \in W_\alpha^1$$

Ainsi

$$deg(F, \Omega, b) = 0$$

2) $\Gamma \neq \emptyset$ i.e $\exists m > 0$ tel que $\Gamma = \{x_1, ..., x_m\}$.
Alors par le théorème de l'inversion local, pour $j = 1, ..., m$, il existe des voisinages ouverts $U(x_j)$ et $V_j(b)$ de x_j et b respectivement, tel que la restriction F_j de F est un homéomorphisme de $U(x_j)$ vers $V_j(b)$.
On choisit $U(x_j)$ suffisament petit tel que $sign\ J_F(x)$ est constant sur $U(x_j)$.
Puisque il y a un nombre fini de $V_j(b)$, il existe $\hat{\alpha} \in [0, \gamma]$ tel que pour $j = 1, ..., m$

$$K = B(b, \hat{\alpha}) \subset V_j$$

Soit $U_j = F_j^{-1}(K)$, alors

$$U_j \subset \Omega$$

Donc $\forall x \notin \bigcup_{i=1}^n U_j, \forall \varphi \in W_\alpha^1$

$$\varphi(\|F(x) - b\|_2) = 0$$

Et par suit on a

$$\begin{aligned}
deg(F,\Omega,b) &= \sum_{i=1}^{m}\int_{U_j}\varphi(\|F(x)-b\|_2)J_F(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{m}\int_{F_j^{-1}(K)}\varphi(\|F(x)-b\|_2)J_F(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{m}\int_{F_j^{-1}(K)}\varphi(\|F(x)-b\|_2)signJ_{F_j}(x)|J_{F_j}(x)|dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} signJ_F(x_j)\int_{K}\varphi(\|x\|_2)dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} signJ_F(x_j)
\end{aligned}$$

car $\int_K \varphi(\|x\|_2)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\|x\|_2)dx = 1.\square$

Le lemme suivant nous aide à de voir que le degré est independant de la fonction poids.

Lemme 1.2.1. [10] *:Soient F :$\Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$une fonction de classe C^1sur un ouvert Ω, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma = min\{\|F(x)-b\|_2\ ;\ x \in \partial\Omega\} > 0$, alors pour $\alpha \in [0,\gamma]$ et $\varphi \in W_\alpha$, l'intégrale*

$$\eta(\varphi) = \int_0^{+\infty} t^{n-1}\varphi(t)dt \quad est\ bien\ dfinie$$

De plus si $\eta(\varphi) = 0$, on a

$$\int_\Omega \varphi(\|F(x)-b\|_2)J_F(x)dx = 0.$$

Proposition 1.2.2. [6] *Soit F :$\Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$une fonction de classe C^1sur un ouvert Ω, si $b \notin F(\partial\Omega)$ alors pour $\varphi_1, \varphi_2 \in W_\alpha^1$ avec $0 < \alpha < \gamma = min\{\|F(x)-b\|_2\ ;\ x \in \partial\Omega\}$*

$$deg_{\varphi_1}(F,\Omega,b) = deg_{\varphi_2}(F,\Omega,b).$$

Preuve :
On applique ce lemme sur l'application identité $\mathrm{I} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\Omega_1 = B(b, 2\alpha)$.
soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W_\alpha^1$,
On prend

$$\varphi = \eta(\varphi_1)\varphi_2 - \eta(\varphi_2)\varphi_1,$$

il suit que $\varphi \in W_\alpha$
Et

$$\begin{aligned}\eta(\varphi) &= \int_0^{+\infty} s^{n-1}\varphi_2(s) \int_0^{+\infty} t^{n-1}\varphi_1(t)\ dt\ ds - \int_0^{+\infty} s^{n-1}\varphi_2(s) \int_0^{+\infty} t^{n-1}\varphi_1(t)\ dt\ ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\exists \varphi \in W_\alpha \qquad \textit{tel que} \quad \eta(\varphi) = 0.$$

D'aprés le lemme précédent

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2)dx = 0$$

i.e

$$\eta(\varphi_1)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_2(\|x\|_2)dx - \eta(\varphi_2)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(\|x\|_2) = 0.$$

D'où

$$\eta(\varphi_1) - \eta(\varphi_2) = \eta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Maintenant, on applique encore le lemme précédent pour la fonction F

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)(\|F(x) - b\|_2)J_F(x)dx \\ &= \int_\Omega \varphi_1(\|F(x) - b\|_2)J_F(x)dx - \int_\Omega \varphi_2(\|F(x) - b\|_2)J_F(x)dx.\end{aligned}$$

Ainsi

$$deg_{\varphi_1}(F, \Omega, b) = deg_{\varphi_2}(F, \Omega, b).$$

□

Proposition 1.2.3. [6]

Soient $F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *deux fonctions de classe* C^1 *sur un ouvert borné* Ω, $b \in \mathbb{R}^n$ *satisfait* $\gamma = min\{\|F(x) - b\|_2, x \in \partial\Omega\} > 0$.*Si* $\alpha \in]0, \gamma[$ *et* $\sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \|F(x) - G(x)\|_2 < \frac{1}{7}\alpha$,

Alors

$$deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

Preuve :

On pose $\alpha_0 = \frac{1}{7}\alpha$, soit $\mu(t) : [0, +\infty] \longrightarrow [0, 1]$ de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ définie par

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & pour\ t \in [0, 2\alpha_0] \\ 0 & pour\ t > 3\alpha_0 \end{cases}$$

Et soit $H : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définit par

$$H(x) = [1 - \mu(\|F(x) - b\|_2)]F(x) + \mu(\|F(x) - b\|_2)G(x)$$

Donc H est une fonction de classe C^1 sur Ω car $\|.\|$ est de classe C^1

De plus

$$\forall x \in \overline{\Omega} \|H(x) - F(x)\|_2 \leq \mu(\|F(x) - b\|_2)\|G(x) - F(x)\|_2 < \alpha_0 \tag{1.1}$$

Et on a

$$\|F(x) - b\|_2 \leq \|F(x) - H(x)\|_2 + \|H(x) - b\|_2.$$

D'où $\forall x \in \partial\Omega$

$$\|H(x) - b\|_2 \geq \|F(x) - b\|_2 - \|F(x) - H(x)\|_2 > 6\alpha_0 > 0.$$

Alors, pour $\varphi \in W^1_{6\alpha_0}$; $deg(H, \Omega, b)$ est bien défini .

1) On montre que $deg(H, \Omega, b) = deg(F, \Omega, b)$?

Soit $\varphi_1 \in W^1_{5\alpha_0}$ tel que $\varphi_1(t) = 0$ pour $t \in [0, 4\alpha_0]$.

D'aprés (1.1) on a $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \|H(x) - b\|_2 &\leq \|F(x) - b\|_2 + \|H(x) - F(x)\|_2 \\ &< \|F(x) - b\|_2 + \alpha_0. \end{aligned}$$

On voit que si $\|F(x) - b\|_2 < 3\alpha_0$

$$\varphi_1(\|F(x) - b\|_2) = \varphi_1(\|H(x) - b\|_2) = 0.$$

Mais si $\|F(x) - b\|_2 > 3\alpha_0$, par la définition de H et μ,

$$H(x) = F(x)$$

Donc

$$\varphi_1(\|H(x) - b\|_2)J_H(x) = \varphi_1(\|F(x) - b\|_2)J_F(x)$$

Ceci implique

$$\int_\Omega \varphi_1(\|H(x) - b)\|_2)J_H(x)dx = \int_\Omega \varphi_1(\|F(x) - b\|_2)J_F(x)dx.$$

Ainsi

$$deg(H, \Omega, b) = deg(F, \Omega, b).$$

2)On montre que $deg(H, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b)$?

Soit $\varphi_2 \in W^1_{\alpha_0}$, et on a

$$\|G(x) - b\|_2 \geq \|F(x) - b\|_2 - \|F(x) - G(x)\|_2 > \|F(x) - b\|_2 - \alpha_0 \tag{1.2}$$

Donc $\forall x \in \partial\Omega$

$$\|G(x) - b\|_2 > 6\alpha_0.$$

D'où $deg(G, \Omega, b)$ est bien défini.

De plus

i) Si $\|F(x) - b\|_2 > 2\alpha_0$

$$(1.2) \Longrightarrow \|G(x) - b\|_2 > \alpha_0$$

Et on a

$$\|F(x) - b\|_2 < \|F(x) - H(x)\|_2 + \|H(x) - b\|_2.$$

Par (1.1) on trouve

$$\|H(x) - b\|_2 > \alpha_0$$

Donc

$$\varphi_2(\|G(x) - b\|_2) = \varphi_2(\|H(x) - b\|_2) = 0.$$

Ainsi

$$deg(G, \Omega, b) = deg(H, \Omega, b) = 0$$

ii) Si $\|F(x) - G(x)\|_2 \leq 2\alpha_0$.
Par la définition de H et μ on a

$$G(x) = H(x)$$

Donc

$$\varphi_2(\|G(x) - b\|_2 J_G(x) = \varphi_2(\|H(x) - b\|_2 J_H(x)$$

D'où

$$deg(G, \Omega, b) = deg(H, \Omega, b).$$

Ainsi

$$deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

□

1.3 Propriétés principales du degré

Nous énonçons les propriétés fondamentales du degré topologique, voir par exemple [6].

1)Normalisation

Soit I l'injection canonique de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, $I(x) = x$ On a

$$deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & si\ b \in \Omega \\ 0 & si\ b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

2) La continuité par rapport à la fonction

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, si $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $min\{\|F(x) - b\|_2 \ ; \ x \in \partial\Omega\} > \alpha > 0$, alors pour toute fonction continue $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et verifiant $\|F - G\|_\Omega < \frac{1}{7}\alpha$ i.e $\forall G \in V$ un voisinage de F dans $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

Preuve :
Soient $F_k, G_k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux suites de fonctions de classe C^1 sur un ouvert borné Ω tel que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|G_k - G\|_\Omega = \lim_{k \longrightarrow \infty} \|F_k - F\|_\Omega = 0$$

Alors $\exists\, k_0$ *telque*, $\forall\ k, j > k_0$ et $\forall x \in \overline{\Omega}$ on a

$$\|G_j(x) - F_k(x)\|_2 < \|F(x) - F_k(x)\|_2 + \|G_j(x) - G(x)\|_2 + \|G(x) - F(x)\|_2 < \frac{1}{7}\alpha.$$

On choisit k_0 suffisement grand tel que pour $k > k_0$, $min\{\|F_k - b\|_2\ ; x \in \partial\Omega\} > \alpha$ et $min\{\|G_k - b\|_2\ ; x \in \partial\Omega\} > \alpha$
Par la proposition (1.2.3) on a

$$deg(F_k, \Omega, b) = deg(G_k, \Omega, b)$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(F_k, \Omega, b) = \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(G_k, \Omega, b)$$

$$\Longrightarrow deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

□
3) Invariance par homotopie :

Soit $H : \Omega \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur $\Omega \times [0,1]$, suposons que $b \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$ $H(x,t) \neq b$ alors $deg(H, \Omega, b)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$.
Preuve
Puisque $\partial\Omega \times [0,1]$ est compact, $\exists \alpha > 0$ tel que
$\min\{\|H(x) - b\|_2, (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]\} > \alpha > 0.$
Et d'aprés la continuité uniforme de H sur $\overline{\Omega} \times [0,1]$ on a

$$\forall t, s \in [0,1]\ \exists \sigma > 0,\ |s - t| < \sigma \Longrightarrow \sup \|H(x,s) - H(x,t)\|_2 < \frac{1}{7}\alpha.$$

Par la propriété précédente on a $\forall s, t \in [0,1]$ et $|s - t| < \sigma$

$$deg(H(x,t), \Omega, b) = deg(H(x,s), \Omega, b).$$

Puisque [0,1] est compact, on peut le recouvrer par un nombre fini d' intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ de longeur σ, donc $\forall\ t_i, t_{i+1} \in [0,1]$

$$deg(H(x,t_i), \Omega, b) = deg(H(x,t_{i+1}), \Omega, b).$$

□ **4) Additivité** :

Soient $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continue sur un ouvert borné Ω et Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $b \notin F(\partial\Omega_2) \cup F(\partial\Omega_2)$ alors

$$deg(F, \Omega, b) = deg(F, \Omega_1, b) + deg(F, \Omega_2, b).$$

Preuve :
Soit F_k une suite de fonctions de classe C^1 tel que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|F_k - F\|_\Omega = 0$

$$\begin{aligned}
deg(F, \Omega, b) &= \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(F_k, \Omega, b) \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega \varphi(\|F_k(x) - b\|_2) J_{F_k}(x) dx \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} [\int_{\Omega_1} \varphi(\|F_k(x) - b\|_2) J_{F_k}(x) dx + \int_{\Omega_2} \varphi(\|F_k(x) - b\|_2) J_{F_k}(x) dx] \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(F_k, \Omega_1, b) + \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(F_k, \Omega_2, b) \\
&= deg(F, \Omega_1, b) + deg(F, \Omega_2, b).
\end{aligned}$$

□

1.4 Conséquences des propriétés

Nous allons, maintenant, déduire quelques conséquences des propriétés principales du degré topologique,voir par exemple [15].

Corollaire 1.4.1. ***(Propriété de l'excision)***

Soit$F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue sur un ouvert borné* Ω*, alors pour tout ensemble fermé* $K \subset \overline{\Omega}$*, tel que* $b \notin F(K)$ *on a*

$$deg(F, \Omega, b) = deg(F, \Omega - K, b).$$

En particuliére si $K = \Omega$*, alors* $deg(F, \Omega, b) = 0$.

Preuve :Suposons que F_k une suite de fonction de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, telque $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|F_k - F\|_\Omega = 0$. Soient $\gamma_1 = min\{\|F_k - b\|_2\ ; x \in \partial\Omega\}$,
$\gamma_2 = min\{\|F_k - b\|_2\ ; x \in K\}$, Consédirons $\alpha = \frac{1}{2}\min(\gamma_1, \gamma_2)$

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi \in W^1_\alpha \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in K \quad \varphi(\|F_k(x) - b\|_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad deg(F_k(x), \Omega, b) = deg(F_k, \Omega - K, b) \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(F_k, \Omega, b) = \lim_{k \longrightarrow \infty} deg(F_k, \Omega - K, b) \\
&\Longrightarrow \quad deg(F, \Omega, b) = deg(F, \Omega - K, b).
\end{aligned}$$

En particulière si $K = \Omega \Longrightarrow deg(F, \Omega, b) = 0$. $\square$

Corollaire 1.4.2. ***(Propriété d'existence)***

Soient $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω et $b \notin F(\partial\Omega)$, si $deg(F, \Omega, b) \neq 0$, alors l'équation

$$F(x) = b \quad \textit{admet une solution dans} \;\; \Omega.$$

Preuve : Supposons que $F(x) = b$, n'admet pas de solution dans Ω
Et comme $b \notin F(\partial\Omega)$ alors $b \notin F(\overline{\Omega})$, par la propriété de l'excision on a

$$deg(F, \Omega, b) = 0.$$

Ceci implique une contradiction avec

$$deg(F, \Omega, b) \neq 0.$$

Donc

$$F(x) = b \;\; \textit{admet une solution dans } \Omega.$$

$\square$

Corollaire 1.4.3. ***(L'invariance du degré par la translation)***

Soient $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω, $b \notin F(\partial\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}^n$ alors

$$deg(F - c, \Omega, b - c) = deg(F, \Omega, b).$$

Preuve : Soit $F_k$une suite de fonctions de classe C^1 sur Ω tel que $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \|F_k - F\|_\Omega$
On prend

$$G_k(x) = F_k(x) - c$$

Donc

$$G_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\varphi \in W_\alpha^1 \implies & \varphi(\|F_k - b\|_2)J_{F_k}(x) = \varphi(\|G_k - (b-c)\|_2)J_{G_k}(x) \\
\implies & \int\limits_\Omega \varphi(\|F_k - b\|_2)J_{F_k}(x)dx = \int\limits_\Omega \varphi(\|G_k - (b-c)\|_2)J_{G_k}(x)dx \\
\implies & deg(F_k, \Omega, b) = deg(G_k, \Omega, b-c) \\
\implies & \lim_{k\longrightarrow\infty} deg(F_k, \Omega, b) = \lim_{k\longrightarrow\infty} deg(G_k, \Omega, b-c) \\
\implies & deg(F, \Omega, b) = deg(F-c, \Omega, b-c).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.4. ***(L'invariance du degré dans les composantes connexe)***

Soient Ω un ouvert borné et $F \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ on suppose que b, b_1 sont dans la mème composante connexes de $\mathbb{R}^n - F(\partial\Omega)$, alors

$$deg(F, \Omega, b) = deg(F, \Omega, b_1).$$

Preuve :Il suffit de voir que si $b_1 \in \mathbb{R}^n$ est assez proche de b, alors le degré est le mème.
Soient $\varepsilon > 0$, $min\{\|F(x) - b\|_2\ ;\ x \in \partial\Omega\} > \alpha > 0$ tel que
$\varepsilon < \frac{1}{7}(min\{\|F(x) - b\|_2\ ;\ x \in \partial\Omega\})$ et posons

$$F_0(x) = F(x) - b \quad et \quad F_1(x) = F(x) - b_1.$$

On voit que si $\|b - b_1\|_2 < \varepsilon$, alors

$$\sup_{x\in\Omega} \|F_0 - F_1\|_2 < \varepsilon < \frac{1}{7}\ \alpha.$$

Et par conséquent, d'aprés la propriété de la continuité par à la fonction et le corollaire (1.4.3)
On a

$$deg(F, \Omega, b) = deg(F_0, \Omega, 0) = deg(F_1, \Omega, 0) = deg(F, \Omega, b_1).$$

□

Corollaire 1.4.5. *Soient* Ω *un ouvert borné,* $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue sur* $\overline{\Omega}$*, supposons* $G : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue tel que* $\forall x \in \partial\Omega \;\; F(x) = G(x)$ *Alors si* $b \notin F(\partial\Omega)$

$$deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

Preuve :
On considère l'homotopie $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$H(x, t) = tF(x) + (1 - t)G(x)$$

Alors $\forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$

$$H(x, 1) = F(x) \neq b.$$

D'aprés l'invariance par l'homotopie on a

$$deg(H(x, 1), \Omega, b) = deg(H(x, 0), \Omega, b).$$

D'où

$$deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

D'une façon similaire on montre le resultat suivant.

Corollaire 1.4.6. *Soient* $F, G : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *deux fonctions continues, et* Ω *un ouvert borné, si* $b \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$b \notin \{u \in \mathbb{R}^n \; ; \; u = tF(x) + (1 - t)G(x), x \in \partial\Omega, t \in [0, 1]\}$$

Alors

$$deg(F, \Omega, b) = deg(G, \Omega, b).$$

□

1.5 Théorème de point fixe de Brouwer

Théorème 1.5.1. [6] *Soit Ω un convexe, compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $G : \Omega \longrightarrow \Omega$ une fonction continue. Alors G admet un point fixe.*

Preuve :
1) Ω une boule férmée, $\overline{B}(0,r) = \{x \,/ \|x\|_2 \leq r\}$.
a) S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $G(x_0) = x_0$, il n'y a rien à dèmontrer
b) Si $G(x) \neq x, \forall\, x \in \partial\Omega$. Considérons l' homotopie $G_t = I - tG$ pour $t \in [0,1]$.
Alors, $deg(G_t, \Omega, 0)$ est bien défini .
En effet :
Supposons qu'il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $G_t(x) = 0$.
Alors

$$r = \|x\|_2 = t\|G(x)\|_2 < rt \ , \ car \ G(\Omega) \subset \Omega.$$

pour $t = 1$ on a, $G(x) = x$, c'est impossible.
pour $t \in [0,1]$, on a

$$r = \|x\|_2 \leq tr$$

D'où, une contradiction.
Ainsi

$$\forall x \in \partial\Omega, \ G_t(x) \neq 0.$$

Donc d'aprés la définition (1.2.2)

$$deg(G_t, \Omega, 0) \quad est \ bien \ défini.$$

Et par homotopie

$$deg(I - G, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

D'aprés le corollaire (1.4.2)

$$\exists x_0 \in \Omega, \quad tel \ que \ \ G_1(x_0) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\exists x_0 \in \Omega, \ tel \ que \ \ G(x_0) = x_0.$$

2) Ω est un convexe, compact non vide.
On concidère un rétraction $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega$ $i.e$: $R\,|_\Omega = I$, et B une boule contenant Ω.

Soit le diagrame

$$B \stackrel{\mathbf{R}}{\longrightarrow} \Omega \stackrel{\mathbf{G}}{\longrightarrow} B$$

Alors l'application GoR est continue.
D'aprés la première étape,

$$\exists x_0 \in B \ \ tel \ que \ \ x_0 = (GoR)(x_0).$$

Et puisque

$$G(\Omega) \subset \Omega$$

On conclut que

$$x_0 \in \Omega.$$

il suit que

$$\exists x_0 \in \Omega \ \ tel \ que \ \ G(x_0) = x_0.$$

□

Chapitre 2

Degré topologique en dimension infinie

Ce chapitre sera consacré à la définition, à l'étude des proprietès du degré topologique en dimension infinie (degré de Leray-Schauder et degré de Mawhin).

2.1 Degré de Leray-Schauder

Nous souhaitons, maitenant, définir un degré ayant les mèmes propriétés que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie. Le degré que nous allons étudier ici, appellé degré de Leray-Schauder, est construit sur les applications des perturbations compacts de l'identité.

Pour commencer rappellons quelques résultats concernant les operateurs compacts Dans toute la suite X est un espace de Banach, et sa norme est notée par $\|.\|$.

Lemme 2.1.1. [10] *Soit Ω un ouvert borné si $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compact, et n'ayant pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$, on a*

$$\|u - T(u)\| \geq \varepsilon.$$

Preuve Si non il existe une suite $(u_n)_n \in \partial\Omega$ telle que $\|u_n - T(u_n)\| \longrightarrow 0$, comme T est compact et $\overline{\Omega}$ borné ,donc $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact, on peut trouver une sous suite de $T(u_{n_i})_i$, et $y \in X$ tel que

$$T(u_{n_i}) \longrightarrow y \quad lorsque \quad n_i \longrightarrow \infty$$

On en déduit que u_n converge vers y.
Et on a T est continu donc

$$y - T(y) = 0$$

Ce qui signifie que y est un point fixe de T.
Comme $y \in \partial\Omega$ cela contredit l'hypothèse sur T. $\square$

Lemme 2.1.2. [10] *Soit Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$, alors si $\varepsilon > 0$ est telle que $\|u - T(u)\| > 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$, il existe un sous espace vectoriel de dimension finie E_ε de X, et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ telles que*

$$\forall u \in \overline{\Omega} \quad \|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon$$

$$\forall u \in \partial\Omega \quad \|u - T_\varepsilon(u)\| \geq 3\varepsilon.$$

Preuve On sait d'aprés le lemme précédent qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u \in \partial\Omega \quad \|u - T(u)\| > 4\varepsilon$$

Comme $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact dans X, il existe $x_1, x_2, ..., x_n$ dans $T(\overline{\Omega})$ tel que

$$T(\overline{\Omega}) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \varepsilon)$$

Soit E_ε le sous espace engendré par $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
Et définissons les fonctions $\lambda_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\| & si \quad x \in B(x_i, \varepsilon) \\ 0 & si \quad x \notin B(x_i, \varepsilon) \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues et $\forall x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) > 0$$

Posons :

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\ x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x)} \qquad pour\ x \in T(\overline{\Omega})$$

g_ε est définie et continue de Ω dans E_ε.
Soit

$$T_\varepsilon(u) = g_\varepsilon(Tu)$$

Alors

$$T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow X \quad \textit{est continu et} \quad T_\varepsilon(\Omega) \subset E_\varepsilon$$

Pour tout $x \in T(\overline{\Omega})$ on a

$$\lambda_i(x)\|x - x_i\| \leq \lambda_i(x)\varepsilon$$

Et $\forall x \in T(\overline{\Omega})$

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| = \frac{\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\ (x - x_i)\|}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\ \|(x - x_i)\|}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)} < \varepsilon$$

Cela implique que si $u \in \overline{\Omega}$ alors

$$\|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon$$

D'autre part, si $u \in \partial\Omega$ on a

$$\|u - T_\varepsilon(u)\| \geq \|u - T(u)\| - \|T(u) - T_\varepsilon(u)\| \geq 3\varepsilon$$

Ce qui montre que T répond aux exigences du lemme □

Définition 2.1.1. [10] *: Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X*
$T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$.
Soient $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon \subset X$ et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ donnés par le lemme (2.1.2).
On considére F un sous espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε, tel que $\Omega_F = F \cap \Omega \neq \emptyset$, on définit le degré topologique de Leray-Schauder par :

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F)$$

Remarques 2.1.1. ***1)*** *Cette définition ne dépend que de T et de Ω (on considére deux familles $\varepsilon_i, T_{i\varepsilon}, E_{i\varepsilon}$ et F_i pour $i = 1, 2$ et on montre que le degré est le même).*
2) *Les propriétés du degré en dimension finie (degré de Brouwer) restent valabes en dimension infinie (degré de Laray-Schauder).*
3)*Si on pose $R = I - T$ on note par $D_I(R, \Omega)$ le degré de Leray-Schauder au point 0 dans Ω.*

2.1.1 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 2.1.1. [6] *: Soit Ω un sous ensemble convexe, fermé, borné non vide d'un espace de Banach X et $G : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compact, alors G admet au mois un point fixe.*

2.1.2 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Soit Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $F : \Omega \longrightarrow X$ une application compact, alors l'une des propriétes est satisfaite
(i) F admet un point fixe dans Ω
(ii) il existe $x \in \partial\Omega$, il existe $t \in [0, 1] : x = tF(x)$.
Preuve : Si la condition **(ii)** n'est pas satisfaite, l ' assertion a lieu

$$\forall x \in \partial\Omega, t \in [0, 1] \quad telque \quad (I - tF)(x) \neq 0.$$

Le degré $deg(I - tF, \Omega, 0)$ est bien défini et par homotopie on a

$$deg(I - F, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

De plus

$$\exists x \in \Omega \quad tel\ que \quad x - F(x) = 0.$$

Donc F, admet un point fixe.□

Exemple 2.1.1. [13] *Soit B une boule ouverte dans un espace de Banch X et $K : \overline{B} \to X$ une application compacte vérifiant la condition d'Altmann suivante,*

$$\|x - Kx\|^2 \geq \|Kx\|^2 - \|x\|^2, \forall x \in \partial B.$$

Maintenant on va montrer que K admet un point fixe dans $\overline{B}$.
Alors par l'absurde, supposons l'existence d'un couple $(t, x) \in [0, 1] \times \partial B$ tel que $x = tK(x)$;
On peut supposer $t \neq 1$ car autrement le résulat est prouvé.On a alors

$$x - K(x) = (t - 1)K(x) \ et \ \|Kx\|^2 - \|x\|^2 = (1 - t^2)\|Kx\|^2.$$

La condition d'Altmann donne alors $(1 - t)^2 \geq 1 - t^2 \Leftrightarrow t \geq 1$, ce qui est absurde.
Par conséquent, $\forall t \in [0, 1]$ et $\forall x \in \partial B, tK(x) \neq x$;le degré $deg(I - tK, B, 0)$ est bien défini et vaut par homotopie 1; donc l'equation $(I - K)(x) = 0$ admet au moins une solution dans B, sinon sur la frontière ∂B, d'où le résultat.

2.2 Degré de Mawhin

Pour définir le degré de Mawhin, on a besoin quelques resultats sur les applications de Fredholm.

2.2.1 Application de Fredholm

Définition 2.2.1. [12] *Soient X, Z deux espaces normés réels, une application $L : domL \subset X \longrightarrow Z$ est dite une application de Fredholm si elle satisfait les conditions suivantes :*
i) $kerL$ est de dimension finie, où $kerL = L^{-1}\{0\}$
ii) ImL est fermée, de codimension finie, où $ImL = L(domL)$
On rappelle que la codimension de ImL est la dimension du complémentaire de ImL dans Z.

Définition 2.2.2. [12] *On appelle l'indice d'une application de Fredholm L le nombre entier*

$$IndL = dimkerL - codimImL.$$

Dans la suite X, Z sont deux espaces normés réels, $L : X \longrightarrow Z$ est une application de Fredholm d'indice zéro et $J : Z \backslash ImL \longrightarrow KerL$ est un isomorphisme.

2.2.2 Définition des applications projections

Par la définition précédente de l'application de Fredholm et quelques résultats d'analyse fonctionnelle, on définit les projections suivantes P et Q

$$P : X \longrightarrow X \qquad tel\ que \qquad ImP = kerL$$

$$Q : Z \longrightarrow Z \qquad tel\ que \qquad kerQ = ImL$$

Puisque $X = ImP \oplus kerP$ *et* $Z = KerQ \oplus ImQ$
Donc $X = kerL \oplus kerP$ *et* $Z = ImL \oplus ImQ$.
Par conséquence la restriction L_p de L sur $domL \cap kerP$ est injective,
donc l'application $L_p : domL \cap kerP \longrightarrow ImL$ est inversible, et on note par $K_p : ImL \longrightarrow domL \cap kerP$ son inverse .
Dans la suite, on note par $K_{P.\ Q} : Z \longrightarrow domL \cap KerL$ l'inverse général de L défini par $K_{P.\ Q} = K_P(I - Q)$.

Définition 2.2.3. *Soit $N : X \longrightarrow Z$ un opérateur, on dit que N est L-compact si les opérateurs $K_{P.\ Q}N$ et JQN sont compacts.*

Définition 2.2.4. *Soit Ω un ouvert borné de X on définit l'ensemble $C_L(\Omega)$ l'ensemble des applications $F : domL \cap \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ avec $F = L + G$ où $G : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ est L-compact sur $\overline{\Omega}$ et $0 \notin F(domL \cap \partial\Omega)$*

2.2.3 Définition du degré de Mawhin

Pour définir le degré de Mawhin, ou bien degré de coincidence. On utilise le lemme suivant.

Lemme 2.2.1. [12] *Soit $F = L + G$ avec G est L-compact et $0 \notin F(doml \cap \partial\Omega)$, alors*
1) $H_{J.\ P.\ Q} = JQ + K_{P.\ Q} : Z \longrightarrow domL$ est un isomorphisme et

$$H_{J.\ P.\ Q}F = I - P + (JQ + K_{p\ .Q})G.$$

2) Le degré de shauder $D_I(H_{J.\ P.\ Q}\ F, \Omega)$ est bien défini.

Preuve

$$\begin{aligned} 1)\ H_{J.\ P.\ Q}F &= (JQ + K_{P.\ Q})(L + G) \\ &= JQL + K_{P.\ Q}L + (JQ + K_{P.\ Q})G \\ &= K_P(I - Q)L + (JQ + K_{P.\ Q})G \qquad \textit{car} \quad JQL = 0 \\ &= I - P + (JQ + K_{P.\ Q})G. \end{aligned}$$

2) On a pour tout $x \in \partial\Omega$ $H_{J.\ P.\ Q}F(x) \neq 0$
et le fait que P est de rang fini ($dimImP < \infty$) et la L-compacité de G, l'opérateur $P + (JQ + K_{P.\ Q})G$ est compact .
D'où, par la définition **(2.1.1)** le degré de Schauder $D_I(H_{J.\ P.\ Q}\ F, \Omega)$ est bien défini.$\square$

Définition 2.2.5. [12] *Soit $F = L + G$ avec $F \in C_L(\Omega)$, on définit le degré de Mawhin (ou degré de coincidence) par*

$$D_L(F, \Omega) = D_I(H_{J.\ P.\ Q}F, \Omega).$$

Remarque 2.2.1. *Les propriétes du degré de Brouwer suivantes*
1) *L'additivité ;*
2) *L'invariance par homotopie ;*
3) *Propriété de l'excision ;*
4) *Propriété d'existence,*
restent valables pour le degré de Mawhin .

2.3 Théorème de continuation

Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer, que l'équation $L(x) = N(x)$ admet une solution sous certains conditions.
Dans la démonstration on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.3.1. [12] *Soient X un espace vectoriel normé, Ω un ouvert borné de X et $H_1 : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est continue, $H_1(\overline{\Omega}) \subset X_1$ est borné, où X_1 est un sous espace véctoriel de dimension finie de X, on définit $H = I - H_1$, si $0 \notin H(\partial\Omega)$ alors $H \in C_I(\Omega)$, $0 \notin H_{|X_1}(\partial(\Omega \cap X_1))$ et*

$$D_I(H, \Omega) = deg(H_{|X_1}, \Omega, 0).$$

Où $H_{|X_1}$ est la restriction de H sur $\Omega \cap X_1$.

Proposition 2.3.1. [12] *Soient $\widetilde{F} = L - N$, avec N L-compact sur $\overline{\Omega}$, $\widetilde{G} : \overline{\Omega} \longrightarrow Y$ L-compact sur $\overline{\Omega}$, où Y un sous espace vectoriel de Z tel que $Z = ImL \oplus Y$.*
Si les conditions suivantes sont satisfaites
i) $L(x) - (1-\lambda)\widetilde{G}(x) - \lambda N(x) \neq 0$ pour $(x, \lambda) \in (domL \cap \partial\Omega) \times]0, 1[$;
ii) $\widetilde{G}(x) \neq 0$ pour $x \in kerL \cap \partial\Omega$;
iii) $Deg(J\widetilde{G}_{|kerL}, \Omega \cap kerL, 0) \neq 0$ avec $\widetilde{G}_{|kerL}$ la restriction de $\widetilde{G}$ sur $kerL$
Alors
l'équation $\widetilde{F}(x) = 0$ i.e $L(x) = N(x)$ admet une solution dans $domL \cap \overline{\Omega}$.

Preuve
On veut montrer que l'équation $\widetilde{F}(x) = 0$ admet une solution où $\widetilde{F} = L - N$.
Pour le faire on montre que $D_L(\widetilde{F}, \Omega) \neq 0$.
On définit l'homototopie $\psi : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$

$$\psi(x, \lambda) = L(x) - (1-\lambda)\widetilde{G}(x) - \lambda N(x)$$

Pour $\lambda = 1$ on trouve $\psi(x,1) = L(x) - N(x) = \widetilde{F}(x)$

Pour $\lambda = 0$ on trouve $\psi(x,0) = L(x) - \widetilde{G}(x) = \widetilde{H}(x)$.

Donc il suffit de montrer que $D_L(\widetilde{H}, \Omega) \neq 0$.

1) On verifie que $D_L(\widetilde{H}, \Omega)$ est bien défini.

pour le faire on verifie que $\widetilde{H} \in C_L(\Omega)$ i.e

$a)$ $\widetilde{G}$ est L-compact ;

$b)$ $0 \notin \widetilde{H}(domL \cap \partial\Omega)$.

En effet :

$a)\widetilde{G}$ est L-compact par hypothèse.

$b)$ On supose qu'il existe $x \in domL \cap \overline{\Omega}$ tel que $\widetilde{H}(x) = 0$

Alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(x) = 0 \implies & Q\widetilde{H}(x) = 0 & et \quad & (I-Q)\widetilde{H}(x) = 0 \\
\implies & Q(L(x) - \widetilde{G}(x)) = 0 & et \quad & (I-Q)(L-\widetilde{G})(x) = 0 \\
\implies & \widetilde{G}(x) = 0 & et \quad & L(x) = 0 \\
\implies & \widetilde{G}(x) = 0 & et \quad & x \in kerL.
\end{aligned}$$

Ce qui contredit la condittion (ii), donc

$$\widetilde{H}(x) \neq 0 \quad \forall x \in domL \cap \overline{\Omega}.$$

Ainsi

$$0 \notin \widetilde{H}(domL \cap \partial\Omega).$$

D'où

$$\widetilde{H} \in C_L(\Omega).$$

Donc par la définition (2.2.5) $D_L(\widetilde{H}, \Omega)$ est bien défini.

2)On montre que $D_L(\widetilde{H}, \Omega) \neq 0$.

Par la définition (2.2.5) on a

$$D_L(\widetilde{H}, \Omega) = D_I(H_{J.\ P.\ Q}\widetilde{H}, \Omega).$$

D'autres part on a

$$\begin{aligned} H_{J.\ P.\ Q}\widetilde{H} &= (JQ + K_{P.\ Q})(L - \widetilde{G}) \\ &= I - P - JQ\widetilde{G} \\ &= I - P - J\widetilde{G}. \end{aligned}$$

Donc :

$$D_L(\widetilde{H}, \Omega) = D_I(I - P - J\widetilde{G}, \Omega).$$

D'aprés le lemme précédent

$$\begin{aligned} D_L(\widetilde{H}, \Omega) &= deg((I - P - J\widetilde{G})_{|kerL}, \Omega \cap kerL, 0) \\ &= deg(-J\widetilde{G}_{|kerL}, \Omega \cap kerL, 0) \qquad\qquad car \quad P_{|kerL} = I \\ &= -\ sign\ detJ\ deg(\widetilde{G}_{|kerL}, \Omega \cap kerL, 0) \\ &= -\ deg(J\widetilde{G}_{|kerL}, \Omega \cap kerL, 0) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Par la condition (i) et l'invariance par homotopie on a

$$D_L(\widetilde{F}, \Omega) = D_L(\widetilde{H}, \Omega) \neq 0.$$

Donc l'équation $\widetilde{F}(x) = 0$ admet une solution dans $domL \cap \Omega$.□

Théorème 2.3.1. [15] ***(Théorème de continuation)***

Soit $\widetilde{F} = L - N$, avec $N \quad L-compact$ sur $\overline{\Omega}$, telles que les conditions suivantes soient satisfaites

a)$L(x) - \lambda N(x) \neq 0 \qquad \forall (x, \lambda) \in (domL \cap \partial\Omega)\times]0, 1[$;

b)$QN(x) \neq 0 \qquad$ *pour* $x \in kerL \cap \partial\Omega$;

c)$deg(JQN_{|kerL}, kerL \cap \Omega, 0) \neq 0$.

Alors l'équation $L(x) = N(x)$ *admet une solution dans* $domL \cap \overline{\Omega}$.

Preuve On applique la proposition (2.3.1), en posant

$$Y = ImQ \quad et \quad \widetilde{G} = QN.$$

Ceci implique

$$QN\ est\ L - compact\ sur\ \overline{\Omega}.$$

Donc les conditions (ii) et (iii) de la proposition (2.3.1) sont satisfaites .
Maintenant, si on suppose qu'il existe $(x, \lambda) \in (domL \cap \partial\Omega) \times [0, 1]$ tel que

$$L(x) - \lambda N(x) = (1 - \lambda)QN(x).$$

On applique Q et $(I - Q)$ sur les deux menbres de l'égalité on obtient

$$QN(x) = 0 \quad et \quad L(x) - \lambda N(x) = 0.$$

Ce qui contredit les conditions (a) et (b)
D'où, la condition (i) de la proposition (2.3.1) est satisfaite.
Donc par la proposition (2.3.1) l'équation $L(x) = N(x)$ admet une solution dans $domL \cap \overline{\Omega}$.□

Chapitre 3

Existence de solutions périodiques positives

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence des la solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles de la forme :

$$N'(t) = N(t)F(t, N(t)) \tag{3.1}$$

Où $F(t, z_1) \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), F(t + T, z_1) = F(t, z_1)$, et T une constante positive

3.1 Existence de solutions

Dans ce paragraphe on va montrer que l'équation (3.1) admet une solution T-périodique positive, on utilisera une approche pareille a celle utilisée dans [14].

Théorème 3.1.1.
i) $\exists C > 0,$ telle que

$$|F(t, e^{x(t)}| < C$$

Où $x(t)$ une fonction T-périodique de class C^1 ;
ii) $\exists R > 0$, tel que pour $x(t) \geq R$

$$F(t, e^{x(t)}) < 0 \qquad et \qquad F(t, e^{-x(t)}) > 0,$$

ou

$$F(t, e^{x(t)}) > 0 \qquad et \qquad F(t, e^{-x(t)}) < 0.$$

Alors, l'équation (3.1) admet au moins une solution T-périodique positive.
Preuve

On pose $N(t) = e^{x(t)}$, alore l'équation (3.1) devient :

$$x'(t) = F(t, e^{x(t)}) \tag{3.2}$$

On applique le théorème de continuation pour l'équation (3.2), pour cela on prend

$$X = \{x(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t+T) = x(t)\},$$

et

$$Z = \{z(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); z(t+T) = z(t)\}.$$

Les espaces Z et X munis des normes $\|x\|_0 = \max_{t\in[0.T]} |x(t)|, \quad \|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0\}$ respectivement sont des espaces de Banach.
Soient L :$domL \subset X \to Z, N : X \to Z$
Les deux opérateurs définis par

$$\begin{aligned} L(x)(t) &= x'(t) \\ N(x)(t) &= F(t, e^{x(t)}). \end{aligned}$$

Alors Ker $L = \{x \in X$; x une fonction constante$\}$,

$$ImL = \{z \in Z; \int_0^T z(t)dt = 0\}.$$

On remarque que cette application à une image fermée dans Z
Et

$$dimKerL = codimImL = 1.$$

D'où, L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.
Les applications suivantes designent des projections respectivement sur X et Y ;

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, x \in X, \quad Q(z) = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)dt, z \in Z.$$

On voit que

$$L_{|KerP} = L_P(x) = x'(t) \quad avec \quad \int_0^T x(t)dt = 0.$$

Et

$$QN(x) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt.$$

De plus :

$$\begin{aligned} K_P(z) &= L_P^{-1}(z) \\ &= \int_T^t z(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^T sz(s)ds. \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} L_P(x) &= x'(t) \qquad avec \qquad \int_0^T x(t)dt = 0 \\ &= z(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_P(x) = x'(t) \Rightarrow L_p^{-1}(z) &= x(t) \\ &= \int_0^t z(s)ds + x(0). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)dt = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_0^T [\int_0^t z(s)ds + x(0)]dt = 0 \\ &\Rightarrow \quad x(0) = -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t z(s)dsdt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} K_P(z) &= \int_0^t z(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t z(s)dsdt \\ &= \int_0^t z(s)ds - \int_0^T z(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^T sz(s)ds \\ &= \int_T^t z(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^T sz(s)ds. \end{aligned}$$

D'aprés le chapitre (2) on a

$$K_{p.Q}N = K_p(I-Q)N.$$

Alors, il suit que

$$
\begin{aligned}
K_{p.Q}Nx(t) &= K_pNx(t) - K_pQNx(t) \\
&= \int_T^t F(s, e^{x(s)})ds + \int_0^T sF(s, e^{x(s)})ds - \int_T^t [\frac{1}{T}\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt]ds \\
&- \frac{1}{T}\int_0^T [\frac{s}{T}\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt]ds \\
&= \int_T^t F(s, e^{x(s)})ds + \frac{1}{T}\int_0^T sF(s, e^{x(s)})ds + \frac{T-t}{T}\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt \\
&- \frac{1}{2}\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt \\
&= \int_T^t F(s, e^{x(s)})ds + \frac{1}{T}\int_0^T sF(s, e^{x(s)})ds + (\frac{1}{2} - \frac{t}{T})\int_0^T F(s, e^{x(s)})ds.
\end{aligned}
$$

Dons la suite on vérifie les conditions du théorème d'Ascoli-Arzela (voir l'annexe), d'un coté et pusique F est continue et de la condition (i) du théorème (3.1).on peut voir que $K_{P.Q}Nx$ est une fonction T-périodique de classe C^1 pour tout $x \in X$.
De l'autre coté, pour tout ensemble borné $\Omega \quad de \quad X$
On a

$$
\begin{aligned}
\|QNx\|_0 &\leq \max_{t\in[0.T]} \frac{1}{T}\int_0^T |F(t, e^{x(t)})|dt \\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
\|K_{P.Q}Nx\|_0 &\leq \max_{t\in[0.T]} |\frac{1}{T}\int_T^t F(s, e^{x(s)})ds + \frac{1}{T}\int_T^t sF(s, e^{x(s)})ds \\
&+ (\frac{1}{2} - \frac{t}{T})\int_0^T F(s, e^{x(s)})ds| \\
&\leq TC + TC + \frac{TC}{2} < 3TC.
\end{aligned}
$$

Alors, pour tout $x \in \Omega, \varepsilon > 0$, il existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C}$ tels que

Pour tous t_1, t_2, si $|t_1 - t_2| < \delta$ on a

$$\begin{aligned} |K_{P.Q}Nx(t_1) - K_{P.Q}Nx(t_2)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |F(s, e^{x(s)})|ds \\ &+ \frac{|t_1 - t_2|}{T} \int_0^T |F(s, e^{x(s)})|ds \\ &\leq 2C|t_1 - t_2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi par le théorème d'Ascoli-Arzela, pour tout sous ensemble borné $\Omega \subset X$ on a QN et $K_{P.Q}$ sont compacts sur $\overline{\Omega}$.

D'où, N et L-compact.

Donc, on peut appliquer le théorème de continuation, on considère une fammille d'équations

$$L(x) = \lambda N(x) \qquad avec \quad \lambda \in]0, 1[.$$

i.e

$$x'(t) = \lambda F(t, e^{x(t)}) \tag{3.3}$$

Supposons que $x(t) \in X$une solution de (3.3), par l'intégration du système (3.3) sur l'intervalle [0.T], on obtient

$$0 = \int_0^T x'(t)dt = \int_0^T F(t, e^{x(t)})dt. \tag{3.4}$$

De (3.3) et la condution (i), on a

$$\begin{aligned} \int_0^T |x'(t)|dt &= \lambda \int_0^T |F(t, e^{x(t)})|dt \\ &\leq TC \qquad car \quad \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De plus de (3.4) et (ii), on peut voir qu'il existe $t_1 \in]0, T[$ et une constonte $M_1 > 0$ tel que

$$x(t_1) < M_1.$$

En effet :

Si on suppose le contraire i.e $\forall t \in [0, T], \forall M_1 > 0, x(t) \geq M_1$, alors

Par la condition (ii) on trouve

$$\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt \quad > \quad 0$$

Ou

$$\int_0^T F(t, e^{x(t)})dt \quad < \quad 0$$

Cela condredit (3.4).
Donc $\quad \exists t_1 \in [0,T], M_1 > 0$ tel que

$$x(t_1) < M_1.$$

Alors il existe $\xi_1 \in [0,T]$,
tel que

$$x(\xi_1) < M_1. \tag{3.6}$$

De la même façon, on peut voir qu'il existe $\xi_2 \in [0,T], M_2 > 0$
tel que

$$x(\xi_2) > -M_2. \tag{3.7}$$

De plus on a

$$\int_{\xi_1}^t x'(t)dt \leq \int_0^T |x'(t)|dt$$

D'où

$$x(t) \leq x(\xi_1) + \int_0^T |x'(t)|dt.$$

Et par (3.5),(3.6) il suit que

$$x(t) < M_1 + TC.$$

D'autre coté on

$$\int_t^{\xi_2} x'(t)dt > -\int_0^T |x'(t)|dt.$$

i.e

$$x(t) > x(\xi_2) - \int_0^T |x'(t)|dt.$$

D'où, par(3.7),

$$x(t) > -M_2 - TC.$$

Ainsi

$$\| x \|_0 < \max\{M_1 + TC, M_2 + TC\} = M_3.$$

On prend

$$\Omega = \{x(t) \in X : \| x \| < M\}.$$

Où $\quad M = \max\{R, M_3, C\}$.
Lorsque $x \in \partial\Omega \cap KerL$ i.e x une fonction constante dans avec $\| x \|_1 = M$.
Alors par la conditon (ii) on a

$$\begin{aligned} QN(x) &= \int_0^T F(t, e^x)dt \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, on considère tous les cas correspondants à la condition (ii)
1$^{\text{er}}$cas : Si $x = M$ et $F(t, e^x) > 0$.
Soit l'homotopie H définie par

$$H(x, u) = ux + (1 - u)QN(x) avec \quad u \in [0, 1].$$

On voit que pour $x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}, \quad xH(x, u) > 0$.
Donc

$$H(x, u) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}.$$

Ainsi le degré $deg(H(., u), \Omega \cap \mathbb{R}, 0)$ est bien défini.
Et par l'invariance par homotopie, on obtient

$$deg(QN_{|KerL\cap\overline{\Omega}}, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) = deg(I, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0.$$

2$^{\text{ème}}$cas : Si $x = M$ et $F(t, e^x) < 0$.
Pour $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$, on définit l'homotopie

$$H(x, u) = -ux + (1 - u)QN(x) avec \quad u \in [0, 1].$$

Donc pour $x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}, \quad xH(x, u) < 0$.
D'où

$$H(x, u) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}.$$

Ainsi le degré $deg(H(.,u),\Omega\cap\mathbb{R},0)$ est bien défini.
Et par l'invaraiance par homotopie, on obtient

$$deg(QN_{|KerL\cap\overline{\Omega}},\Omega\cap\mathbb{R},0)=deg(-I,\Omega\cap\mathbb{R},0)\neq 0.$$

3$^{\text{ème}}$cas : Si $x=-M$ et $F(t,e^x)>0$ ou $F(t,e^x)<0$.
De la même façon on montre que

$$deg(QN_{|KerL\cap\overline{\Omega}},\Omega\cap\mathbb{R},0)\neq 0.$$

Alors, on voit que Ω satisfait toutes les conditions du théorème de continuation donc l'équation (3.2) admet au moins une solution **T**-périodique qu'on note par $x^*(t)$.
On pose $N^*(t)=e^{x^*(t)}$.
Ainsi, $N^*(t)$ est une solution **T**-périodique positive de l'équation (3.1). $\square$

Annexe

Définition 3.1.1. *: On dit qu'un ensemble est relativement compact si sa fermeture est compact.*

Définition 3.1.2. *: Soient E et F deux espaces normés, $T : E \longrightarrow F$ est appelé opérateur compact, s'il transforme tout ensemble borné de E en un ensemble relativement compact de F.*

Définition 3.1.3. *: On dit qu'un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est de rang fini, si la dimension de $T(E)$ est finie.*

Proposition 3.1.1. [2] *Un opérateur linéaire, continu de rang fini est compact.*

3.2 Théorème d'Ascoli

Définition 3.2.1. [3] *Soient $B_0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur E et à valeur dans F, H une partie de $B_0(E, F)$ et $x_0 \in E$. On dit que H est équicontinue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E; d_E(x_0, x) \leq \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$

Théorème 3.2.1. *:**(Théorème d'Ascoli,version** 1**)***
Soient E un espace metrique compact, F un espace metrique complet et soit H un sous ensemble de $C(E, F)$, alors

$$H \text{ est relativement compact} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ H \text{ est equicontinue} \\ 2)\ \forall x \in E, H(x) = \{f(x), f \in H\} \text{ est} \\ \ \text{relativement compact dans } F \end{cases}$$

Théorème 3.2.2. [3] *:**(Théorème d'Ascoli, Version 2)***
Soit K un espace métrique compact, H un sous ensemble borné de $C(K)$. On suppose que H est uniformément equicontinue, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in K, d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in H.$$

Alors H est relativement compact dans $C(K)$.

3.3 Théorème de la valeur moyenne

Théorème 3.3.1. [1] ***(Première formule)***
Soient f et g deux applications intégrables sur l'intervalle compact $[a, b]$, $a < b$, dans $\mathbb{R}$, l'application g étant positive. On désigne par m [resp.M] la borne inférieure [resp.superieure] de f sur $[a, b]$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$m \leq k \leq M \qquad et \qquad \int_a^b fg = k \int_a^b g.$$

Si f est continue, alors il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Théorème 3.3.2. [1]***(Deuxième formule)***
Soient f une application positive, décroissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, g une application intégrable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors il existe un point c de $[a, b]$ tel que on a :

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g.$$

3.4 Théorème d'inversion locale

Théorème 3.4.1. [2] *Soit $f : U \longrightarrow F$ une application de classe C^1 d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. On suppose qu'en un point $a \in U$, la differentielle $f'(a)$ de l'application f est un isomorphisme de E dans F. Alors il existe un voisinage ouvert V de a, $V \subset U$ tel que $W = f(V)$ soit un ouvert de F et que la restriction de f à V soit un difféomorphisme de classe C^1 de V dans W.*

Proposition 3.4.1 (13). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application dans $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. pour $x_0 \in \Omega$, on désignera par $Df(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})(x_0)(1 \leq i, j \leq n)$ la*

matrice jacobienne de f *en* x_0 *et par* $J_f(x_0) = detDf(x_0)$ *le déterminant jacobien de* f *en* x_0.
Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *est une valeur régulière, alors l'ensemble* $E = f^{-1}(y_0)$ *est fini.*

Preuve

$$\begin{aligned} y_0 \text{ régulière} &\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y_0), J_f(x_0) \neq 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y_0), \exists U \in V(x)\ telque\ f_{|}U \text{ est un homéomorphisme} \\ &\Rightarrow \text{tous les points de E sont isolés (E est un ensemble discret)} \end{aligned}$$

Or, f étant continue, l'ensemble E est fermé donc compact car inclus dans le borné Ω.
Enfin,

$$E\ compact\ et\ discret \Leftrightarrow E\ fini.$$

Bibliographie

[**1**] **E**. Ramis, C. Deschamps,J. Odoux, Cours de mathématiques, Dunod, Paris,1998.

[**2**] **G**. Christol, C.M. Marle, Calcul Différentiel, ellipses,Paris 1997.

[**3**] **H**. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, (1983).

[**4**] **H**. Poincaré, (1892,1899) Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (3 volumes). Gauthiers-Villars, Paris.

[**5**] **J**. Hadamard, (1910) Sur quelques applications de l'indice de Klonceker ; dans Şintroduction à la théorie des fonctions d'une variableŤ, par J. Tannery, Vol. II, Hermann, Paris, pp. 875-915

[**6**] **J**.M. Ortega, and W.G. Rheinboldt, Iterative Solution Of Nonlinear Equations In Several Variables, Academic press, New York, London. 1970.

[**7**] **L**.E.J.Brouwer, (1912) Uber abbildung von Mannigfaltigkeitein. Math. Ann 71 ; pp. 97-115.

[**8**] **L**. Krocker, (1869) Uber systeme von funktionen mehrer variabel n, Monatsberichte. Acad. wiss. Berlin, pp. 159-193, 688-698

[**9**] **M**. Nagumo, (1951) A theory of degree based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. 73, pp. 485-496. (1951) Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. 73, pp. 497-511.

[**10**] **O**. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et application aux problèmes elliptiques , Springer-Verlag, Paris, 1993.

[**11**] **P**. Böhl, (1904) Uber die bewegung eines machaniscsches systems in der nähe einer Gleichge-wichtslage. J.Reine Angew. Math. 127, 176, 179.

[**12**] **R**. E. Gaines, J. L. Mawhin, Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations, Springer, Berlin,1977.

[**13**] **S**. Djebali, le degré topologique théorie et applications. E.N.S. Kouba 2007.

[**14**] **W**.T. Li, H. F. Huo, Original periodicity and global attractivity of the nonimplusive delay differential equation, Nonlinear Analysis 59(2004) 857-877.

[**15**] **Z**. Yang, J. Cao, Sufficient conditions for the existence of positive periodic solution of a class of neutral dely models, Appl. Math. Comput .142 (2003) 123-142.