République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Année univ.: 2018/2019

Étude des métriques invariantes sur le groupe de Heisenberg

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique
Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Benziadi Habib[1]

Sous la direction de

D. Djebbouri

Soutenue le 25/06/2019 devant le jury composé de

N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
D. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

[1]e-mail : fahabib32@gmail.com

بسم الله الرحمن الرحيم

- «Dédicaces» -

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut, tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance ; c'est tout simplement que je dédie ce mémoire :

À MA TRÈS CHÈRE MÈRE : F. BENZIADI

Autant de phrases, aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pourtoi ; tu m'as comblé avec ta tendresse et ton affection tout au long de mon parcours, tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les annees de mes études, tu as toujours été présente à mes cotés pour me consoler quand il fallait. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et mon profond amour. Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

À MON TRÈS CHER PÈRE : M. BENZIADI

Tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie, je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain. Je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté, que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur et te protège du mal.

À MA FUTUR FEMME F. BERGA

Tes encouragements et ton soutien étaient la bouffée d'oxygène qui me ressourçait dans les moments pénibles, de solitude et de souffrance. Merci d'être toujours à mes côtés, par ta présence, ta tendresse, pour donner du goût et du sens à notre futur vie de famille. Je te prie de trouver dans ce travail l'expression de mon estime et mon sincère attachement.

À MES CHERS GRAND PARENTS MATERNELS, que ce modeste travail, soit l'expression des vœux que vous n'avez cessé de formuler dans vos prières. que Dieu vous donne santé et longue vie.

À MON FRÈRE ET MES SŒURS En souvenir d'une enfance dont nous avons partagé les meilleurs et les plus agréables moments. Pour toute la complicité et l'entente qui nous unissent, ce travail est un témoignage de mon attachement et de mon amour.

- «Remerciements» -

Je voudrais dans un premier temps remercier le bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage afin d'acomplir ce travail.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à mon encadreur : monsieur ***D. DJEBBOURI*** *pour ses conseils judicieux*

Je n'oublierai jamais mon honorable enseignant monsieur ***S. OUAKKAS*** *pour tout ce qu'il m'a appris et pour tout le temps précieux qu'il m'a consacré ; merci de m'avoir donné la fprce nécessaire qui m'apermet de mener à bien ce projet.*

Un grand merci également à Messieurs ***A. ZEGLAOUI****,* ***D. SAADLI****,* ***K. DJERFI****, et M^{elle}* ***F. MOSTEFAI*** *et M^{me}* ***N. BEKKOUCHE*** *pour avoir eu la patience de rependre à mes innombrables questions.*

J'adresse mes sincéres remerciements à mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi.

Je les remercie infiniment pour m'encouragé et m'aidé à arriver à se stade d'études.

Je remercie mes frères et mes sœurs pour leur encouragements.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements aux membres du jury pour l'intérêt sujet qu'il ont manifester pour ce travail.

Je tiens à remercier trés sincérement l'ensemble des membres de laboratoire de Géometrie, Analyse contrôle et Applications pour leurs aides, orientations, et conseils

Je remercier vivement les étudiants Master Géometrie Différentielle pour leur sincère amité et leur confiance et leur soutien inconditionnel.

à la fin*, j'aimerai exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé et assisté durant mes années d'études, pour leur soutien moral et intellectuele dans la réalisation ce mémoire.*

La **M**usique est une
Mathématique Sonore,
la **M**athématique est une
Musique Silencieuse

"édouard Herriot"

Table des matières

⧫ Introduction ⧫

Un groupe de Lie est en particulier une variété différentiable, à ce titre elle peut être munie d'une structure riemannienne. Parmi toutes les métriques riemanniennes sur groupe de Lie, celles pour lesquelles les translations à gauche (ou les translations à droite) sont des isométries qui revêtent un intérêt particulier car elles prennent en compte la structure de groupe, un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche (ou, ce qui est équivalent, invariante à gauche). En conséquence, il est possible de trouver des formules explicites pour la connexion de Levi-Civita et les diverses courbures associées à un groupe de Lie riemannien, en particulier pour les métriques qui sont à la fois invariantes à gauche et à droite (bi-invariantes).
On commence ce mémoire par un premier chapitre sur les variétés riemanniennes. Avant d'introduire cette notion fondamentale, un bref rappel des outils nécessaires s'impose, notamment les champs de tenseurs et les connexions covariantes sur une variété différentiable. Une fois la définition d'une métrique riemannienne introduite, on parle de connexion de Levi-Civita d'une telle structure et on exhibe les différentes courbures qui en découlent.
On enchaine par le pendant de la notion de métrique riemannienne pour ce travail, à savoir la structure de de groupe de Lie. On définit les notions importantes liées à cette structure : les translations à gauche, les translations à droites, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie et la représentation adjointe.
Les notions de groupe de Lie et de variété riemanniennes introduite, nous serons en mesure de définir les groupes de Lie riemanniennes. Nous donnons une formule simplifiée de la connexion de Levi-Civita d'une métrique invariante à gauche sur un groupe Lie, dans le cas particulier où la métrique est bi-invariante on donne en plus les formules des différentes courbures en fonction notamment du crochet de Lie des champs de vecteurs.
On termine par l'étude explicite de l'exemple des métriques bi-invariante sur le groupe d'Heisenberg de dimension trois.
Tout au long de ce mémoire on utilise la convention d'Einstein pour les différentes sommations.

Chapitre 1

Variétés riemanniennes

La géométrie riemannienne est une généralisation de la géométrie euclidienne : une variété riemannienne est une variété différentiable munie d'un tenseur fondamental qui fournit une structure euclidienne sur chaque espace tangent. Pour commencer on introduit les notions fondamentales de variété riemannienne, connexion de Levi-Civita et courbures riemanniennes.

1.1 Rappels

Dans cette section on va rappeller quelques notions qu'on va utilisé par la suite, telle que les champs de tenseurs sur une variété différentielle.

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement et $\phi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. Pour tout $p \in M$, l'application linéaire tangente à ϕ au point p est l'application

$$\begin{array}{rccl} T_p\phi : & T_pM & \longrightarrow & T_{\phi(p)}N \\ & [\gamma]_p & \longmapsto & T_p\phi([\gamma]_p) \end{array}$$

définie par

$$T_p\phi([\gamma]_p) = [\gamma \circ \phi]_{\phi(p)}$$

L'application transposé (duale) de $T_p\phi$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl} (T_p\phi)^* : & T^*_{\phi(p)}N & \longrightarrow & T^*_pM \\ & \omega_{\phi(p)} & \longmapsto & (T_p\phi)^*(\omega_{\phi(p)}) = \omega_{\phi(p)} \circ T_p\phi. \end{array}$$

On rappelle également que l'application tangent à ϕ est

$$\begin{array}{rccl} T\phi : & TM & \longrightarrow & TN \\ & (p, [\gamma]_p) & \longmapsto & (\phi(p), T_p\phi([\gamma]_p)) \end{array}$$

Image inverse d'un tenseur covariant

Soit $\phi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. D'une manière général, l'image inverse ϕ^* agit sur l'ensemble des champs de tenseurs de type $(0, s)$ sur N à valeur dans l'ensemble des champs de tenseurs de type $(0, s)$ sur M de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccl} \phi^* : & \mathcal{T}^{(0,s)}(N) & \longrightarrow & \mathcal{T}^{(0,s)}(M) \\ & \omega & \longmapsto & \phi^*\omega \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccl} \phi^*\omega : & \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}^{s-fois} & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & (X^1, \cdots, X^s) & \longmapsto & \phi^*\omega(X^1, \cdots, X^s) = (\omega \circ \phi)(T\phi(X^1), \cdots, T\phi(X^s)) \end{array}$$

où,

$$(\phi^*\omega(X^1, \cdots, X^s))(p) \quad = \quad \omega_{\phi(p)}(T_p\phi(X^1_p), \cdots, T_p\phi(X^s_p)), \quad \text{Pour tout } p \in M.$$

Exemple 1.1.1. *Soient $\phi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞, h est un champ de tenseur de type $(0, 2)$ sur N alors*

$$\begin{array}{rccl} \phi^* : & \mathcal{T}^{(0,2)}(N) & \longrightarrow & \mathcal{T}^{(0,2)}(M) \\ & h & \longmapsto & \phi^*(h) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccl} \phi^*(h) : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \phi^*(h)(X, Y) \end{array}$$

Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $p \in M$

$$\phi^*(h)(X, Y)(p) = h_{\phi(p)}(T_p\phi(X_p), T_p\phi(Y_p)) \tag{1.1}$$

Image direct d'un tenseur contravariant

Soit $\phi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞, on suppose que ϕ est un difféomorphisme. L'image directe ϕ_* est une application linéaire définie de l'ensemble des champs de tenseurs contravariants sur M à valeur dans l'ensemble des champs de tenseurs sur N par :

$$\phi_*(X^1 \otimes \cdots \otimes X^r) = \phi_* X^1 \otimes \cdots \otimes \phi_* X^r$$

où $\phi_* X = T\phi \circ X \circ \phi^{-1}$. d'où, Pour tout $q \in N$, tel que $q = \phi(p)$, on a :

$$(\phi_*(X^1 \otimes \cdots \otimes X^r))(q) = T_p\phi(X^1_p) \otimes \cdots \otimes T_p\phi(X^r_p)$$

Nous allons étudier maintenant, une nouvelle structure sur une variété M. Cette structure nous permettra de définir une nouvelle dérivation, la dérivée covariante. Cette dérivation agira tout d'abord sur les champs de vecteurs, mais nous pouvons l'étendre aux tenseurs en général.

Définition 1.1.1. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

vérifiant les propriétés :

1. *∇ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X ;*
2. *∇ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y ;*
3. *∇ vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire*

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y \qquad f \in C^\infty(M).$$

$\nabla_X Y$ est appelé la dérivée covariante de Y dans la direction de X.

Soit $(U; x^1, \cdots, x^m)$ un système de coordonnées locales sur M. On note, s'il n'ya pas risque d'embiguité, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial xi}$.
$\nabla_{\partial_i}\partial_j$ est un élément de $\mathfrak{X}(U)$, donc il s'écrit sous forme combinaison linéaire de ∂_k.

C'est-à-dire $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ où $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$.

Les fonctions lisse Γ_{ij}^k, pour $i, j, k = 1, \cdots, m$, sont appelées symboles de Christoffel.

Pour $X = X^i \partial_i$ et $Y = Y^j \partial_j$, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left(Y^j \partial_j \right) \\
&= Y^j \nabla_X \partial_j + X(Y^j)\partial_j \\
&= Y^j X^i \nabla_{\partial_i} \partial_j + X(Y^j)\partial_j \\
&= Y^j X^i \Gamma_{ij}^k \partial_k + X(Y^k)\partial_k \\
&= \left(XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.2. *(le cas de $\mathbb{R}^m$).*

La connexion standard $\overline{\nabla}$ de $\mathbb{R}^m$ est définie pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ par

$$\overline{\nabla}_X Y = X(Y^j)\partial_j$$

Les composantes du champ résultant sont,

$$\left(\overline{\nabla}_X Y\right)^j = X(Y^j) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}$$

Définition 1.1.2. *La torsion d'une connexion ∇ est un champ de tenseur sur M de type $(1,2)$ défini par*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

Où $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Remarque 1.1.1. $T(X,Y) = -T(Y,X)$

Relativement à un système de coordonnées locales $(U; x^1, \cdots, x^m)$, le tenseurs de torsion T de la connexion ∇ s'exprime en fonction des symboles de Christofell Γ_{ij}^k comme suit

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

Cela nous permet de conclure que $T = 0$ si et seulement si $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

Aussi, si $X = X^i\partial_i, Y = Y^j\partial_j \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$T(X,Y) = X^iY^j\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)\partial_k.$$

Définition 1.1.3. *Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est dite sans torsion si $T = 0$. Autrement dit :*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad [X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

ce qui permet d'exprimer le crochet de Lie en fonction de ∇.

Définition 1.1.4. *La courbure R de la connexion ∇ est le champ de tenseur sur M de type $(1,3)$ donné par*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Relativement à un système de coordonnées locales, le tenseur de courbure R s'exprime en fonction des symboles de Christoffel
Posons $R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = R_{ijk} \in \mathfrak{X}(U)$, donc il s'ecrit sous la forme $R_{ijk} = R^l_{ijk}\partial_l$
où $R^l_{ijk} \in C^\infty(U)$, d'une part.
D'autre part, en utilisant la définition de la courbure et comme $[\partial_i,\partial_j] = 0\ \forall i,j$ on a

$$\begin{aligned}
R_{ijk} &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\Gamma^m_{jk}\partial_m - \nabla_{\partial_j}\Gamma^m_{ik}\partial_m \\
&= \partial_i(\Gamma^m_{jk})\partial_m + \Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{im}\partial_n - \partial_j(\Gamma^m_{jk})\partial_m - \Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{jm}\partial_n \\
&= (\Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{jm})\partial_n + (\partial_i(\Gamma^m_{jk}) - \partial_j(\Gamma^m_{ik}))\partial_m \\
&= [(\Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{jm}) + (\partial_i(\Gamma^n_{jk}) - \partial_j(\Gamma^n_{ik}))]\partial_n
\end{aligned}$$

D'où

$$R^l_{ijk} = \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} + \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) \tag{1.2}$$

Propriété 1.1.1. *Le tenseur de courbure R a les propriétés suivantes :*
$\forall X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$, et $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ *(antisymétrie)*
2. $R(f_1X, f_2Y)f_3Z = f_1f_2f_3R(X,Y)Z$
3. *R vériéfie l'identité de Bianchi algébrique :*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \quad = \quad 0$$

Définition 1.1.5. *Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est dite plate si $R = 0$.*

1.2 Métriques riemanniennes

Soit M une variété différentiable lisse de dimension finie m.

Définition 1.2.1. *une métrique riemannienne sur une variété M est un champ de tenseur g de type $(0,2)$ (2-fois covariant) tel que, pour tout $p \in M$, le tenseur g_p est symétrique et définie positive c'est-à-dire :*

$$g: \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & T_p^*M \otimes T_p^*M \\ p & \longmapsto & g_p \end{array} \qquad \text{où} \qquad g_p: \begin{array}{ccc} T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) & \longmapsto & g_p\left(X_p, Y_p\right) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $g_p\left(X_p, Y_p\right) = g_p\left(Y_p, X_p\right)$ $\qquad$ *(symétrique) ;*
2. $\left\{ \begin{array}{l} g_p\left(X_p, X_p\right) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow X_p = 0_{T_pM}; \\ g_p\left(X_p, X_p\right) \geqslant 0. \end{array} \right.$ $\qquad$ *(définie positive).*

Si g est une métrique, alors elle induit une application $C^\infty(M)$-bilinéaire sur $\mathfrak{X}(M)$ donné par

$$g: \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & g\left(X,Y\right) \end{array}$$

où

$$g\left(X,Y\right): \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & g\left(X,Y\right)(p) = g_p\left(X_p, Y_p\right) \end{array}$$

vérifiant

1. $g(X,Y) = g(Y,X)$, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (symétrique) ;
2. $\begin{cases} g(X,X) = 0_{C^\infty(M)} \Longrightarrow X = 0_{\mathfrak{X}(M)}; \\ g(X,X) \geqslant 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \end{cases}$ (définie positive).

Remarque 1.2.1. *Dans un système de coordonnées locales* $(U; x^1, \cdots, x^m)$*, g s'ecrit sous la forme*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{1.3}$$

Au point $p \in U : g_p = (g_{ij})_p \, d_p x^i \otimes d_p x^j$.

Si $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *sont deux champ de vecteurs sur l'ouvert U, alors on a*

$$g(X,Y) \quad = \quad g_{ij} X^i Y^j \tag{1.4}$$

Définition 1.2.2. *Une variété riemannienne est un couple* (M, g) *où M est une variété différentiable et g une métrique riemannienne sur M.*

Exemple 1.2.1. *On reprend l'exemple 1.1.1, Si de plus* ϕ *est une immersion et h est une métrique riemannienne sur N, donc* $\phi^*(h)$ *est une métrique riemannienne sur M, appelée la métrique image inverse de h par* ϕ.

Exemples 1.2.1. *Soit* B^m *la boule unité dans* $\mathbb{R}^m$ *(ouverte), On la muni de la métrique hyperbolique définie par*

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathfrak{X}(B^m) \times \mathfrak{X}(B^m) & \longrightarrow & C^\infty(B^m) \\ & (X,Y) & \longmapsto & H(X,Y) \end{array}$$

où

$$H_x(X_x, Y_x) = \frac{4 \langle X_x, Y_x \rangle}{\left[1 - \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2\right]^2}$$

,

où $< \cdot, \cdot >$ *désigne le produit scalaire standard de* $\mathbb{R}^m$.

Ainsi

$$H_x(\frac{\partial}{\partial x^i}/_x, \frac{\partial}{\partial x^j}/_x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\left[1 - \sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^2}, & si \quad i = j\,, \\ \\ 0, & si \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

où $x = (x^1, \cdots, x^m)$

Remarque 1.2.2. *Soient* (M, g) *une variété riemannienne, de dimension m,* $(U; x^1, \cdots, x^m)$, $(V; y^1, \cdots, y^m)$ *deux systèmes de coordonnées locales sur* M *tels que* $U \cap V \neq \emptyset$. *Si* g^U_{ij} *(et* g^V_{ij}*) désignent les composantes de g relativement aux système de coordonnées locales* $(U; x^1 \cdots, x^m)$ *et* $(V; y^1, \cdots, y^m)$ *respectivement, alors*

$$g^U_{ij} \quad = \quad g^V_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}$$

Définition 1.2.3. *Soient* (M, g) *et* (N, h) *deux variété riemannienne. Un difféomorephisme* $\phi : M \longrightarrow N$ *est une isométrie si* $g = \phi^*(h)$, *c'est-à-dire pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$g(X, Y) = (h \circ \phi)(\phi_* X, \phi_* Y) \tag{1.5}$$

Pour tout $p \in M$

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{\phi(p)}(T_p\phi(X_p), T_p\phi(Y_p)).$$

Si $M = N$ et $g = h$, on dit que ϕ est une isométrie de (M, g).
On note $\mathrm{Isom}(M, g)$ l'ensemble des isométries de (M, g), c'est un groupe pour la loi de composition des application.

1.3 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.3.1. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, une connexion linéaire sur M est dite compatible avec la métrique g, si*

$$X(g(Y, Z)) \quad = \quad g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Théorème 1.3.1. *(Théorème fondamental de la géométrie riemannienne)*
Soit (M, g) une variété riemannienne, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &+ g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned} \tag{1.6}$$

est une connexion linéaire sur M, appelée connexion de Levi-Civita de la variété riemannienne (M, g). La formule (1.6) est appelée la formule de koszul.

Preuve . Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) \\ &\quad + g(Z, [fX, Y]) + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]) \\ &= fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\ &\quad - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X) + fg(Z, [X, Y]) \\ &\quad + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\ &= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\ &\quad + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\ &= 2g(f\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

Puisque g est non dégénérée, alors $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{X+W}Y, Z) &= (X+W)(g(Y,Z)) + Y(g(Z, X+W)) - Z(g(X+W, Y)) \\
&\quad + g(Z, [X+W, Y]) + g(Y, [Z, X+W]) - g(X+W, [Y, Z]) \\
&= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g(Z, [X,Y]) \\
&\quad + g(Y, [Z,X]) - g(X, [Y,Z]) + W(g(Y,Z)) + Y(g(Z,W)) \\
&\quad - Z(g(W,Y)) + g(Z, [W,Y]) + g(Y, [Z,W] + g(Y, [Z,W]) - g(W, [Y,Z])) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_W Y, Z) \\
&= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z)
\end{aligned}$$

donc $\nabla_{X+W}Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$, d'où ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(g(X,fY)) + g(Z, [X, fY]) \\
&\quad + g(fY, [Z,X]) - g(X, [fY, Z]) \\
&= X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(f)g(X,Y) \\
&\quad - fZ(g(X,Y)) + X(f)g(Z,Y) + fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) \\
&\quad + Z(f)g(X,Y) - fg(X,[Y,Z]) \\
&= 2X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - fZ(g(X,Y)) \\
&\quad + fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) - fg(X,[Y,Z]) \\
&= 2X(f)g(Y,Z) + 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

donc $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$. On applique le même raisonnement, on obtient

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

■

Théorème 1.3.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion qui est compatible avec g.*

Preuve . D'aprés la formule de Koszul, un calcul simple nous donne

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X,Y], Z)$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion.
D'autre part, en appliquant la formule (1.6)

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = X(g(Y, Z))$$

celà prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M. Comme g est définie positive la relation (1.6) détermine complètement la connexion ∇, ce qui nous donne l'unicité. ■

Proposition 1.3.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension m, ∇ sa connexion de Levi-Civita relativement à un système de coordonnées locales $(U; x^1, \cdots, x^m)$, les symbols de Christoffel Γ_{ij}^k de ∇ sont donnés par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \Big), \tag{1.7}$$

où $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Preuve . Comme $[\partial_i, \partial_j] = 0, \quad i, j = 1, \cdots, m$, on a

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) &= 2g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) \\ &= 2\Gamma_{ij}^s g_{sl}, \end{aligned}$$

et d'aprés la formule de Koszul

$$2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) = \partial_i(g(\partial_j, \partial_l)) + \partial_j(g(\partial_l, \partial_i)) - \partial_l(g(\partial_i, \partial_j))$$

donc

$$\Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2} \Big(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \Big)$$

d'où

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \Big).$$

■

1.4 Courbures riemanniennes

Définition 1.4.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne. La courbure de (M, g) est la courbure R de la connexion de Levi-Civita ∇.*

Propriété 1.4.1. *En plus des propriétes générales de tenseur de courbure,*
$\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

1. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.
2. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.

Définition 1.4.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m, le champ de tenseur de Riemann est le champ de tenseur de type $(0, 4)$ donné par*

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

Remarque 1.4.1. *Soit $p \in M$ et $(U; x^1, \cdots, x^m)$ un système de coordonnées locales autour de p. Pour $X = X^i\partial_i, Y = Y^j\partial_j, Z = Z^k\partial_k, W = W^l\partial_l$*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= X^i Y^j Z^k R^l_{ijk}\partial_l \\ \mathcal{R}(X, Y, Z, W) &= X^i Y^j Z^k W^l g_{ml} R^l_{ijk} \end{aligned}$$

1.4.1 Courbure sectionnelle

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $m \geq 2$. Pour tout $p \in M$, soit $G_{2,m}(T_pM, \mathbb{R})$ l'ensemble[1] de tous les sous espaces vectoriels, de dimension 2, de T_pM.

Proposition 1.4.1. *Soient $X_p, Y_p, U_p, V_p \in T_pM$ des vecteurs tangents de M au point p tels que[2] $span_{\mathbb{R}}\{X_p, Y_p\} = span_{\mathbb{R}}\{U_p, V_p\}$, alors la quantité*

$$\frac{g_p(R(X, Y)_p Y_p, X_p)}{|X_p|^2|Y_p|^2 - g_p(X_p, Y_p)^2}$$

[1] la grassmannienne des sous-espaces de dimension 2 dans l'espace vectoriel T_pM de dimension m sur le corps $\mathbb{R}$. Ces espaces portent le nom d'Hermann Grassmann et sont encore appelés grassmanniennes des $\ll$ 2-plans $\gg$.

[2] Le sous espace vectoriel engendré par X_p et Y_p.

est bien définie, et on a

$$\frac{g_p(R(X,Y)_pY_p,X_p)}{|X_p|^2|Y_p|^2-g_p(X_p,Y_p)^2}=\frac{g_p(R(U,V)_pV_p,U_p)}{|U_p|^2|V_p|^2-g_p(U_p,V_p)^2}$$

La proposition précédente nous permet de poser le définition suivante.

Définition 1.4.3. *Pour tout point $p \in M$, la fonction $K_p : G_{2,m}(T_pM,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$K_p : span_{\mathbb{R}}\{X_p,Y_p\} \longmapsto \frac{g_p(R(X,Y)_pY_p,X_p)}{|X_p|^2|Y_p|^2-g_p(X_p,Y_p)^2}$$

est appelée la courbure sectionnelle du 2-plan engendré par X_p et Y_p au point p.

Une variété riemannienne (M,g) est dite à courbure sectionnelle constante si la fonction K_p est constante pour tout point $p \in M$ et tous $X_p, Y_p \in T_pM$.
La variété riemannienne (M,g) est dite plate si sa courbure sectionnelle constante est nulle.
Dans le cas de courbure sectionnelle constante, le champ de tenseurs de courbure a une forme assez simple.

Proposition 1.4.2. *Soit (M,g) une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante k, alors le champ de tenseurs de la courbure de Riemannienne R est donné par*

$$R(X,Y)Z = k(g(Y,Z)X - g(Z,X)Y) \qquad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.8}$$

1.4.2 Courbure de Ricci

Définition 1.4.4. *La courbure de Ricci d'une variété riemannienne (M,g) de dimension m est un tenseur de type $(0,2)$ défini par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= tr_g R(\cdot,X)Y\\ &= g(R(e_i,X)Y,e_i)\\ &= g(R(X,e_i)e_i,Y)\end{aligned}$$

pour tout $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, où $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur $\mathfrak{X}(M)$.

Propriété 1.4.2. *La courbure de Ricci est symétrique. En effet*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,Y) &= g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= \mathrm{Ric}(Y,X) \end{aligned}$$

Définition 1.4.5. *Le tenseur de Ricci d'une variété riemannienne (M,g), de dimension m, est un champ de tenseur de type $(1,1)$ sur M, défini par*

$$\mathrm{Ricci}(X) \quad = \quad R(X,e_i)e_i, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,m}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{X}(M)$.

Remarque 1.4.2. *Pour tout $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a $\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ricci}(X),Y)$.*

1.4.3 Courbure scalaire

Définition 1.4.6. *On appelle courbure scalaire d'une variété riemannienne (M,g), de dimension m, la fonction S définie sur M par*

$$S = \mathrm{trace}\,\mathrm{Ric} = g(R(e_i,e_j)e_j,e_i).$$

Corollaire 1.4.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne, de dimension m, de courbure constante k, alors*

1. $\mathrm{Ricci}(X) = (m-1)kX$,
2. $\mathrm{Ric}(X,Y) = (m-1)kg(X,Y)$,
3. $S = m(m-1)k$.

Preuve . On applique la définition et la formule (1.8) on obtient

1.

$$\begin{aligned}
\text{Ricci}(X) &= R(X, e_i)e_i \\
&= k(g(e_i, e_i)X - g(e_i, e_i)X - g(e_i, X)e_i) \\
&= kmX - kg(e_i, X^j e_j)e_i \\
&= kmX - kX^i e_i \\
&= kmX - kX \\
&= (m-1)kX
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(X, Y) &= g(R(X, e_i)e_i, Y) \\
&= g(k(g(e_i, e_i)X - g(e_i, X)e_i), Y) \\
&= g(k(\delta_{ii}X - X), Y) \\
&= g(kX(m-1), Y) \\
&= k(m-1)g(X, Y)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
S &= g(R(e_i, e_j)e_j, e_i) \\
&= g(k(g(e_j, e_j)e_i - g(e_j, e_i)e_j), e_i) \\
&= g(k(\delta_{ii}e_i - \delta_{ji}e_j), e_i) \\
&= k(g(me_i - \delta_{ji}e_j), e_i) \\
&= kg((me_i - e_i), e_i) \\
&= k(m-1)g(e_i, e_i) \\
&= k(m-1)\delta_{ii} \\
&= k(m-1)m
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Groupes de Lie

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *On appelle groupe de Lie toute variété différentiable G munie d'une structure de groupe telle que les deux applications suivantes*

$$p: \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array} \qquad i: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

soient de classe C^∞. Cela revient à dire que l'application

$$\begin{array}{ccc} \rho : G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & \rho(a,b) = a \cdot b^{-1} \end{array}$$

soit de classe C^∞

Exemples 2.1.1.

1. *$(\mathbb{R}^n, +)$, le groupe additive est une variété différentiable de dimention n, donc $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe de Lie.*
2. *Soient $(G_1, \cdot_1)$ et $(G_2, \cdot_2)$ deux groupes de Lie, le produit $(G_1 \times G_2, \cdot)$ est un groupe de Lie où $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot_1 x_2, y_1 \cdot_2 y_2)$.*
   - ***Dans le cas générale**. Si $G_i, 1 \leq i \leq n$, sont des groupes de Lie alors le groupe produit $G_1 \times \cdots \times G_n$ muni des structures produit de variétés et de groupe, est un groupe de Lie.*

3. *$GL(n,\mathbb{R})$ groupe linéairé de dimension n^2 a une structure de groupe multiplicatif et une structure de variété différentiable tel que les deux structure sont compatible, donc est un groupe de Lie.*
4. *$GL(n,\mathbb{C})$ est un groupe de Lie.*

Définition 2.1.2. *Soit H un sous groupe d'un groupe de Lie G. H est dit un sous groupe de Lie de G si H est muni d'une structure de sous variété différentiable de G. Si de plus H est normal[1], alors H est appelé sous groupe de Lie normal.*

Exemples 2.1.2. *Le groupe lineaire spéciale $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R})\ t.q\ det A = 1\}$ est un sous groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.*
De même que Le groupe orthogonale

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R})\ t.q\ A^t A = Id\}$$

est un sous groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n^2-n}{2}$.

Proposition 2.1.1. *[10] Soit G un groupe de Lie. Tous sous groupe de Lie H de G est fermé.*

Définition 2.1.3. *Un morphisme de groupe de Lie est un morphisme de groupe qui est différentiable*

Remarque 2.1.1. *Si $\phi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe de Lie qui soit une submersion. Alors $\ker\phi$ est un sous groupe de Lie fermé normal de G.*

2.2 Actions adjointes

Définition 2.2.1. *Pour tout $a \in G$. On appelle application adjointe sur G, l'isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rccl} Ad_a : & G & \longrightarrow & G \\ & b & \longmapsto & Ad_a(b) := aba^{-1} \end{array}$$

[1] On dit qu'un sous groupe H d'un groupe G est normal (ou distingué ou invariant par conjugaison) dans G s'il est stable par conjugaison c'est-à-dire si : $\forall h \in H, xhx^{-1} \in H$, on note alors $H \trianglelefteq G$.
Une façon équivalent de définie un sous groupe normal est de dire que les classes à droite et à gauche de H dans G coïnsident, c'est-à-dire $\forall x \in G \quad xH = Hx$.

On définit ainsi l'action adjointe de G sur G comme étant l'application différentiable

$$\begin{array}{rccl} Ad: & G & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(G) \\ & a & \longmapsto & Ad_a \end{array}$$

Définition 2.2.2. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe de Lie et $a \in G$. On appelle translation à gauche (resp à droite par a), l'application $\mathfrak{L}_a$ (resp $\mathfrak{R}_a$) définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{L}_a: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & \mathfrak{L}_a(x) = a \cdot x \end{array} \quad \textit{(resp.)} \quad \begin{array}{rccl} \mathfrak{R}_a: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & \mathfrak{R}_a(x) = x \cdot a \end{array}$$

Propriétés 2.2.1. *Soient $(G, \cdot)$ un groupe de Lie et $a, b \in G$, on a les propriétés suivantes*

1. $\mathfrak{L}_a \circ \mathfrak{L}_b = \mathfrak{L}_{a \cdot b}$
2. $\mathfrak{L}_a^{-1} = \mathfrak{L}_{a^{-1}}$
3. $\mathfrak{R}_a \circ \mathfrak{R}_b = \mathfrak{R}_{a \cdot b}$
4. $\mathfrak{R}_a^{-1} = \mathfrak{R}_{a^{-1}}$
5. $\mathfrak{L}_e = \mathfrak{R}_e = Id_G$
6. *$\mathfrak{L}_a$ (resp $\mathfrak{R}_a$) est un isomorphisme de groupe.*
7. *Les l'ensembles $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{L}_a \ / \ a \in G\}$ (et $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_a \ / \ a \in G\}$) sont des groupes pour la loi de composition .*
8. *Les applications $\mathfrak{L}_a$ (et $\mathfrak{R}_a$) sont des difféomorphismes de classe C^∞ de G*

2.3 Algèbres de Lie

Définition 2.3.1. *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$*

1. $[X, X] = 0$ *(antisymétrique) ;*
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(identité de jacobi).*

L'application bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ appelée crochet de Lie et $[X, Y]$ crochet de Lie de X et Y.

Exemples 2.3.1.

1. *Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ muni de crochet $[X,Y]=0$ pour tout $X,Y\in V$, est une algèbre de Lie.*
2. *$gl(V)$ l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel muni du crochet $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$, est une algèbre de Lie.*

Définition 2.3.2. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie sur le même corps $\mathbb{K}$. Un morphisme (d'algèbre de Lie) de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est une application linéaire $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$ qui preserve les crochets de Lie, c'est-à-dire*

$$\varphi([X,Y])=[\varphi(X),\varphi(Y)] \qquad \forall X,Y\in\mathfrak{g} \tag{2.1}$$

Définition 2.3.3. *Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ stable par le crochet de Lie, i.e. $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$*

Remarque 2.3.1.

1. *Le noyon et l'image d'un morphisme d'algèbre de Lie sont des sous-algèbre de Lie.*
2. *Toute intersection de sous-algèbre de Lie est une sous algèbre de Lie.*

Définition 2.3.4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, une dérivation (d'algèbre de Lie) de $\mathfrak{g}$ est une application linéaire $\delta:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ telle que*

$$\delta([X,Y])=[\delta(X),Y]+[X,\delta(Y)], \quad \forall X,Y\in\mathfrak{g} \tag{2.2}$$

(2.2) *est la règle de Leibniz.*

Remarque 2.3.2. *L'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphisme linéaire de $\mathfrak{g}$, que l'on note der$(\mathfrak{g})$. En effet, si δ et δ' sont des dérivation, alors*

$$\delta\circ\delta'([X,Y])=[\delta\circ\delta'(X),Y]+[\delta(X),\delta'(Y)]+[\delta'(X),\delta(Y)]+[X,\delta\circ\delta'(Y)]. \tag{2.3}$$

donc $[\delta,\delta']=\delta\circ\delta'-\delta'\circ\delta$ est encoure une dérivation.

Exemple 2.3.1. *Soient M,N deux variété différentiables de classe C^∞ et $\phi:M\longrightarrow N$ un difféomorphisme. Soit $\mathfrak{X}(M)$ (resp. $\mathfrak{X}(N)$) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M (resp. N), alors l'image directe ϕ_* de ϕ est un morphisme d'algèbre de Lie, i.e. $\phi_*([X,Y])=[\phi_*X,\phi_\star Y]$.*

Forme de Killing et représentation adjointe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application $ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ définie par

$$ad_X(Y) \quad = \quad [X, Y]$$

est une dérivation d'algèbre de Lie (parfois appelée dérivation intérieure) en effet, pour tous Y et Z dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$ad_X([Y, Z]) = [ad_X(Y), Z] + [Y, ad_X(Z)]$$

ce qui est une simple réécriture de l'identité de Jacobi . L'application ad : $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{der}(\mathfrak{g})$ définie par $X \longmapsto ad_X$ est un morphisme d'algèbre de Lie en effet, pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$ad[X, Y](Z) = ad_X \circ ad_Y(Z) - ad_Y \circ ad_X(Z) = [ad_X, ad_Y](Z)$$

ce qui est aussi une simple réécriture de l'identité de Jacobi (le crochet de Lie à droite est celui de $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$).

Définition 2.3.5. *La représentation d'algèbres de Lie*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{der}(\mathfrak{g})$$

appellé la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Elle est à valeur dans $\mathrm{der}(\mathfrak{g})$ *(l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$).*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

Définition 2.3.6. *la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est l'application $B = B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par*

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}(ad_X \circ ad_Y)$$

Propriétés 2.3.1.
1. *La forme de Killing est bilinéaire et symétrique.*
2. *Elle est invariante par tout automorphisme d'algèbre de Lie. Autrement dit, si $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un automorphisme de l'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, alors pour tous les X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons*

$$B_{\mathfrak{g}}(f(X), f(Y)) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$$

3. *Elle est plus* ad*-alternée c'est-à-dire pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$B(ad_X(Y), Z) = -B(Y, ad_X(Z))$$

2.4 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Nous allons associer à tout groupe de Lie G une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de façon canonique. Cette algèbre sera d'un grand intérêt pour l'étude du groupe lui-même.

Définition 2.4.1. *Soit G un groupe de Lie, un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(G)$ est dit invariant à gauche si $(\mathfrak{L}_a)_* X = X$, pour tout $a \in G$.*

On note par

$$\mathcal{L}(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) \ / \ (\mathfrak{L}_a)_* X = X \ \forall a \in G\}$$

L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche, qui est un espace vectoriel.

Définition 2.4.2. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie G est l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche muni du crochet du champs de vecteurs.*

Proposition 2.4.1. *Soit G un groupe de Lie, alors l'application*

$$\begin{aligned} \theta_G : \mathcal{L}(G) &\longrightarrow T_e G \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve . Il est clair que θ_G est linéaire, reste à montrer qu'elle est bijective.
En effet, soient $X, Y \in \mathcal{L}(G)$ alors on a

$$\begin{aligned} X_e = Y_e &\Longrightarrow d_e\mathfrak{L}_a(X_e) = d_e\mathfrak{L}_a(Y_e), \forall a \\ &\Longrightarrow X \circ \mathfrak{L}_a(e) = Y \circ \mathfrak{L}_a(e), \forall a \\ &\Longrightarrow X_a = Y_a (\forall a \in G) \\ &\Longrightarrow X = Y \end{aligned}$$

donc θ_G est injective.
Pour la surjectivité de θ_G, Soit $v \in T_e G$,on pose :

$$\begin{aligned} X : G &\longrightarrow TG \\ a &\longmapsto d_e\mathfrak{L}_a(v) \end{aligned}$$

on a $X_e = d_e\mathfrak{L}_e(v)$, on montre que X est invariant à gauche.

$$\begin{aligned} d_a\mathfrak{L}_b(X_a) &= d_a\mathfrak{L}_b \circ d_e\mathfrak{L}_a(v) \\ &= d_e\mathfrak{L}_b \circ \mathfrak{L}_a(v) \\ &= X_{b\cdot a} \\ &= X \circ \mathfrak{L}_b(a) \end{aligned}$$

d'ou $(\mathfrak{L}_b)_a(X) = X$ d'où θ_G est un isomorphisme d'espaces vectoriels. ∎

Remarque 2.4.1. *Sur T_eG, on définit le crochet de Lie suivant :*

$$[v,w] = \theta_G([\theta_G^{-1}(v), \theta_G^{-1}(w)]) \forall v,w \in T_eG \tag{2.4}$$

cette définition rend θ_G un isomorphisme d'algèbres de Lie. Donc dorinavant, si G est un groupe de Lie, on définit l'algèbre de Lie associée à l'espace tangent au groupe G au point e muni du crochet de Lie définit dans la relation (2.4)

Exemples 2.4.1.

1. *Pour le groupe de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$ on a $\mathrm{T}_0\mathbb{R}^n$ muni de crochet de Lie définit précédement est une Algèbre de Lie du groupe de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$.*
2. *Pour le cercle $\mathcal{S}^1$ on a $\mathrm{T}_{(1,0)}\mathcal{S}^1 = \{1\} \times \mathbb{R}$.*
3. *Pour le tore $\mathbb{T}^n$ on a $\mathrm{T}_e\mathbb{T}^n = \mathrm{T}_{(1,0)}\mathcal{S}^1 \times \mathrm{T}_{(1,0)}\mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathrm{T}_{(1,0)}\mathcal{S}^1$ est l'Algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathbb{T}^n$.*
4. *Pour l'espace vectoriel $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ on a $\mathrm{T}_0\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \simeq \{0\} \times \mathrm{R}^{n\times n}$.*
5. *Pour le groupe de Lie $(GL_n(\mathbb{R}), o)$ on a : $\mathrm{T}_{I_n}(GL_n(\mathbb{R}) \simeq \{I_n\} \times \mathrm{R}^{n\times n}$.*
6. *Pour le groupe de Lie $(SL_n(\mathbb{R}), o)$ t.q*
   $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})/detA = 1\}$ groupe spéciale linéaire de dimention n^2 on a l'algèbre de Lie associé est $sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}/trA = 0\}$.
7. *$\mathcal{O}(n,R) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})/A^tA = Id\}$ groupe orthogonale de dimension*
   $(n^2 - n)/2$, l'algèbre de Lie associée est $\mathrm{T}_{Id}\mathcal{O}(n,R) = o(n) = \{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})/A^t + A = 0\}$.

Chapitre 3

Groupes de Lie riemanniens

3.1 métriques invariantes à gauche sur un goupe de Lie

Définition 3.1.1. *Une métrique riemannienne sur un groupe de Lie G est dite invariante à gauche si $g = (\mathfrak{L}_a)^*(g)$*

Proposition 3.1.1. *sur tout groupe de Lie il existe une métrique invariante à gauche.*

Preuve . On part du produit scalaire Euclidien sut $T_eG = \mathfrak{g}$ et on le prolonge aux autres espaces tangents en utilisant la translation à gauche. Plus précisement, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, on pose

$$\begin{aligned} g_e(X_e, Y_e) &= < X_e, Y_e >_{T_eG}, \\ g_a(X_a, Y_a) &= g_e\big((T_a\mathfrak{L}_{a^{-1}})X_a, (T_a\mathfrak{L}_{a^{-1}})_g Y_a\big), \ \ g \in G. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que cette métrique est invariante à gauche. ∎

Définition 3.1.2. *Un groupe de Lie riemannien (G, g) est un groupe de Lie G muni d'une métrique invariante à gauche g.*

3.2 Connexion de Levi-Civita associe à une métrique invariante à gauche

Proposition 3.2.1. *Soit (G,g) un groupe de Lie riemannien. La connexion de Levi-Civita associe à g est donnée par*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X,Y] - (ad^{\star}_X Y - (ad^{\star}_Y X) \quad X, Y \in \mathfrak{g} \tag{3.1}$$

Preuve . Puisque g est une métrique invariant à gauche on a :

$$g_b(X_b, Y_b) = g_{a \cdot b}(T_b L_a(X_b), T_b L_a(Y_b)) \forall a, b \in G$$

en particulier si b=e

$$g_e(X_e, Y_e) = g_a(T_e L_a(X_e), T_b L_a(Y_e))$$

si de plus X,Y sont invariant à gauche alors

$$g_e(X_e, Y_e) = g_a(X_a, Y_a)$$

ce qui montre que la fonction $a \longmapsto g(X,Y)_a$ est constante. Par conséquent, pour tout champ de vecteur Z

$$Z(g(X,Y)) = 0 \tag{3.2}$$

si on utilisant (1.6), on en déduit que pour tout champs de vecteurs invariants à gauche $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, on a

$$2g(\nabla_X Y, Z) = -g(Y, [X,Z]) - g(X, [Y,Z]) - g(Z, [Y,X])$$

qui peut être réecrit comme

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y], Z) - g([Y,Z], X) + g([Z,X], Y) \tag{3.3}$$

la formule (3.3) est équivalent à

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= g([X,Y], Z) - g([Y,Z], X) - g([X,Z], Y) \\ &= g([X,Y], Z) - g(ad_Y Z, Z) - g(ad_X Z), Y) \\ &= g([X,Y], Z) - g(Z, ad^{\star}_Y X) - g(Z, ad^{\star}_X Y) \end{aligned}$$

puisuqe g est non dégénérée alors

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X,Y] - (ad_X^\star Y - ad_Y^\star X) \quad X,Y \in \mathfrak{g} \tag{3.4}$$

■

Le même principe que la section 3.1, on étudie la notion de la métrique invariante à droite en utilisant la translation à droite et la bi-invariant qui est à la fois invariant à gauche et à droite.

Définition 3.2.1. *Une métrique riemannienne sur un groupe de Lie G est dite invariante à droite si* $g = (\mathfrak{R}_a)^*(g)$.

Remarque 3.2.1. *il y a une bijection entre l'ensemble des métrique invariante à gauche sur le groupe de Lie G et les produits scalaires sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.*

3.3 métrique bi-invariante

Définition 3.3.1. *La métrique riemannienne sur un groupe de Lie G est dite bi-invariante si elle est invariante à gauche et à droite.*

Proposition 3.3.1. *sur tout groupe de Lie compact il existe une métrique bi-invariante.*

Preuve . en effet si G est compact, notons μ_G la mesure de Haar[1] normalisée de G, c'est à dire l'unique mesure (borélienne) de probabilité sur G invariante par translation à gauche et à droite soit g un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. Alors $(v,w) \longmapsto \int_G g(Ad_g(v), Ad_g(w))d\mu_G(g)$ est un produit scalaire invariante par Ad_G sur $\mathfrak{g}$ qui définit une métrique bi-invariante sur G, comme ci-dessus. ■

Lemme 3.3.1. *Une métrique g invariante à gauche sur G est bi-invariante si et seulement si*

$$g([X,Z],Y) = g(X,[Y,Z]) \tag{3.5}$$

Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

[1] Sur un groupe localement compact G, il existe une mesure positive m définie sur les boréliens de G et qui est invariante par les translations à gauche $a \longmapsto ax \ \forall x \in G$. De plus, cette mesure est unique à un facteur multiplicatif près. On l'appelle mesure de Haar du groupe G.

Preuve . La preuve est donnée pour les groupes de Lie matriciels, supposons que cette métrique est bi-invariant, alors $g(X,Y) = g(g^{-1}Xg, g^{-1}Yg)$. Si on écrit $g = \exp(tZ)$ cela devient

$$g(X,Y) = g\exp(-tZ)X\exp(tZ), \exp(-tZ)Y\exp(tZ))$$

maintenant, en dérivons par rapport à t, pour $t = 0$ on a donc

$$g(XZ - ZX, Y) + g(X, YZ - ZY) = 0$$

L'écriture $\{XZ - ZX\}$ par notation $[X, Z]$ c'est-à-dire

$$g([X,Z],Y) + g(X,[Y,Z]) = 0$$

L'implication inverse peut être obtenue par intégration de (3.5). ∎

Proposition 3.3.2. *Soit G un groupe de Lie muni dun'e métrique bi-invariante alors : La connexion riemannienne est donnée par :*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Preuve . On a d'aprés la proposition 3.2.1 la fonction $g(X,Y)$ est constant, $Z(g(X,Y)) = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{g}$ et d'aprés la formule de Koszul on trouve :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) + g([X,Y],Z)$$

d'autre part on a

$$g([X,Y],Z) = g(X,[Y,Z])$$

et

$$g(2\nabla_X Y - [X,Y], Z) = 0 \quad \forall Z$$

donc

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}g([X,Y],Z)$$

∎

Proposition 3.3.3. *Soit G un groupe de Lie avec g une métrique riemannienne bi-invariante sur G alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Le tenseur de courbure est donné par :*
$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z] \quad \text{où} \quad X,Y,Z \in \mathfrak{g}$$
2. *La courbure de Ricci est donné par :*
$$S(X,Y) = \frac{1}{4}g([X,E_i],[Y,E_i]) \quad \text{où} \quad X,Y \in \mathfrak{g}$$
et $\{E_i\}$ est une base orthonormé de $\mathfrak{g}$
3. *La courbure sectionnelle est donné par :*
$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\frac{g([X,Y],[X,Y])}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \quad \text{où } X,Y \in \mathfrak{g}$$

Preuve .

1. On a $R(X,Y)Z = \left\{\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right\}Z \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ d'une part d'aprés la proposition 4.3.1 on obtient :
$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{1}{2}\nabla_X[Y,Z] - \frac{1}{2}\nabla_Y[X,Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \end{aligned}$$
d'autre part d'aprés l'identité de jacobi :
$$[X,[Y,Z]] = [X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] = 0$$
on touve :
$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z] \quad \text{où} \quad X,Y,Z \in \mathfrak{g}$$
2. d'aprés la proposition (4.1.4) et la parie (1) on obtient :
$$\begin{aligned} g(R(X,Y)X,Y) &= \frac{1}{4}g([[X,Y],X],Y) \\ &= \frac{1}{4}g([X,Y],[X,Y]) \end{aligned}$$

3. on calcul

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= tr\{Z \longmapsto R(X,Z)Y\} \\ &= g(R(X,E_i)Y,E_i) \\ &= \frac{1}{4}g([[X,E_i],Y],E_i) \\ &= \frac{1}{4}g([X,E_i],[Y,E_i]) \cdots (\star) \end{aligned}$$

Si on utilise Ad-invariante dans $(\star)$ et l'expression $r(X) = -\frac{1}{4}g([X,E_i],E_i)$ et on calcule on trouve

$$\begin{aligned} g(-\frac{1}{4}[[X,E_i],E_i,Y]) &= -\frac{1}{4}g([X,E_i],[E_i,Y]) \\ &= \frac{1}{4}g([X,E_i],[Y,E_i]) \\ &= S(X,Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.4. *Soit G un groupe de Lie avec g une métrique bi-invariante sur G alors La courbure scalaire est donné par :* $\tau = \frac{1}{4}dimG$

Preuve . On calcul

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{4}g([E_i,E_j],[E_i,E_j]) \\ &= \frac{1}{4}g(E_i,[E_j,[E_i,E_j]]) \\ &= -\frac{1}{4}g(E_i,[E_j,[E_j,E_i]]) \\ &= -\frac{1}{4}B(E_i,E_i) \\ &= \frac{1}{4}dimG \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Étude des métriques invariantes sur $\mathbb{H}^3$

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^3$ est un groupe de Lie de dimension 3, dans ce chapitre on a commençer par introduire une carte de la variété $\mathbb{H}^3$.

Soit $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p), \frac{\partial}{\partial z}(p)\right\}$ une base de l'espace tangent $T_p\mathbb{H}^3$.

Rappelons que pour tout point $p = (u, v, w)$ la translation à gauche $\mathfrak{L}_p$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{L}_p : & \mathbb{H}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}^3 \\ & q = (x, y, z) & \longmapsto & \mathfrak{L}_p(q) = p \cdot q = (u + x, v + y, z + uy + w) \end{array}$$

avec $e = (0, 0, 0)$ est l'élément neutre.

Soit $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e)\right\}$ une base de l'espace tangent $T_e\mathbb{H}^3$.

En suite on détermine la différentielle de $\mathfrak{L}_p : T_e\mathbb{H}^3 \longrightarrow T_p\mathbb{H}^3$ et on calculer $M^e_{\mathfrak{L}}$ la matrice de $d_e\mathfrak{L}_p$ pour deux bases précédentes et on a prend la matrice $M^e_g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ pour calculer la métrique riemannienne invariante à gauche.

$$\begin{aligned} g \text{ invariante à gauche} &\iff \forall v, w \in T_eG \quad g(v, w)_e = g(d_e\mathfrak{L}_p v, d_e\mathfrak{L}_p w)_p \\ &\iff v^t(M^t_p M^p_g M_p)w = v^t M^e_g w \\ &\iff M^t_p M^p_g M_p = M^e_g \end{aligned}$$

donc $M_g^p = ((M_{\mathfrak{L}}^p)^{-1})^t M_g^e (M_{\mathfrak{L}}^p)^{-1}$.
De même méthode en détermine la métrique riemannienne invariante à droite.
Aprés les calculs on a déduit qu'il y a pas une métrique bi-invariante mais il y a une métrique pseudo-riemannienne plate.

Exemple 4.0.1.

1. ***Calcul des métrique riemannienne invariantes à gauche***

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{ tel que } x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

soit φ une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{H}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & (x, y, z) \end{array}$$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p), \frac{\partial}{\partial z}(p) \right\}$ *une base de* $T_p\mathbb{H}^3$
On peut voir $\mathbb{H}^3$ *comme* $\mathbb{R}^3$ *avec la structure du groupe* $(\cdot)$ *donné par*
$(x, y, z) \cdot (u, v, w) = (x + u, y + v, w + xv + z)$ *avec l'inverse de* (x, y, z) *est* $(-x, -y, -z + xy)$.
pour tout point $p = (u, v, w)$ *la translation à gauche* $\mathfrak{L}_p$ *sera*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{L}_p : & \mathbb{H}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}^3 \\ & q(x, y, z) & \longmapsto & \mathfrak{L}_p(q) = p \cdot q = (u + x, v + y, z + uy + w) \end{array}$$

on a $\mathfrak{L}_p(e) = p \cdot e$ *avec* $e = (0, 0, 0)$
$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e) \right\}$ *une base de* $T_e\mathbb{H}^3$
maintenant on va calculer la différentielle de $\mathfrak{L}_p$
$d_e\mathfrak{L}_p : T_e\mathbb{H}^3 \longrightarrow T_p\mathbb{H}^3$

$$M_{\mathfrak{L}}^{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$ *est une matrice de* $d_e\mathfrak{L}_p$ *pour les deux bases* $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e)\right\}$

et $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p), \frac{\partial}{\partial z}(p)\right\}$

avec $f_1 = u + x, f_2 = v + y, f_3 = z + uy + w$

donc $M_{\mathfrak{L}}^{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \end{pmatrix}$

et l'inverse de M_p *est* M_p^{-1}

$$(M_{\mathfrak{L}}^{p})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -u & 1 \end{pmatrix}$$

$$((M_{\mathfrak{L}}^{p})^{-1})^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend $M_g^e = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ *est la matrice d'un produit scalaire sur* $T_e\mathbb{H}^3$ *pour la base* $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e)\right\}$.

Autrement dit

$$\begin{cases} a > 0 \\ ad - b^2 > 0 \\ \det M_g > 0 \end{cases}$$

alors on va calculer la métrique riemannienne invariante à gauche

$M_g^p = ((M_{\mathfrak{L}}^{p})^{-1})M_g^e(M_{\mathfrak{L}}^{p})^{-1}$

$$M_g^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad M_g^p = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b-uc & d-ue & e-uf \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad M_g^{(u,v,w)} = \begin{pmatrix} a & b-uc & c \\ b-uc & fu^2-2ue+d & e-uf \\ c & e-uf & f \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad M_g^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} a & b-xc & c \\ b-xc & fx^2-2xe+d & e-xf \\ c & e-xf & f \end{pmatrix}$$

alors la métrique riemannienne à gauche g est :

$g = adx^2 + (fx^2 - 2xe + d)dy^2 + fdz^2 + 2(b-xc)dxdy + 2cdxdz + 2(e-xf)dydz$ *avec* $a > 0, ad - b^2 > 0$ *et* $\det M_g > 0$

1. ***Calcul des métrique riemannienne invariantes à droite***

De même manière et de même hypothèse on va calculer la métrique riemannienne invariante à droite $\tilde{g}$.

la translation à droite $\mathfrak{R}_p$ *sera*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{R}_p : & \mathbb{H}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}^3 \\ & q(x,y,z) & \longmapsto & \mathfrak{R}_p(q) = q \cdot p = (x+u, y+v, z+xv+w) \end{array}$$

on a $\mathfrak{R}_p(e) = p \cdot e = p$ *avec* $e = (0,0,0)$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e) \right\}$ *une base de* $T_e\mathbb{H}^3$

maintenant on va calculer la différentielle de $\mathfrak{R}_p$

$d_e\mathfrak{R}_p : T_e\mathbb{H}^3 \longrightarrow T_p\mathbb{H}^3$

$$M_{\mathfrak{R}}^p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ est une matrice de } d_e\mathfrak{R}_p \text{ pour les deux bases } \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e) \right\}$$

et $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p), \frac{\partial}{\partial z}(p) \right\}$

avec $f_1 = x + u, f_2 = y + v, f_3 = z + xv + w$

donc $M^p_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et l'inverse de $M^p_{\mathfrak{R}}$ *est* $(M^p_{\mathfrak{R}})^{-1}$

$(M^p_{\mathfrak{R}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$((M^p_{\mathfrak{R}})^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On prend $M^e_{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ *est la matrice d'un produit scalaire sur* $T_e\mathbb{H}^3$ *pour la base* $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e), \frac{\partial}{\partial y}(e), \frac{\partial}{\partial z}(e)\right\}$.

Autrement dit

$$\begin{cases} a > 0 \\ ad - b^2 > 0 \\ \det M_g > 0 \end{cases}$$

alors on va calculer la métrique riemannienne invariante à droite

$M^p_{\tilde{g}} = ((M^p_{\mathfrak{R}})^{-1})M^e_{\tilde{g}}(M^p_{\mathfrak{R}})^{-1}$

$M^p_{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $M^p_{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} a-vc & b-ve & c-vf \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $M^{(u,v,w)}_{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} a-1yc+y^2f & b-ve & c-yf \\ b-ve & d & e \\ c-vf & e & f \end{pmatrix}$

et $M^{(x,y,z)}_{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} a-2yc+y^2f & b-ye & c-yf \\ b-ye & d & e \\ c-yf & e & f \end{pmatrix}$

alors la métrique riemannienne à droite $\tilde{g}$ *est :*

$\tilde{g} = (a - 2yc + y^2 f)dx^2 + ddy^2 + fdz^2 + 2(b - ye)dsdy + 2(c - yf)dxdz + 2edydz$ *avec* $a > 0, ad - b^2 > 0$ *et* $\det M_{\tilde{g}} > 0$

On peut conclure qu'il n'y pas une métrique bi-invariante.

Soit g *une métrique bi-invariante définie à partir du produit scalaire de matrice* M_g^e

Alors $g = \tilde{g}$

et par conséquent $f = e = c = 0$

d'où $g = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donc* $g = adx^2 + ddy^2 + 2bdxdy$

d'où $g = \alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dxdy, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *est une métrique pseudo-riemannienne plate.* *(car les* g_{ij} *sont constantes)*

Maintenant on va calculer les symboles de Christoffel de la métrique riemannienne invariante à gauche, au se restreint au cas $c = e = 0$

les symboles de Christoffel non nuls :

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{2}\frac{bxf}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}\frac{axf}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = -\frac{1}{2}\frac{-afx^2 + ad - b^2}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}\frac{bf}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = -\frac{1}{2}\frac{af}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = -\frac{1}{2}\frac{axf}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-dxf}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{bxf}{-b^2 + ad}$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{bx^2 f}{-b^2 + ad}$$

$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \frac{1}{2}\frac{df}{-b^2+ad}$

$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{bf}{-b^2+ad}$

$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\frac{1}{2}\frac{bxf}{-b^2+ad}$

la connexion riemannienne :

$\nabla_{\partial x}\partial x = \Gamma^1_{11}\partial x + \Gamma^2_{11}\partial z = 0$

$\nabla_{\partial x}\partial x = \Gamma^1_{12}\partial x + \Gamma^2_{12}\partial y + \Gamma^3_{12}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{-bxf}{ad-b^2}\partial y - \frac{axf}{ad-b^2}\partial y - \frac{afx^2+ad-b^2}{ad-b^2}\partial z\right)$

$\nabla_{\partial x}\partial z = \Gamma^1_{13}\partial x + \Gamma^2_{13}\partial y + \Gamma^3_{13}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{bf}{ad-b^2}\partial x - \frac{af}{ad-b^2}\partial y - \frac{axf}{ad-b^2}\partial z\right)$

$\nabla_{\partial y}\partial y = \Gamma^1_{22}\partial x + \Gamma^2_{22}\partial y + \Gamma^3_{22}\partial z = \frac{-dxf}{ad-b^2}\partial x + \frac{bxf}{ad-b^2}\partial y + \frac{bx^2f}{ad-b^2}\partial z$

$\nabla_{\partial y}\partial z = \Gamma^1_{23}\partial x + \Gamma^2_{23}\partial y + \Gamma^3_{23}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{ad-b^2}\partial x - \frac{vf}{ad-b^2}\partial y - \frac{bsf}{ad-b^2}\partial z\right)$

$\nabla_{\partial z}\partial z = \Gamma^1_{33}\partial x + \Gamma^2_{33}\partial y + \Gamma^3_{33}\partial z = 0$

Les composantes non nuls du tenseur de courbure de Rieman :

$R^1_{121} = R^2_{212} = -R^2_{122} = -\frac{3}{4}\frac{bf}{ad-b^2}$

$R^2_{121} = -R^2_{211} = \frac{3}{4}\frac{af}{ad-b^2}$

$R^3_{121} = \frac{axf}{ad-b^2}$

$R^1_{122} = -R^1_{212} = -\frac{1}{4}\frac{-f^2+3fd}{ad-b^2}$

$R^3_{122} = \frac{bxf}{ad-b^2}$

$R^1_{123} = R^3_{132} = -R^1_{213} = R^2_{232} = R^3_{323} = -\frac{1}{4}\frac{xf^2}{ad-b^2}$

$R^3_{131} = R^3_{321} = -\frac{1}{4}\frac{af}{ad-b^2}$

$R^1_{133} = -R^2_{323} = \frac{1}{4}\frac{f^2}{ad-b^2}$

$R^1_{211} = \frac{3}{4}\frac{bf}{ad-b^2}$

$R^3_{211} = \frac{-axf}{ad-b^2}$

$R^3_{212} = \frac{-bxf}{ad-b^2}$

$R^3_{231} = -\frac{1}{4}\frac{bf}{ad-b^2}$

$R^3_{232} = R^3_{322} = -\frac{1}{4}\frac{f^2x^2+df}{ad-b^2}$

$R^2_{233} = \frac{1}{4}\frac{f^2}{ad-b^2}$

$R^3_{311} = \frac{1}{4}\frac{af}{ad-b^2}$

$R^1_{312} = R^2_{322} = \frac{1}{4}\frac{xf^2}{ad-b^2}$

La courbure sectionnelle :

$K(1,2) = -\frac{1}{4}\frac{f(-afx^2+3ad-3b^2)}{(afx^2+ad-b^2)(ad-b^2)}$

$K(1,3) = \frac{1}{4}\frac{f}{ad-b^2} > 0$

$K(2,3) = \frac{1}{4}\frac{f}{ad-b^2} > 0$

La courbure de Ricci *:*

$S(1,1) = -\frac{1}{2}\frac{af}{ad-b^2}$

$S(1,2) = -\frac{1}{2}\frac{bf}{ad-b^2}$

$S(1,3) = 0$

$S(2,1) = -\frac{1}{2}\frac{bf}{ad-b^2}$

$S(2,2) = -\frac{1}{2}\frac{f(-fx^2+d)}{ad-b^2}$

$S(2,3) = -\frac{1}{2}\frac{xf^2}{ad-b^2}$

$S(3,1) = 0$

$S(3,2) = -\frac{1}{2}\frac{xf^2}{ad-b^2}$

$S(3,3) = -\frac{1}{2}\frac{f^2}{ad-b^2}$

La courbure Scalaire :

$\tau = -\frac{1}{2}\frac{f(-fx^2+a+d-f)}{ad-b^2}$

La courbure Scalaire n'est pas constante

Les champs de vecteurs invariants à gauche :

$e_1 = \alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}(e)\right)$ $e_2 = \alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}(e)\right)$ $e_3 = \alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}(e)\right)$ *forme une base de* $\mathfrak{g}$

on a

$e_1 = \partial x$

$e_2 = \partial y + x\partial z$

$e_3 = \partial z$

de plus $[e_1,e_3] = [e_2,e_3] = 0$ *et* $[e_1,e_2] = e_3$

on peut exprimer la connexion dans la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ *comme suite*

$\nabla_{e_1}e_1 = \Gamma^1_{11}\partial x + \Gamma^2_{11}\partial y + \Gamma^3_{11}\partial z = 0$

$$\nabla_{e_1}e_2 = \Gamma^1_{21}\partial x + \Gamma^2_{21}\partial y + \Gamma^3_{21}\partial z + x\Gamma_{31}\partial x + x\Gamma^2_{31}\partial y + x\Gamma^3_{31}\partial z = -\frac{1}{2}\left(\frac{afx^2+bfx}{ad-b^2}\partial x + \frac{1}{2}\partial z\right)$$

$$\nabla_{e_1}e_3 = \Gamma^1_{13}\partial x + \Gamma^2_{13}\partial y + \Gamma^3_{13}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{bf}{ad-b^2}\partial x - \frac{af}{ad-b^2}\partial y - \frac{axf}{ad-b^2}\partial z\right)$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = \Gamma^1_{21}\partial x + \Gamma^2_{21}\partial y + \Gamma^3_{21}\partial z + x\Gamma^1_{31}\partial x + x\Gamma^2_{31}\partial y + x\Gamma^3_{31}\partial z = -\frac{1}{2}\left(\frac{afx^2+bfx}{ad-b^2}\partial x - \frac{1}{2}\partial z\right)$$

$$\nabla_{e_2}e_2 = \Gamma^1_{22}\partial x + \Gamma^2_{22}\partial y + \Gamma^3_{22}\partial z + 2x\Gamma^1_{23}\partial x + 2x\Gamma^2_{23}\partial y + 2x\Gamma_{23}\partial z = 0$$

$$\nabla_{e_2}e_3 = \Gamma^1_{23}\partial x + \Gamma^2_{23}\partial y + \Gamma^3_{23}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{ad-b^2}\partial x - \frac{bf}{ad-b^2}\partial y - \frac{bxf}{ad-b^2}\partial z\right)$$

$$\nabla_{e_3}e_1 = \Gamma^1_{31}\partial x + \Gamma^2_{31}\partial y + \Gamma^3_{31}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{bf}{ad-b^2}\partial x - \frac{af}{ad-b^2}\partial y - \frac{axf}{ad-b^2}\partial z\right)$$

$$\nabla_{e_3}e_2 = \Gamma^1_{32}\partial x + \Gamma^2_{32}\partial y + \Gamma^3_{32}\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{ad-b^2}\partial x - \frac{bf}{ad-b^2}\partial y - \frac{bxf}{ad-b^2}\partial z\right)$$

$\nabla_{e_3} e_3 = \Gamma_{33}^1 \partial x + \Gamma_{33}^2 \partial y + \Gamma_{33}^3 \partial z = 0$

Remarque 4.0.1.

On a $\nabla_{e_1} e_2 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{afx^2 + bfx}{ad - b^2}\partial x + \dfrac{3}{2}\partial z\right)$ *et* $[e_1, e_2] = \frac{1}{2}\partial z$

donc $\nabla_{e_1} e_2 \neq \frac{1}{2}[e_1, e_2]$ *(car les composantes de* $\nabla_{e_1} e_2$ *sont diffeérentes des composantes de* $\dfrac{1}{2}[e_1, e_2]$*).*

d'où la condition que la métrique est bi-invariante est une condition nécessaire dans la proposition 3.3.3

Bibliographie

[1] Alessandra Frabetti, *Géométrie différentielle appliquée à la physique*, Cours M2 lyon1, 17 décembre 2010.

[2] Andreas Avvanito geargos, *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*, volume 22, student mathematical Library, AMS, 2003.

[3] Anthony w.knapp, *Lie groups Beyond and introduction*, Progress in mathematics. vol 140, Birthauser, second édition, 2002.

[4] Boris Kolev, *Groupes de Lie et mécanique*, version du 4 juin 2007.

[5] David Renard, *Groupes et représentations*, centre de mathématiques laurent schwartz, Ecole polytechnique.

[6] M. Djaa, *Introduction à la Géométrie Riemannienne et l'Analyse Harmonique sur les variétés* (Master $M1$, $M2$) Centre Universitaire de Relizane (2017-2018).

[7] Frank w, Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

[8] Frédéric Paulin, *Groupes et géométries*, 2013-2014.

[9] Jacques. Faraut, *Groupes et algèbre de Lie*.

[10] Jean-François Dat, *Groupes et algèbre de Lie*, Cours introductif M2, 2012-2013.

[11] Jean Gallier and Jocelyn quaintance, *Differential Geometry and Lie Groups for computing*, March 8, 2019.

[12] Jeant Gallier, *Notes on Differentialle Geometry and Lie groups*, University of penusylvania, 2011.

[13] John M. lee *Introduction to smooth manifolds*, december 31, 2000.

[14] K. Nomizu *Differential Geometry*, 1956.

[15] Kobayashi, S. and Nomizu,K, *Foundation of Differential Geometry* I, II, Interscience tract, 1963-1969.

[16] M.Boucetta, *curvature of left invariant Riemannian metrics on Lie groups*, Cadi-Ayyad, University FSTG Marrakesh.

[17] M. M. Postnikov, Geometry 6, *Riemannian Geometry*, En cylopaedia of Mathematical sciences, vol 91, springer verlag, first édition, 2001.

[18] Peter Petersen,*Riemannian Geometry*, University of California, springer, 2006.

[19] P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1993.

[20] Richard Hartley, *Some notes on Lie groups*, Australian National University.

[21] R. Mneimme et F. Testard, *Introduction a la theorie des groups de Lie classiques*.

[22] Sigmundur Gudmmdsson, *An introduction to Riemannian Geometry*, Lund University, Decembre 2001.

[23] Thierry Masson, *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, Fibrés et connexions*, version du 8 Mars 2010.