République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministèrede l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothéque

Année univ.: 2018/2019

Topologies faibles et applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Sahraoui **M**ohamed [1]

Sous la direction de

Dr.F.Z. Mostefai

Soutenu le 17/07/2019 devant le jury composé de

S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
O. Bennehi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatreur
N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

[1]sahroui1mohamed@gmail.com

Table des matières

Remerciements

Louanges à Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maître Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons .

Je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés.

J'exprime ma profonde gratitude et remerciment à la dame mon encadreur ***Dr. F. Z. Mostefai*** *pour la bienveillance avec laquelle elle a encadré ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.*

Je tiens à remercier également ***Pr.S. Ouakkas****.d'avoir accepté de présider le jury de mon mémoire.*

Je souhaite églement remercier ***Dr. O. Bennehi****. et* ***Dr. N. Bekkouche****. de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être examinateurs de mon mémoire.*

Je désire aussi remercier tous les professeurs de Math à l'université Dr Tahar Moulay - Saïda pour leur aide durant toutes ces années.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail .

Dédicaces

Tout d'abord, je dédie ce travail, avec tous mes sentiments de gratitude à :

Mes parents, les plus chers à mon coeur, qui m'ont entouré de leurs amours et m'ont donné la capacité d'atteindre ce niveau de savoir.

Mes chères fréres : ***H***ocine, ***F***eycel.

Tous mes amis surtout : ***K***heir-eddine, ***T***ouati, ***E***lAïd , ***D***jillali, ***Y***ahya et tous les étudiants de Mathématiques, et tous mes enseignants qui m'ont accompagné durant ma carrière d'étudiant.

Ma mère bien-aimée et mon pére.

Dr. F. Z. Mostefai, la famille Sahraoui et toute personne que je n'ai pas citée par inattention de ma part.

Introduction

La topologie comme domaine mathématique, étudie les propriétés invariantes par déformations continues sur un espace donné. C'est une notion à la base de toutes les mathématiques. De la continuité à la différentiabilité (Soit f une fonction définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. La fonction f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \mid\mid h \mid\mid \epsilon(h) \quad avec \lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^m}$$

) en passant par la limite, l'analyse mathématique consomme autant de topologie qu'elle donne de résultats intéressants pour les sciences voisines. Dans ce sens, on peut dire que la topologie est indispensable à toutes les sciences. Les experts pourront pousser encore plus loin en entrant dans les détails. Ce qui nous intéresse dans ce mémoire c'est de produire un objet particulier de la topologie qu'est l'ensemble compact. Ce qui nous motive à faire une recherche pareille est que bien des grands théorèmes de l'analyse methématique exigent la compacité. La théorème de **S**tone-**W**eierstrass, le théorème de **B**olzano-**W**eierstrass, le théorème d'**A**rzéla-**A**scoli, etc ... en sont des exemples. Le problème qui se pose c'est que d'après le célèbre théorème de **R**eisz, les boules fermées d'un espace normé de dimension infinie ne sont jamais compactes pour la topologie forte c'est à dire celle définie par la norme. Le théorème dit au contraire, que ces boules le sont toutes en dimension finie, Donc il est intéressant de se poser la question de compactification des boules de dimension infinie en modifiant la topologie forte. En effet nous avons le résultat(facile !) selon lequel moins la topologie est fine, plus les compacts sont nombreux. Nous définirons des topologies sur les espaces de **B**anach de dimension infinie et nous les appelerons topologies faibles. Ces topologies se comportent très bien avec des espaces de bonnes propriétes (réflexifs, séparables, duaux) et fournissent des résultats de compacité satisfaisant, selon les cas, aux exigences de beaucoup de théorèmes d'existence.

Dans la section 1.2 **et** 1.3 **et** 1.4 **et** 1.5 **et** 1.6, nous donnerons les rappels des notions de base de topologie et d'analyse fonctionnelle. Nous y citerons des résultats indispensables

pour traiter la suite.
Nous définirons dans la section 2.1, la topologie dite faible sur un espace de **B**anach donné et nous en donnerons quelques unes des propriétés.
La section 2.2 présentera la topologie dite faible.$\star$ définie sur un espace de dual.
Dans la section 2.3, nous présentons des résultats fournis par ces topologies sur des espaces appropriés que nous définirons et pour lesquels nous donnerons quelques propriétés

Notations

E est un espace de **B**anach réel de dimension infinie.
E' est dual topologique de E c'est à dire l'ensemble des formes linéaires et continues de E dans $\mathbb{R}$. C'est un espace de **B**anach.
Pour un espace de **B**anach X, B_X représente la boule unité fermée de X.
$C(K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$. Par défaut, il est muni de norme de convergence uniforme.

Chapitre 1

Concepts de base en topologie

1.1 Topologie, Ouverts

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition 1.1. *Une topologie sur E est une famille $\mathcal{P}(E)$ de parties de E vérifiant les 3 conditions suivantes.*

1. *$\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{O}$.*
2. *Toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.*
3. *Toute intersection finie d'éléments $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.*

les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les ouverts de la topologie. Le couple est appelé un espace topologique.

Exemple 1.1. *Soit E un ensemble non vide, alors $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ définit une topologie, appelée topologie discrète. Noter que la topologie est discrète si et seulement si tous les singletons de E (i.e les parties de E constituées d'un seul élément) sont des ouverts.*

Exemple 1.2. *Soit E un ensemble non vide, alors $\{\emptyset, E\}$ est une topologie sur E appelée topologie grossière.*

Définition 1.2. *Soit E un ensemble et $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ deux topologies sur E. On dit que $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ si $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ (i.e si tout ouvert de $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathcal{O}$). Cela définit une relation d'ordre sur les topologies de E.*

Remarque 1.1. *La topologie grossière est la moins fine des topologies de E et la topologie discrète est la plus fine.*

Lemme 1.1. *Si* $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *est un famille de topologie sur* E *alors* $\mathcal{O} = \underset{i\in I}{\cap} \mathcal{O}_i$ *est une topologie sur* E.

Définition 1.3. *Soit* $\mathcal{A}$ *une famille de parties de* E. *D'après le lemme précédent, l'intersection de toutes les topologies de* E *contenant* $\mathcal{A}$ *est une topologie sur* E *contenant* $\mathcal{A}$. *On l'appelle la topologie engendrée par la famille* $\mathcal{A}$, *et on la note* $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.

La proposition suivante donne la construction pratique de la topologie engendrée par une famille de parties $\mathcal{A}$.

Proposition 1.1. *On note* $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\emptyset, E\}$ *et* $\mathcal{A}''$ *la famille des intersections finie d'élémentes de* $\mathcal{A}'$. *Alors la topologie* $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ *est l'ensemble des réunions quel conques d'élémentes de* $\mathcal{A}''$ (*i.e* $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ *est l'ensemble des réunions d'intersections finie d'éléments de* A).

Théoréme 1.1. *Soit* E *un ensemble quelconque et* $\mathrm{P} \subset \mathcal{P}(E)$ *une famille de parties de* E *vérifiant.*

1. *La famille* P *est stable par intersection finie (i.e l'intersectoin d'un nombre fini d'éléments de* P *est un élément de* P *).*
2. $E = \underset{O\in P}{\cup} O$
3. $\emptyset \in P$.

Alors l'ensemble $\mathcal{O}(P)$ *des réunions quelconques d'éléments de* P *est une topologie sur* E. *C'est la topologie de* E *engendrée par la famille* P.

Exemple 1.3. *Soit* $\mathcal{O}$ *la topologie engendrée par la famille des intersections d'ouverts de* $\mathbb{R}$. *C'est la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$. *Comme toute intersection finie d'intervalle ouverts de* $\mathbb{R}$ *est soit vide, soit un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, *les ouverts de* $\mathbb{R}$ *pour la topologie usuelle sont* $\emptyset$, $\mathbb{R}$ *et toute réunion* $\cup_{i\in I}]a_i, b_i[$ *d'intervalles* $(]a_i, b_i[)_{i\in I}$ *ouverts de* $\mathbb{R}$.
Un intervalle de la forme $]a, b[$ *est donc ouvert pour cette topologie. En revanche, les intervalle* J *de forme* $[a, b]$, $[a, b[$ *ou* $]b, a]$ *ne sont pas ouverts car si* $J = \cup_{i\in I}]a_i, b_i[$, *alors il existerait* $i_0 \in I$ *tel que* $a \in]a_{i_0}, b_{i_0}[\subset J$, *ce qui contredit le fait que* a *est la borne supérieure ou inférieure de* J.

Exemple 1.4. *On note* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Soit* $\mathcal{O}$ *l'ensemble formé par* $\emptyset$, $\overline{\mathbb{R}}$ *et toute réunion d'intervalles de la topologie usuelle de* $\overline{\mathbb{R}}$.

1.2 Fermés

Définition 1.4. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $F \subset E$. On dit que F est un fermé de E si et seulement si $E \setminus F$ est un ouvert de E. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de E.*

Remarque 1.2. *Une partie de E peut-être ni ouverte ni fermée (par exemple $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$). De même un partie de E peut-être ouverte et fermée (par exemple E et $\emptyset$).*

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de E vérifie les propriétés suivantes.*

1. *$\emptyset$ et E sont des fermés.*
2. *Toute intersection des fermés est un fermé.*
3. *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Ces propriétés des parties fermées découlent directement des propriétés vérifiées par les parties ouvertes d'une topologie et des égalités suivantes $E\backslash(\cup_{i\in I}O_i) = \cap_{i\in I}(E\backslash O_i)$, $E\backslash(\cap_{i\in I}O_i) = \cup_{i\in I}(E\backslash O_i)$.
Remarquez qu une partie est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé. Ainsi, une topologie peut aussi bien être définie par la donnée de l'ensemble de ses ouverts que par la donnée de l'ensemble de ses fermés.

Exemple 1.5. *Pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, $[a, b]$ est fermé et les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ ne sont pas fermés .*

Exemple 1.6. *Pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des fermés. Comme $\mathbb{Z} = \mathbb{R}\backslash\cup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$, $\mathbb{Z}$ est fermé de $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne sont ni ouverts ni fermés dans $\mathbb{R}$ (par construction de $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel et donc, ni $\mathbb{Q}$, ni $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne peut-être la réunion d'une famille d'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$).*

1.3 Adhérence, Intérieur, Frontière

Définition 1.5. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et X une partie de E.*

1. *Il existe un plus petit fermé contenant X, appelé l'adhérence (ou la fermeture) de X dans E. On le note $\overline{X}$.*
2. *Il existe un plus grand ouvert contenu dans X, appelé l'intérieur de X dans E.On le note $IntX$.*

3. *On apelle frontière de* X, *l'ensemble* $\overline{X} \cap \overline{E \backslash X}$, *on le note* FrX.

4. *On appelle extérieur de* X, *l'ensemble Int* $(E \backslash X)$, *on note Ext* X.

Exemple 1.7. *Si* $(E, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \textit{topologie usuelle})$ *et* $X =]a, b[$, *alors* $\overline{X} = [a, b]$. *En effet,* $[a, b]$ *est un ferme de* $\mathbb{R}$ *qui contient* $]a, b[$ *et donc* $]a, b[\subset \overline{X} \subset [a, b]$. $\overline{X}$ *ne peut donc être égal qu'à* $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b[$ *ou* $[a, b]$. *comme seul le dernier de ces intervalles est fermé dans* $\mathbb{R}$ *pour la topologie usuelle, on a* $\overline{]a, b[} = [a, b]$.

Proposition 1.3. *Soit* $(E, \mathcal{O})$ *un espace topologique et* A *et* B *deux parties de* E. *On a*

1. *Si* $A \subset B$, *alors* $\overline{A} \subset \overline{B}$ *et* $IntA \subset IntB$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et Int* $(A \cup B) = IntA \cup IntB$.
3. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *et Int*$(A \cap B) = IntA \cap IntB$.

Proposition 1.4. *Soit* X *une partie de* E. *L'adhérence, l' intérieur, la frontière et l'extérieur de* X *vérifient les propriétés suivantes.*

1. $X = \overline{X}$ *si et seulement si* X *est fermé.*
2. $X = IntX$ *si et seulement si* X *est ouvert.*
3. $\overline{E \backslash X} = E \backslash IntX$.
4. $ExtX = Int(E \backslash X) = E \backslash \overline{X}$.
5. *Fr* X *est une fermé de* E *et* $FrX = E \backslash (IntX \cup ExtX)$.
6. $ExtX \cap IntX = \emptyset$ *et donc, pour toute partie* X *de* E, E *est la réunion disjointe de Inte, Ext* X *et de Fr* X.

Proposition 1.5. *Soit* A *une partie de* E.

1. *Si* $A \subset F$ *et* F *est une fermé de* E, *alors* $\overline{A} \subset F$.
2. *Si* $O \subset A$ *et* O *est un ouvert de* E, *alors* $O \subset IntA$.
3. *Si* $O \cap A = \emptyset$ *et* O *est ouvert de* E, *alors* $O \subset ExtA$.

Exemple 1.8. *Si* $A =]0, 1[$ *et* $B =]1, 2[$, *alors* $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ *(car* $\emptyset$ *est fermé). Or,* $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$. *Cet exemple montre qu'en général l'inclusion dans 3) n'est pas une égalité .*

1.4 Parties denses

Définition 1.6. *Soit $(E, \mathcal{O})$ une espace topologique et D une partie de E. D est dite dense dans E si et seulement si $\overline{D} = E$.*

La propriété suivante est une caractérisation très pratique des parties denses.

Proposition 1.6. *D est dense dans E si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre D.*

Exemple 1.9. *On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et $X = \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour tout intervalle $]a, b[$ non vide de $\mathbb{R}$, on note r_n le nombre décimal obtenu en gardant les n premiers chiffres après la virgule dans l'écriture décimal de $\frac{a+b}{2}$. Comme $a < \frac{a+b}{2} < b$, on $r_n \in]a, b[$ pour n assez grand. Comme tout ouvert de E est réunion d'intervalles $]a, b[$, on obtient la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.*
De même $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car si r est un rationnel $]a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}[$, alors $\sqrt{2}r$ est un irrationnel de $]a, b[$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide et que $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

1.5 Voisinages

1.5.1 Définition, Systèmes fondamentaux

Définition 1.7. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de a dans E s'il existe un ouvert O de E vérifiant $a \in O \subset V$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.*

Proposition 1.7. *Les voisinages d'un point vérifient les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $a \in V$.*
2. *Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et tout $U \subset E$, si $V \subset U$ alors U est un voisinage de a.*
3. *Tout intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.*

Définition 1.8. *Une partie $\mathcal{V}'(a)$ de $\mathcal{V}(a)$ est appelée système fondamental de voisinage (noté SFV) de a si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{V}(a)$, il existe $V \in \mathcal{V}'(a)$ tel que $V \subset U$.*

Exemple 1.10. *Les SFV suivants seront souvent utilisés*

1. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologie $\mathcal{V}'(a) = \{O \in \mathcal{O}/a \in \mathcal{O}\}$ est un SFV de a.*

2. *Soit* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle et* $a \in \mathbb{R}$*, alors* $(]a-\epsilon, a+\epsilon[)_{\epsilon>0}$ *est un SFV de* a*.* $(]a-1/n, a+1/n[)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est un SFV de* a *dénombrable.*
3. *Soit* $\overline{\mathbb{R}}$ *muni de la topologie usuelle et* $(]a, +\infty])_{a\in\mathbb{R}}$ *est un SFV de* $+\infty$*.* $(]n, +\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ *est un SFV dénembrable de* $+\infty$*.*

1.5.2 Caractérisation des ouverts et fermés

Théoréme 1.2. *Soit* $(E, \mathcal{O})$ *un espace topologique.* O *est un ouvert de* E *si et seulement si* O *est un voisinage de chacun de ses points.*

Proposition 1.8. *Soit* $(E, \mathcal{O})$ *un espace topologique,et* $A \subset E$*. On a les égalités*

$$IntA = \{x \in E / \exists V \in \mathcal{V}(x) / V \subset A\} = \{x \in E / A \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Définition 1.9. *Soit* $(E, \mathcal{O})$ *un espace topologique,* $A \subset E$ *et* $x \in E$*.*

1. *On dit que* x *est adhérent à* A *si et seulement si pour tout* $V \in \mathcal{V}(x)$*, on a* $V \cap A \neq \emptyset$*.*
2. x *est un point isolé de* A *si et seulement si il existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $V \cap A = \{x\}$*.*
3. x *est un point d'accumulation de* A *si et seulement si pour tout* $V \in \mathcal{V}(x)$*, l'ensemble* $(V \backslash \{x\}) \cap A$ *est infini.*

Remarque 1.3.

1. *Les points de* A *sont adhérents à* A *mais un point adhérent à* A *n'est pas nécessairement dans* A *(par exemple* 1 *est adhérent à* $[0, 1[$ *dans* $\mathbb{R}$*).*
2. *Un point isolé de* A *est dans* A*.*
3. *Les points isolés et points d'accumulation de* A *sont des points adhérents à* A*.*

Remarque 1.4. *Dans chacune des ces définitions, on peut remplacer* $\mathcal{V}(x)$ *par n'importe quel SFV* $\mathcal{V}'(x)$ *de* x*. par exemple,* x *est adhérent à* A *si et seulement si pour tout* $V \in \mathcal{V}'(x)$*, on a* $V \cap A \neq \emptyset$*.*

Proposition 1.9. *Soit* A *une partie de* E*.* x *est adhérent à* A *si et seulement si* $x \in \overline{A}$ *(i.e.l'adhérence* $\overline{A}$ *de* A *est l'ensemble des points adhérents à* A *). Autrement dit, on a*

$$\overline{A} = \{x \in E / \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\}$$

Proposition 1.10. *Soit* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle et* A *un partie non vide de* $\mathbb{R}$ *.*

1. *Si* A *est majorée, on* $supA \in \overline{A}$*.*
2. *Si* A *n'est pas majorée alors* $+\infty$ *est dans l'adhérence de* A *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

1.5.3 Espaces séparés(ou de Hausdorff)

Définition 1.10. $(E, \mathcal{O})$ *est séparé si et seulement si pour tout points distincts* (x, y) *de* E*, il existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *et* $W \in \mathcal{V}(y)$ *tel que* $V \cap W = \emptyset$*.*

Exemple 1.11.

1. *Si* E *est muni de la topologie discrète alors* $\{x\}$ *et* $\{y\}$ *sont des ouverts disjoints si* x *et* y *sont distincts (* $x \cap y = \emptyset$ *), donc* E *est séparé.*
2. *Si* E *est muni de la topologie grossière et* $E \geq 2$*, alors* E *n'est pas séparé (pour tout* $x \in E$*,* E *est le seul voisinage de* x *).*
3. $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle est séparé,* $\overline{\mathbb{R}}$ *aussi .*

1.5.4 Topologie induite

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de E.

Proposition 1.11. $(A \cap O)_{O \in \mathcal{O}}$ *définit une topologie sur* A *appelée topologie induite sur* A *par la topologie de* E*.*

Proposition 1.12. *D'après la définition, les ouverts de* A *pour la topologie induite sont les traces sur (intersections avec)* A *des ouvert de* E*. De même, on a*

1. $(F \cap A)_{F \in \mathcal{F}}$ *(où* $\mathcal{F}$ *est l'ensemble des fermés de* E *) est la famille des fermés de* A *pour la topologie induite par celle de* E*.*
2. *Soit* $a \in A$*, alors* $(V \cap A)_{V \in \mathcal{V}(a)}$ *est la famille des voisinages de* a *dans* A *pour la topologie induite (où* $\mathcal{V}(a)$ *est la famille des voisinages de* a *dans* E *).*
3. *Si* $\mathcal{V}'$ *est un SFV de* a *dans* E *alors* $\{V \cap A, V \in \mathcal{V}'\}$ *est un SFV de* a *dans* A *pour la topologie induite.*

Exemple 1.12. *Soit* $E = \mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle et* $A =]0, 1[$*. Alors* $]0, 1/2] = [-1/2, 1/2] \cap A$ *est un fermé de* A *pour la topologie induite par celle de* A*. En particulier, l'adhérence de* $]0, 1/2]$ *dans* A *est* $]0, 1/2]$ *(alors quelle est* $[0, 1/2]$ *dans* $\mathbb{R}$*).*
Il faut retenir de cet exemple que les notions d'ouverts, fermés, adhérence, voisinages ne sont pas intrinsèques mais dépendent de la topologie de l'espace ambiant. Ainsi, dire que $[0, 1[$ *n'est pas un fermé de* $\mathbb{R}$ *a un sens mais dire que* $[1, +\infty[$ *est un fermé n'a pas de sens. Il faut préciser la topologie et l'ensemble dans lequel la partie est considérée (* $[1, +\infty[$ *est*

un fermé de $\mathbb{R}$ *pour la topologie usuelle, mais n'est pas un fermé de* $\overline{\mathbb{R}}$ *pour la topologie usuelle).*

Proposition 1.13. *D est partie discrète de E si et seulement si tous les pointes de D sont isolés.*

Proposition 1.14. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E munie de la topologie induite et $B \subset A$.*

1. *Si B est un ouvert de E, alors B est un ouvert de A pour la topologie induite. Si A est un ouvert de E, alors B est un ouvert dans A pour la topologie induite si et seulement si B est un ouvert dans E.*
2. *Si B est un fermé de E alors B est un fermée dans A pour la topologie induite. Si A est un fermée de E, alors B est un fermée dans A pour la topologie induite si et seulement si B est un fermée dans E.*

Proposition 1.15. *Soit E un espace topologique et $X \subset E'$ des parties de E.*

1. *Si $\overline{X}$ est l'adhérence de X dans E et $\overline{X'}$ l'adhérence de X dans E' (pour la topologie induite par celle de E) alors on a $\overline{X'} = \overline{X} \cap E'$.*
2. *Si $IntX$ est l'intérieur de X dans E et $Int'X$ l'intérieur de X dans E' (pour la topologie induite par celle de E) alors on a $Int'X = IntX \cap E'$*

Proposition 1.16. *Si $(E, \mathcal{O})$ est une topologie séparée et A une partie de E, alors la topologie induite sur A par la topologie de E est séparée.*

Proposition 1.17. ***(transitivité de la topologie induite)***
Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $B \subset A \subset E$ deux parties de E. On note $\mathcal{O}_A$ la topologie induite sur A par celle de E, $\mathcal{O}_B$ la topologie induite sur B par celle de E et $\mathcal{O}'_B$ la topologie induite sur B par $\mathcal{O}_A$. Alors on a $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}'_B$

Définition 1.11. *Une partie D de E est dite discrète si et seulement si la topologie induite par celle de E est la topologie discrète.*

Exemple 1.13. *La topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$ induit sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ et un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. Donc $A \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ ssi c'est un ouvert de $\mathbb{R}$. En revanche, si $A \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ alors c'est un fermé de $\mathbb{R}$ car $\{n\} =]n-1, n+1[\cap \mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$ pour la topologie induite.*

1.5.5 Topologie produit

Soit $(E_1, \mathcal{O}_1)$ et $(E_2, \mathcal{O}_2)$ deux espaces topologiques.

Définition 1.12. *On appelle ouvert élémentaire de $E_1 \times E_2$ toute partie $\Omega \subset E_1 \times E_2$ de la forme $\Omega = O_1 \times O_2$ où O_1 est un ouvert de E_1 et O_2 est un ouvert de E_2. La famille formée de l'ensemble vide et des réunions quelconques d'ouverts élémentaires définit une topologie sur $E_1 \times E_2$ appelée topologie produit.*

Définition 1.13. *On appelle topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ la topologie obtenue par produit successif de la topologie usuelle $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.18. *Soit $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ alors $(V_1 \times V_2)_{V_1 \in \mathcal{V}(a_1)}$, $V_2 \in \mathcal{V}(a_2)$ est un système fondamentale de voisinage de a dans $E_1 \times E_2$ Plus généralement, si $\mathcal{V}'(a_1)$ et un SFV de a_1 et $\mathcal{V}'(a_2)$ et un SFV de a_2 alors $(V_1 \times V_2)_{V_1 \in \mathcal{V}'(a_1), V_2 \in \mathcal{V}'(a_2)}$ est un SFV de a.*

Proposition 1.19. *Si E_1 et E_2 sont séparés alors $E_1 \times E_2$ est séparé.*

Exemple 1.14. *La topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est séparée.*

1.5.6 Limites de fonctions

Définition 1.14. *soient E et F deux espaces topologiques, $X \subset E$ non vide et $a \in \overline{X}$. Soit $f : X \longrightarrow F$ une fonction et $l \in F$. On dit que f tend vers l quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_F(l)$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}_E(a)$ tels que $f(U \cap X) \subset V$ (i.e tel que $U \cap X \subset f^{-1}(V)$).*

Remarque 1.5. *Dans la définition précédente, on peut remplacer $\mathcal{V}(l)$ et $\mathcal{V}(a)$ par n'importe quels SFV de l et a respectivement.*

L'exemple suivant montre que la limite n'est pas toujours unique .

Exemple 1.15. *$f : E \to F$ une fonction et $a \in E$. Si F et muni de la topologie grossière, alors tout point $l \in F$ est une limite de f en $a \in E$.*

Théoréme 1.3. *Si F est sépare, alors la limite est unique (si elle existe).*

Proposition 1.20. *Soit E un espace topologique, $a \in X \subset E$,F un espace topologique séparé et $f : X \to F$. Si $l = \lim\limits_{x \to a, x \in X} f(x)$ existe alors $l = f(a)$.*

Définition 1.15. *Soit E un espace topologique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a $x_n \in V$.*

si F est séparé, La limite l est unique et on note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Proposition 1.21. *Soient E, F_1 et F_2 des espaces topologiques, X une partie de E et $a \in \overline{X}$, $f_1 : X \to F_1$, $f_2 : X \to F_2$ des fonctions et $f : X \to F_1 \times F_2$ la fonction définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.*
Alors $f(x)$ tend vers (l_1, l_2) quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si $f_1(x)$ tend vers l_1 quand x tend vers a en restant dans X et $f_2(x)$ tend vers l_2 quand x tend vers a en restant dans X.

1.5.7 Continuité en un point

Définition 1.16. *soient E et F deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une fonction et $a \in E$. On dit que f est continue en a si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_F(f(a))$, il existe $U \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $f(U) \subset V$ (i.e si et seulement si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a).*
Ici encore on peut remplacer $\mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{V}(f(a))$ par des SFV de a et $f(a)$.

On en déduit directement la propriété suivante.

Proposition 1.22. *Si a est un point isolé de E alors f est continue en a.*

Les liens entre continuité et limites sont donnés par les propositions suivantes.
La première découle directement des définitions.

Proposition 1.23. *$f : E \to F$ est continue en a si et seulement si $f(a)$ est une limite de f en a.*

Dans le cas où F est séparé, alors $f(a)$ est la seule limite possible. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.24. *Si F est un espace séparé, alors $f : E \to F$ est continue en $a \in E$ si et seulement si f a une limite en a. On a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Proposition 1.25. *Soit $f : E \to F$ une application continue en $a \in E$. Alors, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ dans F.*
On dit alors que f est séquentiellement continue en a.

Définition 1.17. *Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$. On que f est continue sur E si et seulement si f est continue en tout point de E.*

Proposition 1.26.

1. *f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.*
2. *f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.*

Proposition 1.27. *Soient E, F et G trois espaces topologiques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions et $a \in E$. Si f et continue sur E et g est continue sur F alors gof est continue sur E.*

Proposition 1.28. *Soient E et F deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une fonction, $E' \subset E$ et $f(E') \subset F' \subset F$. Si f continue sur E, alors $\overline{f} : E' \to F'$ définie par $\overline{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in E'$ est aussi continue sur E' (où E' et F' sont munis des topologies induites par celles de E et F).*

Exemple 1.16.

1. *Si E est un espace topologique, $F = \mathbb{R}$ et f est continue sur E. Alors $\{x \in E/f(x) \geq \alpha\}$ et $\{x \in E/f(x) = \alpha\}$ sont des fermés de E, $\{x \in E/f(x) > \alpha\}$ est un ouvert de E.*
2. *$f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $[1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $f^{-1}([1, +\infty[) =]0, 1]$ est bien un fermé de $\mathbb{R}^*$ (mais pas de $\mathbb{R}$, mais cela ne contredit pas la théorème car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$).*

Remarque 1.6. *l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (**de même pour les fermés**). Par exemple on a $\sin(]-10, 13[) = [-1, 1]$ alors que le sinus et une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.18.

1. *Une fonction* $f : E \to F$ *est dite ouverte si et seulement si l'image de tout ouvert de* E *est un ouvert de* F.
2. *Une fonction* $f : E \to F$ *est dite fermée si et seulement si l'image de tout fermé de* E *est un fermé de* F.

1.6 Analyse fonctionnelle

1.6.1 Espace vectoriel

Définition 1.19. *On dit que* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *si* E *est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (v, \mathrm{w}) & \mapsto & v + \mathrm{w} \end{array}$ • ***Addition*** : $\left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (v, \mathrm{w}) & \mapsto & v + \mathrm{w} \end{array} \right.$

1. ***Associativité*** : $\forall u, v, w \in E, \quad u + (v + w) = (u + v) + w.$
2. ***Élément neutre*** : $\exists e \in E, \quad \forall v \in E, \quad v + e = e + v = v.$
3. ***Opposé*** :$\forall v \in E, \exists v' \in E, \quad v + v' = v' + v = e.$
4. ***Commutativité*** : $\forall v, w \in E \quad v + w = w + v$. *Ces propriétés font de* $(E, +)$ *un groupe commutatif.*

   • ***Multiplication externe*** : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v. \end{array} \right.$

5. ***Associativité*** : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in E, \quad \lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v.$
6. ***Élément neutre*** : $\forall v \in E, 1v = v.$
7. ***Distributivité(1)*** :$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in E \quad , (\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v.$
8. ***Distributivité(2)*** :$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in E, \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w.$

La proposition suivant nous autorisera à noter 0 l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons (vecteur nul)) et -v l'opposé de v.

Proposition 1.29. *Soit* E *un espace vectoriel.*

1. *Le produit par le réel* 0 *d'un vecteur* v *qulconque est l'élément neutre pour l'addition :*

$$\forall v \in E, \quad 0v = e.$$

2. *Le produit par le réel* -1 *d'un vecteur* v *qulconque est son opposé pour l'addition :*

$$\forall v \in E, \quad v + (-1)v = e.$$

1.6.2 Sous espace vectoriel

Définition 1.20. *Soit* $(E,+,\cdot)$ *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}(\mathbb{R}ou\mathbb{C})$ *et soit* $F \subset E$. $(F,+,\cdot)$ *est un sous espace vectoriel de* E *si*
$\forall x,y \in F, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \alpha x + \beta y \in F$

Définition 1.21. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *une norme sur* E *une application*

$$\begin{array}{rcl} \|\,.\,\|: \quad E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \| x \| \end{array}$$

telle que :

1. $\| x \| = 0 \Longrightarrow x = 0_E \quad x,y \in E, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \,.\, \| x \|.$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$

Remarque 1.7. *Si* $\|\,.\,\|$ *vérifie* 1 *et* 2 *alors* $\|\,.\,\|$ *est une semi Norme.*

Exemple 1.17.

1. $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ *est un e.v.n sur* $\mathbb{R}$.
2. $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|_1), \quad x = (x_1 ... x_n) \in R^n, \| x \|_1 = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |)$ *est un e.v.n*
3. $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|_2), \quad x = (x_1 ... x_n) \in R^n, \| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} | x_i. |^2)^{\frac{1}{2}}$ *est un e.v.n.*

Définition 1.22. *On appelle* (E,d) *un espace métrique si* E *est un ensemble et* d *une distance sur* E.
on appelle distance sur un ensemble E, *une application*

$$\begin{array}{rcl} d: E \times E & \longrightarrow & R_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \| x - y \|_E \end{array}$$

tq vérifie :

1. ***La symétrie*** : $d(x,y) = d(y,x)$. *Pour tout* $x,y \in E$.
2. ***L'inégalité triangulaire*** : $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$. *Pour tout* $x,y,z \in E$.
3. ***La définition*** : $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. *Pour tout* $x,y \in E$.

Définition 1.23. ***Espace de Banach***
Un espace de Banach est un espace vectoriel E normé et complet i.e un espace vectoriel muni d'une norme pour laquelle toute suite de cauchy est convergente.

Définition 1.24. ***Espace de Hilbert***
Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme provient d'un produit sclaire.

Définition 1.25. ***Convexité***
Soit E un espace vectoriel. Un sous ensemble F de E est dite convexe si pour tous $x, y \in F$ le segment $[x, y] \subset F$ i.e

$$t.x + (1-t)y \in F \quad \forall t \in [0,1].$$

A partir d'une norme $\|\ .\ \|$, on peut définir une métrique par $d(x, y) = \| x - y \|$. Cette métrique engendre la topologie dont la base est l'ensemble de ses boules ouvertes. Cette topologie sera dite forte.

Définition 1.26. ***Opérateur linéaire, continuité***
Soient $(E, \|\ .\ \|_E)$; $(F, \|\ .\ \|_F)$ deux espaces de Banach. Soit T une application de E dans F. On dit que T est un opérateur linéaire si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

on dit que T est continu, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$.

$$\| T(x) \|_F \leq C \| x \|_E$$

. On note $L(E, F)$ l'ensemble des opérateur linéaires et continus de E dans F .Et on le munit de la norme définie par :

$$\| T \|_L = \sup_{\|x\|_E = 1} \| T.x \|_F$$

Le fait que F soit un espace de Banach fait de $L(E, F)$ un espace de Banach.

Remarque 1.8. *Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, On parlera de formes linéaires. l'espace $L(E, \mathbb{R})$ sera simplement noté E', il sera appelé dual topologique de E.*

Théoréme 1.4. ***(Banach-Steinhauss)***
Soient $(E, \|\ .\ \|_E)$ et $(F, \|\ .\ \|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $(T_\gamma)_{\gamma \in T}$ une famille non nécessairment dénombrable d'éléments de $L(E, F)$. On suppose que $\forall x \in E$ l'ensemble

$$\{\| T_\gamma x \|_F, \gamma \in T\}$$

. est un borné. Alors l'ensemble

$$\{\| T_\gamma \|_L, \gamma \in T\}$$

. est borné.
Autrement dit on a existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \gamma \in T, \quad \forall x \in E, \quad \| T_\gamma x \|_F \leq C \| x \|_E .$$

Théoréme 1.5. ***(Reisz)***
Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée B_E est compacte pour la topologie forte si et seulement si $dimE < \infty$.

Théoréme 1.6. ***(Hahn-Banach, analytique)***.
Soit E un espace vectoriel sur lequel il existe une application P vérifiant, pour tous $x, y \in E$. pour tout$\lambda \geq 0$:

1. $P(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
2. $P(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Soit F un sous espace vectoriel de E et une forme linéare $f : F \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire f' sur E telle que pour tout $x \in F$,

$$f'(x) = f(x)$$

. et

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

.

Corollaire 1.1. *Soit $x \in E$,un espace de Banach.Alors*

$$\| x \|_E = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} | f(x) | .$$

Définition 1.27. ***(Hyperplan affine)***
Soit f une forme linéaire non identiquement nulle sur E, une espace vectoriel normé et $\alpha \in \mathbb{R}$.On définit l'hyperplan affine d'équation $[f = \alpha]$ par

$$H = \{x \in E, \quad f(x) = \alpha\}$$

.

Définition 1.28. *Soit E un espace vectoriel et $A, B \subset E$. On dit que l'yperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si pour tout $x \in B$, $f(x) \leq \alpha$ et pour tout $x \in A$, $f(x) \geq \alpha$.*
On dit que l'hyperplan sépare strictement A et B s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A, f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ et pour tout $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha + \varepsilon$.

Proposition 1.30. *L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé ssi f est continue.*

Théoréme 1.7. ***(Hahn-Banach,géometrique** 1)*
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A, B deux sous ensembles convexes, non vides ($A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$) et disjoints ($A \cap B = \emptyset$) de E. On suppose que A est un ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Théoréme 1.8. ***(Hahn-Banach, géometrique** 2)*
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A, B deux sous ensembles convexes, non vides et disjoints de E. On suppose que A est un fermé et B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B.

Proposition 1.31. ***(Densité)***
Soit E un espace de Banach et F un sous espace vectoriel de E. Si $\forall f \in E', (f(x) = 0 \quad \forall x \in F) \Rightarrow (f(x) = 0 \quad \forall x \in E)$, alors F est dense dans E.

Chapitre 2

Topologie faible

2.1 La topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach, donc nous disposons sur E d'une topologie dite forte provenant de la norme dont E est muni. Nous avons aussi le dual topologique E' de E relativement à cette topologie. Nous voulons maintenent définir une autre topologie sur E qui soit la moins fine($E \subset E'$)conservant E', c'est à dire laissant continus tous les éléments du dual topologique relatif à la topologie forte. Cette topologie sera appelée topologie faible et notée $\sigma(E, E')$.

2.1.1 Construction de $\sigma(E, E')$

Soit U un ouvert $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$. Pour tout $f \in E'.f^{-1}(U) \in \sigma(E, E')$ par continuité de f. Les réunions arbitraires d'intersection finie de ces ensembles forment une topologie sur E. C'est la topologie $\sigma(E, E')$. Les ouverts de $\sigma(E, E')$ sont appelés ouverts faibles. Plus généralement dans la suite, sauf indication contraire, l'adjectif faible est relatif à $\sigma(E, E')$.

2.1.2 Propriétés de $\sigma(E, E')$

Proposition 2.1. ***(séparation)***.
La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.

Démontration :
Soit x et y deux points distincts de E. Les conditions de la deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach sont réunies. Il existe alors $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$f(x) < \alpha < f(y)$. Les ouverts faibles

$$\{z \in E, f(z) < \alpha\}$$

et

$$\{z \in E, f(z) > \alpha\}$$

Sont deux voisinages respectifs de x et y et ils sont disjoints.□

Proposition 2.2. ***(Base de voisinages).***
Soit $x \in E$. Alors les ensembles de la forme

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in E, \mid f_{\mathrm{i}}(x-y) \mid < \varepsilon, \mathrm{i} \in I\}$$

où I est un ensemble fini, $\varepsilon > 0$ et $f_i \in E'$, forment une base de voisinage faibles de x.

Démontration :
Il est clair qu'un ensemble contenant un $V_\varepsilon(x)$ est un voisinage de x. Réciproqument, considérons un voisinage V de x. Par définition de la topologie faible et comme V doit contenir un ouvert qui contient x, V contient

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} w_i(x)$$

où

$$w_i(x) = \{y \in E, \mid f_i(x-y) \mid\}, \quad f_i \in E', \varepsilon > 0$$

Ce W et un $V_\varepsilon(x)$.□

Proposition 2.3. ***(Convergence faible).***
Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E et $u \in E$. La suite (u_n) converge faiblement (i.e relativement à $\sigma(E, E')$) vers u ssi $\quad \forall f \in E', (f(u_n))$ converge (dans $\mathbb{R}$) vers $f(u)$.

Démontration :
Dans un sens,si $f \in E'$, il est immédiat que $(f(u_n))$ converge vers$(f(u))$. Dans l'autre sens, supposons que

$$\forall f \in E', f(u_n) \to f(u)$$

c'est à dire que

$$\forall f \in E', \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \Rightarrow \mid f(u_n) - f(u) \mid < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V_\varepsilon(u)$$

Cela se traduit par la convergence par rapport à $\sigma(E, E')$ de $(u_n)_n$ vers u. □

Proposition 2.4. ***(Comparaison de convergences)***.
Une suite qui converge fortement converge aussi faiblement.

Démonstration : Les voisinages faibles sont aussi des voisinage forts (image réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$ par des applications continues). Il suffit alors de restreindre la définition de la convergence de la topologie forte sur les voisinages faibles. □

Proposition 2.5. ***(Topologie faible en dimension finie)***.
En dimension finie, les topologies faible et forte coincident.

Démonstration : Nous savons par définition que la topologie faible est moins fine que la topologie normée. Nous allons montrer l'inverse aussi en dimension finie. Nous allons étudier les voisinages de 0 pour les deux topologies, on pourra étendre cette étude pour des voisinages de chacun des points de E par translation.
Nous disposons d'un voisinages fort U de 0. Il suffit alors de construire un voisinage faible inclus dans U. Ce voisinage est donc de la forme :

$$V = \{x \in E, \quad | f_i(x) | < \varepsilon, \quad \forall i \in I\},$$

où I est fini et les f_i sont dans E'.
Choississons une base normée $e_1, ..., e_n$ de E. Alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{n=1}^{n} x_i e_i.$$

Notons f_i respectivement les formes linéaires continues $x \mapsto x_\mathrm{i}$. Nous avons alors :

$$|| x || \leq K \sum_{n=1}^{n} | f_i(x) | < K\mathrm{n}\varepsilon, \quad \forall x \in V.$$

Le fait U soit voisinage fort de 0 suppose que U une boule $B(0, r)$. Si on prend $\varepsilon = \frac{r}{kn}$, on obtient $V \subset U$.□

Proposition 2.6. ***(Topologie faible en dimension infinie)***.
En dimension infinie la topologie faible est strictement moins fine que la topologie forte.

Démonstration :
Par construction, la topologie faible est moins fine que la topologie forte. Nous montrerons par la suite qu'elle n'est pas métrisable. Or la topologie forte l'est (elle est même normée

par définition), elles sont alors distinctes. On conclut qu'elle est strictement moins fine que la topologie forte. □
On dispose également des exmples concrets de fermés forts qui ne sont pas des fermés faibles, la sphère unité en est un exemple. Voir par exemple.[3]

Proposition 2.7. *Soit $F \subset E$ un convexe. Alors F est faiblement fermé si et seulement si F est fortement fermé.*

Démontration :
Nous avons déjà qu'un fermé faible est aussi un fermé fort.
Soit F un convexe fortement fermé. Montrons que $E\backslash F$,est un ouvert faible. Soit $x \notin F$, la deuxième forme géométrique du théorème de **H**ahn-**B**anach donne l'existence de $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) < \alpha < f(y) \quad \forall y \in F.$$

Considérons l'ensemble

$$V = \{z \in E; \quad f(z) < \alpha\}$$

Il s'agit d'un voisinage faible de x inclus dans $E\backslash F$, ce dernier est donc faiblement ouvert.Donc F est faiblement fermé.□

Proposition 2.8. ***(Métrisabilité de** $\sigma(E, E')$ **métrisabilité).***
$\sigma(E, E')$ est métrisable si et seulement si $dimE < \infty$.

Démontration :
Dans le cas où l'espace est de dimension finie, nous avions montré que topologie forte et faible coincidaient. Puisque la forte est métrisable, la faible aussi.
pour ce qui concerne la dimension infinie,voir la section Espaces séparables.□

2.2 La topologie faible.⋆ $\sigma(E', E)$ ou $\sigma(E', E'')$

Définition 2.1. ***(Injectivité).***
Une fonction f de E vers F est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E.

Définition 2.2. ***(Surjectivité).***
Une fonction f de E vers F est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E.

Définition 2.3. ***(Bijectivité).***
Une fonction f de E vers F est bijective si et seulement si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E (ce qui équivaut à dire que f est à la fois injective et surjective).

Nous intéressons dans cette partie à une topologie faible mais sur le dual E' de E. Avant cela faisons d'abord la remarque suivante : Soit E un espace de **B**anach, il existe toujours une injection (dite naturelle) de E dans son bidual E'' (dual de E'). Elle est donnée par

$$\begin{array}{rcl} i : E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & i(x) \end{array}$$

où $\forall f \in E', i(x)(f) = f(x)$.
Il s'agit d'une isométrie.En effet, pour tout $x \in E$

$$\| x \|_E = \sup_{\|f\|'_E \leq 1} | f(x) | = \sup_{\|f\|'_E \leq 1} | i(x)(f) | = \| i(x) \|_{E''}$$

Donc i est à fortiori injective. Elle n'est cependant pas toujours surjective. Nous étudierons plus loin les espaces pour lesquels l'application i est surjective.
plaçons nous dans E', nous avons alors trois topologies différentes,la topologie normée, la topologie faible $\sigma(E', E'')$ et une dernière la topologie dite faible $\star$ notée $\sigma(E', E)$ où l'on a identifié $i(E)$ et E. Cela ne veut évidemment pas dire que ce sont les seules, on peut en construire une infinité, la grossière par exemple n'est pas citée ! Ce sont juste les topologie qui nous intéressent les plus.

Remarque 2.1. *Aussi que $\sigma(E', E)$ est moins fine que $\sigma(E', E'')$.*

Définition 2.4. ***(Topologie faible***$\star$ *$\sigma(E', E)$).*
La topologie $\sigma(E', E)$ est la moins fine laissant continues les formes linéaires sur E' du type $i(x)$ où $x \in E$.

2.2.1 Propriétés de $\sigma(E', E)$

Proposition 2.9. ***(séparation).***
$\sigma(E', E)$ est séparée.

Démonstration :
Soient $f, g \in E'$, $f \neq g$, il existe alors $x \in E$ tels que $f(x) \neq g(x)$ Comme $f(x)$ et $g(x)$ sont

des réels, on peut établir une relation d'ordre entre eux. Supposons donc que $f(x) < g(x)$, il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < \alpha < g(x)$. Les ensemble

$$\{h \in E', h(x) < \alpha\}$$

et

$$\{h \in E', h(x) > \alpha\}$$

sont des ouverts faible.⋆ qui contiennent respectivement f et g, et ils sont disjoints.□

Proposition 2.10. ***(Base de voisinages).***
Soit $f \in E'$, les ensembles de la forme

$$V_\varepsilon(f) = \{h \in E', \mid (f-h)(x_i) \mid < \varepsilon i \in I\},$$

où I est fini et $x_i \in E$, constituent une base de voisinages de f pour $\sigma(E', E)$.

Proposition 2.11. ***(Convergence faible.⋆).***
Soit $(f_n)_n$ de E', et $f \in E'$. (f_n) converge vers f pour $\sigma(E', E)$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.12. ***(Comparaison de convergences).***
Une suite $(f_n)_n$ de E' qui converge fortement vers $f \in E'$, converge aussi vers f pour $\sigma(E', E)$.

Définition 2.5. ***(Boule fermée)***
Dans l'espace usuel comme dans n'importe quel espace métrique (E, d) :
• *la **boule fermée** contrée en un point P et de rayon réel r est l'ensemble $B^{'}(P, r)$ des points dont la distance à P est inférieure ou égale à r :*

$$B^{'}(P, r) = \{M \in E \mid d(M, P) \leq r\}$$

Définition 2.6. ***(Boule ouverte)***
• *la **(boule ouvert)** correspondante est l'ensemble $B^{'}(P, r)$ des points dont la distance à P est strictement inférieure à r :*

$$B(P, r) = \{M \in E \mid d(M, P) < r\}$$

Définition 2.7. ***(Espace compact)***
On dit que qu'une partie A d'un espace métrique est compacte si toute suite de A possède une suite extraite convergente.

Théoréme 2.1. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)***.
La boule unité fermée de E' $B_{E'}$ est compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Démontration :
Considérons l'espace produit $Y = \mathbb{R}^E$ muni de la topologie produit. Les élément de Y sont les $a = (a_x)_{x \in E}, a_x \in \mathbb{R}$. On munit E' de la topologie $\sigma(E', E)$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E' & \longrightarrow & Y. \\ f & \longmapsto & (f(x))_{x \in E} \end{array}$$

Φ est clairement continue, elle réalise même un homéomorphisme sur $\Phi(E')$ puisque son inverse Φ^{-1} est telle que

$$\Phi^{-1}(a)(x) = a_x.$$

Remarquons maintenant que $k = \phi(B_{E'})$ est de la forme

$$\mathbf{K} = \{a \in Y; \mid a_x \mid \leq \mid\mid x \mid\mid_E, a_{x+\lambda y} = a_x + \lambda a_y\}$$

Par continuité de Φ^{-1}, si on montre que $\mathbf{K}$ est compact, on a fini !
Or $\mathbf{K}$ est l'intersection des ensembles suivants :

$$\mathbf{K}_1 = \{a \in Y; \mid a_x \mid \leq \mid\mid x \mid\mid_E\}$$

et

$$\mathbf{K}_2 = \{a \in Y; a_{x+\lambda y} = a_x + \lambda a_y\}.$$

Par le thérorème de **T**ychonoff,$\mathbf{K}_1$ est compact comme produit de compacts. Enfin, pour x et y fixés et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $a \mapsto a_{x+\lambda y} - a_x - \lambda a_y$ est continue. On en déduit que $\mathbf{K}_2$ est une intersection sur $E \times E \times \mathbb{R}$ de fermés donc un fermé. La compacité de K_1 montre qu'il est fermé donc $K = K_1 \cap K_2 \subset K_1$ est fermé et par suite un compact. □
Le théorème de **B**anach-**A**laoglu-**B**ourbaki s'applique sur le dual. Donc si l'on dispose d'un espace de **B**anach, on devrait se poser la question de la prédualité avant de l'utiliser, c'est à dire qu'on doit, pour l'utiliser, justifier que cet espace est le dual d'un autre. Or il existe des espaces de **B**anach qui n'ont pas de préduaux. Par contre,nous n'avons pas

ce problème avec les espaces de **H**ilbert qui, par le théorème de représentation de **R**iesz, sont les duaux d'eux même respectivement. Les espaces de **B**anach $l^p \quad p \in [1, \infty]$, n'ont pas non plus ce problème comme nous le verrons dans la partie Applications.
Nous allons voir, cependant, un autre théorème qui donne le même résultat sans condition de prédualité, mais sous une autre condition sur l'espaace : c'est le théorème de **K**akutani.

2.3 Topologie faible et Espaces de bonnes propriétés

Nous définissons dans cette partie des partie des espaces dans lesquels la topologie faible donne de résultats intéressants.

2.3.1 Les espaces réflexifs

Soit E un espace de **B**anach, on dit que E est réflexif si E est isométrique à E'' par l'injection naturelle i définie plus haut. Autrement dit si i est surjective (nous avions vu que i était une isométrie).
Attention : Dans la définition, le fait d'utiliser i est essentiel puisqu'il existe des espaces isométriques à leurs biduaux et qui ne satisfont pas à cette définition. **R**obert **J**ames a construit un tel espace !

Remarque 2.2. *Il est clair que pour les espaces réflexifs, on a* $\sigma(E', E'') = \sigma(E', E)$.

Résultats de topologie faibles

Un des grands résultats de la topologie $\sigma(E, E')$ est théorème suivant :

Théoréme 2.2. ***(Kakutani)***.
*Soit E un espace de **B**anach. La boule unité fermée de E est faiblement compacte si et seulement si E est réflexif.*

Démontration :
Supposons que E est réflexif. Alors $i(B_E) = B_{E''}, i$ est l'isométrie naturelle entre les deux espaces. Or le théorème de **B**anach-**A**laoglu-**B**ourbaki dit que $B_{E''}$ est compacte pour $\sigma(E'', E')$. Si on montre que i^{-1} est continue, on aura alors gagné !
Soit $f \in E'$. Considérons l'application $\psi \mapsto f(i^{-1}(\psi)) = \psi(f)$. Cette application est continue par définition des $\psi \in E''$. D'où la continuité de i^{-1}. Pour la réciproque, nous utiliserons le lemme suivant, nous l'admettrons.$\square$

Lemme 2.1. ***(Goldstine).***
*Soit E un espace de **B**anach. Alors $i(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour $\sigma(E'', E')$.*

Démonstration :
supposons que B_E est faiblement compact. La continuité forte de i montre qu'elle est aussi continue pour la topologie initiale $\sigma(E, E')$ et la topologie finale $\sigma(E'', E')$. Donc $i(B_E)$ est compacte pour $\sigma(E'', E')$, donc fermée pour cette topologie. Or le lemme de **G**oldstine dit qu'elle est dense dans $B_{E''}$; on récupère alors que $B_{E''} = i(B_E)$. L'image de E par i contient donc la boule unité de E'', il s'agit alors de E'' tout entier.□

Corollaire 2.1. *Soit E un espace de **B**anach réflexif et F un sous espace fermé de E. Alors F, muni de la norme induite, est réflexif.*

Démonstration :
Par le théorème de **K**akutani, il suffira juste de montrer que $B_M = M \cap B_E$ est compacte. En tant que sous espace vectoriel, F est faiblement fermé, la proposition 2.7 montre que F est faiblement fermé. La compacité de B_E donne à celle-ci le même résultat. Ainsi $B_M = M \cap B_E$ est fermé dans B_E, donc B_M est compacte.□

Corollaire 2.2. *Soit E un espace de **B**anach. E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Démonstration :
Supposons E réflexif. Alors $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$. Or le théorème de **B**anach-**A**laoglu-**B**ourbaki assure la compacité de $B_{E'}$ et ensuite le théorème de **K**akutani établit alors la réflexivité de E'.
Supposons maintenant que E' est réflexif, le même procédé que précedemment montre que E'' est réflexif. $i(E)$ étant fermé dans E'', le corollaire 2.1 montre qu'il est réflexif. On en déduit par isométrie que E est réflexif.□
Le théorème de **K**akutani assure la compacité de la boule unité fermée, mais il faut (et il suffit) que l'espace soit réflexif. Ce que l'on peut se demander maintenant c'est s'il existe un caractère d'un espace de **B**anach suffisant pour que celuici soit réflexif et surtout si les espaces de **B**anach usuels ont ce caractére. Pour cette dernière question, nous verrons ces espaces dans la partie Applications. Le théorème de **M**ilman-**P**ettis dit que tout espace uniformément convexe est réflexif. Nous étudierons alors dans la partie suivante ce type d'espace.

Les espaces uniformément convexes

Définition 2.8. *Soit E un espace de **B**anach. On dit que E est uniformément convexe si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E,$

$$(\| x \| = \| y \| = 1 \text{ et } \| x - y \| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\frac{\| x - y \|}{2} < 1 - \delta \right).$$

*Par exemple l'égalité du parallélogramme montre que les espaces de **H**ilbert sont uniformément convexes.*

Théoréme 2.3. ***(Milman-Pettis)****.*
Les espaces uniformément convexes sont réflexifs.

Nous proposons une démonstration de ce théorème à partir des résultats de la section suivante. Pour une autre démonstration, on peut consulter.

Les critère de compacité et le théorème de James

Dans les années 1960, le mathématicien américain **R**obert **J**ames établit un critère de compacité faible après un théorème qui porte son nom et qui est considéré ici comme corollaire de ce critère. Ce théorème établit une nouvelle caractérisation des espaces réflexifs. L'un est aussi important que l'autre.

Théoréme 2.4. ***(critère de compacité de James)****.*
*Soit E un espace de **B**anach. Soit $F \subset E$ un sous ensemble convexe et faiblement fermé. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est faiblement compact.*
2. $\forall f \in E', \exists x \in F, f(x) = sup_{y \in F} f(y).$

Attention :
Un contre exemple de ce résultat dans le cas d'un espace vectoriel normé non complet a été établi en 1971 par **J**ames lui-même. Donc il y a nécessité que l'espace soit de Banach. Nous admettrons ici ce résultat, sa démonstration étant sophistiquée et de prérecquis non étudiés dans ce mémoire.

Corollaire 2.3. ***(Théorème de James)****.*
*Soit E un espace de **B**anach. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est réflexif.*

2. $\forall f \in E', \exists x, \| x \|_E \leq 1, \ f(x) = \| f \|_{E'}$.

Démonstration :
Par le théorème de **K**akutani, E est réflexif ssi la boule unité fermée (convexe) de E est faiblement compacte, ce qui équivaut, par le critère de **J**ames, à ce que $\forall f \in E'$, $sup_{\|x\|_{E \leq 1}} f(x)$ est atteint. Mais alors la quantité $\forall f \in E'$, $sup_{\|x\|_{E \leq 1}} f(x)$ est la définition de la norme de f (par linéarité).$\square$
Démontrons maintenant le théorème de **M**ilman-**P**ettis.
Démonstration :
Par le théorème de **J**ames, il suffira de montrer que tout $f \in E'$ atteint sa norme sur la boule unité fermée de E. Pour cela considérons la forme $g = \frac{f}{\|f\|_{E'}}$ et une suite (x_n) de E de norme 1 telle que $g(x_n)$ converge vers 1. Nous avons les inégalité :

$$g\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) \leq \frac{\| x_n + x_m \|_E}{2} \leq \frac{\| x_n \|_E + \| x_m \|_E}{2} = 1$$

D'autre part on a

$$g\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) = \frac{g(x_n)}{2} + \frac{g(x_m)}{2} \underset{n.m \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc par le théorème d'encadrement, on a

$$\frac{\| x_n + x_m \|_E}{2} \underset{n.m \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

E étant uniformément convexe, ceci n'est pas possible que si

$$\| x_n - x_m \|_E \underset{n.m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite (x_n) est de **C**auchy, elle admet alors une limite x dans E puisque celui-ci est,en particulier complet. x est évidemment de norme 1.La continuité de g permet par passage à la limite de trouver,

$$g(x) = \frac{f}{\| f \|_E}(x) = 1$$

ou encore,

$$f(x) = \| f \|_{E'} .$$

$\square$

Remarque 2.3. ***(Suite de Cauchy Dans*** $\mathbb{R}$ ***ou*** $\mathbb{C}$***).***
On dit qu'un suite (u_n) *des réels ou de complexes est un suite de* ***c****auchy si elle vérifie la propriété suivante, applée critère de* ***c****auchy*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq N \, et \, q \geq N \Longrightarrow \mid u_p - u_q \mid < \epsilon.$$

2.3.2 Les espaces séparables

Remarque 2.4. ***(Dénombrable).***
On dit qu'un ensemble E *est dénombrable s'il existe une bijection entre l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels et* E*.*

Comme nous l'avons mentionné dans les rappels, un espace séparable est un espace qui contient un sous ensemble dénombrable dense.

Remarque 2.5. ***(Dense)***
Soit E *un espace topologique et* A *un sous ensemble de* E *on dit que* A *est dense dans* E *si l'adhérence de* $A(\overline{A})$ *est égale à* $E(\overline{A} = E)$*.*

Définitions et propriétés

Proposition 2.13. *Tout sous ensemble* Y *d'un espace métrique séparable* X *est séparable.*

Démontration :
Soit (u_n) une suite dense dans X. Soit une suite (r_p) de réels positifs qui converge vers 0. On considère les ensembles $B(u_n, r_p) \cap F$ et on y prélève les $a_{n,p}$ qui forment une suite dense dans F.$\square$

Théoréme 2.5. ***(Séparabilité et dualité)***
Soit E *un espace de* ***B****anach tel que* E' *soit séparable. Alors* E *est séparable. La réciproque et fausse.*

Démontration :
Supposons que E' est séparable. Soit (f_n) une suite dénombrable dense dans E'. Soit un élément f_n de cette suite, il existe x_n de norme 1 tel que

$$f_n(x_n) \geq \frac{|| f_n ||}{2}$$

Soit L_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré pas les $(x_n)_n$ et L_1 celui sur $\mathbb{R}$. Il est clair que L_0 est dénombrable et que L_0 est dense dans L_1. Il nous suffit de vérifier que L_1 est dense dans E. soit $f \in E'$ tel que f s'annule sur L_1. soit $\varepsilon > 0$, par densité des (f_n), il existe n tel que $\| f_n - f \| < \varepsilon$. donc

$$\| f \| < \varepsilon + \| f_n \|$$

on a aussi,

$$\frac{\| f_n \|}{2} \leq (f_n - f)(x_n) + f(x_n) \leq \| f_n - f \| \| x_n \| + 0 \leq \varepsilon$$

alors

$$\| f_n \| \leq 2\varepsilon$$

on récupère donc

$$\| f \| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

. On conclut que $f = 0$. Et L_1 est dense dans E et la densité de L_0 dans L_1 et la dénombrabilité de celui-ci montrent que E est séparable.□

Corollaire 2.4. *Soit E un espace de Banach. Alors (E réflexif et séparable) $\Leftrightarrow$ (E' réflexif et séparable).*

Démontration :
Si E' est réflexif et séparable. Alors le corollaire 2.2 et le théorème 2.5 donnent que E est réflexif et séparable. Si maintenant E est réflexif et séparable. Alors $E'' = i(E)$ est réflexif et séparable par isométre. Et donc les mêmes corollaire et théorème montre que E' est réflexif et séparable.□

Résultats de topologie faibles

Nous avions vu avec le théorème de **B**anach-**A**laoglu-**B**ourbaki et le théorème de **K**akutani des résultats de compacité des boules unités. Seulement avoir un compact est une bonne chose mais qu'il soit métrique est encore mieux. Puisque beaucoup des théorèmes ne s'appliquant que sur des compacts exigent de plus, que ces compacts soient métriques. Les théorèmes qui suivant donnent des conditions nécessaires et suffisantes de métrisabilité de ces boules.

Théoréme 2.6. ***(Métrisabilité de*** $\sigma(E, E')$***).***
La boule B_E de E est métrisable si E' est séparable.

Démonstration :
Supposons que E' soit séparable. Nous avons alors existence d'une suite (f_n) dense dans E'. Considérons la métrique définie par

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mid f_n(x-y) \mid}{1+ \mid f_n(x-y) \mid}$$

.

1. La topologie définie par d est moins fine que $\sigma(E,E')$. En effet, soit $x \in E$. Considérons la boule fermée

   $$B = B_\varepsilon = \{y \in E, d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

   Soit $N \geq 1$ tel que $\frac{1}{2^N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = V(x)$ un voisinage de x défini par les $(f_n)_{1 \leq n \leq N}$. Soit y $\in V(x)$.

   $$d(x,y) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq ... \leq \varepsilon.$$

   Donc

   $$V(x) \subset B.$$

   La topologie de d est ainsi moins fine que $\sigma(E,E')$.

2. Les deux topologie coincident sur B_E.
   En effet, soit V un voisinage faible de $x \in B_E$. Alors

   $$\exists \varepsilon > 0 \ \ et \ \ (\mathrm{g}_i)_{1 \leq i \leq n}, v_\varepsilon \ \subset V$$

   où V_ε est défini par les g_i. Par densité, on peut trouver dans la suite (f_n) une partie $(f_{k_i})_{1 \leq i \leq n}$ telle que

   $$\| \mathrm{g}_i - f_{k_i} \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i.$$

   soit

   $$W(x) = V_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap B_E$$

   où $V_{\frac{\varepsilon}{2}}$ est défini par les (f_{k_i}). Soit y $\in W(x)$, on a pour tout i,

   $$\mid \mathrm{g}_i(x-\mathrm{y}) \mid \leq \mid f_{k_i}(x+\mathrm{y}) \mid + \mid (f_{k_i} - \mathrm{g}_i)(x-\mathrm{y}) \mid$$

$$\leq | f_{k_i}(x - \mathrm{y}) | + || f_{k_i} - \mathrm{g}_i || (|| x || + || \mathrm{y} ||) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}.2 = \varepsilon$$

Donc $W(x) \subset V$. Or la boule $B(x, \frac{\varepsilon/2^{k_n}}{1+\varepsilon/2^{k_n}})$ est donc $W(x)$, on récupère que $\sigma(E, E')$ est moins que la topologie de d. Le résultat établi en 1)permet de conclure.□

En fait nous avons la réciproque aussi. Sa démonstration est très délicate et n'est pas proposée ici.

Théoréme 2.7. ***(Métrisabilité de*** $\sigma(E', E)$***).***
Soit E un espace de Banach. E est séparable si et seulement si la boule unité fermée de E' est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Démontration :
Pour la première implication, on résonne comme pour le théorème précedent. Pour la réciproque, supposons que $B_{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$). Soit l'ensemble

$$U_n = \left\{ f \in B_{E'} \, ; \; d(f, 0) < \frac{1}{n} \right\}$$

Soit V_n un voisinage faible$\star$ de 0 qui soit inclus dans U_n. Nous pouvons prendre un voisinage élémentaire i.e

$$V_n = \{ f \in B_{E'} \, ; \; | f(x) | < \varepsilon_n, \quad \forall x \in F_n \}$$

où F_n est une partie finie de E. Il est clair que l'ensemble $D = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ est dénombrable. Nous avons d'autre part,

$$\cap_{n \geq 1} V_n = \{0\}$$

et donc

$$(f(x) = 0 \quad \forall x \in D) \Rightarrow (f = 0)$$

.□

Conclusion et commentaires

Rappelons tout d'abord que tout au long du mémoire, toutes les notions introduites ne l'ont été que dans le but de trouver des compacts et dans le cas où il est possible, de vérifier leur métrisabilité. Le problème qui s'est posé c'est quand on est un dimension infinie, le célèbre théorème de **R**iesz dit que les boules fermées ne sont jamais compactes pour la topologie forte, contrairement en dimension finie où elles le sont. Il a fallu alors introduire des topologies moins fines mais conservant certains objets liés à l'espace de **B**anach sur lequel l'étude est faite.Un premier résultat de compacité(faible) nous est donné par le théorème de **B**anach **A**laoglu-**B**ourbaki mais pour la topologie faible-$\star$. Il demande tout de même que l'espace soit un dual. Il est important de rappeler aussi que cette topologie ne conserve pas le dual de l'espace en général, mais nous avons un résultat de densité important.
Le théorème de **K**akutani donne quant à lui, la compacité (faible) sans condition de dualité. Il exige quand même que l'espace soit réflexif (il y a même équivalence), dans quels cas les topologies faible et faible-$\star$ coincident sur le dual. Ces espaces réflexifs sont donc de bons espaces pour établir des résultats de compacité. Nous avons une classe d'espaces qui sont tous réflexifs : ce sont les espaces uniformément convexes.Ensuite le théorème de **J**ames donne une caractérisation des espaces réflexifs par le fait que toute forme linéaire continue sur ceux-ci atteigne sa norme. L'équivalence est aussi importante dans un sens que dans un autre. La séparabilité vient ensuite métriser tous ces compacts. En effet nous avons ce résultat concernant E et E' selon lequel la séparabilité de l'un équivaut à la métrisabilité des boules de l'autre.

Bibliographie

[**1**] C.TISSERON *Notions de topologie : Introduction aux espaces fonctionnels,* Hermann, 1985.

[**2**] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et application.* Dunod, Paris, 1999.

[**3**] J. DIEUDONNE, *Éléments d'analyse*, Tome 1, Gauthier Villars, 1971

[**4**] L. SCHWARTZ *Analyse*, Tome 1, Hermann. 1971.

[**5**] RC.James, A counterexample for a sup theorem in normed space, *Israel J. Math*, $9(4) : 511 - 512, 1971.$

[**6**] RC. James. Reflexivity and the sup of linear functionals. *Israel J. Math,* $66(1) : 159 - 169, 1957.$

[**7**] RC. James. Weakly compact sets. *Trans.Amer. Math. Soc*, 113 $(1) : 129 - 140, 1964$

[**8**]$WalterRudin.$*Analyse fonctionnelle.*$Edisciencei nternational, Paris.$1995.