République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Introduction au problème de Yamabe sur une variété riemannienne

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : géométrie différentielle

par

Gasmi **B**ahia[1]

Sous la direction de

Mer B. Sadli

Soutenue le 14/07/2019 devant le jury composé de

monsieur **S**.Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mer **B**.Sadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mer **K**.Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mer **A**.Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : bahiagsm32@gmail.com

Dédicaces

Je rends grace a notre dieu les toutes miséricordes de m'avoir donné la force Et la savoir pour pouvoir venir a bout de ce travail je profite de cette Occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments Et de gratitude à :

Mes parents, les êtres les plus chers à mon cèur, qui m'a entouré avec Leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.

Mon très chère frère BADREDDINE, mes très chères sèurs et toute Ma famille.

Ma chère amie et mon compagnon dans ma carrière universitaire Safia Mes amies et tous les étudiants de Math, et tous les enseignants que J'ai eu pendant mes années.

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés Veuillez m'excuser.

Tous ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous Ceux qui m'aiment.

Remerciements

Louanges A Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force D'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maétre Prophéte Mohammed et sur sa famille et ses fidéles compagnons. Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et Reconnaissance à mon encadreur B.Sadli, et j'ai Particuliérement appréié son honnéteté mathématique et sa façon de Raisonner.

Je tiens à remercier le Mr S.Ouakkas d'avoir accepté de présider Mon jury. Je remercie K Djerfi, et A.Halimi d'avoir accepté D'examiner mon travail et de participer à mon jury. Je les remercie tous Pour leurs disponibilités et les remarques et les suggestions sur mon travail. Je salue chaleureusement tous mes amis et collèges qui sont toujours de mon coté Enfin, je remercie profondément tous les membres de ma famille pour leur soutien constant Durant toutes mes études. Ils occupent une place particuliére au fond de moi.

Table des matières

0.1 Introduction 5

1 Variétés Riemannienne **7**

1.1 Variété Riemannienne 7

1.2 Notions de Tenseur 8

1.2.1 Métrique Riemannienne 9

1.2.2 Connexion linéaire 9

1.2.3 Isométrie 10

1.2.4 Tenseur de torsion 11

1.3 Connexion de Levi-Civita 11

1.4 Les courbures 18

1.4.1 Tenseure de courbure 18

1.4.2 Courbure de Ricci 19

1.4.3 Courbure scalaire 20

1.5 Métrique conforme 23

1.5.1 Connexion de Levi-Civita d'une métrique conforme 24

1.5.2 Tenseur de courbure d'une métrique conforme 26

1.5.3 Courbure scalaire d'une métrique conforme Equation de Yamabe . . . 28

2 Espace de sobolev et EDP **33**

2.1 Espase de sobolev 33

2.1.1 Distributions 33

2.1.2 Dérivation des distribution 33

2.1.3 Espace de Sobolev $H^{1,p}(I)$ 34

2.1.4 Espace de Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$ 36

2.1.5 Espaces de Sobolev 37

2.2 Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires 38
2.2.1 Quelques exemples 40
2.3 Méthodes variationnelles 41
2.3.1 Exemple D'application 42

3 Problème de Yamabe **45**
3.1 L'invariant conforme de Yamabe 47
3.2 Etudier l'équation de Yamabe sur la sphère 48
3.3 Le travail de Trudinger 52
3.4 Résultats par Aubin 52
3.4.1 Théorèmes d'Aubin 53
3.5 Résultats de Schoen 55
3.6 Unicité des solutions de l'equation de Yamabe 56
3.6.1 Application 57

0.1 Introduction

Le but principal de ce mémoire est consiste à montrer comment certains problèmes classiques de géométrie Riemannienne peut reformuler à une équation différentielle partielle, ce problème est venu compléter la conjecture de Poincaré c'est le problème de Yamabe. Celui-ci consiste à chercher une métrique à courbure scalaire constante parmi la classe conforme d'une métrique donnée g, c'est-à-dire parmi l'ensemble des métriques qui sont obtenues par multiplication de g par une fonction lisse et positive :

$$[g] = \{\widetilde{g} = fg, pour \qquad f \in C^{\infty}(M), f > 0.\}$$

Dans le cas d'une surface de Riemann compacte, il existe toujours une métrique conforme avec courbure de Gauss constante égale à $1; 0$ ou -1, d'après le théorème d'uniformisation de Poincaré. De plus, cela implique que la surface de départ est conforme à un quotient respectivement de la sphère S^2, du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace hyperbolique H^2. Pour une variété compacte lisse de dimension supérieure ou égale à 3, le problème a été formulé par **H**.Yamabe [6] en 1960, puis résolu à travers les contributions de plusieurs mathématiciens, **N**. Trudinger, **T**. Aubin, **R**. Schoen ([11] [1] [10]). L'approche utilisée repose sur la compréhension d'un invariant conforme, la constante de Yamabe, qui est la borne inférieure de l'intégrale de la courbure scalaire parmi les métriques conformes de volume unitaire :

$$\mu(M, [g]) = \inf\left\{\int_M S_{\widetilde{g}} dv_{\widetilde{g}}, tq \qquad \widetilde{g} \in [g] \quad et \quad Vol_{\widetilde{g}}(M) = 1\right\}$$

Une métrique qui atteint cette constante s'appelle *métrique de Yamabe* et est à courbure scalaire constante, mais réciproquement, une métrique à courbure scalaire constante n'est pas nécessairement une métrique de Yamabe, car elle n'est pas nécessairement minimisant. Ce mémoire est constitué de trois chapitres :
Le chapitre 1 est consacré à l'étude des variétés Riemannienne et on va insister sur Les courbures (scalaire) on va parle aussi de la métrique conforme qui est très importante et

on va préciser la relation entre la courbure scalaire d'une métrique et la courbure scalaire d'une métrique conforme, elle forme exactement l'équation de Yamabe

Le chapitre 2 traite essentiellement d'inégalités de Sobolev sur les variétés qui est de la forme

$$\Big\{ f \in C^{\infty}(M), |\nabla^{l} f| \in L^{p}(M) \qquad \forall 0 \leq l \leq k \Big\}$$

Ainsi on va parler d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.) elliptiques puis la méthode variationnelle, ce concept prendra également une part importante de l'intérêt du troisième chapitre pour résoudre l'équation de Yamabe

Le chapitre 3 combine l'évolution de la solution de problème de Yamabe et La motivation pour considérer $n \geq 3$ venait du fait que Le théorème d'uniformisation de Poincaré est valable en dimension deux et sur toute surface Riemannienne compacte il existe une métrique à courbure de Gauss constante, la réponse à la question de H. Yamabe est positive, et est due aux travaux de plusieurs mathématiciens, T. Aubin, N. Trudinger, R. Schoen, pendant vingt ans. Nous soulignons l'étude d'un invariant conforme, la constante de Yamabe, et de sa relation avec la constante de Yamabe de la sphère, en plus on va voir Comment résoudre complètement le problème de Yamabe au fil des ans.

Chapitre 1

Variétés Riemannienne

une variété riemannienne est une variété différentielle munie d'une structure supplémentaire appelée métrique riemannienne permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs tangents à la variété en un même point. Cette métrique permet de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété, les concepts fondamentaux qu'on associe à la variété riemannienne sont la connexion de Levi-Civita et la courbure.

1.1 Variété Riemannienne

Soient $V_1, V_2, ..., V_k$ et W des espaces vectoriels, soit F une application de $V_1 \times ... \times V_k \to W$. On dit que l'application F est k-linéaire ou (multilinéaire) si elle est linéaire sur chaque variable i.e

$$F(v_1, ..., \alpha v_{i_1} + \beta v_{i_2}, ..., v_k) = \alpha F(v_1, ..., v_{i_1}, ..., v_k) + \beta F(v_1, .., v_{i_2}, ..., v_k)$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $i = 1, ..., k$. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'application $\omega : V \to \mathbb{R}$ est applée un covecteur, l'ensemble des covecteurs est applée le dual de V noté V^*.
On va considérer que $\langle \omega, v \rangle = \langle v, \omega \rangle = \omega(v) \in \mathbb{R},\ v \in V,\ \omega \in V^*$.

Proposition 1.1.1. *Si $(v_1, ..., v_n)$ est une base de V espace vectoriel de dimension n, alors $(w^1, ..., w^n)$ est une base de V^* et on a $w^j(v_i) = \delta_{ij}$. En particulier, dim V = dim V^*.*

1.2 Notions de Tenseur

Définition 1.2.1. *1. Un $k-$ tenseur covariant sur V est une application $k-$ linaire $V^k \to \mathbb{R}$ tel que $V^k = \underbrace{V \times ... \times V}_{k\ fois}$. On note $T^k(V)$ l'ensemble des tenseurs $k-$ covariant sur V*

2. *Un $l-$ tenseur contravariant est une application linéaire sur $V^{*l} \to \mathbb{R}$. On note $T_l(V)$ l'ensemble des tenseurs $l-$ contravariant sur V*
3. *Un $k-$ tenseur covariant et $l-$ tenseur contravariante est une application $(k+l)-$ linaire sur $V^k \times V^{*l} \to \mathbb{R}$.*
   un tenseur de type (k,l) est $k-$ covariant et $l-$ contravariant. On note $T_l^k(V)$ l'ensemble des tenseurs de type (k,l).
4. *Par convention $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$.*

Définition 1.2.2. *le produit tensoriel de deux tenseurs $F \in T_l^k(V)$ et $G \in T_q^p(V)$ est le tenseur noté $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$*

$$F \otimes G(v_1, ..., v_k, ..., v_{k+p}, w^1, ..., w^l, ..., w^{l+q}) = F(v_1, ..., v_k, w^1, ..., w^l) G(v_{k+1}, ..., v_{k+p}, w^{l+1}, ..., w^{l+q})$$

Lemme 1.2.1. *Si $(v_1, ..., v_n)$ est la base de V et $(\omega_1, ..., \omega_n)$ la base duale correspondante à V (i.e. $\omega^i(v_j) = \delta_j^i$), alors le tenseur*

$$w^{i_1} \otimes ... \otimes w^{i_k} \otimes v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l},\ 1 \leq j_p,\ i_q \leq n$$

forme une base de $T_l^k(V)$. Par conséquent, dim $T_l^k(V) = n^{k+1}$ Tenseurs sur une variété

Définition 1.2.3. *Pour tout $p \in M$, définissons l'espace vectoriel*

$$T_p^{(s,r)}M = \underbrace{T_pM \otimes ... \otimes T_pM}_{s\ fois} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes ... \otimes T_p^*M}_{r\ fois}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)}M$ est un tenseur de type (s,r) au dessus de p. Dans une base associée à des coordonnées (x_i) au voisinage de p, il s'écrit

$$T_{|p} = T_{j_1...j_r}^{i_1...i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes ... \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

1.2.1 Métrique Riemannienne

Définition 1.2.4.
On appelle métrique riemannienne de classe C^p sur M la donnée pour tout $m \in M$ d'un produit scalaire g_m (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur T_mM dépendant de façon C^p de m (i.e. pour toute carte (U, φ) de classe C^{p+1} sur M), on suppose que la fonction $m \mapsto g_m(\frac{\partial}{\partial x_i}(m), (\frac{\partial}{\partial x_j}(m))) = g_{ij}(m)$ est C^p de U dans $\mathbb{R}$. Les coefficients de la matrice $g_{ij}(m)$ sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (U, φ).

Définition 1.2.5. *On appelle variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 1.2.1. *sur $M = \mathbb{R}$ on pose $g(m) = h(m)dx^2$ où $h : R \to \mathbb{R}_*^+$ est une fonction C^p et dx^2 est la forme quadratique sur $\mathbb{R} \simeq T_m\mathbb{R}$ définie par $dx^2(u, u) = u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors g est une métrique Riemannienne C sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.2.1. *Si $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs sur M, alors on a*

$$g_m(X(m), Y(m)) = \sum_i g_{ij}(m) X_i(m) Y_j(m)$$

Exemple 1.2.2. *Si (U, x) une carte sur M, alors $\partial_1, ..., \partial_n$ forme une base pour T_pM sa base duale est $dx_{j_{j=1,...,n}}$, alors la métrique g est donnée par*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

1.2.2 Connexion linéaire

Définition 1.2.6. *Une connexion linéaire sur une variété M est une application*

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X (V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2. $\nabla_X (f.V) = X(f) V + \nabla_X V$
3. $\nabla_{X+fY} V = \nabla_X V + f \nabla_Y V$,

pour tout $V, W, X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^{\infty}(M)$

Définition 1.2.7. *Soient* ∇ *une connexion sur une variété* M *de dimension* n *et* $(\partial_1, ..., \partial_n)$ $\left(resp\left(dx^1, ..., dx^n\right)\right)$ *une base locale de section de* $\Gamma(TM)$ $(resp \quad \Gamma(T^*M))$. *On défini les symboles de Christoffel par*

$$\Gamma_{ij}^{k} \quad = \quad dx^k\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)$$

Soit g une métrique Riemannienne sur M, On dit que la métrique g est compatible avec la connexion ∇ (ou parallèle), si

$$\nabla g \quad = \quad 0$$

i.e

$$\left(\nabla_X g\right)(V, W) \quad = \quad 0$$

ou

$$X\left(g(V, W)\right) \quad = \quad g\left(\nabla_X V, W\right) + g\left(V, \nabla_X W\right)$$

pour tout $X, V, W \in \Gamma(TM)$.

1.2.3 Isométrie

Définition 1.2.8. *Soit* $f : M \to (N, h)$ *un difféomorphisme local sur* M *et* h *une métrique sur* N. *On définit une métrique* $g = f^*h$ *sur* M, *appelée métrique tirée en arriére de* h *par* f, *en posant, pour tout* $(u, v) \in T_mM$

$$(f^*h)_m(u, v) = h(d_m f(u), d_m f(v))$$

Définition 1.2.9. $f : (M, g) \to (N, h)$ *est une isométrie* (*resp. une isométrie locale*) *ssi* f *est un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local) et* $g = f^*h$.

Exemple 1.2.3. $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ *est localement isométrique, mais pas isométrique.*

1.2.4 Tenseur de torsion

Définition 1.2.10. *Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M. Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$-bilinéaire deffinie par*

$$\begin{array}{rccc} T: & \Gamma^1(TM)\times\Gamma^1(TM) & \longrightarrow & \Gamma^1(TM) \\ & (X,Y) & \longmapsto & T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \end{array}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$.

Remarque 1.2.2.

1. *T est un champ de tenseur de type $(1,2)$,*
2. *$T(X,Y)=-T(Y,X)$ pour tout $X,\ Y\in\Gamma^1(TM)$ (T est antisymétrique)*
3. *La connexion ∇ est dite sans torsion si $T\equiv 0$ (i.e) pour tout $X,\ Y\in\Gamma^1(TM)$: $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$*
4. *Pour tout $x\in M$,le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectoriel*

$$\begin{array}{rccc} T_x: & T_xM\times T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ & (v,w) & \longmapsto & (\nabla_X Y)_x-(\nabla_Y X)_x-[X,Y]_x \end{array}$$

où $X, Y\in\Gamma^1(TM)$, tel que $X_x=v$ et $Y_x=w$ indépendament du choix de X et Y).

1.3 Connexion de Levi-Civita

Théorème 1.3.1. *Sur toute variété Riemannienne (M^n,g), il existe une unique connexion linéaire $\bigtriangledown$ telle que pour tout $(X,Y,Z)\in\mathfrak{X}(M)^3$ on a*

$$\begin{array}{rcll} 1/\bigtriangledown_X Y & = & \bigtriangledown_Y X+[X,Y], & \textit{sans torsion}(T\equiv 0) \\ 2/Xg(Y,Z) & = & g(\bigtriangledown_X Y,Z)+g(Y,\bigtriangledown_X Z), & \textit{compatibilite avec g} \end{array}$$

$\bigtriangledown$ est appellée connexion de Levi-Civita de la métrique g.

Preuve

Unicité :

Si une telle connexion existe ,on a

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) &= g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)+g(\nabla_Y Z,X) \\ &\quad +g(Z,\nabla_Y X)-g(\nabla_Z X,Y)-g(X,\nabla_Z Y) \\ &= g(Y,[X,Z])+g(X,[Y,Z])+g(Z,[X,Y])+2g(Z,\nabla_Y X) \end{aligned}$$

parceque

$\nabla_X Z-\nabla_Z X=[X,Z]\,,\nabla_Y Z-\nabla_Z Y=[Y,Z]\,,\nabla_X Y+\nabla_Y X=[X,Y]+2\nabla_Y X$. On a donc

$$g(Z,\nabla_X Y)=\frac{1}{2}\left[Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)-g(X,[Y,Z])-g(Y,[X,Z])-g(Z,[X,Y])\right] \tag{1.1}$$

ce qui montrer que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.

Existance :

L'identité 1.1 implique qu'il y'a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coéfficients de matrice de g

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}).$$

de cette expression suit la définition des Γ_{ij}^k en termes des g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_l(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l})g^{lk}.$$

Calculs en coordonnées locales

Soit (U,φ) une carte sur M et (g_{ij}) les coefficients de la métriques g dans la carte on définit sur $\varphi(U)$ des fonctions

$$\nabla_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k})$$

où les coefficients g^{ij} sont ceux de la matrice $(g_{ij})^{-1}$. On a alors $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum\limits_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}$. Les fonctions Γ_{ij}^k sont appelées les symboles de Christoffel de la métrique g dans la carte (U,φ).

Remarque 1.3.1.

1. *Pour tout* (i,j,k),*on a* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2. $(\nabla_X Y)(m)$ *ne dépend que des* $\Gamma_{ij}^k(m)$, *de* $X(m)$ *et de la connaissance de* Y *le long d'une courbe* γ *de* M *vérifiant* $\gamma(0) = m$ *et* $\gamma'(0) = X(m)$.

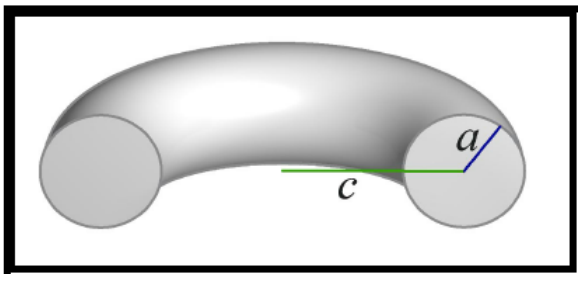
Exemple 1.3.1.

1. *On définit une connexion linéaire* $\overline{\nabla}$ *sur* $\mathbb{R}$ *en posant* $\overline{\nabla}_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j$, *où* $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ *et* $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$. *Cette connexion vérifie*

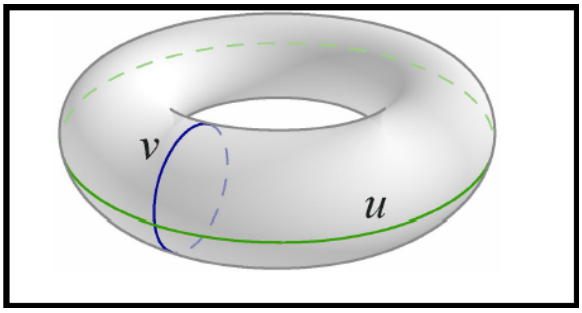
$$\begin{aligned} 1/ \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X &= \sum_{i,j=1}^n (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) e_j = [X,Y], \\ 2/\ Z.g_{\mathbb{R}^n}(X,Y) &= \sum_{i,j=1}^n (Z_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i Y_j} - Z_i X_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}) \\ &= g_{\mathbb{R}^n}(\overline{\nabla}_Z X, Y) + g_{\mathbb{R}^n}(X, \overline{\nabla}_Z Y) \end{aligned}$$

2. *Si* $M = \mathbb{R}^n$ *et* $g = g_{\mathbb{R}^n}$, *alors dans la carte* $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ *on a* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *et donc* $\Gamma_{ij}^k = 0$ *pour tout* (i,j,k). *La connexion de Levi-Civita de* $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ *est donc* $\overline{\nabla}$.

Exemple 1.3.2. ***(Le tore)***
Notre modéle d'un tore a un rayon majeur c et un rayon mineur a. Nous considérons seulement le tore annulaire, pour quel $c > a$



Nous utilisons un système coordonnée u, v pour lequel des plans de constante u traversent l'axe du tore



Nous paramétrons la surface X par

$$X(u,v) = \begin{cases} x = (c + a\cos v)\cos u \\ y = (c + a\cos v)\sin u \\ z = a\sin v \end{cases}$$

Nous commençons par calculer

***1/la métrique induite** :*

Soit $g_{eu} = dx^2 + dy^2 + dz^2$ la métrique Euclidienne sur $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} dx = -(c + a\cos v)\sin u du - a\cos u \sin v dv \\ dy = (c + a\cos v)\cos u du - a\sin u \sin v dv \\ dz = 0du + a\cos v dv \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx^2 = (-(c + a\cos v)\sin u)^2 du^2 + (-a\cos u \sin v)dv^2 \\ dy^2 = ((c + a\cos v)\cos u)^2 du^2 + (-a\sin u \sin v)^2 dv^2 \\ dz^2 = 0du^2 + (a\cos v)^2 dv^2 \end{cases}$$

Alors, $g_{eu} = (c + a\cos v)^2 du^2 + a^2 dv^2$.

La matrice et son inverse sont données par :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c + a\cos v)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix};$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(c+a\cos v)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix},$$

les dérivées partielles sont

$$g_{ij,u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

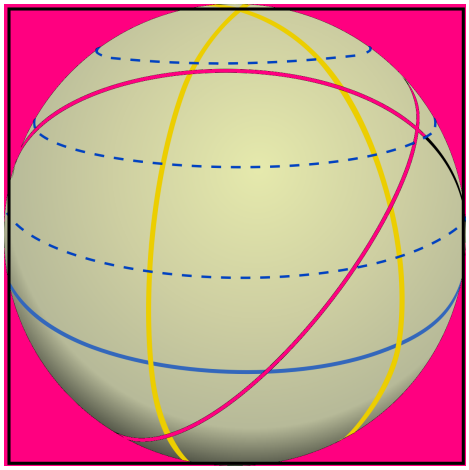
et

$$g_{ij,v} = \begin{bmatrix} -2a\cos v(c + a\cos v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. les symbole de Christoffel :

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu} &= \frac{1}{2}\left[g^{uu}(g_{uu,u} + g_{uu,u} - g_{uu,u}) + g^{uv}(g_{vu,u} + g_{vu,u} - g_{uu,v})\right] \\
\Gamma^u_{uu} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(0 + 0 - 0) + 0(g_{vu,u} + g_{vu,u} - g_{uu,v})] \\
\Gamma^u_{uu} &= \Gamma^v_{vv} = 0 \\
\Gamma^u_{uv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uv,u} + g_{uu,v} - g_{uv,u}) + g^{uv}(g_{vv,u} + g_{vu,v} - g_{uv,v})] \\
\Gamma^u_{uv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(0 + g_{uu,v} - 0) + 0(g_{vv,u} + g_{vu,v} - g_{uv,v})] \\
\Gamma^u_{uv} &= -\frac{a\sin v}{(c + a\cos v)} \\
\Gamma^u_{vu} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uu,v} + g_{uv,u} - g_{vu,u}) + g^{uv}(g_{vu,v} + g_{vv,u} - g_{vu,v})] \\
\Gamma^u_{vu} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uu,v} + 0 - 0) + 0(g_{vu,v} + g_{vv,u} - g_{vu,v})] \\
\Gamma^u_{vu} &= \Gamma^u_{uv} = -\frac{a\sin v}{(c + a\cos v)} \\
\Gamma^u_{vv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uv,v} + g_{uv,v} - g_{vv,u}) + g^{uv}(g_{vv,v} + g_{vv,v} - g_{vv,v})] \\
\Gamma^u_{vv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(0 + 0 - 0) + 0(g_{vv,v} + g_{vv,v} - g_{vv,v})] \\
\Gamma^u_{vv} &= 0 \\
\Gamma^v_{uu} &= \frac{1}{2}[0(g_{uu,u} + g_{uu,u} - g_{uu,u}) + g^{vv}(0 + 0 - g_{uu,v})] \\
\Gamma^v_{uu} &= \frac{1}{a}\sin v(c + acosv) \\
\Gamma^v_{uv} &= \frac{1}{2}[g^{vu}(g_{uv,u} + g_{uu,v} - g_{uv,u}) + g^{vv}(g_{vv,u} + g_{vu,v} - g_{uv,v})] \\
\Gamma^v_{uv} &= \frac{1}{2}[0(g_{uv,u} + g_{uu,v} - g_{uv,u}) + g^{vv}(0 + 0 - 0)] \\
\Gamma^v_{uv} &= \Gamma^v_{vu} = 0
\end{aligned}$$

Exemple 1.3.3. *(la sphère S^2)*



Nous paramètrons la surface X par

$$X(u,v) = \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Calculons dx, dy et dz en termes de $dr, d\theta$ et $d\varphi$ nous obtenons

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{1.2}$$

Le long de la sphère $r \equiv 1$ et donc $dr \equiv 0$. Ainsi, l'équation 1.2 devient

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

nous avons, dans les composantes de la matrice et son inverse sont donnée

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

2/ les symbole de Christoffel :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}[g_{11}(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1})+g_{12}(g_{12,1}+g_{12,1}-g_{11,2})] \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}[(0+0-0)+0(0+0-0)] \\
\Gamma^1_{11} &= \Gamma^2_{22}=0 \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}[g^{11}(g_{11,2}+g_{21,1}-g_{21,1})+g^{12}(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2})] \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}[1(0+0-0)+0(0+2\cos 1\sin 1-0)] \\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21}=0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}[g^{11}(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1})+g^{12}(g_{21,2}+g_{21,2}-g_{22,2})] \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}[1(0+0-2\cos 1\sin 1)+0(0+0-0)] \\
\Gamma^1_{22} &= -\cos\theta\sin\theta \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}[g^{21}(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1})+g^{22}(g_{12,1}+g_{12,1}-g_{11,2})] \\
\Gamma^2_{11} &= 0 \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}[g^{21}(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1})+g^{22}(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2})] \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}[0(0+0-0)+\frac{1}{\sin^2\theta}(0+2\cos\theta\sin\theta-0)] \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

donc ona les Γ^k_{ij} *sont nuls sauf* $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$ *et* $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}=\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

1.4 Les courbures

1.4.1 Tenseure de courbure

Définition 1.4.1. *Soit M une variété muni d'une connexion linéaire ∇. On définit le tenseur de courbure, $R : \Gamma(\mathrm{T}M) \times \Gamma(\mathrm{T}M) \times \Gamma(\mathrm{T}M) \to \Gamma(\mathrm{T}M)$, associé à ∇, par :*

$$R(X,Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X,Y]} V$$

pour tout $X, Y, V \in \Gamma(\mathrm{T}M)$.

Propriétés 1.4.1.

1. *La courbure R est $C^\infty(M)$-3 linéaire*
2. *$R(X,Y)V = -R(Y,X)V$ pour tout $X, Y, V \in \Gamma(\mathrm{T}M)$ $\quad$ $(antisymtrie)$*

Définition 1.4.2. *Sur une variété Riemannienne (M, g), le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne.*
Le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk} \partial_l$$

$$R^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n} \left\{ \Gamma^l_{im}\Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} \right\}$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale de champs de vecteurs sur M.

Proposition 1.4.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :*

1. *R est un champ de tenseurs de type $(3, 1)$.*
2. *$g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$.*
3. *$g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$.*
4. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

5. *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

$\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(\mathrm{T}M)$.

1.4.2 Courbure de Ricci

Définition 1.4.3. *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^m, g) de dimension m est un tenseur de type $(0,2)$ défini par*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= traceR(*,X)Y \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i), \end{aligned}$$

pour tout $X,Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$,où (e_i) est une base orthonormée locale sur M, et

$$\begin{aligned} R(*,X)Y : \Gamma(\mathrm{TM}) &\to \Gamma(\mathrm{TM}) \\ Z &\mapsto R(Z,X)Y \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} Ric : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\mapsto Ric(X,Y) \end{aligned}$$

La courbure de Ricci, Ric est forme bilinéaire symétrique, en effet

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= Ric(Y,X) \end{aligned}$$

Relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1..m}$, *les composantes du tenseur de Ricci sont donnés par*

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= traceR\left(*, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= g^{kl}g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= g^{kl}R^s_{kij}g_{ls} \\ &= \delta_{ks}R^s_{kij} \\ &= R^k_{kij} \end{aligned}$$

Définition 1.4.4. *Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne* (M^m, g), *est un tenseur de type*$(1,1)$, *défini par*

$$Ricci\,(X) = \sum_{i=1}^{m} R\,(X, e_i)\,e_i$$

pour tout $X \in \gamma\,(\mathrm{T}M)$, *où* $(e_i)_{i=1..m}$ *est une base orthonormée locale sur* M.

Remarque 1.4.1. *Soit* (M^m, g) *une variété Riemannienne, de dimension* m. *Pour tout* $X, Y \in \Gamma\,(\mathrm{T}M)$ *on a*

$$Ric\,(X, Y) = g\,(Ricci\,(X), Y)$$

1.4.3 Courbure scalaire

Définition 1.4.5. *On appelle courbure scalaire d'une variété riemannienne* (M^m, g) *la fonction définie sur* M *par*

$$S = trace_g Ric = \sum_{i,j=1}^{m} g\,(R\,(e_i, e_j)\,e_j, e_i)$$

où $(e_i)_{i=1..m}$ *une base orthonormée locale sur* M.

Proposition 1.4.2. *Une variété Riemannienne* (M, g) *est de courbure sectionnelle constante* K *si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$R\,(X, Y)\,Z = K\,(g\,(Y, Z)\,X - g\,(X, Z)\,Y)\,.$$

pour tout X, Y *et* $Z \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

Corollaire 1.4.1. *Si* (M^m, g) *est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante* K*, alors pour tout* $X, Y \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a*

1. $Ricci(X) = (m-1)KX$,
2. $Ricci(X, Y) = (m-1)Kg(X, Y)$,
3. $S = m(m-1)K$.

Exemple 1.4.1. *L'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *muni du repère canonique* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$*, du produit scalaire euclidien* $g = g_{ij} dx_i \otimes dx_j$*, où* $g_{ij} = \delta_{ij}$*. On vérifie immédiatement que* $\Gamma^k_{ij} = 0$*,* $R^l_{ijk} = 0$ *donc* $R = 0$*. En particulier, la courbure sectionnelle de* $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est nulle.*

Exemple 1.4.2. *Soit* $M = S^n$ *on va calculer sa courbure scalaire, tout d'abord on va passé par le tenseur de Ricci qui est calculé à partir du tenseur de Riemann, et cela dépend des symboles de Christoffel qui on a calculer dans l'exemple (1.3.3)* $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$
$\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
La métrique pour une sphère est

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.3}$$

où r *est le rayon constant de la sphère, donc*

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

nous pouvons prendre pour être $R_{\theta\phi\theta\phi}$*, qui peut être calculée à partir de*

$$R^i_{jlm} = \partial_l \Gamma^i_{mj} - \partial_m \Gamma^i_{lj} + \Gamma^k_{mj}\Gamma^i_{lk} - \Gamma^k_{lj}\Gamma^i_{km}$$

En abaissant le premier indice, nous avons

$$\begin{aligned} R_{\theta\varphi\theta\varphi} &= g_{\theta i} R^i_{\varphi\theta\varphi} \\ &= g_{\theta\theta} R^\theta_{\varphi\theta\varphi} \\ &= r^2 \left(\partial_\theta \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^\theta_{\theta\varphi\varphi} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} \Gamma^\theta_{\theta\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \right) \\ &= r^2 \left(-\cos 2\theta - 0 + 0 - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \right) \\ &= r^2 \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos^2\theta \right) \\ &= r^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant trouver le tenseur de Ricci.

$$R_{ij} = g^{ab} R_{aibj}$$

Puisque la métrique est diagonale et g^{ab} est l'inverse de g_{ab}, nous avons

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{g^{\theta\theta}} = \frac{1}{r^2}$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{g^{\varphi\varphi}} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

donc, en utilisant les symétries du tenseur de Riemanne,

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= g^{ab} R_{a\theta b\theta} \\ &= g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} r^2 \sin^2\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= g^{ab} R_{a\varphi b\varphi} \\ &= g^{\theta\theta} R_{\theta\varphi\theta\varphi} \\ &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

$$R_{\theta\varphi} = R_{\varphi\theta} = 0$$

Nous pouvons également obtenir la version du tenseur de Ricci à l'étage supérieur :

$$\begin{aligned} R^{\theta\theta} &= g^{\theta i} g^{\theta j} R_{ij} \\ &= g^{\theta\theta} g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} \\ &= \frac{1}{r^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{\varphi\varphi} &= g^{\varphi\varphi} g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} \\ &= \frac{1}{r^4 \sin^2\theta} \end{aligned}$$

Le courbure scalaire est

$$\begin{aligned} R &= g_{ij} R^{ij} \\ &= r^2 \frac{1}{r^4} + r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r^4 \sin^2\theta} \\ &= \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, la courbure d'une sphère diminue à mesure que son rayon augmente.

1.5 Métrique conforme

Définition 1.5.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. Deux métriques g et $\widetilde{g}$ sur M, sont dit conforme s'il existe une fonction positive non nulle $f \in C^\infty(M)$ telle que*

$$\widetilde{g} = f.g \tag{1.4}$$

ie

$$\widetilde{g}(X, Y) = f.g(X, Y) \tag{1.5}$$

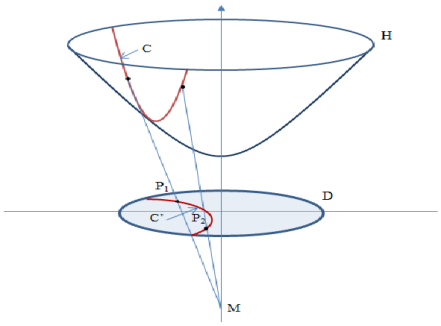
pour tout $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$. f est appelé fonction de dilatation.

Exemple 1.5.1. *Exemple de transformation conforme : le disque de Poincaré Le disque de Poincaré est une représentation conforme d'une nappe de l'hyperboloide dans un disque. Une*

surface hyperbolique est une variété de dimension 2 *de courbure négative. Soit une surface hyperbolique* $\mathbb{H}$ *d'axe* OZ *et d'équation :*

$$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Soit m *un point de l'axe* OZ *de coordonnée négative. Quelque soit le point* p *appartenant à* **H**, *le segment* $[mp]$ *coupe le plan* XOY *en un point d'un disque* D *du plan* xoy *(voir figure suivante).*



1.5.1 Connexion de Levi-Civita d'une métrique conforme

Proposition 1.5.1. *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m *et* $\widetilde{g} = f.g$ *une métrique conforme. Alors, pour tout* $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$, *nous avons :*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{X(f)}{2f} Y + \frac{Y(f)}{2f} X - \frac{g(X,Y)}{2f} grad(f). \tag{1.6}$$

où $\nabla, \widetilde{\nabla}$ *désignent les connexions de Levi-Civita associeés à* g *et* $\widetilde{g}$ *respectivements.*

Preuve 1.5.1. *Soient $X, Y, Z \in \Gamma(\mathrm{T}M)$. En utilisant la formule de Kozul , on obtient*

$$\begin{aligned}
2\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\right) &= X\left(\widetilde{g}(Y,Z)\right) + Y\left(\widetilde{g}(Z,X)\right) - Z\left(\widetilde{g}(X,Y)\right) + \widetilde{g}(Z,[X,Y]) + \widetilde{g}(Y,[Z,X]) \\
&\quad -\widetilde{g}(X,[Y,Z]) \\
&= X\left(fg(Y,Z)\right) + Y\left(fg(Z,X)\right) - Z\left(fg(X,Y)\right) + fg(Z,[X,Y]) \\
&\quad +fg(Y,[Z,X]) - fg(X,[Y,Z]) \\
&= f\left\{X\left(g(Y,Z)\right) + Y\left(g(Z,X)\right) - Z\left(g(X,Y)\right) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X])\right\} \\
&- f\left\{g(X,[Y,Z])\right\} + X(f)\,g(Y,Z) + Y(f)\,g(Z,X) - Z(f)\,g(X,Y) \\
&= 2fg\left(\nabla_X Y, Z\right) + X(f)\,g(Y,Z) + Y(f)\,g(Z,X) - Z(f)\,g(X,Y) \\
&= 2fg\left(\nabla_X Y, Z\right) + 2fg\left(\frac{X(f)}{2f}Y, Z\right) + 2fg\left(\frac{Y(f)}{2f}X, Z\right) \\
&\quad -g(X,Y)\,g(grad(f), Z) \\
&= 2f\left\{g(\nabla_X Y, Z) + g(\frac{X(f)}{2f}Y, Z) + g(\frac{Y(f)}{2f}X, Z) - g(\frac{g(X,Y)}{2f}grad(f), Z)\right\} \\
&= 2\widetilde{g}\left(\nabla_X Y + \frac{X(f)}{2f}Y + \frac{Y(f)}{2f}X - \frac{g(X,Y)}{2f}grad(f), Z\right)
\end{aligned}$$

Corollaire 1.5.1. *Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension m et $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ une métrique conforme à g. Alors, pour tout $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$, nous avons :*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X,Y)\,grad(\gamma) \tag{1.7}$$

où $\nabla, \widetilde{\nabla}$ désignent les connexions de Levi-Civita associeés à g et $\widetilde{g}$ respectivement.

Dans toute la suite, on considère le cas de la métrique conforme où la fonction de dilatation est de la forme $f = e^{2\gamma}$

1.5.2 Tenseur de courbure d'une métrique conforme

Proposition 1.5.2. *Soient (M,g) une variété Riemannienne et $\widetilde{g}=e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g. Alors, pour tout $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ on a :*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z+(\nabla_Y Z)(\gamma)X-(\nabla_X Z)(\gamma)Y+X(Z(\gamma))Y\\ &- Y(Z(\gamma))X+Y(\gamma)Z(\gamma)X-X(\gamma)Z(\gamma)Y\\ &+ g(X,Z)\left[\nabla_y grad(\gamma)+\mid grad(\gamma)\mid^2 Y\right]-g(X,Z)\left[\nabla_X grad(\gamma)+\mid grad(\gamma)\mid^2 X\right]\\ &+ [X(\gamma)g(Y,Z)-Y(\gamma)g(X,Z)]\,grad(\gamma)\end{aligned}$$

ou R et $\widetilde{R}$ désignent les tenseurs de courbures associés à g et $\widetilde{g}$ respectivement.

Preuve 1.5.2. *Par définition du tenseur de courbure, nous avons :*

$$\widetilde{R}(X,Y)Z=\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z-\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{1.8}$$

Du Corollaire précident, on obtient :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z &= \widetilde{\nabla}_X\left(\nabla_Y Z+Y(\gamma)Z+Z(\gamma)Y-g(Y,Z)\,grad(\gamma)\right)\\ &= \nabla_X\nabla_Y Z+X(\gamma)\nabla_Y Z+(\nabla_Y Z)(\gamma)X-g(X,\nabla_Y Z)\,grad(\gamma)\\ &+ X(Y(\gamma))Z+Y(\gamma)\left[\nabla_X Z+X(\gamma)Z+Z(\gamma)X-g(X,Z)\,grad(\gamma)\right]\\ &+ X(Z(\gamma))Y+Z(\gamma)\left[\nabla_X Y+X(\gamma)Y+Y(\gamma)X-g(X,Y)\,grad(\gamma)\right]\\ &\quad -Xg(Y,Z)\,grad(\gamma)\\ &- g(Y,Z)\left[\nabla_X grad(\gamma)+X(\gamma)\,grad(\gamma)+grad(\gamma)(\gamma)X-g(X,grad(\gamma))\,grad(\gamma)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z &= \nabla_Y\nabla_X Z+Y(\gamma)\nabla_X Z+(\nabla_X Z)(\gamma)Y-g(Y,\nabla_X Z)\,grad(\gamma)\\ &+ Y(X(\gamma))Z+X(\gamma)\left[\nabla_Y Z+Y(\gamma)Z+Z(\gamma)Y-g(Y,Z)\,grad(\gamma)\right]\\ &+ Y(Z(\gamma))X+Z(\gamma)\left[\nabla_Y X+Y(\gamma)X+X(\gamma)Y-g(Y,X)\,grad(\gamma)\right]\\ &\quad -Yg(X,Z)\,grad(\gamma)\\ &- g(X,Z)\left[\nabla_Y grad(\gamma)+Y(\gamma)\,grad(\gamma)+grad(\gamma)(\gamma)Y-g(Y,grad(\gamma))\,grad(\gamma)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z+(\nabla_X Y)(\gamma)Z-(\nabla_Y X)(\gamma)Z+Z(\gamma)\nabla_X Y-Z(\gamma)\nabla_Y X\\ &- g(\nabla_X Y,Z)\,grad(\gamma)+g(\nabla_Y X,Z)\,grad(\gamma)\end{aligned}$$

En substituant equations précident dans l'égalité 1.8, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z+(\nabla_Y Z)(\gamma)X-(\nabla_x Z)(\gamma)Y+X(Z(\gamma))Y\\ &- Y(Z(\gamma))X+Y(\gamma)(Z(\gamma))X-X(\gamma)(Z(\gamma))Y\\ &+ g(X,Z)\left[\nabla_Y grad(\gamma)+|grad(\gamma)|^2Y\right]-g(Y,Z)\left[\nabla_X grad(\gamma)+|grad(\gamma)|^2X\right]\\ &+ \left[X(\gamma)g(Y,Z)-Y(\gamma)g(X,Z)\right]grad(\gamma)\end{aligned}$$

Proposition 1.5.3. *Soient (M,g) une variété Riemannienne et $\widetilde{g}=e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g. Alors, pour tout $X\in\Gamma(TM)$ on a :*

$$\widetilde{Ricci}(X) = e^{-2\gamma}\left[Ricci(X)-\Delta(\gamma)X+(m-2)\left[X(\gamma)grad(\gamma)-|grad(\gamma)|^2X-\nabla_X grad(\gamma)\right]\right]$$

où Ricci et $\widetilde{Ricci}$ sont les tenseurs de Ricci associés à g et $\widetilde{g}$ respectivement.

Preuve 1.5.3. *Remarquons que si $(e_i)_{1\leq i\leq n,}$ une base orthonormale associeé à g, alors $(\widetilde{e}_i)_{1\leq i\leq n,}$ est une base orthonormale associeé à $\widetilde{g}$, où*

$$\widetilde{e}_i = e^{-\gamma}e_i \tag{1.9}$$

Par définition du tenseur de Ricci, on obtient est donné par la relation :

$$\widetilde{Ricci}(X)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{R}(X,\widetilde{e}_i)\widetilde{e}_i=e^{-2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{R}(X,e_i)e_i \tag{1.10}$$

En substituant la dernière équation dans la formule suivant

$$\begin{aligned}\widetilde{Ricci}(X) &= \sum_{i=1}^{n}e^{-2\gamma}\widetilde{R}(X,e_i)e_i\\ &= e^{-2\gamma}\sum_{i=1}^{n}R(X,e_i)e_i+(\nabla_{e_i}e_i)(\gamma)X-(\nabla_X e_i)(\gamma)e_i+X(e_i(\gamma))e_i-e_i(e_i(\gamma))X\\ &+ e_i(\gamma)e_i(\gamma)X-X(\gamma)e_i(\gamma)e_i+g(X,e_i)\left[\nabla_{e_i}grad\gamma+|grad\gamma|^2e_i\right]\\ &- g(e_i,e_i)\left[\nabla_X grad\gamma+|grad\gamma|^2X\right]+\left[X(\gamma)g(e_i,e_i)-e_i(\gamma)g(X,e_i)\right]grad\gamma\end{aligned}$$

Des égalités :

$$\begin{aligned} Ricci\,(X) &= \sum_{i=1}^{m} R\,(X, e_i)\,e_i \\ grad\gamma &= e_i\,(\gamma)\,e_i \\ \Delta\,(\gamma) &= e_i\,(e_i\,(\gamma)) - (\nabla_{e_i} e_i)\,(\gamma) \\ X\,(\gamma) &= g\,(X, grad\gamma) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \widetilde{Ricci}\,(X) &= e^{-2\gamma} Ricci\,(X) - \Delta\,(\gamma)\,X + (m-2)\left[X\,(\gamma)\,grad\,(\gamma) - |grad\,(\gamma)|^2 X\right] \\ &+ \nabla_X grad\gamma - m\nabla_X grad\gamma - (\nabla_X e_i)\,(\gamma)\,e_i + X\,(e_i\,(\gamma))\,e_i \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} (\nabla_X e_i)\,(\gamma)\,e_i &= g\,(\nabla_X e_i, grad\gamma)\,e_i \\ &= X\,(g\,(e_i, grad\gamma))\,e_i - g\,(e_i, \nabla_X grad\gamma)\,e_i \\ &= X\,(e_i\,(\gamma))\,e_i - \nabla_X grad\gamma \end{aligned}$$

On déduit que :

$$\widetilde{Ricci}\,(X) = e^{-2\gamma}\left[Ricci\,(X) - \Delta(\gamma)X + (m-2)\left[X(\gamma)grad(\gamma) - |grad(\gamma)|^2 X - \nabla_X grad(\gamma)\right]\right] \tag{1.11}$$

1.5.3 Courbure scalaire d'une métrique conforme Equation de Yamabe

Théorème 1.5.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\widetilde{g} = K.g$ une déformation conforme de la métrique g. Si S et $\widetilde{S}$ désignent les courbures scalaires relativement aux métriques g et $\widetilde{g}$ respectivemnet, alors la relation entre $\widetilde{S}$ et S est donnée par l'équation de Yamabe suivante :*

$$\widetilde{S}.u^{(m+2)(m-2)} = -\frac{4(m-1)}{m-2}\Delta_g u + S.u \tag{1.12}$$

où $K = u^{\frac{4}{m-2}}$ et $m \geq 3$.

Preuve 1.5.4. *Si $(e_i)_{i=1}^m$ une base orthonormée de (M,g) telque $\nabla_{e_i}e_j=0$, alors $\widetilde{e_i}=e^{-\gamma}e_i$ est une base ortonormé de $(M,\widetilde{g})$.*
D'aprés la formule 1.11, avec $K=e^{2\gamma}$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= \sum_{i=1}^{m}\widetilde{g}\left(\widetilde{Ricci}\left(\widetilde{e_i},\widetilde{e_i}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m}e^{-2\gamma}\widetilde{g}\left(Ricci\left(\widetilde{e_i}\right)-\Delta\left(\gamma\right)\widetilde{e_i}+(m-2)\left[\widetilde{e_i}\left(\gamma\right)grad\left(\gamma\right)-\left|grad\left(\gamma\right)\right|^2\widetilde{e_i}-\nabla_{\widetilde{e_i}}grad\left(\gamma\right)\right],\widetilde{e_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m}g\left(Ricci\left(\widetilde{e_i}\right)-\Delta\left(\gamma\right)\widetilde{e_i}+(m-2)\left[\widetilde{e_i}\left(\gamma\right)grad\left(\gamma\right)-\left|grad\left(\gamma\right)\right|^2\widetilde{e_i}-\nabla_{\widetilde{e_i}}grad\left(\gamma\right)\right],\widetilde{e_i}\right)\\
e^{2\gamma}\widetilde{S} &= \sum_{i=1}^{m}g\left(Ricci\left(e_i\right),e_i\right)-\Delta\left(\gamma\right)\sum_{i=1}^{m}g\left(e_i,e_i\right)+(m-2)\sum_{i=1}^{m}g\left(e_i(\gamma)grad(\gamma),e_i\right)\\
&\quad-(m-2)\left|grad\left(\gamma\right)\right|^2\sum_{i=1}^{m}g\left(e_i,e_i\right)-(m-2)\sum_{i=1}^{m}g\left(\nabla_{e_i}grad\left(\gamma\right),e_i\right)\\
&= S-m.\Delta\left(\gamma\right)+(m-2)\sum_{i=1}^{m}g\left(grad(\gamma),e_i(\gamma)e_i\right)-m(m-2)|grad(\gamma)|^2\\
&\quad-(m-2)\sum_{i=1}^{m}g\left(\nabla_{e_i}grad\left(\gamma\right),e_i\right)\\
&= S-m.\Delta\left(\gamma\right)-(m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2-(m-2)\sum_{i=1}^{m}g\left(\nabla_{e_i}grad\left(\gamma\right),e_i\right)\\
&\quad-(m-2)\sum_{i=1}^{m}g\left(\nabla_{e_i}grad\left(\gamma\right),e_i\right)\\
&= S-m.\Delta\left(\gamma\right)-(m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2-(m-2)\sum_{i=1}^{m}\left\{e_ig\left(grad(\gamma),e_i\right)-g\left(grad(\gamma),\nabla_{e_i}e_i\right)\right\}\\
&= S-m.\Delta\left(\gamma\right)-(m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2-(m-2)\sum_{i=1}^{m}e_i\left(e_i\left(\gamma\right)\right)\\
&= S-m.\Delta\left(\gamma\right)-(m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2-(m-2)\Delta\left(\gamma\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$e^{2\gamma}\widetilde{S} = S-2(m-1).\Delta\left(\gamma\right)-(m-1)(m-2)|grad\left(\gamma\right)|^2 \qquad (1.13)$$

Evaluant γ en fonction de u. On a :

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln(K) = \frac{1}{2}\ln u^{\frac{4}{m-2}} = \frac{2}{m-2}\ln(u)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma) &= \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i(\gamma)) \\
&= \frac{2}{m-2}\sum_{i=1}^{m} e_i\left(u^{-1}e_i(u)\right) \\
&= \frac{2.u^{-1}}{m-2}\sum_{i=1}^{m} e_i(e_i(u)) - \frac{2.u^{-2}}{m-2}\sum_{i=1}^{m}(e_i(u))^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{2.u^{-1}}{m-2}\Delta(u) - \frac{2.u^{-1}}{m-2}|grad(u)|^2 \tag{1.14}$$

d'autre part, on a :

$$grad(\gamma) = \frac{2.u^{-1}}{m-2}grad(u)$$

d'où

$$|grad(\gamma)|^2 = \frac{2.u^{-2}}{m-2}|grad(u)|^2 \tag{1.15}$$

Remplaçons 1.15 et 1.14 dans 1.13, on obtient :

$$\begin{aligned}
u^{\frac{4}{m-2}}\widetilde{S} &= S - 2(m-1)\left[\frac{2.u^{-2}}{(m-2)^2}\Delta(u) - \frac{2.u^{-2}}{m-2}|grad(u)|^2\right] \\
&\quad -(m-1)(m-2)\frac{4.u^{-2}}{(m-2)^2}|grad(u)|^2 \\
&= S - \frac{4(m-1)}{m-2}.u^{-1}\Delta(u) + \frac{4(m-1).u^{-2}}{m-2}|grad(u)|^2 \\
&\quad -(m-1)(m-2)\frac{4.u^{-2}}{(m-2)^2}|grad(u)|^2 \\
&= S - \frac{4(m-1)}{m-2}.u^{-1}\Delta(u)
\end{aligned}$$

d'où

$$u^{\frac{m+2}{m-2}}\widetilde{S} \;=\; S.u - \frac{4(m-1)}{m-2}\Delta(u)$$

Chapitre 2

Espace de sobolev et EDP

2.1 Espase de sobolev

2.1.1 Distributions

Définition 2.1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. on note $\mathbb{D}(U)$ l'espace des fonction indéfiniment dérivable (C^∞) à support compact dans U*

Définition 2.1.2. *Une distribution sur un ouvret U de $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathbb{D}(\mathbb{U})$. Les distributions forment un espace vectoriel noté $\mathbb{D}'(\mathbb{U})$*

Définition 2.1.3. *Le support de T, noteé supp T est le complémentaire dans U du plus grand ouvert W de U tel que la restriction de T à W soit nulle.*

2.1.2 Dérivation des distribution

Définition 2.1.4. *(dérivée au sens des distributions)*
Pour tout $\mathrm{T} \in \mathbb{D}'$:on définit sa dérivée au sens des distributions par :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}' : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{R} && (2.1) \\ \varphi &\longmapsto < \mathrm{T}'.\varphi >= - < \mathrm{T}.\varphi' > && (2.2) \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1.

1. *$T' \in \mathbb{D}'(\mathbb{U})$ et donc : les distributions sont de classe C^∞.*

2. *Order* $(T') \leq$ *Order* $(T) + 1$.

3. $(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$.

4. *formule pour calculer la dérivée* $n^{(ime)}$ *:*
$< T^{(n)}.\varphi >= (-1)^n < T.\varphi^{(n)} >$.

2.1.3 Espace de Sobolev $H^{1,p}(I)$

Soit : $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit : $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.1.5. *L'espace de Sobolev est défini par :*
$H^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I)$ *tel que* $\int_I u\varphi^{'} = -\int_I g\varphi \ \forall \varphi \in C^1(I)\}$.

Remarque 2.1.1. *1-Pour* $u \in H^{1,p}(I)$ *on note* $u^{'} = g$ *tel que* g *est la dérivée au sens des distributions de* u.
2-Pour que $u \in H^{1,p}(I)$ *il faut que sa dérivée au sens des distributions coincide avec une fonction de* $L^p(I)$.

Exemple 2.1.1. *Soit* $I =]-1, 1[, u(x) = |x|, x \in I$ *la fonction* $u \in H^{1,p}(I)$ *pour tout* $0 < p < \infty$. *dont la dérivée au sens des distributions est :*

$$\begin{aligned} T_u : C_c^1(I) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_I |x|\varphi(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < T_u^{'}, \varphi > &= < [|x|]^{'}, \varphi > \\ &= - < [|x|], \varphi^{'} > \\ &= -\int_I |x|\varphi(x)^{'}dx \\ &= -\int_{-1}^{0} -x\varphi(x)^{'}dx - \int_0^1 x\varphi(x)^{'}dx \end{aligned}$$

$x\varphi^{'} = (x\varphi)^{'} - \varphi$

$$\begin{aligned} < T_u^{'}, \varphi > &= -\int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} u^{'}(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

$u^{'}(x) = 1$ *si* $x \geq 0$ *ou* $u^{'}(x) = -1$ *si* $x < 0$.

Notation 2.1.1. *L'espace* $H^{1,p}$ *est muni de la norme :* $\| u \|_{H^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \| u^{'} \|_{L^p}$

Proposition 2.1.2. *L'espace* $H^{1,p}$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve 2.1.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $H^{1,p}$ *donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites de Cauchy dans* L^p *par conséquent* $u_n \longrightarrow u$ *dans* L^p *et* $u_n^{'} \longrightarrow g$ *dans* L^p

$$\int_I u_n\varphi^{'} = -\int_I u_n^{'}\varphi \ \forall\varphi \in C_c^1(I)$$

et à la limite :

$$\int_I u\varphi^{'} = -\int_I g\varphi \ \forall\varphi \in C_c^1(I)$$

donc $u \in H^{1,p}, u^{'} = g$ *et* $\| u_n - u \|_{H^{1,p}} \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

Remarque 2.1.2. *Dans le cas où* $p = 2$ *on a :* $H^{1,2} = h^1$ *est un espace de Hilbert et :* $H^{1,2}(I) = \{u \in L^2(I); \exists g \in L^2(I)$ *tel que* $\int_I u\varphi^{'} = -\int_I g\varphi \ \forall\varphi \in C_c^1(I)\}$.

Proposition 2.1.3. *L'espace* $H^{1,p}$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Pour montrer que $H^{1,p}$ est réflexif on va utiliser le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1. *Soit E un e.v.n. réflexif et* $F \subset E$ *un sous-espace vectoriel. Alors : F est réflexif si et seulement si F est fermé.*

Preuve 2.1.2. *Comme* L^p *est reflexif* $\forall 1 < p < \infty$ *on va montrer que :*$H^{1,p}$ *est réflexif pour cela on va prouver qu'il est un sous espace vectoriel fermé de* L^p *il est clair que* $H^{1,p}$ *est un s.e.v de* L^p *reste à montrer qu'il est fermé donc :soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{1,p}$ *on suppose que :* $u_n \longrightarrow u$ *quand* $n \longrightarrow \infty$ *alors :* $\| u_n - u \|_{L^p} \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$ *et comme* L^p *est complet alors :* $u \in L^p$ *et* $u_n^{'} \longrightarrow g$ *dans* L^p *avec :* $u^{'} = g \in L^p$ *alors :*$u \in H^{1,p}$.

Proposition 2.1.4. *L'espace $H^{1,p}$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Pour la preuve on va utiliser le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.2. *Si E est un espace metrique séparable et $F \subset E$ alors F est séparable.*

Preuve 2.1.3. *Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a : L^p est separable et $H^{1,p} \subset L^p$ alors : $H^{1,p}$ est séparable.*

2.1.4 Espace de Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit : $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.1.6. *L'espace de Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*
$H^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega)\ tq \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\ \forall i = 1, 2, ..., n\}$.

Notation 2.1.2. *L'espace $H^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :*
$\| u \|_{H^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^p}$.

Proposition 2.1.5. *L'espace $H^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,$H^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 < p \leq \infty$.*

Preuve 2.1.4. *La preuve est similaire à celle de $H^{1,p}(I)$ il faut juste prendre : $T(u) = (u, \nabla u)$ avec*
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Proposition 2.1.6. *Inégalité de Poincaré Wirtinger Soit I un intervalle donné. étant donné $u \in L^1(I)$ on pose : $u = \frac{1}{|I|} \int_I u$ (c'est la moyenne de u sur I). On a :*

$$\| u - u \|_{L^\infty} \leq \| u' \|_{L^1}\ \forall u \in H^{1,1}(I)$$

Proposition 2.1.7. *Inégalité de Hardy Soit $I =]0, 1[$ et soit $u \in H^{1,p}(I)$ avec $1 < p < \infty$. Alors $\frac{u(x)}{x(1-x)} \in L^p(I)$ et de plus*
$\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \|_{L^p} \leq c_p \| u' \|_{L^p}\ \ \forall u \in H^{1,p}$ (1).

Proposition 2.1.8. *Inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg Soit I un intervalle borné. Soient $1 < r < \infty$ et$1 \leq q \leq p \leq \infty$.Alors il existe une constante C telle que :*
$\| u \|_{L^p} \leq C \| u \|_{L^q}^{1-a} \| u \|_{H^{1,r}}^{a} \quad \forall u \in H^{1,r}(I)$ *où* $0 \leq a \leq 1$ *est défini par :* $a(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$
De l'inégalité (1) on déduit en particulier que si $p < \infty$ (ou bien si $p = \infty$ et$r > 1$),alors :
$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$ *tel que* $\| u \|_{L^p} \leq \varepsilon \| u \|_{H^{1,p}} + C_\varepsilon \| u \|_{L^p} \quad \forall u \in H^{1,r}(I)$.

2.1.5 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont un outil important d'analyse. Tant que ne sont concernées que des propriétés basiques, passer de l'espace euclidien à une variété riemannienne ne pose pas de grosses difficultés, à condition de faire quelques hypothèses de géométrie bornée à l'infini. Pour ce qui est de propriétés plus fines telles que les inégalités optimales, elles aussi trés utiles en analyse, les effets de la géométrie sont beaucoup plus importants.

Définition :

Soit (M, g) une variete riemannienne C^∞ de dimension n, $p \geq 1$ un nombre reel, k est un entier naturel

– L'espace de Sobolev $H_k^p(M)$ est le complété de l'espace

$$\left\{ f \in C^\infty(M), |\nabla^l f| \in L^p(M) \qquad \forall 0 \leq l \leq k \right\}$$

pour la norme

$$\| f \|_{p,k} = \sum_{l=0}^{k} \| \nabla^l f \|_p$$

L'espace $H_k^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant

$$(f, h)_{H_k} = \sum_{l=0}^{k} \left(\nabla^l f, \nabla^l h \right)_{L^2}$$

Dans la suite, $H_k^2(M)$ est noté $H_k(M)$

La norme correspondante au produit scalaire sur $H_k(M)$ est équivalente à la norme $\|.\|_{2,k}$

Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension n. On note par $T^*(M)$ le fibre cotangent de M. L'espace $H_k^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ est l'ensemble des sections g (des tenseurs 2 fois covariants) telles que dans toute carte exponentielle, les composantes g_{ij} de g sont

dans H_k^p. L'espace $H_k^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ ne dépend pas de la métrique g_0. On peut aussi définir cet espace, en utilisant le théorème du plongement isométrique de Nash. Les deux théorèmes qui suivent sont encore valables pour cet espace $H_k^p(M, T^*M \otimes T^*M)$

Théorème 2.1.1. *(Théorème d'inclusions de Sobolev). Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n.*

(i) *Si k et l deux entiers $(k > l \geq 0)$, p et q deux réels $(p > q \geq 1)$ qui vérifient $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}$ alors $H_k^q(M)$ est inclus dans $H_l^p(M)$ et l'inclusion $H_k^q(M) \subset H_l^p(M)$ est continue.*

(ii) *Si $r \in \mathbb{N}$ et $\frac{(k-r)}{n} > \frac{1}{q}$ alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^r(M)$ est continue*

(iii) *Si $\frac{(k-r-\beta)}{n} \geq \frac{1}{q}$ alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^{r,\beta}(M)$ est continue avec $\beta \in]0,1[$ dans tous les cas $H_k^q(M)$ ne dépend pas de la métrique g*

On utilisera souvent l'espace de Hilbert $H_1(M)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H_1}^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\nabla_\varphi\|_2^2$$

pour minimiser des fonctionnelles. Cet espace est inclus continûment dans $L^q(M)$, pour tout $q \in \left[1, \frac{2n}{(n-2)}\right]$

Kondrakov a montré que les inclusions de Sobolev sont compactes dans les cas suivants :

Théorème 2.1.2. *(Kondrakov). Soit (M_n, g) une variété riemannienne compacte. k un entier naturel, p et q deux nombres réels qui vérifient $1 \geq \frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n} > 0$ alors*

(i) *l'inclusion $H_k^p(M) \subset L^p(M)$ est compacte*

(ii) *l'inclusion $H_k^p(M) \subset C^\alpha(M)$ est compacte si $k - \alpha > \frac{n}{q}$ avec $0 \leq \alpha < 1$*

2.2 Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires

On dit qu'un opérateur différentiel linéaire du second ordre L est elliptique s'il agit sur des fonctions $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ sous la forme suivante :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\, \partial_i u(x) + c(x)\, u(x),$$

où $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq ij \leq N}$ est une matrice à coefficients bornés satisfaisant la propriété d'ellipticité : il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i \xi_j \geq \lambda \mid \xi \mid^2 \qquad pour \quad tout \qquad x \in \mathbb{R}^N \qquad et \quad tout \qquad \xi \in \mathbb{R}^N$$

Comme la matrice hessienne $D^2 u = \left(\partial^2_{ij} u\right)_{1 \leq i,j \leq N}$ est symétrique, on peut se restreindre au cas de matrices $A(x)$ qui sont symétriques, auquel cas la condition d'ellipticité est équivalente au fait que la matrice $A(x)$ est définie positive et que sa plus petite valeur propre est plus grande que 0. Un cas particulier est celui des opérateurs sous forme divergence

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(a_{ij}(x)\,\partial_j u(x)\right) = div\left(A(x)\,\nabla u(x)\right).$$

En écrivant

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\partial^2_{ij} u(x) + \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i a_{ij}(x)\,\partial_j u(x)$$

on retrouve la forme précédente avec $b_j = \sum_{i=1}^{N} \partial_i a_{ij}$ et la condition d'ellipticité reste la même. Cependant, on ne peut pas se restreindre au cas de matrices $A(x)$ qui sont symétriques.

On appelle équation elliptique **linéaire** une équation de la forme

$$Lu = f,$$

où f est une fonction donnée (appelé terme source ou second membre) et L est linéaire par rapport à u. On dit que l'équation est *semi-linéaire* si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à u, ie

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\partial^2_{ij} u(x) = f\left(x, u, \nabla u\right).$$

On dit que l'équation est quasi-linéaire si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à la dérivée de u d'ordre le plus élevé. Pour les équations d'ordre 2, elles sont du type

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, u, \nabla u)\,\partial^2_{ij} u(x) = f\left(x, u, \nabla u\right).$$

La classe générale des équations complètement non linéaires est de la forme

$$F\left(x, u, \nabla u, D^2 u\right) = 0.$$

La condition d'ellipticité est alors que $M \mapsto F(x, z, \xi, M)$ est monotone,ie.pour tout $(x, z, \xi, M) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times N}$ et toute matrice P définie positive,

$$F(x, s, \xi, M + P) \geq F(x, s, \xi, M).$$

L'opérateur elliptique le plus important est *le Laplacien*. Il correspond à la matrice $A = I$:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}^2 u.$$

2.2.1 Quelques exemples

L'équation de Poisson

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On cherche une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Cette équation intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et de ses applications. Par exemple, en dimension $N = 3$, si f représente une densité de charge électrique présente dans Ω, alors $-u$ est le potentiel électrique dans Ω quand le bord de Ω est parfaitement conducteur. Le gradient de $-u$ est le champ électrique. Plus généralement, ce problème intervient dans les questions relatives au potentiel newtonien.

En dimension $N = 2$, il s'agit de l'équation de la membrane élastique : f représente une densité volumique de forces et u représente le déplacement vertical d'une membrane qui occupe la position $\overline{\Omega}$ au repos. La condition limite $u = 0$ sur $\partial\Omega$ signifie que la membre est fixée sur le bord.

Elasticité linéaire De façon plus général, le système de l'élasticité linéaire (dit système de Lamé) permet de décrire la position d'équilibre d'un milieu élastique homogène et isotrope lorsque l'on fait l'hypothèse que les déplacements par rapport à l'état naturel sont petits.Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ représente la configuration de référence d'un milieu élastique linéaire soumis à une

densité volumique de forces $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et fixé sur le bord,le déplacement $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -(\lambda+\mu)\nabla(divu) - \mu\Delta u = f & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Les coeficients λ et μ sont des paramètres d'élasticité appelés coeficients de Lamé qui doivent satisfaire la condition

$$3\lambda + 2\mu > 0$$

assurant le caractère elliptique du système d'EDP précédent.

2.3 Méthodes variationnelles

L'origine des méthodes variationnelles consistent à chercher la solution d'une E.D.P elliptiques comme un point critique d'une fonctionnelle Y définie sur des espaces fonctionnels convenablement choisis. Les solutions obtenues dans ce sens-là, sont dites solutions au sens faible ou parfois solutions au sens de dualité. Le premier résultat dans cette direction et sans doute le Théorème de Lax-Milgram ou les applications pour la résolution des EDP elliptiques (linéaires) est notable.

Définition 2.3.1. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ est :*

- ***continue*** *s'il existe une constante c telle que*
  $\|a(u,v)\| \leq c\|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in \mathbb{H}$

- ***coercive*** *s'il existe une constante $a > 0$ telle que*
  $a(v,v) \geq a \parallel v \parallel^2 \qquad \forall v \in \mathbb{H}$

Comme conséquence on a le Théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *de Lax Milgram : Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in \mathbb{H}'$ il existe $u \in \mathbb{H}$ tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{H}$$

De plus si a est symétrique, alors u est caractérisée par la propriété suivante : $u \in \mathbb{H}$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, v \rangle = Min_{v \in \mathbb{H}} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$.

2.3.1 Exemple D'application

1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad dans \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^q(\Omega)$ pour $q \geq \frac{2N}{N+2}$ soit $X = H_0^1(\Omega), X$ est un espace de Hilbert séparable. On note

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

il est clair que a est une forme bilinéaire continue coercive sur X. On pose $\varphi(v) = \int_\Omega f v dx$. En utilisant des inégalités de Holder et de Sobolev on démontre facilement que

$$|\varphi(v)| \leq C \parallel f \parallel_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|v\|_X$$

Donc φ est une forme lineaire continue sur X. Alors d'aprés le Théorème de Lax-Milgran, il existe un unique $u \in X$ solution du problème

$$a(u,v) = \varphi(v) \quad \forall v \in X$$

de plus u minimise la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$Y(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v dx.$$

Comme consclusion, u est une solution faible du problème (1)

2. On considère maintenant le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q & dans \Omega, \\ u \geq 0 & dans \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où $0 < q < 1$ et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Il est clair que les solutions faibles de (2) sont des points critiques de Y definie sur $X = H_0^1(\Omega)$ pa

$$Y(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega v_+^{q+1} dx$$

où $v_+ = max\{0, v\}$, la partie positive de v comme $q < 1$, alors par les inégalités de Holder et de Poincaré, on a,

$$\int_\Omega v_+^{q+1} dx \leq C(\Omega) \left(\int_\Omega v_+^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} \leq C \parallel v \parallel^{q+1} 2X$$

Donc

$$Y(v) \geq \frac{1}{2} \parallel v \parallel_X^2 - C \parallel v \parallel_X^{\frac{q+1}{2}} \to +\infty si \parallel v \parallel \to \infty.$$

Comme conclusion on obtient que Y est coercive et donc bornée inferierement. On pose $m = inf_{v \in X} Y(v) > \infty$. Notons que Y est de classe C^1 sur X. Pour terminer il suffit de montrer que m est atteint.

Soit $\{v_n\}_n$ une suite minimisante de m, alors $Y(v_n) \to m$ pour $n \to \infty$. Comme Y est coercive, on conclut que $\{v_n\}_n$ est une suite bornée dans X, espace reflexif. Alors, il existe une sous suite, notée $\{v_n\}$ telle que $v_n \to v$ faiblement dans $X = H_0^1(\Omega)$. D'aprés les injections compactes de Sobolev, on obtient que $v_n \to v$ fortement dans $L_s(\Omega) \, \forall s < 2^*$.

En particulier, $v_n \to v$ fortement dans $L^{q+1}(\Omega)$. Donc, on conclut que

$$Y(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega v_+^{q+1} dx \leq \lim \inf_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega (v)_+^{q+1} dx \right) = m$$

Donc $Y(v) = m$ et alors $Y'(v) = m$; v solution faible de (2)

Chapitre 3

Problème de Yamabe

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement un résultat connu concernant un problème fondamental dans analyse géométrique : le problème de Yamabe. La question posée par H. Yamabe en 1960 :

énoncé du problème

Soit M une variété différentielle compacte de dimonsion $n \geq 3$ et de classe C^∞ munie d'une métrique riemannienne g, existe-t-il une métrique $\widetilde{g}$ de courbure scalaire constante conforme à g ?

La motivation pour considérer $n \geq 3$ venait du fait que Le théorème d'uniformisation de Poincaré est valable en dimension deux et sur tout modèle riemannien compact surface il existe une métrique à courbure de Gauss constante. La réponse à La question de H. Yamabe est positive, et est due aux travaux de plusieurs mathématiciens, T. Aubin, N. Trudinger, R. Schoen, pendant vingt ans. Nous soulignons l'étude d'un invariant conforme, la constante de Yamabe, et de sa relation avec la constante de Yamabe de la sphère, en plus on va voir Comment résoudre complètement le problème de Yamabe au fil des ans.

Théorème 3.0.2. *chaque classe conforme des métriques riemannienne sur une variété compacte contient une métrique à courbure scalaire constante.*

Pour voir plus de détails sur la preuve de ce théorème voir [14]
La méthode de résolution du problème de Yamabe est la suivante : Soit $\varphi \in C^\infty, \varphi > 0$ une fonction et $\widetilde{g} = \varphi^{N-2} g$ une métrique conforme g où $N = \frac{2n}{(n-2)}$, on pose :

$$L_g = \frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g + S$$

ou $\Delta_g \varphi = -g^{ij}(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})$ est le laplacien riemannien. L'opérateur L_g est appelé l'opérateur de Yamabe, il est conformément invariant dans le sens suivant : Pour tout $\psi \in C^\infty, \varphi^{N-1} L_{\widetilde{g}}(\psi) = L_g(\varphi\psi)$ et lorsque $\psi = 1$ cette propriété se traduit par une relation entre les courbures scalaires de g et de $\widetilde{g}$:

$$\varphi^{N-1} \widetilde{S} = \frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g \varphi + S\varphi \tag{3.1}$$

Résoudre le problème de Yamabe est donc trouver une métrique $\widetilde{g} = \varphi^{(N-2)} g$ conforme à g de courbure scalaire $\widetilde{S} = K$ (K une constante) c'est équivalent à trouver une solution régulière φ strictement positive de l'équation

$$\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g \varphi + S_g \varphi = K \mid \varphi \mid^{N-2} \varphi. \tag{3.2}$$

Pour obtenir des solutions, Yamabe défnit la quantité suivante :

$$\mu = inf_{\varphi \in H^{2,1}(M), \varphi > 0} Y(\varphi).$$

où

$$Y(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{\| \varphi \|_N^2} = \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{(n-2)} \mid \nabla \varphi \mid^2 + S\varphi^2 d\psi_g}{(\int_M \mid \varphi \mid^N d\psi_g)^{\frac{2}{N}}} \qquad et \qquad H^{2,1}(M) = \{\varphi \in L^2(M), \mid \nabla \varphi \mid \in L^2(M)\}$$

De nos jours, $\mu(M, g)$ est appelé l'invariant usuel de Yamabe (la constante de Yamabe) et Y la fonctionnelle de Yamabe. En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange associé à Y, on voit qu'il existe une bijection entre les points critiques de Y et les solutions de (3.2). En particulier, si φ est une fonction régulière strictement positive vérifant $Y(\varphi) = \mu$, alors φ est solution de l'équation (3.2) et $\widetilde{g} = \varphi^{(N-2)} g$ est la métrique désirée (de courbure scalaire constante).

Pour minimiser la fonctionnelle Y ; Yamabe a introduit une nouvelle méthode au- jour d'hui appelée méthode variationnelle. Cette dernière consiste à prendre une suit de fonctions non identiquement nulles minimisante de Y convergente faiblement vers une solution du problème, malheureusement l'inclusion de Sobolev $H^{2,1}(M) \subset L^N(M)$ est seulement continue et non pas compacte, alors Yamabe commence par étudier les équations dites sous critiques de la forme $\frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g\varphi + S_g\varphi = K\varphi^{q-1}$ où l'exposant q est sous critique $(2 \leq q < N)$ et il y a récupération de la compacité, aprés il fait tendre q vers l'exposant critique N et finalement, il obtient une solution $\varphi \geq 0$ de l'équation de Yamabe. Trudinger constate que la solution φ peut ètre identiquement nulle et que la preuve de Yamabe est incomplète et reste vraie seulement si l'invariant de Yamabe $\mu \leq 0$.

3.1 L'invariant conforme de Yamabe

Dans le cas des metriques de classe C^∞, $\mu(g)$ est un invariant conforme, ce qui signifie que si g et $\widetilde{g}$ sont deux metriques conformes de classe C^∞ alors

$$\mu(g) = \mu(\widetilde{g})$$

Le corollaire suivante montre qu'on peut étendre cette propriété à des metriques dans H_2^p. Elle nous permettra aussi de prendre une métrique quelconque dans la classe conforme $[g]$ comme métrique initiale, tout en gardant la valeur de $\mu(g)$ inchangée.

Corollaire 3.1.1. *Soit M une variéte compacte C^∞, de dimension n*
Si $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ alors

$$\mu_{\widetilde{g}} = \mu_g, \mu_g = \inf_{\varphi \in C^\infty(M)|_{\{0\}}} \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_{2^*}^2} \quad o\grave{u}\ 2^* = \frac{2n}{n-2}$$

Preuve 3.1.1. *on a*

$$\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{g}} &= inf_{\varphi\in C^\infty(M)_{\{0\}}} \frac{\int_M a_n|\nabla\varphi|^2_{\widetilde{g}} + s_{\widetilde{g}}\varphi^2 dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}} dV_{\widetilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= inf_{\varphi\in C^\infty(M)_{\{0\}}} \frac{\int_M \varphi L_{\widetilde{g}}(\varphi) dV_{\widetilde{g}}}{(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dV_{\widetilde{g}})^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= inf_{\varphi\in C^\infty(M)_{\{0\}}} \frac{\int_M \varphi\psi^{-\frac{n+2}{n-2}} L_{\widetilde{g}}(\varphi\psi)\psi^{\frac{2n}{n-2}} dV_g}{\left(\int_M |\varphi\|^{\frac{2n}{n-2}}\psi^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \qquad où \qquad dV_{\widetilde{g}} = \varphi^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \\
&= \inf_{\varphi\in C^\infty(M)|_{\{0\}}} \frac{E(\varphi\psi)}{\|\varphi\psi\|^2_{2^*}} \\
&= \inf_{\varphi\in C^\infty(M)|_{\{0\}}} \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|^2_{2^*}} \\
&= \mu_g
\end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. *on peut aussi définir μ_g de la façon suivant*

$\mu_g = inf_{\widetilde{g}\in[g]} \frac{\int_M scal^{\widetilde{g}} dV_{\widetilde{g}}}{\int vol(M,\widetilde{g})^{\frac{n-2}{n}}}$

avec ($[g]$ l'ensemble des métriques conforme à g)

($\frac{\int_M scal^{\widetilde{g}} dV_{\widetilde{g}}}{\int vol(M,\widetilde{g})^{\frac{n-2}{n}}}$ la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert)

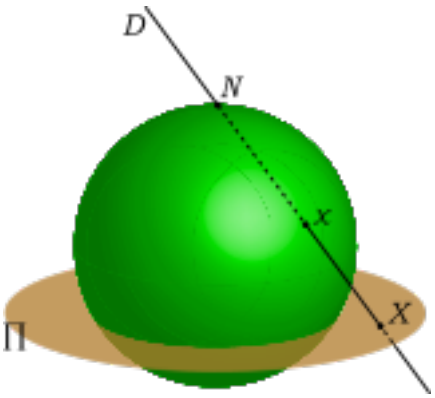
3.2 Etudier l'équation de Yamabe sur la sphère

Exemple 3.2.1. *Le premier exemple qui vienne à l'esprit est la sphère standard : si (S^n, h) dénote la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec la métrique induite de la métrique euclidienne, alors non seulement la métrique standard a une courbure scalaire constante (égale à $n(n-1)$) mais une infinité de métriques dans la classe conforme de la métrique standard ont une courbure scalaire constante.*

Théorème 3.2.1. *(Obata) Si g est une métrique sur S^n qui est conforme à la métrique standard $\widetilde{g}$ et a une courbure scalaire constante, alors jusqu'à un facteur d'échelle constant, g est obtenu à partir de $\widetilde{g}$ par un difféomorphisme conforme de la sphère.*

Obata a tout d'abord montré que toute métrique à courbure scalaire constante dans la classe conforme de la sphère standard était isométrique à celle-ci. Donc trouver l'ensemble des

métriques à courbure scalaire constante dans la classe conforme de la métrique standard revient à trouver l'ensemble des difféomorphismes conformes de la sphère standard, c'est-à-dire des difféomorphismes de la sphère tels que φg appartienne à la classe conforme de g. Ceci n'est pas difficile une fois remarqué qu'il est possible, quitte à composer par une rotation (isométrie), de fixer un point puis de repasser à un difféomorphisme conforme de l'espace euclidien via projection stéréographique.



projection stéréographique

$$\begin{aligned} Pr : S^n|_{e_{n+1}} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto x = \frac{\widetilde{p}}{1-p_{n+1}} \end{aligned}$$

est un isométrique
soit $M = S^n$,

$$\begin{aligned} g = g_s &\longrightarrow g_s(x) \\ x &\longmapsto g_s(x) = \frac{4}{(1+\parallel x \parallel^2)^2} g_{euc} \end{aligned}$$

on a $u(x) = \left(\frac{2}{1+\|x\|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{E(\varphi)}{\parallel \varphi \parallel^2_{2^*}} &= \frac{\int_{S^n|(e_{n+1})} \varphi L_{g_s} \varphi dV_{g_s}}{\left(\int_{S^n|(e_{n+1})} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} dV_{g_s}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi} L_{g_s} \widetilde{\varphi} dV_{g_s}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}^{\frac{2n}{n-2}} dV_{g_s}\right)} \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{\varphi} = \varphi \circ Pr^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

et $g_s = u^{\frac{4}{n-2}} g_{euc}$ *alors*

$$\begin{aligned}
\frac{E(\varphi)}{\| \varphi \|_{2^*}^2} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi} u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_{g_{euc}}(u\widetilde{\varphi}) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (u\widetilde{\varphi})^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)} \\
&= \frac{a_n \int_{\mathbb{R}^n} u\widetilde{\varphi} \Delta_{g_{euc}}(u\widetilde{\varphi}) dx}{\|\widetilde{\varphi} u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}} \\
&= \frac{a_n \int_{\mathbb{R}^n} | \nabla u\widetilde{\varphi} |^2 \, dx}{\|\widetilde{\varphi} u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{g_s} &= \inf_{\varphi \in C^\infty(S^n|0)} \frac{E(\varphi)}{\| \varphi \|_{2^*}^2} \\
&= \inf \frac{a_n \| \nabla u\widetilde{\varphi} \|_2^2 \, dx}{\|\widetilde{\varphi} u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}
\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
\frac{E(1)}{\|1\|_{2^*}^2} &= \frac{\int scal_{g_s} dV_{g_s}}{(\int_{S^n} 1 dV_{g_s})^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= n(n-1) vol(S^n)^{\frac{2}{n}} \\
&= \mu(S^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
-\Delta_{g_s} u + \frac{m(m-2)}{4} u = u^{\frac{m+2}{m-2}}, & u > 0 \quad sur \quad (S^n, g_s) \\
est \quad équivalent \quad á \\
-\Delta u = u^{\frac{m+2}{m-2}}, & u > 0 \quad sur \quad \mathbb{R}^n
\end{cases}$$

pour chaque fonction u *sur* $\mathbb{R}^n$ *on associé une fonction sur la sphère* $f = u\varphi \circ Pr^{-1}$

$\varphi = \frac{f}{u} \circ Pr$ *avec* $u_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \|\alpha\|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$ *qui minimise le quetient* $\frac{\|\nabla f\|_2^2}{\|f\|_{2^*}^2}$ *sur* $\mathbb{R}^n$

donc elle est solution de l'équation $\begin{cases} \Delta f = \lambda f, \\ f > 0 \end{cases}$

Théorème 3.2.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Si $\mu(M) < \mu(S^n) = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$ où ω_n est le volume de la sphère S_n ; alors il existe une fonction u strictement positive de classe C^∞ qui réalise $Y(u) = \mu$.*

Exemple 3.2.2. *Soit*

$$\begin{aligned} \varphi : S^n \mid_{e_{n+1}} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\widetilde{p}, p_{n+1}) &\longmapsto x = \frac{\widetilde{p}}{1 - p_{n+1}} \end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \mid_{e_{n+1}} \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x}{1+ \parallel x \parallel^2}, \frac{1- \parallel x \parallel^2}{1+ \parallel x \parallel^2} \right) = p \end{aligned}$$

Vérifier que $g_s = \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2} g_{euc}$

soit $u, v \in T_p S^n \simeq p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$g_s(p)(u, v) = g_{euc}(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

$T_p S = vect\{\partial_i \varphi^{-1}(x)\}_{1 \leq i \leq n}$

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= g_s(\partial_i \varphi^{-1}(x), \partial_j \varphi^{-1}(x)) \\ &= g_{euc}(\partial_i \varphi^{-1}(x), \partial_j \varphi^{-1}(x)) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi^{-1}(x) &= \partial_i \left(\frac{1}{1+ \parallel x \parallel^2} (2x, 1- \parallel x \parallel^2) \right) \\ &= \frac{1}{1+ \parallel x \parallel^2} (2e_i, -2x_i) - \frac{2x_i}{(1+ \parallel x \parallel^2)^2} (2x, 1- \parallel x \parallel^2) \\ &= \frac{1}{(1+ \parallel x \parallel^2)^2} \left(2e_i(1+ \parallel x \parallel^2) - 4x_i x, 2x_i(1+ \parallel x \parallel^2) - 2x_i + 2x_i \parallel x \parallel^2 \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} < \partial_i \varphi^{-1}(x), \partial_j \varphi^{-1}(x) > &= \frac{1}{(1+ \parallel x \parallel^2)^4} \left(4(1+ \parallel x \parallel^2)^2 \delta_{ij} + 6x_i x_j + 16 x_i x_j \parallel x \parallel^2\right) \\ & \frac{1}{(1+ \parallel x \parallel^2)^4} \left(-8x_j(1+ \parallel x \parallel^2) < e_i, x > -8x_i(1+ \parallel x \parallel^2) < e_i, x >\right) \\ &= \frac{4}{(1+ \parallel x \parallel^2)^2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

3.3 Le travail de Trudinger

A partir de maintenant, nous supposerons sans perte de généralité que M a un volume unitaire. Yamabe avait prétendu que les fonctions φ_q correspondant à J_q sont uniformément délimitées et donc uniformément continu, à partir de laquelle il a montré une solution à (3) avec les propriétés souhaitées existe par un argument limitant. Cependant, il était dans l'erreur. La faute a été découverte par Trudinger en 1968. Dans la section suivante, nous verrons un contre-exemple. Le théorème suivant est due à Trudinger :

Théorème 3.3.1. *(trudinger) Il existe $\alpha(M) > 0$ tel que si $\mu(M) < \alpha(M)$, alor il existe une solution positive de C^∞ avec $\widetilde{S} = \mu(M)$. ainsi le problème de Yamabe est résolu sous cette hypothèse sur (M, g).*
Nous ne prouvons pas ce résultat car il est englobé par les travaux d'Aubin, que nous examinerons à la prochaine. Nous observons que si (M, g) a courbure scalaire moyenne non positive, alors ce qui précède implique (M, g) admet en effet une métrique conforme à courbure scalaire constante ; effectivement on voit facilement que $Y(1)$ est, jusqu'à une constante positive, la courbure scalaire moyenne et depuis $\mu(M) \leq Y(1)$, le résultat suit immédiatement.

3.4 Résultats par Aubin

Aubin regarda attentivement le problème de Yamabe sur la sphère unité. Il avait montré que $\mu(S^n) = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$ où ω est le volume n-dimensionnel de S^n. En outre, il a montré que la constante dans la forte inégalité de Sobolev est obtenue à partir de $\mu(S^n)$. Cela a permis lui montrer que pour tout variété M, $\mu(M) \leq \mu(S^n)$. Si l'inégalité est stricte, puis le Problème Yamabe est résolu ; Ainsi $\alpha(M)$ ci-dessus peut être considéré comme $\mu(S^n)$.

3.4.1 Théorèmes d'Aubin

Théorème 3.4.1. *Si (M,g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, alors $\mu(M) \leq \mu(S^n)$.*

Preuve 3.4.1. *Les fonction u_α satisfaire $a\|\nabla u_\alpha\|_2^2 = \mu(S^n)\|u_\alpha\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$. pour tout fixe $\epsilon > 0$, soit $\mathcal{B}_\epsilon$ noter la boule de rayon ϵ en $\mathbb{R}^n$ et choisissez une fonction de cutoff radiale lisse $0 \leq \eta \leq 1$ supposer dans $\mathcal{B}_{2\epsilon}$ avec $\eta \equiv 1$ en $\mathcal{B}_\epsilon$. considérez la fonction lisse et compacte $\varphi = \eta u_\alpha$. puisque φ est une fonction pour $r = |x|$ unique,*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\kappa} a|\nabla\varphi|^2 dx &= \int_{\mathcal{B}_{2\epsilon}} \left(a\eta^2 \mid \nabla u_\alpha \mid^2 + 2a\eta u_\alpha \langle \nabla\eta, \nabla u_\alpha\rangle + a u_\alpha^2 |\nabla\eta|^2\right) dx \qquad (3.3) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^\kappa} a|\partial_r u_\alpha|^2 dx + C\int_{A_\epsilon} \left(u_\alpha|\partial_r u_\alpha| + u_\alpha^2\right) dx \qquad (3.4) \end{aligned}$$

où A_ϵ dénote l'anneau $\mathcal{B}_{2\epsilon} - \mathcal{B}_\epsilon$. pour estimer ces termes nous observons que

$$\partial_r u_\alpha = (2-n)\, r\alpha^{-1}\left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha}\right)^{\frac{-n}{2}}$$

et donc $u_\alpha \leq \alpha^{\frac{(n-2)}{2}} r^{2-n}$ et $|\partial_r u_\alpha| \leq (n-2)\,\alpha^{\frac{(n-2)}{2}} r^{1-n}$. donc pour fixe ϵ, le deuxieme terme dans (3.3)est $O(\alpha^{n-2})$ lorsque $\alpha \to 0$. pour le première terme,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\kappa} a|\partial_r u_\alpha|^2 dx &= \mu(S^n)\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon} u_\alpha^p dx + \int_{\mathbb{R}^n - \mathcal{B}_\epsilon} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq \mu(S^n)\left(\int_{\mathcal{B}_{2\epsilon}} \varphi^p + \int_{\mathbb{R}^n - \mathcal{B}_\epsilon} \alpha^n r^{-2n}\right)^{\frac{2}{p}} \\ &= \mu(S^n)\left(\int_{\mathcal{B}_{2\epsilon}} \varphi^p\right)^{\frac{2}{p}} + O(\alpha^n) \end{aligned}$$

par conséquence le quotient de Sobolev de φ en $\mathbb{R}^n$ est moins que $\mu(S^n) + C\alpha^{n-2}$. M est une variété compacte, soit $\varphi = \eta u_\alpha$ en coordonnées normales $\{x^i\}$ dans un quartier de $P \in M$ rélargi par zéro à une fonction lisse sur M comme φ est une fonction radiale et $g^{rr} \equiv 1$ en coordonées normales, nous avons $\mid \nabla\varphi \mid^2 = \mid \partial_r\varphi \mid^2$ comme avant. les seules correction à l'éstimation ci-dessus sont introduits par le terme de courbure scalaire et la différence entre

dV_g et dx. comme $dV_g = (1+O(r))dx$ en coordonnées normales, les calcules précédent donne

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \int_{\mathcal{B}_{2\epsilon}} \left(a|\nabla\varphi|^2 + S\varphi^2\right) dV_g \\ &\leq (1+C_\epsilon)\left(\mu(S^n) \parallel \varphi \parallel_p^2 + C\alpha^{n-2} + C\int_0^{2\epsilon}\int_{S_r} u_\alpha^2 r^{n-1} d\omega dr\right) \end{aligned}$$

On peut alors soutenir que le dernier terme est limité par un multiple constant de α. choisissant ϵ ainsi-puis a petit α, on peut arranger ça

$$Y(\varphi) \leq (1+C_\epsilon)\left(\mu(S^n) + C\alpha\right)$$

qui prove $\mu(M) \leq \mu(S^n)$.

Nous pouvons maintenant prouver que le problème de Yamabe a une solution si $\mu(M) \leq \mu(S^n)$.

Théorème 3.4.2. *Soit $\{\varphi_q\}$ est comme avant et assumer $\mu(M) \leq \mu(S^n)$. comme $q \to p$, une sous-séquence converge uniformément vers une fonction positive $\varphi \in C^\infty(M)$ qui satisfait $Y(\varphi) = \mu(M)$*

Preuve 3.4.2. *Depuis les fonctions $\{\varphi_q\}$ sont uniformément délimités dans $L^r(M)$, le résultat de régularité ci-dessus montre qu'ils sont uniformément délimités dans $C^{2,\alpha}(M)$ ainsi que.Le théorème d'Arzela-Ascoli alors implique qu'une sous-séquence converge dans la C^2 norme à une fonction $\varphi \in C^2(M)$. La limite d'une fonction φ donc satisfait*

$$\varphi = \mu\varphi^{p-1}, Y(\varphi) = \mu$$

comme $\mu = \lim_{q\to p}\mu_q$. si $\mu(M) \geq 0$, alors on peut montrer que $\mu = \mu(M)$. De l'autre main, si $\mu(M) < 0$, le fait que μ_p est en augmentation implique que $\mu \leq \mu(M)$ mais comme $\mu(M)$ est l'infimum de Y, nous devons avoir $\mu = \mu(M)$ dans ce cas aussi. Une autre application de le résultat de la régularité dans la théorie elliptique montre que φ est C^∞ et est strictement positif parce que $\|\varphi\|_p \geq \lim_{s\to p}\|\varphi_p\|_p = 1$.

Ce qui précède montre que le problème de Yamabe est résolu de manière affirmative à condition $\mu(M) < \mu(S^n)$. Il est normal de demander ensuite si cela est vrai pour toutes les variétés M ; le problème de Yamabe serait alors complètement résolu. Dans le cas $n \geq 6$ et M n'est pas localement conforme à la conformité, cela s'avère être vrai.

Définition 3.4.1. *Une variété riemannienne (M, g) est dit être localement conforme à plat si chaque point a un voisinage où il existe une métrique conforme dont la courbure s'annule.*

Théorème 3.4.3. *(Aubin). Si M a la dimension n et $n \geq 6$ est un compact non conforme localement variété riemannienne plate, puis $\mu(M) < \mu(S^n)$. Par conséquent, le minimum $\mu(M)$ est atteint et l'équation (3.2) a une solution strictement positive avec $\widetilde{S} = \mu(M)$, alors le problème de Yamabe est résolu dans ce cas.*

Preuve 3.4.3. *Quand $n \geq 4$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un collecteur soit localement conforme à plat est que le tenseur de Weyl disparaît à l'identique. Par définition le tenseur de Weyl est*

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}\right)$$

$$+\frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(g_{jl}g_{ik} - g_{jk}g_{il}\right)$$

et W^j_{ikl} est un invariant conforme. Si M n'est pas localement conforme à plat il existe un point P où le tenseur de Weyl n'est pas nul. Après un changement de métrique conforme, le calcul de une expansion asymptotique donne un deuxième terme dont le signe est $-W_{ikjl}W^{ijkl}$ quand $n \geq 6$, Ainsi montrant $\mu(M) < \mu(S^n)$

3.5 Résultats de Schoen

Richard Schoen a prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. *Si M a une dimension $3, 4$ ou 5 ou si M est localement conforme de manière conforme, alors $\mu(M) < \mu(S^n)$ au moins que M ne soit conforme à la sphère standard.*

Schoen a beaucoup utilisé la fonction de Green pour l'opérateur (3.2) Il a aussi par hasard trouvé le théorème de masse positive de la relativité générale, qui a récemment fait ses preuves dimensions 3 et 4 de Schoen et Yau. La preuve du théorème ci-dessus nécessite une analyse n-dimensionnelle version du théorème de masse positive. Le cas à dimensions 5 est une généralisation de la preuve du cas en dimensions 4.Le cas n-dimensionnel, $n \geq 6$, est plus difficile. Cependant, selon les résultats d'Aubin, seuls les modèles à plat conforme doivent être pris en compte.

3.6 Unicité des solutions de l'equation de Yamabe

Pour le problème de Yamabe classique (i.e. la métrique g est C^∞), on sait qu'on a unicité des solutions à une constante multiplicative prés dans le cas où l'invariant conforme de Yamabe $\mu(g)$ est négatif où nul. Le théorème suivant, montre qu'on a toujours les memes résultats lorsque la métrique est seulement de classe H_p^2, avec $p > n$.

Théorème 3.6.1. *Soit g une métrique dans $H_p^2(M)$, avec $p > n$. Si $\mu(g) \leq 0$ alors les solutions de l'equation (3.2) sont uniques à une constante multiplicative prés.*

Preuve 3.6.1. *Soit φ_1 et φ_2 deux solutions strictement positives de l'équation (3.1). Les métriques $g_i = \varphi_i^{\frac{4}{n-2}} g$ sont á courbures scalaires constantes S_i, où $i = 1$ ou 2. On pose $\psi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$,donc $g_1 = \psi^{\frac{4}{n-2}} g_2$. Ce qui entraîne que ψ satisfait*

$$\Delta_{g2}\psi + \frac{n-2}{4(n-1)} S_2 \psi = \frac{n-2}{4(n-1)} S_1 \psi^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.5}$$

Par le théorème de régularité , on en déduit que ψ est de classe $C^{2,\beta}$ car les coefficients du Laplacien sont C^0. En effet, dans une carte locale :

$$\Delta_g \psi = -\nabla_i \nabla^i \psi = -g^{ij}(\partial_{ij}\psi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \psi)$$

et les Christoffels sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Ils sont dans H_1^p, et continus si $p > n$. D'autre part, remarquons que S_1 et S_2 sont forcément de même signe. Pour le voir, il suffit d'intégrer l'équation (3.1) sur M , avec l'élément de volume de g_0, et utiliser le fait que l'intégrale du Laplacien d'une fonction C^2 est toujours nulle.
Si $\mu(g) < 0$, alors $S_i < 0$ pour $i = 1$ et 2. Supposons que ψ atteint son maximum en $Q_1 \in M$ et son minimum en $Q_2 \in M$ alors $\Delta_{g2}\psi(Q_1) \geq 0$ et $\Delta_{g2}\psi(Q_2) \leq 0$. Par conséquent, si on évalue l'équation (3.1) au point Q_1 et Q_2, on obtient les deux inégalités suivantes :

$$\psi^{\frac{4}{n-2}}(Q_1) \leq \frac{S_2}{S_1} \qquad et \qquad \psi^{\frac{4}{n-2}}(Q_2) \geq \frac{S_2}{S_1}$$

de la on tire que $\psi = \frac{S_2}{S_1}$ *et que* Q_1 *et* Q_2 *sont proportionnelles.*
Si $\mu(g) = 0$ *alors* $S_1 = S_2 = 0$ *et l'équation (3.1) est réduite à* $\Delta_{g2}\psi = 0$, *d'où* ψ *est constante.*

Remarque 3.6.1. *Si* $\mu_g > 0$ *alors il n'ya pas d'unicité des solutions*
$A = \{\varphi$ *solution de l'équation de Yamabe,* $S_{\varphi^{\frac{4}{n-2}}g} = c$ *donnée*$\}$
est compact dans $C^\infty(M)$ *si* $dimM \leq 24$. *A n'est pas compact si* $dimM \geq 25$

3.6.1 Application

Soit φ une fonction strictement positive dans $H_2^p(M)$ et $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g_\alpha$ une métrique conforme à g_α. Si on veut que $\widetilde{g}$ soit une métrique qui résout le problème (3) alors il suffit que φ soit solution de l'équation de type Yamabe

Conclusion

La solution du problème de Yamabe marque une étape importante dans le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires. Equations semi-linéaires de la forme (3.2) avec exposant critique surviennent dans de nombreux contextes et ont été étudié par les analystes. C'est la première fois qu'une telle équation est complètement résolu

Bibliographie

[1] Aubin, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. (9) 55 (1976), no. 3, 269 296. MR 0431287 (55 4288)

[2] CNAM UE MVA 210 Ph. Durand, Algèbre et analyse tensorielle Cours 12 : Initiation a la géométrie Riemannienne 1 et 2. http ://maths.cnam

[3] E. Garcia-Rio, A. H. Badali, and R. Vazquez-Lorenzo, "Lorentzian three manifolds with special curvature operators, Classical and Quantum Gravity, vol. 25, no. 1, p. 015003, 2008.

[4] Jean Feydy, Introduction à la Géométrie Riemannienne par l'étude des Espaces de Formes. http ://www.math.ens.fr/feydy/Teaching/geometrie riemannienne espaces de formes.pdf.

[5] John M. Lee and Thomas H. Parker, The Yamabe Problem

[6] Hidehiko Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. 12 (1960), 21 37. MR 0125546 (23 A2847)

[7] L. Godinho and J. Natério, "An introduction to Riemannian geometry : with applications to mechanics and relativity, Universitext, Springer International Publishing, 2014.

[8] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'Analyse Harmonique,Géométrie Différentielle Master M1 et M2.

[9] Sigmundur Gudmundsson, An Introduction to Riemannian Geometry, Lund University.

[10] Schoen, R. : "Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature", *Journal of Differential Geometry, 20*, 1984, 479-495.

[11] Trudinger, N. : “On embeddings into Orliz spaces and some applications", *Journal of Mathematics and Mechanics, 17*, 1967, 473-483.

[12] Trudinger, N. : “On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations", *Communications on Pure and Applied Mathematics, 20*, 1967, 721-747.

[13] Thierry Masson Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie,fibrés et connexions.

[14] Yamabe, Hidehiko Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.