



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement et de la recherche scientifique
Université Dr Moulay Tahar de Saïda
Faculté des sciences et technologies
Département de Physique



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention de diplôme licence

Spécialité Physique

Thème

Theorie du Corps Noir

Présenté par :

- Saada Mohamed Amine
- Abdi Mokhtaria

Soutenu le : 01/10/2013

Devant le Jury Composé de :

Mr. Kouidi S.Président
Mr. Hamada L.Examineur
Mr. Djeddid A.Examineur
Mr. Boudali A. Examineur
Mr : Hamada L..... Rapporteur

Introduction

Introduction:

En physique, un corps noir désigne un objet idéal dont le spectre électromagnétique ne dépend que de sa température.

Le nom corps noir a été introduit par le physicien Gustav Kirchhoff en 1860.

Au début des travaux sur le corps noir, les calculs de l'énergie totale émise donnaient un résultat surprenant : l'objet émettait une quantité infinie d'énergie ! Comme l'énergie calculée croissait lors de l'intégration du spectre pour les longueurs d'ondes courtes, on a appelé cela la « catastrophe ultraviolette ». La mécanique classique est là prise en défaut et Max Planck en a conclu que le modèle utilisé pour calculer l'énergie totale était erroné ; le modèle de Rayleigh et Jeans considérait en effet un spectre continu.

Dans un mémoire intitulé Sur la théorie de la loi de la distribution d'énergie sur un spectre normal et présenté le 14 décembre 1900, Planck expose ses déductions faites sur ce problème et propose alors l'hypothèse des quanta : l'énergie n'est pas émise de manière continue, mais par paquets dont la taille E dépend de la longueur d'onde :

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Cela lui a valu le prix Nobel de physique en 1918. La découverte de cette quantification des échanges d'énergie fut un des fondements de la physique quantique ; notamment, mis en corrélation avec les travaux de Hertz sur l'effet photoélectrique, cela permit à Einstein d'inventer le concept de photon en 1905, qui lui valut son prix Nobel de physique en 1921.

Histoire du corps noir:

Max Planck était un physicien allemand connu pour ses travaux en mécanique quantique, pour lesquels il obtiendra le prix Nobel de Physique en 1918. Après avoir étudié la thermodynamique, il s'intéresse au rayonnement du corps noir. Influencé par Boltzmann, il va établir une loi de répartition de l'énergie du rayonnement en fonction de la longueur d'onde (1900). Cette loi a pour avantage d'unifier les travaux de Rayleigh/Jeans et ceux de Wien.

Whilhelm Wien était un physicien allemand, célèbre pour ses travaux sur les lois du rayonnement et de la chaleur. En 1893, il découvre que la distribution des spectres du corps noirs passe par un maximum. Il observe que la longueur d'onde de ce maximum est inversement proportionnelle à sa température, c'est la fameuse loi de Wien. Il obtiendra le prix nobel de Physique en 1911 pour ses travaux.

Josef Stephan était un physicien slovène connu pour son étude du rayonnement du corps noir. En 1879 il publie un article où il énonce une loi (appelée loi de Stephan-Boltzmann), qui relie l'énergie du rayonnement par unité de surface et la température, mais ce n'est que plusieurs années après que cette loi fut démontrée théoriquement par Ludwig Boltzmann, l'élève de J. Stephan. Cette loi aura un impact important en astrophysique, notamment dans l'étude des étoiles, notamment le Soleil puisque Stefan en déterminera la température de surface (5430 °C).

Définition du corps noir :

Un corps noir est un corps idéal totalement absorbant à toute radiation électromagnétique.

Pourquoi noir ? Parce que pour être à l'équilibre thermodynamique le corps doit être parfaitement isolé du milieu extérieur. En particulier il ne doit émettre aucune sorte de rayonnement et apparaîtra donc parfaitement noir.

Un exemple de corps noir consiste en une enceinte isotherme munie d'une toute petite ouverture.

Un corps noir est défini par l'équilibre intime entre sa matière et son rayonnement. Sa température d'équilibre explicite à elle seule la distribution spectrale et les rayons.

Qu'est-ce qu'un corps "pas noir" ?

Plusieurs phénomènes sont irréductibles au corps noirs :

Un miroir est par définition très réfléchissant, et ne peut donc pas être absorbant. Il n'y a aucun équilibre entre un miroir et le flux lumineux qu'il réfléchit.

Le rayonnement émis par une lampe à vapeur spectrale obéit à des règles de quantification énergétique fixées par la nature du gaz qui émet le rayonnement. La position des raies d'émission dépend de la nature de l'élément, et pas de la température.

Nous savons bien que la température a une certaine relation avec le rayonnement : plus un feu est chaud, plus il émet une lumière intense. Ce que nous entendons par température est en fait l'importance de l'agitation des molécules qui constituent le liquide contenu dans le thermomètre qui la mesure, cette agitation étant transmise par le milieu dans lequel on a plongé le thermomètre. La température d'un milieu décrit donc l'énergie d'agitation des particules qui constituent ce milieu : plus un gaz est chaud, plus les atomes ou les molécules de ce gaz sont animés de vitesses élevées. On qualifie parfois la température ainsi définie de "température cinétique", car elle est une mesure de l'énergie cinétique des particules du gaz supposé parfait.

Le concept de température peut s'étendre aux corps liquides ou solides, mais la situation y est un peu plus compliquée que dans un gaz parfait, parce que les particules ne sont pas séparées et libres de se mouvoir comme elles le sont dans un gaz. Nous nous limiterons dans la suite au cas d'un gaz, qui est

celui le plus fréquent en astrophysique, et nous mesurerons les températures dans l'échelle Kelvin où la température est nulle quand l'agitation cinétique est nulle. La température Kelvin est égale à la température Celsius augmentée de 273.

La matière est capable d'émettre ou d'absorber de la lumière. Les caractéristiques du rayonnement émis ou absorbé, telles que par exemple sa longueur d'onde ou son intensité, dépendent en général de nombreux facteurs liés à l'état physico-chimique de la matière. L'un de ces facteurs est la température, mais la composition chimique ou la pression du gaz jouent également un rôle important.

Chapitre 1

I-1- Statistique classique de Maxwell-Boltzmann

Pour modifier un gaz dans une enceinte, imaginons une boîte opaque fermée, contenant N boules réparties au hasard sur une étagère ayant k niveaux

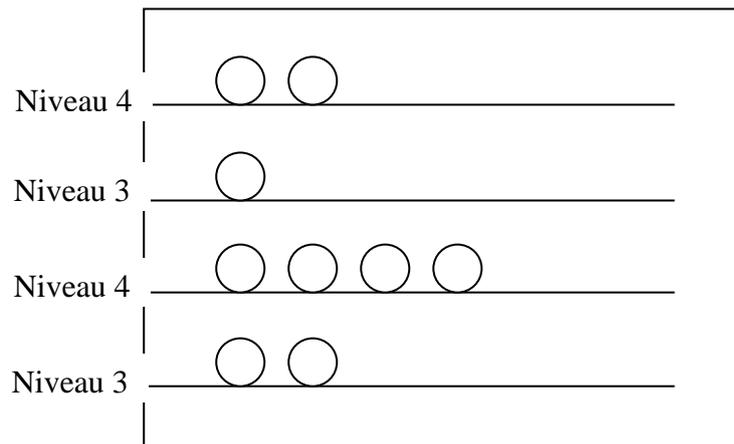


Figure (1): N boules sur k niveaux $N=9$ et $k=4$

Soit n_i le nombre de boules sur le niveau i :

$$n_1=2, n_2=4, n_3=1, n_4=2$$

On suppose que les niveaux d'énergies potentielle ε_i des différents niveaux modélisant des niveaux d'énergie cinétique de translation des particules du gaz.

Dans l'exemple suivant, nous allons déterminer l'ensemble des k nombre de boules $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ sur chaque niveau, grâce à l'hypothèse de départ sur le nombre total de boules N et sur l'énergie interne U du gaz dans l'enceinte. L'ensemble le plus probable sera noté $\{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0\}$. Cela revient à chercher la répartition des boules que l'on aurait le plus de chance de voir si l'on ouvrait la boîte

Exemple hypothèse de départ.

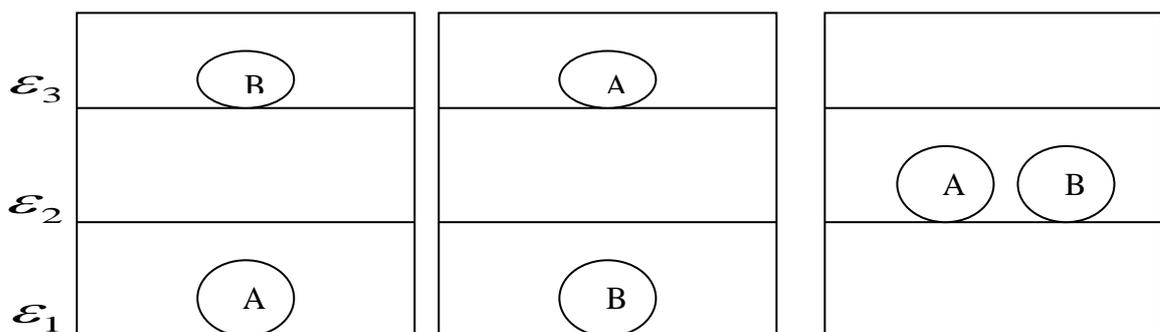
1. le nombre total de boule est $N=2$
2. l'énergie interne (*en Joules*) du système est $U = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i n_i = 2J$
3. les énergies potentielles de chaque niveau sont les suivantes:

$$\varepsilon_1 = 0J, \varepsilon_2 = 1J, \varepsilon_3 = 2J$$

Il y a 3 niveaux d'énergie, correspondant à 3 étages possibles.

Nous recherchons l'ensemble $\{n_1^0, n_2^0, n_3^0\}$

Voici les différents possibilistes de répartition des 2 boules A et B dans la boîte

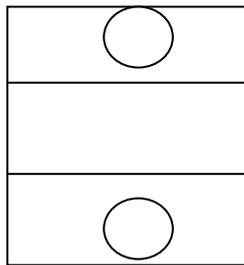


Il y a deux fois plus de chance d'avoir une boule sur le niveau ε_1 et une sur le niveau ε_3 que deux boules sur le niveau ε_2 par conséquent, la réponse au problème est $n_1^0 = 1, n_2^0 = 0, n_3^0 = 1$.

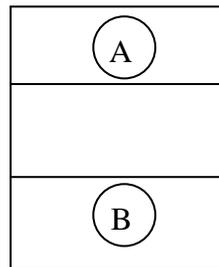
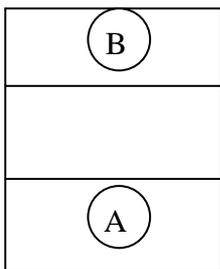
Définition état macroscopique

La donnée des k nombres de particules $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ ou l'on associe un nombre n_i a chaque niveau d'énergie $\varepsilon_{i=1, \dots, k}$ définit un état macroscopique.

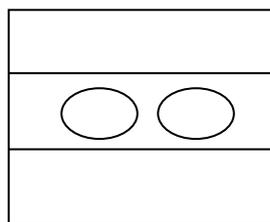
En utilisant le nouveau vocabulaire de la thermodynamique statistique nous dirons que l'état macroscopique le plus probable est celui-ci :



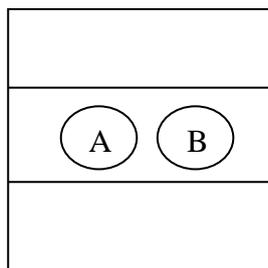
Car il est réalisé par deux complexions (*deux répartitions*)



Alors que l'autre état macroscopique



N'est réalisé que par une seule complexion



Les probabilités thermodynamiques $W(n_1, n_2, n_3)$ des différents états macroscopiques sont données par leurs nombres de complexions.

$$W(1, 0, 1) = 2$$

$$W(0, 2, 0) = 1$$

Divisées par le nombre total de complexions par conséquent, l'état macroscopique $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ le plus probable est celui qui a son nombre de complexions $W(n_1, n_2, \dots, n_k)$ le plus élevé cet état macroscopique se note $\{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0\}$ et son nombre de complexions $W(n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0)$ se note W^0

I-1-1- Hypothèses fondamentales de Boltzmann

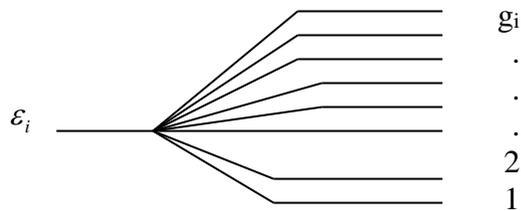
1. Les complexions sont équiprobables
2. La probabilité d'un état macroscopique est égal au nombre de complexions qui permettent de le réaliser
3. L'état d'équilibre thermodynamiques correspond a l'état macroscopique le plus probable

I-1-2- Dégénérescence

Il arrive souvent qu'un niveau d'énergie ε_i soit compose de g_i sous niveau d'énergie confondus; cette dégénérescence confère aux divers niveaux d'énergies des poids statistiques g_i différents. Par exemple, pour un atome, lorsque a un même niveau d'énergie correspondent plusieurs orbitales atomiques, ce niveau d'énergie est dit dégénère. La dégénérescence peut alors être élevée grâce à un champ magnétique.

Définition dégénérescence:

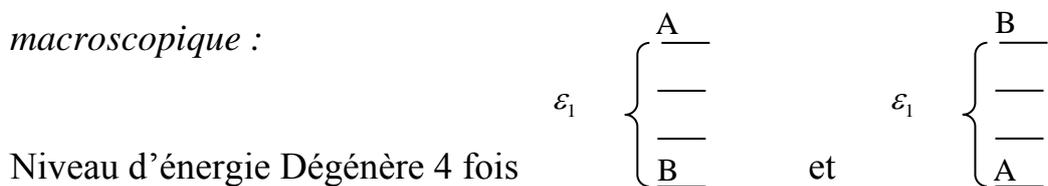
La dégénérescence ou poids statique du niveau d'énergie ε_i est le nombre g_i de sous niveaux contenus dans ce niveau d'énergie



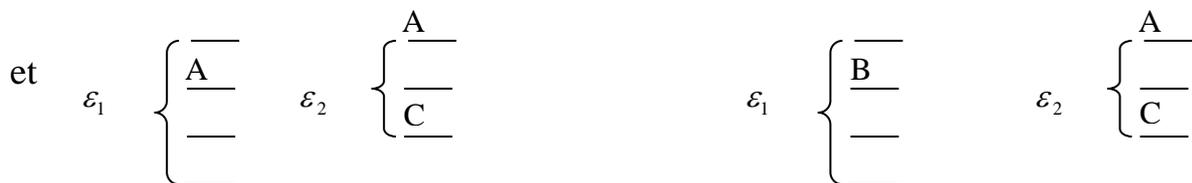
Etat macroscopique:

La donnée des g_i nombre de particules par sous niveau d'énergie, pour chacun des k niveaux d'énergie ε_i , définit un état macroscopique.

La détermination d'un état macroscopique est impossible expérimentalement par exemple les complexions suivantes constituent un seul et même état *macroscopique* :



De même les complexions suivantes forment aussi un seul et même état macroscopique :



I-1-3- Statistiques classique de Maxwell Boltzmann:

Hypothèse de départ:

1. le nombre de particules N
2. l'énergie interne du système U
3. l'énergie de chaque niveau i : $\mathcal{E}_{i=1,\dots,k}$
4. la dégénérescence de chaque niveau i : $g_{i=1,\dots,k}$

Le problème consiste à déterminer l'état macroscopique $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ le plus probable, celui dont le nombre de complexions associées est le plus élevé.

Supposons donc qu'il y ait n_1 particules discernables sur ε_1, n_2 sur $\varepsilon_2, \dots, n_k$ sur ε_k . Les particules étant ici supposées discernables, on peut les interchanger. De combien de façons cette répartition peut-elle être réalisée? En d'autres termes, quel est son nombre de complexions sur W ? Procédons par étapes :

- a. Quel est le nombre de façons de disposer une particule discernable sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois ?

La réponse est g_1

- b. quel est le nombre de façons de disposer deux particules discernables sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois ?

g_1 possibilités pour la première particule et g_1 possibilités pour la seconde, donc

$$g_1 \times g_1 = g_1^2$$

- c. Quel est le nombre de façons de disposer n_1 particules discernables sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois ?

$$g_1 \times g_1 \times \dots \times g_1 = g_1^{n_1}$$

- d. Quel est le nombre de façons de disposer n_2 particules discernables sur le niveau d'énergie ε_2 dégénère g_2 fois ?

$$g_2 \times g_2 \times \dots \times g_2 = g_2^{n_2}$$

- e. Quel est le nombre de façons de disposer n_1 particules discernables sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois et n_2 particules sur le niveau d'énergie ε_2 dégénère g_2 fois?

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2}$$

- f. Quel est le nombre de façons de choisir 2 particules discernables parmi N ?
 N choix pour la première A et $N-1$ choix pour la seconde B . Mais choisir A en premier puis B en second est équivalent à choisir B en premier puis A en second, car l'ordre dans lequel on les choisit n'intervient pas. Les $2!$ Façons de choisir les particules sont équivalentes. la réponse est donc : $N(N-1)/2!$

- g. Quel est le nombre de façons de choisir n_1 particules discernables parmi N ?

$$\frac{NX(N-1)X \dots (N-n_1+1)}{n_1!}$$

- h. en posant $N=n_1+n_2$, quel est le nombre de façons de choisir n_1 particules discernables parmi N ?

$$\begin{aligned} & \frac{NX(N-1)X \dots (N-n_1+1)}{n_1!} \\ &= \frac{NX(N-1)X \dots (N-n_1+1)}{n_1!} X \frac{(N-n_1)X \dots X 1}{(N-n_1)X \dots X 1} \\ &= \frac{N!}{n_1! n_2!} \end{aligned}$$

Remarque :

Une autre manière d'obtenir le nombre de répartitions possibles est de partir d'une répartition et de considérer qu'on en obtient une autre en permettant 2 particules qui ne sont pas sur le même niveau ε_1 ou ε_2 on part donc de l'une des répartitions, on permette toutes les particules ; soit $N!$ Permutations, et on ne prend pas en compte les permutations $n_1!$ et $n_2!$ qui n'interviennent dans le même ensemble n_1 ou n_2 : $N!/(n_1! n_2!)$

Quel est le nombre de façons de disposer N particules discernables en mettant n_1 sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 et n_2 sur le niveau d'énergie g_2 fois?

$$= \frac{N!}{n_1!n_2!} g_1^{n_1} g_2^{n_2}$$

i. quel est le nombre de façons de disposer N particules discernables sur k niveaux d'énergies dégénère?

$$W_{M.B.} = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_k^{n_k}$$

$$= N! \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (1)$$

Qui est la statistique classique de Maxwell Boltzmann

I- 2- Répartition la plus probable

Déterminons la répartition $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ la plus probable des particules sur les k niveaux d'énergie pour la statistique de Maxwell Boltzmann

La probabilité thermodynamique $W(n_1, n_2, \dots, n_k)$ est une fonction à valeurs entières de k variables entières ; étant donnée la valeur très importante prise par chaque variable n_i et le fait qu'elles varient par pas d'une entité, on peut considérer que ces variables varient de façon continue? Sous cette hypothèse la probabilité thermodynamique $W(n_1, n_2, \dots, n_k)$ peut être considérée comme continue et l'on peut utiliser le calcul différentiel pour trouver son maximum. Nous cherchons les valeurs n_i^0 qui rendent la fonction $W_{MB}(n_i)$ maximale, autrement dit les valeurs n_i^0 des n_i telles que,

$$dW(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0$$

$$d\left(N! \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}\right) = 0$$

$$dN! \times \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} + N! \times d \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = 0$$

$N!$ Étant constant, sa différentielle est nulle, et,

$$d \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = 0$$

Comme la fonction logarithmique est croissante, cela revient à chercher:

$$d \ln \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = 0$$

$$d \sum_{i=1}^k \ln \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = 0$$

$$d \sum_{i=1}^k (n_i \ln g_i - \ln n_i!) = 0$$

Nous avons supposé que sur chaque niveau d'énergie ε_i le nombre de particules n_i est très important nous pouvons alors utiliser l'approximation de Stirling donnée en annexe 14.1, $\ln n_i! \approx n_i \ln n_i - n_i$ pour $n_i \gg 0$

$$d \sum_{i=1}^k (n_i \ln g_i - n_i \ln n_i! + n_i) \approx 0$$

En se rappelant que g_i n'est pas une variable de W , on a $dg_i = 0$ et

$$\sum_{i=1}^k [\ln(g_i) dn_i - \ln(n_i) dn_i - n_i d \ln n_i + dn_i] \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) dn_i - n_i \frac{dn_i}{n_i} + dn_i \right] \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) dn_i \right] \approx 0 \quad (2)$$

Les dn_i ne sont pas indépendantes en effet si par exemple n_j varie alors le nombre de particules sur l'autre niveau va devoir varier aussi cela est dû à deux contraintes:

Le nombre de particules N est fixé :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i &= N \\ \sum_{i=1}^k dn_i &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

L'énergie interne U est fixée, ainsi que les niveaux d'énergie ($d\varepsilon_i = 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i n_i &= U \\ \sum (\varepsilon_i dn_i + n_i d\varepsilon_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Nous avons donc trois équations pour les dn_i on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange, expliquée en annexe 14.2 en introduisant deux paramètres momentanément indéterminés appelés multiplicateurs de Lagrange, ces trois équations n'en forment qu'une seule:

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) dn_i - \alpha \sum dn_i - \beta \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i \right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) dn_i - \alpha - \beta \varepsilon_i \right] dn_i = 0$$

Les deux contraintes sur les n_i étant prises en compte, les coefficients devant les dn_i doivent s'annuler:

$$\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$$

$$\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) = \alpha + \beta \varepsilon_i$$

$$\left(\frac{g_i}{n_i}\right) = e^{\alpha} e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$n_i^0 = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (5)$$

n_i^0 s'appelle la fonction de distribution de Boltzmann les paramètres α et β seront déterminés au paragraphe 4.

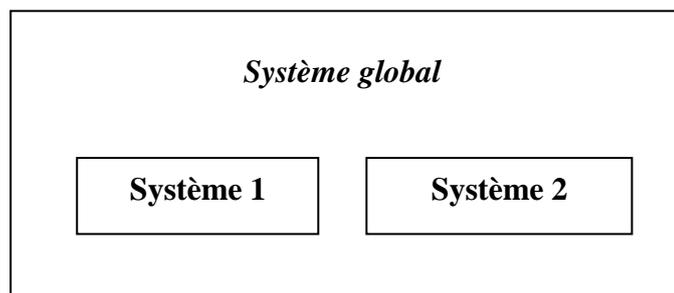
I-3- Relations entre entropie S et nombre de complexions W:

Lorsqu'un gaz est à l'équilibre, nous avons à la fois

- en thermodynamique générale l'entropie S est maximale
- en thermodynamique statistique le nombre de complexions W est maximal

le physicien autrichien **Boltzmann (1844-1906)** a donc supposé qu'il existait une fonction f croissante telle que $S=f(W)$. Ainsi quand W est maximal, S est aussi maximal.

Nous pouvons déterminer cette fonction en considérant un système isolé à l'équilibre et constitué de deux sous-systèmes isolés:



L'entropie du système global est $S=S_1+S_2$

Le nombre de complexions du système 1 est W_1 celui du système 2 est W_2 a chaque complexion du système 1 correspond une complexion du système 2 le système global a donc $W=W_1W_2$ complexions possibles.

Par conséquent la fonction f est un logarithme car sous cette hypothèse nous avons $S_1 = \log_{\alpha} W_1$ et $S_2 = \log_{\alpha} W_2$ et les entropies des sous système s'additionnent alors que leurs nombres de complexions se multiplient:

$$S_1 + S_2 = \log_{\alpha} W_1 + \log_{\alpha} W_2$$

$$S = \log_{\alpha} (W_1 W_2)$$

$$S = \log_{\alpha} (W)$$

La base a du logarithme étant inconnue on écrit:

$$\begin{aligned} \log_{\alpha} W &= \frac{\ln W}{\ln \alpha} \\ &= k_{\beta} \ln W \end{aligned}$$

Où la valeur de la constante de Boltzmann k_{β} est déterminée expérimentalement :

$$k_{\beta} \approx 1.38110^{-23} JK^{-1}$$

La formule de Boltzmann s'écrit :

$$\mathbf{S = k_{\beta} \ln W} \quad (6)$$

Ainsi, lorsqu'un gaz tend vers son état d'équilibre, W tend vers sa valeur maximale W^0 et l'entropie augmente.

I-4- Paramètres α et β de la distribution de Boltzmann:**I-4-1- Paramètre α :**

Pour déterminer le paramètre α on utilise la contrainte sur N

$$\sum_{i=1}^k n_i^0 = N$$

$$\sum_{i=1}^k g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_i} = N$$

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\sum_{i=1}^k g_i e^{-\beta \varepsilon_i}}$$

Il n'est pas utile d'explicitier d'avantage l'expression de α .

On injecte l'expression de α dans l'équation (5) donnant n_i^0

$$n_i^0 = \frac{N g_i e^{-\beta \varepsilon_i}}{\sum_{i=1}^k g_i e^{-\beta \varepsilon_i}}$$

Définition de fonction de partition:

On définit la fonction de partition Z par

$$Z = \sum_{i=1}^k g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$$

On a alors

$$n_i^0 = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (7)$$

I-4-2- Paramètre β :

Commençons par montrer que les niveaux d'énergie ε_i sont fonction uniquement du volume V de l'enceinte contenant le gaz. Jusqu'ici nous avons modélisé les quantons constituant le gaz par des particules obéissant aux lois de la mécanique du point nous allons changer de représentation et modéliser les quottions par des ondes et décrire le comportement de ces ondes grâce à la mécanique ondulatoire. Dans cette mécanique, l'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique est l'équation de *Schrödinger*.⁽¹⁾

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_i + V_i(r, t) \psi_i = i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t}$$

Où $\psi_i(r, t)$ est la fonction d'onde associée à la $i^{\text{ème}}$ particule, \hbar est la constante de Planck h divisée par 2π et Δ est l'opérateur *Laplacien*, tel que $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

Définition d'opérateur Hamiltonien:

A partir de la fonction de *Hamiltonien* classique H on définit l'opérateur *Hamiltonien* \hat{H} par

$$\hat{H} \triangleq \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V_i(r, t)$$

Et l'équation de *Schrödinger* s'écrit :

$$\hat{H} \psi_i = i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t}$$

$V_i(r, t)$ Est l'énergie potentielle de l'onde, et comme en mécanique du point, il faudra la remplacer par un modèle adapté au problème, cette énergie potentielle est due à l'interaction de la $i^{\text{ème}}$ particule avec les autres particules, aux

⁽¹⁾ - Voir équation de Schrödinger .PDF

éventuelles champs extérieurs dans lesquels est plongée la $i^{\text{ème}}$ particule, et aux éventuelle barrières de potentiels.

Nous utiliserons le modèle du gaz parfait, ou l'on néglige l'énergie potentielle d'interaction, et l'on considère que les particules sont libres

Il s'agit la d'une approximation car sans interaction entre les particules, le gaz ne pourrait évoluer au cours du temps, et tendre vers l'équilibre thermodynamique le gaz est dans une enceinte supposés parallélépipédique de cotés a, b, c dont on modélise les parois par des barrières de potentiel infinies. Nous avons là notre modèle d'énergie potentiel, un puits plat à trois dimensions, de profondeur infinie.

$$v_i(r, t) = 0 \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > x > 0 \\ b > x > 0 \\ c > x > 0 \end{array} \right\} v_i(r, t) = +\infty \quad \text{si} \quad \text{non} \quad (8)$$

Si de plus on néglige l'énergie potentielle de pesanteur devant l'énergie cantique, alors l'énergie potentielle est nulle et l'équation de **Schrödinger** du quanton dans l'enceinte s'écrit:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi_i = i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t}$$

Si les variables d'espace et de temps sont liées, elles ne le sont que dans l'expression de l'énergie potentielle lorsque l'énergie potentielle interaction V est indépendante du temps et ne dépend que de l'espace, ce qui est le cas ici puisqu'elle est nulle, l'équation de **Schrödinger** peut se résoudre par la méthode de la séparation des variables d'espace r et de temps t . On cherche alors une solution de la forme:

$$\psi_i(r, t) = \varphi_i(r) f_i(t)$$

Le **Laplacien** Δ ne s'appliquant qu'aux variables d'espace, l'équation de **Schrödinger** devient:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f_i(t) \Delta \varphi_i(r) = i\hbar \varphi_i(r) \frac{df_i(t)}{dt}$$

En divisant par $\varphi_i(r) f_i(t)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \varphi_i(r)}{\varphi_i(r)} = i\hbar \frac{df_i(t)}{dt}$$

Nous avons une fonction de r qui est égale a une fonction de t , la seule possibilité est qu'elles soient égales a une même constante dans l'espace et dans le temps, l'analyse dimensionnelle montre que cette constante est une énergie, qui ne peut être que l'énergie interne ε_i du quanton Pour la partie temporelle nous avons:

$$i\hbar \frac{1}{f_i(t)} \frac{df_i(t)}{dt} = \varepsilon_i$$

$$\frac{df_i(t)}{f_i(t)} = -\frac{i}{\hbar} \varepsilon_i dt$$

$$f_i(t) = C e^{-i\varepsilon_i t / \hbar}$$

Et pour la partie spatiale:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \varphi_i(r)}{\varphi_i(r)} = \varepsilon_i$$

Qui est appelée equation de **Schrödinger** indépendante du temps le **Laplacien** étant la somme de trois opérateurs agissant chacun sur une seule coordonnée d'espace, on cherche une solution avec les variables d'espace séparées:

$$\varphi_i(r) = \varphi_{i1}(x) \varphi_{i2}(y) \varphi_{i3}(z)$$

Si bien que,

$$\Delta \varphi_i(r) = \varphi_{i1}''(x) \varphi_{i2}(y) \varphi_{i3}(z) + \varphi_{i1}(x) \varphi_{i2}''(y) \varphi_{i3}(z) + \varphi_{i1}(x) \varphi_{i2}(y) \varphi_{i3}''(z)$$

Et donc:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\varphi_{i1}''(x)}{\varphi_{i1}(x)} + \frac{\varphi_{i2}''(y)}{\varphi_{i2}(y)} + \frac{\varphi_{i3}''(z)}{\varphi_{i3}(z)} = \varepsilon_i \right)$$

Les coordonne d'espace étant indépendantes,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi_{i1}''(x)}{\varphi_{i1}(x)} = \varepsilon_{ix} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi_{i2}''(y)}{\varphi_{i2}(y)} = \varepsilon_{iy} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi_{i3}''(z)}{\varphi_{i3}(z)} = \varepsilon_{iz}$$

Et $\varepsilon_i = \varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz}$

En posant:

$$k_{ix}^2 = 2m\varepsilon_{ix} / \hbar^2 \quad k_{iy}^2 = 2m\varepsilon_{iy} / \hbar^2 \quad k_{iz}^2 = 2m\varepsilon_{iz} / \hbar^2$$

Nous avons:

$$\frac{\varphi_{i1}''(x)}{\varphi_{i1}(x)} = -k_{ix}^2 \quad \frac{\varphi_{i2}''(y)}{\varphi_{i2}(y)} = k_{iy}^2 \quad \frac{\varphi_{i3}''(z)}{\varphi_{i3}(z)} = k_{iz}^2$$

Dont les solutions sont:

$$\varphi_{i1}(x) = A_1 \sin(k_{ix}x + \alpha_{ix})$$

$$\varphi_{i2}(y) = A_2 \sin(k_{iy}y + \alpha_{iy})$$

$$\varphi_{i3}(z) = A_3 \sin(k_{iz}z + \alpha_{iz})$$

Nous faisons l'hypothèse non triviale que la fonction d'onde est nulle sur les parois de l'enceinte.

Pour la première relation, la condition aux limites en $x=0$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}(0) &= A_1 \sin \alpha_{ix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall P_{ix} \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_{ix} = P_{ix} \pi$$

Et, en $x=a$;

$$\begin{aligned}\varphi_{i1}(a) &= A_1 \sin(k_{ix}a + p_{ix}\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$k_{ix} = n_{ix} \frac{\pi}{a}$$

Ou

n_{ix} Est un entier tel que :

$$\begin{aligned}n_{ix} &= \frac{\pi}{a} k_{ix} \\ &= \frac{a}{\pi\hbar} \sqrt{2m\varepsilon_{ix}} \\ &\leq \frac{2a}{h} \sqrt{2m\varepsilon_{ix}}\end{aligned}$$

n_{ix} Est donc un entier positif qui a pour valeur max $2a\sqrt{2m\varepsilon_{ix}}/h$

Pour les trois relations nous obtenons:

$$k_{ix} = n_{ix} \frac{\pi}{a} \quad k_{iy} = n_{iy} \frac{\pi}{b} \quad k_{iz} = n_{iz} \frac{\pi}{c}$$

L'énergie ε_i du $i^{\text{ème}}$ quanton est donc quantifiée, et a pour expression:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_{ix}^2 + k_{iy}^2 + k_{iz}^2) \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_{ix}^2}{a^2} + \frac{n_{iy}^2}{b^2} + \frac{n_{iz}^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{n_{ix}^2}{a^2} + \frac{n_{iy}^2}{b^2} + \frac{n_{iz}^2}{c^2} \right)\end{aligned}\tag{9}$$

Dans le cas particulier où l'enceinte est un cube:

$$a = b = c = V^{1/3}$$

L'énergie s'écrit

$$\varepsilon_i = \frac{h^2}{8mV^{2/3}} (n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2)$$

Un ensemble de trois entiers n_{ix} , n_{iy} , n_{iz} définit un état quantique pour le quanton, nous voyons que les niveaux d'énergies ne dépendent que d'une variable thermodynamique le volume V écrivons maintenant la différentielle de l'énergie interne:

$$U = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i n_i$$

$$dU = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i + \sum_{i=1}^k n_i d\varepsilon_i$$

L'énergie interne peut donc varier de deux façons par redistribution des particules sur les niveaux d'énergies ou par déplacement de ces niveaux d'énergies nous savons que les ε_i ne sont fonction que du volume

$$dU = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i + \sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{d\varepsilon_i}{dV} \right) dV$$

Or:

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W \\ &= TdS - PdV \end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i = TdS \quad \text{Et} \quad \sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{d\varepsilon_i}{dV} \right) = -P$$

En utilisant l'expression de $d \ln W$ donnée par l'équation (2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i &= Tk d \ln W \\ &= Tk \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{g_i}{n_i} \right) dn_i \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation (7) à l'équilibre thermodynamique:

$$n_i^0 = (N/Z) g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$$

Si bien que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i &= Tk \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{Z}{N} e^{\beta \varepsilon_i} \right) dn_i \\ &= Tk \sum_{i=1}^k \left(\beta \varepsilon_i + \ln \frac{Z}{N} e^{\beta \varepsilon_i} \right) dn_i \\ &= Tk \beta \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i + Tk \ln \left(\frac{Z}{N} \right) \sum_{i=1}^k dn_i \end{aligned}$$

En se rappelant l'équation (3), $\sum_{i=1}^k dn_i = 0$

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i = Tk \beta \left(\frac{Z}{N} \right) \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i$$

Par conséquent:

$$\beta = \frac{1}{kT} \tag{10}$$

Et à l'équilibre, le nombre n_i^0 de particules ayant le niveau d'énergie ε_i dégénère g_i fois a pour l'expression :

$$n_i^0 = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/(kT)}$$

I-5- Expressions, de la fonction de partition Z :

Avec la définition 4.1 et l'égalité (10), la fonction de partition s'écrit:

$$Z = \sum_{i=1}^k g_i e^{-\varepsilon_i/(KT)} \quad (11)$$

On considère le gaz le plus simple, un gaz parfait mon atomique de charge électrique nulle. Si l'on néglige l'énergie potentielle de gravitation mgz devant l'énergie cinétique de translation l'énergie de particule de ce gaz s'écrit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{2} m v_i^2 \\ &= \frac{p_i^2}{2m} \end{aligned}$$

La vitesse v_i de chaque particule pouvant varier de $-\infty + \infty$

i-5-1- Expression du facteur de dégénérescence g:

L'équation (09) donne l'ensemble des états quantiques accessibles à un quanton d'énergie ε_i . Nous pouvons l'écrire:

$$\frac{h^2}{8m} \left(\frac{n_{ix^2}}{a^2 \varepsilon_i} + \frac{n_{iy^2}}{b^2 \varepsilon_i} + \frac{n_{iz^2}}{c^2 \varepsilon_i} \right) = 1$$

Qui est de la forme:

$$\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} \right) = 1$$

Avec

$$x = n_{ix} \quad y = n_{iy} \quad z = n_{iz}$$

$$A^2 = \frac{8ma^2 \varepsilon_i}{h^2} \quad B^2 = \frac{8mb^2 \varepsilon_i}{h^2} \quad C^2 = \frac{8mc^2 \varepsilon_i}{h^2}$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde de paramètres A, B, C (longueurs des trois demi axes) chaque point de coordonnées entières n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}

Intérieur a cet ellipsoïde représente un état quantique accessible a un quanton d'énergie ε_i les nombres quantiques n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} étant positifs nous ne prenons en compte que le huitième $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$ du volume de l'ellipsoïde le facteur de dégénérescence est alors donne par :

$$\begin{aligned}
 g_i &= \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi ABC \\
 &= \frac{\pi}{6} \times \frac{a}{h} \sqrt{8\pi\varepsilon_i} \times \frac{b}{h} \sqrt{8\pi\varepsilon_i} \times \frac{c}{h} \sqrt{8m\varepsilon_i} \\
 &= \frac{\pi abc (8m\varepsilon_i)^{3/2}}{6h^3} \\
 &= \frac{4\pi V (2m\varepsilon_i)^{3/2}}{3h^3} \\
 &= \frac{4\pi V p^3}{3h^3} \\
 &= \frac{1}{h^3} \times V \times \frac{4}{3} \pi p^3
 \end{aligned}$$

Interprétons ce résultat: concèderons hyper espace à 6 dimensions (r,p) appelle espace de phases l'hyper volume de cet espace est constitue par la multiplication du volume V de l'espace ordinaire et du volume de l'espace de quantités de mouvement $4/3 \times \pi p^3$. Nous voyons qu'il n'est pas possible de localiser un quanton dans un hyper volume intérieur a h^3 . Cela nous amantes a considérer que l'espace des phases est devise en cellules d'hyper volume h^3 correspondant chacune a cet état quantique, c'est-à-dire aux sous niveaux d'énergie du paragraphe (1.2) pour les fermions, un facteur de dégénérescence

supplémentaires du au spin intervient dans g_i une cellule de l'espace des phases peut contenir plusieurs fermions de même espèce, à condition que leurs vecteurs spin aient des orientations spatiales différents ce facteur supplémentaire vaut $2(S/h)+1$, où S est le moment cinétique de spin de particule par exemple pour les électrons les neutrons et protons dont le moment cinétique de spin est $h/2$, ce facteur vaut 2. Les photons ont aussi un facteur de dégénérescence supplémentaire valant 2 du à leurs deux états de polarisation droite et gauche. En coordonnées cartésiennes le facteur de dégénérescence s'écrit:

$$g_i = \frac{\int_x \int_y \int_z \int_{p_x} \int_{p_y} \int_{p_z} dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad (12)$$

Revenons à la fonction de partition :

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{1}{h^3} \int_x \int_y \int_z \int_{p_x} \int_{p_y} \int_{p_z} e^{-\varepsilon_i/(KT)} dx dy dz dp_x dp_y dp_z \\ &= \frac{m^3 V}{h^3} \int_{v_x} \int_{v_y} \int_{v_z} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/(2kT)} dv_x dv_y dv_z \\ &= \frac{m^3 V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m(v^2)/(2kT)} dv \right]^3 \end{aligned}$$

On pose $a=m/(2kT)$

$$Z = \frac{m^3 V}{h^3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-av^2} dv \right]^3$$

En utilisant l'intégrale de **Guass**, donnée en annexe 14.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{m^3 V}{h^3} \left(\sqrt{\frac{2kT\pi}{m}} \right)^3 \\ &= \frac{V}{h^3} (2\pi m k T)^{3/2} \end{aligned} \quad (13)$$

Z est donc une fonction de la température T et du volume V :

$$Z = Z(T, V)$$

I-6- L'expression de l'énergie interne:

L'énergie interne U peut s'exprimer à l'aide de la fonction de partition Z à l'équilibre thermodynamique,

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i n_i^0 \\ &= \frac{N}{Z} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g_i e^{-\varepsilon_i / kT} \end{aligned}$$

D'après (11):

$$Z(T, V) = \sum_{i=1}^k g_i e^{-\varepsilon_i / kT}$$

On dérive la fonction de partition par rapport à la température T à volume V constant

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V = \sum_{i=1}^k g_i \frac{\varepsilon_i}{kT^2} e^{-\varepsilon_i / kT}$$

$$= \frac{1}{kT^2} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g_i e^{-\varepsilon_i/kT}$$

Donc:

$$\begin{aligned} U &= \frac{NkT^2}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_v \\ &= NkT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_v \end{aligned}$$

Exprimons maintenant l'énergie interne de translation U :

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2}$$

$$\ln Z = \ln \frac{V}{h^3} + \frac{3}{2} (2\pi mkT)$$

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2T}$$

D'où

$$U = \frac{3}{2} NkT \quad (14)$$

I-7- L'entropie en statistique classique de Maxwell Boltzmann:

On utilise la formule de *Boltzmann* (6)

$$S = k \ln W_{M.B}$$

L'équation (1) donne l'expression de W_{MB} :

$$S = k \ln \left(N! \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right)$$

$$= k \left[\ln N! + \sum_{i=1}^k \ln \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right]$$

En utilisant l'approximation de Stirling pour $n_i \gg 1$:

$$\begin{aligned} S &= k \left(N \ln N - N + \sum_{i=1}^k (n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i) \right) \\ &= k \left(N \ln N + \sum_{i=1}^k n_i \ln \frac{g_i}{n_i} \right) \end{aligned}$$

Nous cherchons l'entropie à l'équilibre thermodynamique, donc avec $n_i = n_i^0$ en se servant de l'équation (7)

$$n_i^0 = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i / (kT)}$$

$$\frac{g_i}{n_i^0} = \frac{N}{Z} e^{\varepsilon_i / (kT)}$$

$$\ln \frac{g_i}{n_i^0} = \ln \frac{N}{Z} + \frac{\varepsilon_i}{kT}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} S &= k \left[N \ln N + \sum_{i=1}^k n_i \left(\ln \frac{Z}{N} + \frac{\varepsilon_i}{kT} \right) \right] \\ &= k \left(N \ln N + N \ln \frac{Z}{N} + \frac{U}{kT} \right) \\ &= kN \ln Z + \frac{U}{T} \end{aligned}$$

I-8- Le paradoxe de Gibbs:

Calculons l'entropie pour un gaz parfait monoatomique :

$$S = kN \ln \left[\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right] + \frac{(3/2)NkT}{T}$$

$$S = kN \left[\ln V + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + \frac{3}{2} \right] \quad (15)$$

Considérons une enceinte contenant un gaz parfait monoatomique a la température T séparons l'enceinte en deux volumes V_1 et V_2 grâce a une cloison amovible.

V_1, N_1	V_2, N_2
Gaz	Gaz

Calculons la variation d'entropie lorsque l'on retire la cloison l'entropie initiale est la somme des entropies des 2 gaz dans leurs volumes respectifs V_1 et V_2 .

$$S_{initiale} = kN_1 \left[\ln V_1 + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{3}{2} \right]$$

$$+ kN_2 \left[\ln V_2 + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{3}{2} \right]$$

L'entropie finale est la somme des entropies des gaz dans le volume final V_1 et V_2

$$S_{finale} = kN_1 \left[\ln (V_1 + V_2) + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + \frac{3}{2} \right]$$

$$+ kN_2 \left[\ln(V_1 + V_2) + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + \frac{3}{2} \right]$$

La variation d'entropie ΔS s'écrit

$$S_{finale} - S_{initiale} = kN_1 \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) + kN_2 \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_2} \right)$$

Cette variation d'entropie est positive, ce qui signifie que chaque fois que l'on remet et que l'on enlève la cloison, l'entropie augmente ! Pourtant nous savons que d'un point de vue macroscopique il ne se passe rien lorsqu'on effectue cette opération. Le système revient dans sa configuration initiale, le processus est réversible et nous devrions avoir $\Delta S = 0$.

En thermodynamique classique, l'entropie est une variable extensive. Si nous doublons les variables extensives, le nombre de particules N en même temps que le volume V , l'entropie doit doubler de valeur.

Or nous voyons que ce n'est pas le cas si nous utilisons l'équation (15) pour résoudre ce problème, nous devons considérer que les particules du gaz sont indiscernables, car sous cette hypothèse, nous nous assurons qu'il ne se passe absolument rien lorsque l'on enlève la cloison. L'indiscernabilité est une propriété purement quantique qui n'a pas d'équivalent classique. Les statistiques avec des particules indiscernables sont appelées "*statistique quantique*".

I-9- Statistiques quantiques

Exemple:

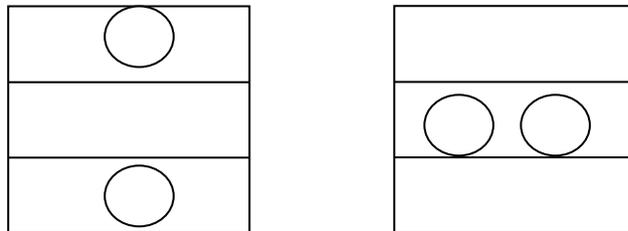
On reprend la même hypothèse de départ que dans l'exemple 1 mais avec des boules indiscernables:

1. $N=2$
2. $U=2J$

3. $\varepsilon_1 = 0J, \varepsilon_2 = 1J, \varepsilon_3 = 2J$

4. Les boules sont incernables

Les différentes répartitions possibles sont alors :



Il y a donc deux états macroscopiques équiprobables, puisque réalisés chacun par une seule complexion.

Exemple :

Hypothèse de départ

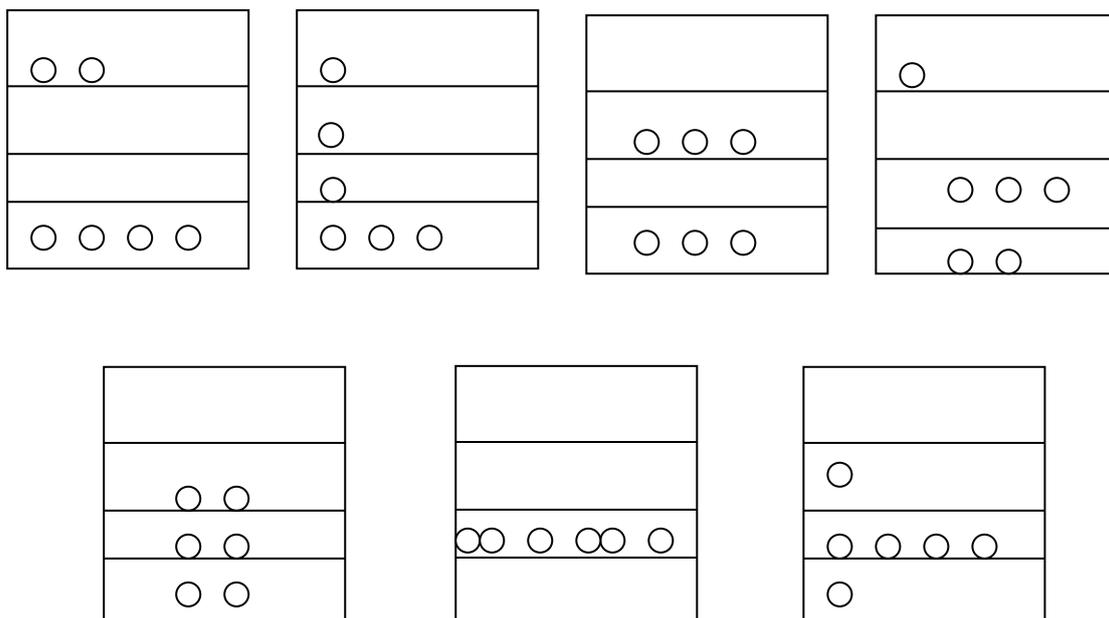
1. $N=6$

2. $U=6J$

3. $\varepsilon_1 = 0J, \varepsilon_2 = 1J, \varepsilon_3 = 2J, \varepsilon_4 = 3J$

4. Les boules sont incernables

Les différentes répartitions possibles sont alors :



Les états macroscopiques sont réalisés chacun par une seule complexion puisque les boules sont incernables. Ils sont donc équiprobables. Les 2 exemples précédents peuvent que la discernabilité ou l'indiscernabilité des particules change les probabilités de réalisation des états macroscopiques.

I-9-1- Statistique de Maxwell Boltzmann corrigée:

On reprend le raisonnement de la statistique classique de *Maxwell Boltzmann* du paragraphe 1.3 mais avec des articles incernables.

a. Quel est le nombre de façons de disposer n_1 particule incernable sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois?

Par rapport au résultat obtenu lorsque les particules sont discernables, $g_1^{n_1}$ toutes les permutations de particule sur le niveau d'énergie ε_1 sont des configurations identiques, puisque les particules sont maintenant indiscernables. La réponse est donc $g_1^{n_1} / n_1!$.

Nous verrons dans l'exemple 9.2 suivant, que ce raisonnement n'est pas tout à fait exact, et n'est valable que lorsque $g_1 \gg n_1$

b. Quel est le nombre de façons de disposer n_2 particules indiscernables sur un niveau d'énergie ε_2 dégénère g_2 fois? $g_2^{n_2} / n_2!$.

c. Quel est le nombre de façons de disposer n_1 particule incernable sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois et n_2 particules indiscernables sur un niveau d'énergie ε_2 dégénère g_2 fois? $g_1^{n_1} / n_1! \times g_2^{n_2} / n_2!$

d. Quel est le nombre de façons de disposer N particules indiscernables sur les k niveaux d'énergie dégénère?

$$W_{MBC} = \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (16)$$

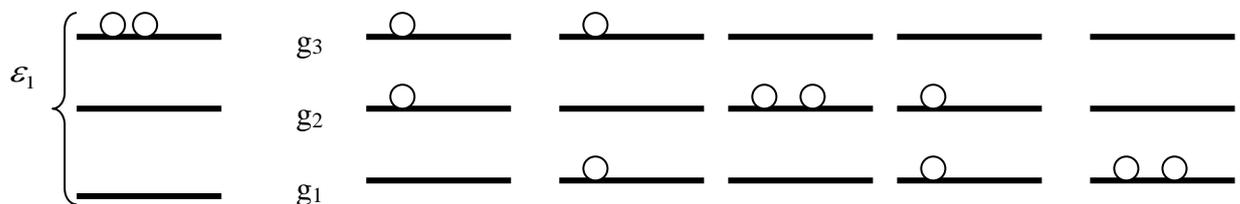
En effet, il n'est plus question ici de permuter les particules du niveau d'énergie ε_1 avec celles du niveau d'énergie ε_2 puis quelles sont indiscernables

I-9-2- Ce raisonnement n'est pas tout a fait exact:

Prenons un cas simple, pour lequel il ya qu'un seul niveau d'énergie ε_1 dégénère 3 fois. Les hypothèses de départ sont les suivants:

1. $n_1=2$
2. $U=2J$
3. $\varepsilon_1=0J$
4. $g_1=3$

Les différentes répartitions sur les 3 sous niveaux du niveau d'énergie ε_1 sont les suivantes:



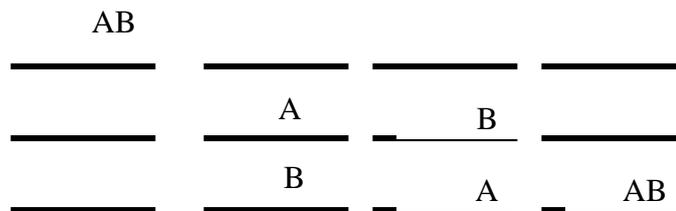
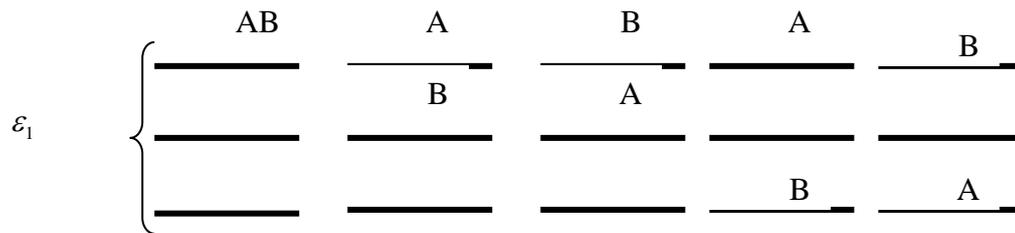
Il n'y a qu'un seul état macroscopique possible, est son nombre de complexions est $W=6$

Appliquons la formule de *Maxwell Boltzmann* pour des particules indiscernables

$$W_{MBC} = \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

$$\frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = \frac{3^2}{2!} = 4,5$$

Ce n'est pas le bon résultat, et de plus il est non entier ce qui est impossible. Reprenons le raisonnement et montrons qu'il ya une approximation. Supposons que les 2 particules soient discernables, les différents repartissions possibles sur les sous niveaux d'énergie de ε_1 sont les suivantes :



Nous avons donc $w=9$ puis nous admettons que chaque microscopique apparaît autant de fois qu'il y a de permutations possibles entre les particules de départ, c'est-à-dire $2!$ fois. Or, comme on le voit, ceci est faux lorsque les particules sont sur le même sous niveau d'énergie.

En effet, nous avons:

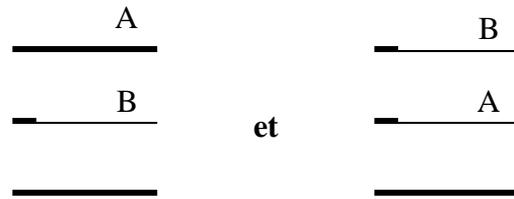


Car ces complexions sont équivalentes, que les particules soient discernables ou indiscernables.

De même nous avons



Alors que nous avons bien



Cependant quand g_1 est très supérieur à n_1 les cas où les particules sont sur le même sous niveau deviennent minoritaires par rapport au cas où elles sont sur des sous-niveaux différents. Le gaz est faiblement dégénéré et la formule de *Maxwell Boltzmann* tend vers la bonne valeur car les différents états microscopiques apparaissent quasiment tous $n_1!$ fois. On peut alors passer du cas discernable au cas indiscernable en divisant par $n_1!$. Notez bien que la condition $g_1 \gg 1$ n'est pas suffisante puisqu'il faut $g_1 \gg n_1$.

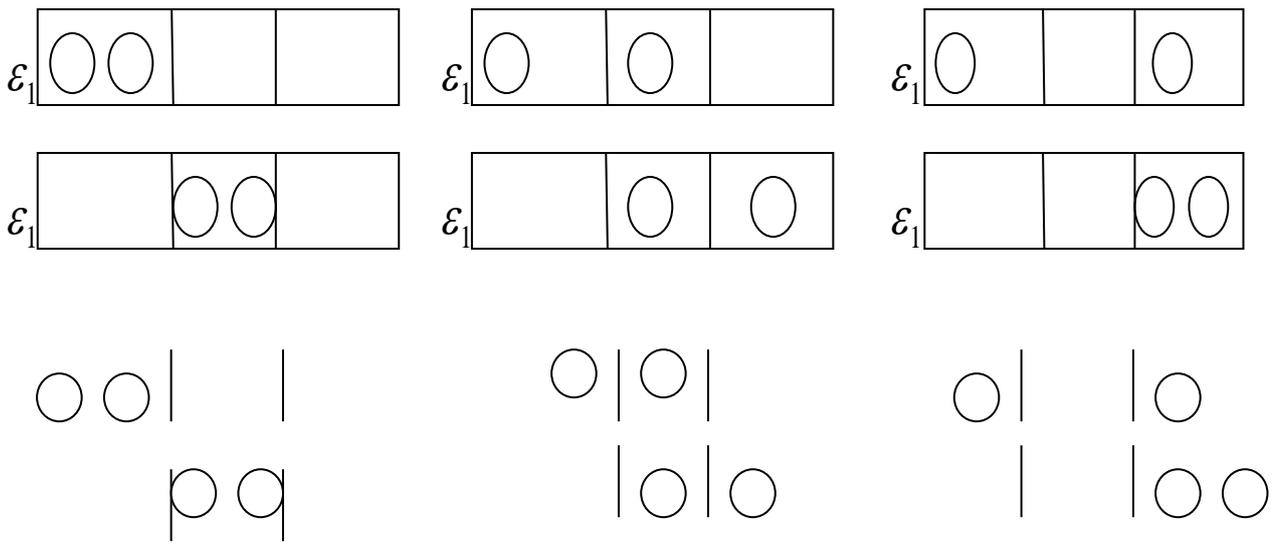
I-9-3- Statistique de Bose Einstein:

Pour éviter l'approximation faite dans la statistique de *Maxwell Boltzmann* corrigée, on peut utiliser une représentation avantageuse. Dans ce qui suit, les niveaux d'énergies, correspondant aux cellules de l'espace de phases, sont les compartiments de ces boîtes, et sont séparés par des cloisons, pour obtenir le nombre de complexions d'un niveau d'énergies, nous permutons les particules et les cloisons de ce niveau.

Exemple:

Reprenons les mêmes hypothèses de départ qu'au paragraphe 9.2 il y a qu'un seul niveau d'énergie ε_1 dégénéré 3 fois:

1. $n_1=2$
2. $U=2J$
3. $\varepsilon_1=1J$
4. $g_1=3$



En utilisant la représentation de **Bose- Einstein** nous avons:

Soit $W=6$ cela revient bien a permuter les 2 cloisons intérieures et les 2 particules, comme ceci:

Pour le niveau d'énergie ϵ_1 le résultat est obtenu permutation des n_1 particules et des g_1-1 cloisons, puis division par les permutations qui redonnent la même complexion, c'est-à-dire les cloisons internes, entre elles et les particules entre elles, puisqu'elles sont indiscernable. Le nombre de complexions W_1 pour le niveau d'énergie ϵ_1 est donc :

$$W_1 = \frac{(n_1 + g_1 - 1)!}{n_1!(g_1 - 1)!}$$

$$= \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Pour plusieurs niveaux d'énergie dégénère, le résultat final est le produit des différents complexions w_i d'où l'expression de la statistique de **Bose Einstein**:

$$W_{BE} = \prod_{i=1}^k \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \tag{17}$$

Les particules qui obéissent à la statistique de Bose Einstein s'appellent des bosons, ce sont les particules d'interaction. le boson du champs électromagnétique est le photon, celui de l'interaction forte est le gluon, ceux de l'interaction faible sont le W^+ et W^- et le Z^0 les mésons (*pion, kaon, ρ , β^0 , η_c*) et les phonons sont aussi des bosons, le graviton, qu'il reste a mettre en évidence, serait le boson de l'interaction gravitationnelle. Les bosons peuvent se trouver a plusieurs dans le même état quantique, autrement dit a plusieurs sur le même sous niveaux d'énergie.

I-9-4- Statistique de Fermi Dirac:

Dans cette statistique, les quantons obéissant au principe d'exclusion de Pauli au maximum $2(S/h)+1$ quantons peuvent occuper un même sous niveau d'énergie, ou S est le moment cinétique de spin de la particule. Par conséquent dans cette statistique nous aurons toujours: $g_i \gg N_i$

ces quantons sont appelés des fermions et constituent la matière. le proton, le neutron, les leptons (*l'électron, les neutrinos, les muons, les tauons*) et les quarks (*up, down, top, bottom, charm, strange,*) sont des fermions. Les baryons sont des fermions mais ne sont pas des particules élémentaires.

I-9-4-1- Principe d'exclusion de Pauli:

Au paragraphe 4 nous avons vu qu'en mécanique ondulatoire on associe a chaque quanton une fonction d'onde complexe ψ , solution de l'équation de *Schrödinger*. Le physicien allemand *Max Born* a donné sans démonstration l'interprétation physique de la fonction d'onde ψ : la probabilité dP qu'un quanton se trouve a l'instant t dans un élément de volume $dr=dx dy dz$ est donnée par

$$dP = \|\psi(r, t)\|^2 dx$$

Le carrée du module de la fonction d'onde complexe ψ associée au quanton est donc égale à la densité de probabilité de présence du quanton. La fonction d'onde d'un système de deux quantons en interactions s'écrit $\psi(r_1, r_2, t)$ et la probabilité que le quanton 01 se trouve dans le volume dr_1 centré en r_1 et le quanton 02 dans le volume dr_2 centré en r_2 est donnée par:

$$dp = \|\psi(r_1, r_2, t)\|^2 dr_1 dr_2$$

On peut généraliser cette dernière égalité à un nombre quelconque de quantons. au paragraphe 8 nous avons vu que nous devons considérer que les quantons sont indiscernables, autrement dit, que:

$$\|\psi(r_1, r_2, t)\|^2 = \|\psi(r_2, r_1, t)\|^2$$

Dont on déduit les deux possibilités

$$\psi(r_1, r_2, t) = +\psi(r_2, r_1, t) \quad (18)$$

$$\psi(r_1, r_2, t) = -\psi(r_2, r_1, t) \quad (19)$$

Nous allons montrer que lorsque le signe est positif les quantons sont des bosons et ils obéissent à la statistique de **Bose Einstein** lorsque le signe est négatif. Les quantons sont des fermions et ils obéissent à la statistique de Fermi Dirac et au principe d'exclusion de **Pauli**. dans le cas où l'interaction entre les quantons peut être négligée, le **Hamiltonien** H de la fonction d'onde ψ du système formée par les deux quantons est simplement la somme des **Hamiltoniens** H_1 et H_2 de chaque fonction d'onde ψ on peut alors appliquer la méthode de séparation des variables et chercher la fonction d'onde φ . Sous la forme du produit des fonctions d'ondes φ des deux quantons. Nous avons donc

$$\psi(r_1, r_2, t) = \varphi_1(r_1, t)\varphi_2(r_2, t)$$

Pour les bosons la fonction d'onde φ doit être symétrique pour respecter la propriété:

$$\psi(r_1, r_2, t) = c[\varphi_1(r_1, t)\varphi_2(r_2, t) + \varphi_1(r_2, t)\varphi_2(r_1, t)]$$

Où C est un nombre réel, appelle facteur de normalisation, qui assure que la probabilité de trouver les deux quantons quelque part dans l'espace vaut l'unité. Pour les fermions la fonction d'onde ψ doit être antisymétrique pour respecter la propriété (19):

$$\psi(r_1, r_2, t) = C[\varphi_1(r_1, t)\varphi_2(r_2, t) - \varphi_1(r_2, t)\varphi_2(r_1, t)]$$

On remarque alors que si les quantons sont au même endroit, $r_1=r_2$ la fonction d'onde ψ des deux fermions est nulle. cela n'ayant aucun sens, on en conclut que deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique, ce qui constitue le principe d'exclusion de Pauli plus précisément, deux fermions ne peuvent s'approcher a une distance inférieure a la longueur d'onde λ de Broglie associe a ces particules.

I-9-4-2- Statistique de Fermi-Dirac:

Considérons la répartition de n_1 particules sur le niveau d'énergie ε_1 dégénère g_1 fois. son nombre de complexions W_1 est donnée par les permutations de l'ensemble des places occupées et des places vides. Si l'on permute tout ce qui se trouve dans les g_1 sous niveaux, soit $g_1!$ Permutations, nous aurons aussi permute les particules indiscernables entre elles et les places vides entre elles il faut donc diviser $g_1!$ par $n_1!$ et par $(g_1-n_1)!$

$$W_1 = \frac{(n_1 + g_1 - 1)!}{n_1!(g_1 - 1)!}$$

Pour plusieurs niveaux d'énergie dégénères, on effectue le produit des différent complexions W_1 pour obtenir la statistique de *Fermi Dirac*:

$$W_{FD} = \prod_{i=1}^k \frac{g_i}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (20)$$

Dans le cas de faible dégénérescence $g_i \gg n_i$, cette statistique tend aussi vers la statistique de **Maxwel Boltzmann** des particules indiscernables en effet, le cas où les particules se regroupent sur le même sous niveau deviennent minoritaires et le principe d'exclusion de **Pauli** perd alors de son importance.

I-10- répartition la plus probable:

I-10-1- En statistique de Bose Einstein:

Il s'agit de trouver le maximum de la fonction $W_{BE}(n_i)$ donnée par L'équation (17):

$$d \prod_{i=1}^k \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} = 0$$

$$d \ln \prod_{i=1}^k \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} = 0 \quad \$$$

$$d \sum_{i=1}^k \{ \ln [(n_i + g_i - 1)!] - \ln (n_i!) - \ln [(g_i - 1)!] \} = 0$$

Si l'on suppose $n_i \gg 0$ on peut utiliser l'approximation de Stirling:

$$d \sum_{i=1}^k \{ (n_i + g_i - 1) \ln [(n_i + g_i - 1)] - (n_i + g_i - 1) - n_i \ln n_i + n_i - \ln [(g_i - 1)!] \} \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln(n_i + g_i - 1) dn_i + (n_i + g_i - 1) \frac{dn_i}{n_i + g_i - 1} - n_i \ln n_i - n_i \frac{dn_i}{n_i} \right] \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \ln \frac{n_i + g_i - 1}{n_i} dn_i \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \ln \frac{n_i + g_i}{n_i} dn_i \approx 0$$

Comme au chapitre 2, pour prendre en compte les contraintes sur le nombre N de particules et sur l'énergie interne U ; on introduit deux multiplicateurs de **Lagrange**, α' et β' :

$$\sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{n_i + g_i}{n_i} \right) dn_i - \alpha' dn_i - \beta' \varepsilon_i dn_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln \left(\frac{n_i + g_i}{n_i} \right) - \alpha' - \beta' \varepsilon_i \right] dn_i = 0$$

$$\forall i = 1 \dots k \quad \ln \left(\frac{n_i + g_i}{n_i} \right) - \alpha' - \beta' \varepsilon_i = 0$$

On isole le nombre de quanta n_i par niveau d'énergie:

$$1 + \frac{g_i}{n_i} = e^{(\alpha' + \beta' \varepsilon_i)}$$

$$g_i = n_i (e^{\alpha'} e^{\beta' \varepsilon_i} - 1)$$

$$n_i^0 = \frac{g_i}{(e^{\alpha'} e^{\beta' \varepsilon_i} - 1)} \quad (21)$$

qui est la répartition la plus probable en statistique de **Bose Einstein**, pour $n_i^0 \gg 0$, les multiplicateurs de langage, α' et β' seront déterminés au paragraphe 12

I-10-2- En statistique de Fermi Dirac:

Il s'agit de trouver le maximum de la fonction $W_{FD}(n_i)$ donnée par l'équation (20):

$$d \prod_{i=1}^k \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} = 0$$

$$d \ln \prod_{i=1}^k \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} = 0$$

$$d \sum_{i=1}^k \{ \ln(g_i!) - \ln(n_i!) - \ln[(g_i - n_i)!] \} = 0$$

Pour utiliser l'approximation de *Stirling* pour le terme $\ln[(g_i - n_i)!]$ nous nous plaçons dans le cas général d'un gaz peu dégénère pour lequel $g_i \gg n_i$ de plus on utilise aussi l'approximation de *Stirling* pour $n_i \gg 0$

$$d \sum_{i=1}^k \left[g_i \ln g_i - g_i - n_i \ln n_i + n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) + (g_i - n_i) \right] \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[-n_i \ln n_i - n_i \frac{dn_i}{n_i} + \ln(g_i - n_i) dn_i + (g_i - n_i) \frac{dn_i}{(g_i - n_i)} \right] \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln \frac{(g_i - n_i)}{g_i} \right] dn_i \approx 0$$

Comme au chapitre 2 pour prendre en compte les contraintes sur le nombre N de particules et sur l'énergie interne U , on introduit deux multiplicateurs de langage α et β :

$$\sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{g_i - n_i}{n_i} \right) dn_i - \alpha dn_i - \beta \varepsilon_i dn_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln \left(\frac{g_i - n_i}{n_i} \right) - \alpha'' - \beta'' \varepsilon_i \right] dn_i = 0$$

$$\forall i = 1 \dots k \quad \ln \left(\frac{g_i - n_i}{n_i} \right) - \alpha'' - \beta'' \varepsilon_i = 0$$

On isole le nombre de quantons n_i par niveau d'énergie:

$$\frac{g_i}{n_i} - 1 = e^{(\alpha'' + \beta'' \varepsilon_i)}$$

$$g_i = n_i (e^{\alpha''} e^{\beta'' \varepsilon_i} + 1)$$

$$n_i^0 = \frac{g_i}{e^{\alpha''} e^{\beta'' \varepsilon_i} + 1} \quad (22)$$

qui est la répartition la plus probable en statistique de *Fermi Dirac*, pour $g_i \gg n_i^0 \gg 0$, autrement dit pour un gaz peu dégénère les multiplicateurs de *Lagrange*, α'' et β'' seront déterminés au paragraphe (12).

I-11- L'entropie en statistique de Maxwell Boltzmann corrigé:

On utilise la formule de *Boltzmann* (06): $S = k \ln W_{mbc}$

L'équation (16) donne l'expression de W_{MBC} :

$$\begin{aligned} &= k \ln \prod_{i=1}^k \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \\ &= k \sum_{i=1}^k (n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i) \\ &= k \left(N + \sum_{i=1}^k n_i \ln \frac{g_i}{n_i} \right) \end{aligned}$$

On cherche l'entropie à l'équilibre thermodynamique, donc avec $n_i = n_i^0$

$$n_i^0 = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i / (kT)}$$

$$\frac{g_i}{n_i^0} = \frac{Z}{N} e^{-\varepsilon_i / (kT)}$$

$$\ln \frac{g_i}{n_i^0} = \ln \frac{Z}{N} + \frac{\varepsilon_i}{kT}$$

Par conséquent:

$$S = k \left[N + \sum_{i=1}^k n_i \left(\ln \frac{Z}{N} + \frac{\varepsilon_i}{kT} \right) \right]$$

$$= k \left[N + N \ln \frac{Z}{N} + \frac{U}{kT} \right]$$

$$S = kN + \left(N \ln \frac{Z}{N} + 1 \right) + \frac{U}{T}$$

Calculons l'entropie pour un gaz parfait monoatomique à partir de l'expression de la fonction de partition Z équation (13) et de l'expression de l'énergie interne U , équation (14)

$$\begin{aligned} S &= kN \left\{ \ln \left[\frac{V}{Nh^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right] + 1 \right\} + \frac{(3/2)NkT}{T} \\ &= kN \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) \right] + 1 \right\} + \frac{3}{2} kN \\ &= kN \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) \right] + \frac{5}{2} \right\} \end{aligned}$$

Qui est la formule de **Sackur-Tétrode** nous pouvons vérifier que l'entropie est bien une variable extensive en statistique de **Maxwell Boltzmann**

corrige : sa valeur est doublé lorsque l'on double a la fois le nombre de particules N et le volume V . Elle respecte le caractère additif que lui attribue le thermodynamique macroscopique.

I-12- Paramètres des statistiques quantiques:

On commence par les paramètres β' et β'' qui sont plus simple a déterminer que α' et α''

I-12-1- Paramètres β' et β'' des statistiques quantiques:

Montrons que les paramètres β' et β'' sont indépendants de la statistique considéré et constituent par conséquent un unique paramètre β pour cela on considère un mélange de particules obéissent a deux statistiques différents le nombre total de complexions est le produit des deux complexions.

$$W = W_1(n_i)W_2(n'_j)$$

$$\ln W = \ln W_1(n_i) + \ln W_2(n'_j)$$

W doit être maximal, donc $\ln W$ aussi:

$$d \ln W = 0$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_i} dn_i + \sum_{j=1}^{k'} \frac{\partial \ln W_2}{\partial n'_j} dn'_j = 0$$

De plus, il ya trois contraintes les nombres N_1 et N_2 de particules sont fixes, ainsi que l'énergie interne U :

$$\sum_{i=1}^k n_i = N_1 \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=1}^k dn_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k'} n'_j = N_2 \quad \text{d'où} \quad \sum_{j=1}^{k'} dn'_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i n_i + \sum_{j=1}^{k'} \varepsilon'_j n'_j = U \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i + \sum_{j=1}^{k'} \varepsilon'_j dn'_j = 0$$

N'ayant qu'une seule contrainte sur l'énergie interne, nous n'introduisant qu'un seul paramètre β on relie les quatre équations précédentes grâce à trois multiplicateurs de langage α et α' et β

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_i} dn_i + \sum_{j=1}^{k'} \frac{\partial \ln W_2}{\partial n'_j} dn'_j + \alpha \sum_{i=1}^k dn_i \\ + \alpha' \sum_{j=1}^{k'} dn'_j + \beta \left[\sum_{i=1}^k \varepsilon_i dn_i + \sum_{j=1}^{k'} \varepsilon'_j dn'_j \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dn_i + \sum_{j=1}^{k'} \left(\frac{\partial \ln W_2}{\partial n'_j} + \alpha' + \beta \varepsilon'_j \right) dn'_j = 0 \end{aligned}$$

Les n_i étant indépendant des n'_j

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dn_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{k'} \left(\frac{\partial \ln W_2}{\partial n'_j} + \alpha' + \beta \varepsilon'_j \right) dn'_j = 0 \end{aligned}$$

Si bien que:

$$\begin{aligned} \forall i = 1 \dots k \quad \sum_{i=1}^k \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_i} + \alpha + \beta \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 0 \\ \forall i = 1 \dots k' \quad \sum_{j=1}^{k'} \frac{\partial \ln W_2}{\partial n'_j} + \alpha' + \beta \sum_{j=1}^{k'} \varepsilon'_j = 0 \end{aligned}$$

Si nous résolvant en remplaçant les statistiques W_1 et W_2 par leurs expressions respectives, nous aurons le même paramètre β par conséquent, quelle que soit la statistique considère:

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad (23)$$

I-12-2 paramètres α' et α'' des statistiques quantiques:

Pour déterminer les paramètres α' et α'' on utilise la contrainte sur N :

$$N = \sum_{i=1}^k n_i^0$$

Et l'expression des répartitions les plus probables en statistiques de **Bose Einstein** équation (21) et de Fermi Dirac équation (22):

$$N = \sum_{i=1}^k \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \varepsilon_i} \pm 1_{BE}^{FD}}$$

Ou $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha = \alpha''$ selon la statistique considère. pour utiliser la symétrie sphérique du problème, on parcourt l'espace des phases ordonnées sphériques de position ρ, θ, φ et de quantité de mouvement $p_\rho, p_\theta, p_\varphi$ en partant de la relation (12) le facteur de dégénérescence g_i s'écrit :

$$g_i = \frac{\int_{\rho} \int_{\theta} \int_{\varphi} \int_{p_\rho} \int_{p_\theta} \int_{p_\varphi} p_\rho^2 \sin p_\theta dp_\varphi dp_\theta dp_\rho \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho}{h^3}$$

$$= \frac{V 4\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} p_\rho^2 dp_\rho$$

L'énergie ε_i des particules peut s'exprimer en fonction de leur quantité de mouvement p_i :

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

D'où:

$$N = \frac{V 4\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p_\rho^2 dp_\rho}{e^\alpha e^{\beta p_\rho^2 / (2m)} \pm 1_{BE}^{FD}}$$

Et l'on est passé à une représentation continue.

On pose:

$$x = \frac{\beta p_\rho^2}{2m} \quad \text{d'où} \quad p_\rho = \sqrt{\frac{2mx}{\beta}}$$

$$dx = \frac{\beta}{m} p_\rho dp_\rho \quad \text{d'où} \quad p_\rho dp_\rho = \frac{m dx}{\beta}$$

$$p_\rho^2 dp_\rho = p_\rho x p_\rho dp_\rho$$

$$= \sqrt{\frac{2mx}{\beta}} \frac{2mx}{\beta}$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{m}{\beta}\right)^{3/2} \sqrt{x} dx$$

Le nombre total de particules s'écrit donc:

$$\begin{aligned} N &= \frac{V 4\pi}{h^3} \sqrt{2} \left(\frac{m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^\alpha e^x \pm 1_{BE}^{FD}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} V \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^\alpha e^x \pm 1_{BE}^{FD}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{(\alpha+x)} \pm 1_{BE}^{FD}} \end{aligned} \quad (24)$$

Cette intégrale n'est pas soluble analytiquement. Nous allons chercher des solutions approchées.

I-13- Expressions analytiques des paramètres α' et α'' :

Cherchons les contraintes que nous avons sur ces paramètres, Au paragraphe 10.1 nous avons supposés $n_i^0 \gg 0$ de plus le nombre de sous niveaux d'énergie est un nombre positif $g_i > 0$, ce qui implique pour la statistique de *Bose Einstein*:

$$\frac{n_i^0}{g_i} > 0$$

Avec l'équation (21):

$$\frac{1}{e^{\alpha'} e^{\beta \varepsilon_i} - 1} > 0$$

$$e^{\alpha'} e^x - 1 > 0$$

$$e^{(\alpha' + x)} > 1$$

$$\alpha' + x > 0$$

Pour la statistique de *Fermi Dirac* nous avons la contrainte supplémentaire posée au paragraphe 10.2: $g_i \gg n_i^0 \gg 0$

$$1 \gg \frac{n_i^0}{g_i} > 0$$

Avec l'équation (22):

$$1 \gg \frac{1}{e^{\alpha''} e^{\beta \varepsilon_i} + 1} > 0$$

$$\left(e^{\alpha''} e^x + 1 \right) \gg 1$$

$$e^{(\alpha''+x)} \gg 0$$

$$\alpha'' + x \gg 0$$

Dans la relation (24) nous développons en série le terme $\left[e^{(\alpha+x)} \pm 1 \right]^{-1}$,

Grâce au développement en série suivant:

$$(1 \pm y)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (\pm 1)^m y^m$$

Cette série ne converge que pour $y < 1$, nous avons $\alpha + x > 0$ donc $e^{-(\alpha+x)} < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{(\alpha+x)} \pm 1_{BE}^{FD}} &= \frac{e^{(\alpha+x)}}{e^{(\alpha+x)}} \times \frac{1}{e^{(\alpha+x)} \pm 1_{BE}^{FD}} \\ &= \frac{1}{e^{(\alpha+x)}} \times \frac{e^{(\alpha+x)}}{e^{(\alpha+x)} \pm 1_{BE}^{FD}} \\ &= e^{-(\alpha+x)} \times \frac{1}{1 \pm e^{-(\alpha+x)}_{BE}^{FD}} \\ &= e^{-(\alpha+x)} \times \sum_{m=0}^{+\infty} (\mp 1)^m e^{-m(\alpha+x)} \quad \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (\mp 1)^m e^{-(m+1)(\alpha+x)} \quad \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array} \end{aligned}$$

En posant $n=m+1$:

$$\frac{1}{e^{(\alpha+x)} \pm 1_{BE}^{FD}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{-n(\alpha+x)}$$

On injecte le développement en série dans l'expression du nombre total N de particules donnée par l'équation (24):

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{(\alpha+x)} \pm 1} \quad \begin{matrix} FD \\ BE \end{matrix} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{-n(\alpha+x)} \sqrt{x} dx \quad \begin{matrix} FD \\ BE \end{matrix} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z \sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{(-n\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sqrt{x} dx \quad \begin{matrix} FD \\ BE \end{matrix}
 \end{aligned}$$

On pose:

$$u = nx \quad \text{D'où} \quad x = \frac{u}{n}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{u}{n}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{du}{n}$$

Donc: $\sqrt{x} dx = \frac{\sqrt{u} du}{n^{3/2}}$

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z \sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{(-n\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} e^{(-u)} \sqrt{u} du \quad \begin{matrix} FD \\ BE \end{matrix}$$

Cette intégrale se calcule grâce à la fonction **Gamma D'Euler**, donnée en annexe 14.4

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-u} \sqrt{u} du &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

N s'écrit maintenant:

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z \sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{(-n\alpha)} \frac{1}{n^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array}$$

Par conséquent ;

$$\begin{aligned} \frac{N}{Z} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} \frac{e^{(-n\alpha)}}{n^{3/2}} \quad \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array} \\ &= e^{-\alpha} - \frac{1}{2^{3/2}} e^{-2\alpha} + \frac{1}{3^{3/2}} e^{-3\alpha} \mp \dots \quad \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array} \end{aligned} \quad (25)$$

Il reste à inverser cette relation, autrement dit à exprimer α en fonction de N/Z on cherche l'expression de $e^{-\alpha}$ sous la forme d'une série entière de N/Z :

$$e^{-\alpha} = a_0 + a_1 \frac{N}{Z} + a_2 \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + a_3 \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots$$

Que l'on remplace dans l'équation (25) :

$$\begin{aligned} \frac{N}{Z} &= \left[a_0 + a_1 \frac{N}{Z} + a_2 \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + a_3 \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots \right] \\ &- \frac{1}{2^{3/2}} \left[a_0 + a_1 \frac{N}{Z} + a_2 \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + a_3 \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots \right]^2 \\ &+ \frac{1}{3^{3/2}} \left[a_0 + a_1 \frac{N}{Z} + a_2 \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + a_3 \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots \right]^3 \\ &\mp \dots \quad \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array} \end{aligned}$$

On trouve directement $a_0=0$ et $a_1=1$, il reste

$$\frac{N}{Z} = \frac{N}{Z} + (a_2 \mp \frac{1}{2^{3/2}}) \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + (a_3 \mp \frac{2a_2}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}}) \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots$$

FD
BE

Pour annuler les coefficients, il faut:

$$a_2 = \pm \frac{1}{2^{3/2}}$$

FD
BE

$$a_3 = \pm \frac{2a_2}{2^{3/2}} - \frac{1}{3^{3/2}}$$

$$= \pm \frac{2}{2^{3/2}} \left(\pm \frac{1}{2^{3/2}}\right) - \frac{1}{3^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}}$$

D'où

$$e^{-\alpha} = \left(\frac{N}{Z}\right) \pm \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}}\right) \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots$$

FD
BE

Que l'on injecte dans l'équation (21) pour obtenir l'expression de la répartition la plus probable en statistique de B-E pour $n_i^0 \gg 0$

$$n_i^0 = \frac{g_i}{\left[\left(\frac{N}{Z}\right) - \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N}{Z}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}}\right) \left(\frac{N}{Z}\right)^3 + \dots \right]^{-1} e^{\epsilon_i/kT} - 1}$$

Injecté dans l'équation (22) on obtient la répartition la plus probable en statistique de Fermi Dirac pour $g_i \gg n_i^0 \gg 0$

$$n_i^0 = \frac{g_i}{\left[\left(\frac{N}{Z} \right) + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N}{Z} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \left(\frac{N}{Z} \right)^3 + \dots \right]^{-1} e^{\varepsilon_i / kT} + 1}$$

I-13-1- Cas des bosons complètement dégénères :

$$n_i^0 \gg g_i$$

$$\frac{n_i^0}{g_i} \gg 1$$

$$\frac{1}{\left(e^{(\alpha')} e^{\beta \varepsilon_i} - 1 \right)} \gg 1$$

$$\left(e^{(\alpha')} e^x - 1 \right) \ll 1$$

$$\left(e^{(\alpha' + x)} \right) \ll 2$$

$$\alpha' + x \ll \ln 2$$

Or α' et x sont positifs, donc $\alpha' \approx 0$, grâce à l'équation (25)

$$\frac{N}{Z} \approx 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{4^{3/2}} + \dots +$$

$$\approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\approx 2,612$$

Chapitre 2

II-Les lois principales du corps noir:

II-1-Loi de Planck (Le spectre Du Corps Noir):

Dans le cas d'un corps opaque, totalement isolé et maintenu à température constante, la distribution spectrale de la lumière qu'il émet, ou absorbe, ne dépend que de la température du corps. Un tel corps est connu sous le nom de "corps noir". Les lois caractérisant l'état de la lumière dans un corps noir ont été établies à la fois expérimentalement et théoriquement. Elles caractérisent la luminance spectrale énergétique de la source en fonction de la longueur d'onde, la longueur d'onde pour laquelle cette luminance est maximale et la puissance totale rayonnée dans toutes les longueurs d'onde. Chacune de ces grandeurs fait intervenir un seul paramètre physique qui est la température du corps noir.

On définit la luminance spectrale énergétique I d'un champ de rayonnement, dans une direction donnée, à partir de l'énergie dE transportée dans cette direction par le rayonnement de longueur d'onde compris entre λ et $\lambda + d\lambda$, dans l'intervalle de temps dt , à travers un élément de surface dS perpendiculaire à la direction et dans un angle solide $d\Omega$, en écrivant :

$$dE = I(\lambda) dS dt d\Omega d\lambda$$

La luminance spectrale I ainsi définie ne dépend plus, pour un rayonnement de corps noir, que de la température T et de la longueur d'onde selon une loi établie par Planck et qui porte son nom :

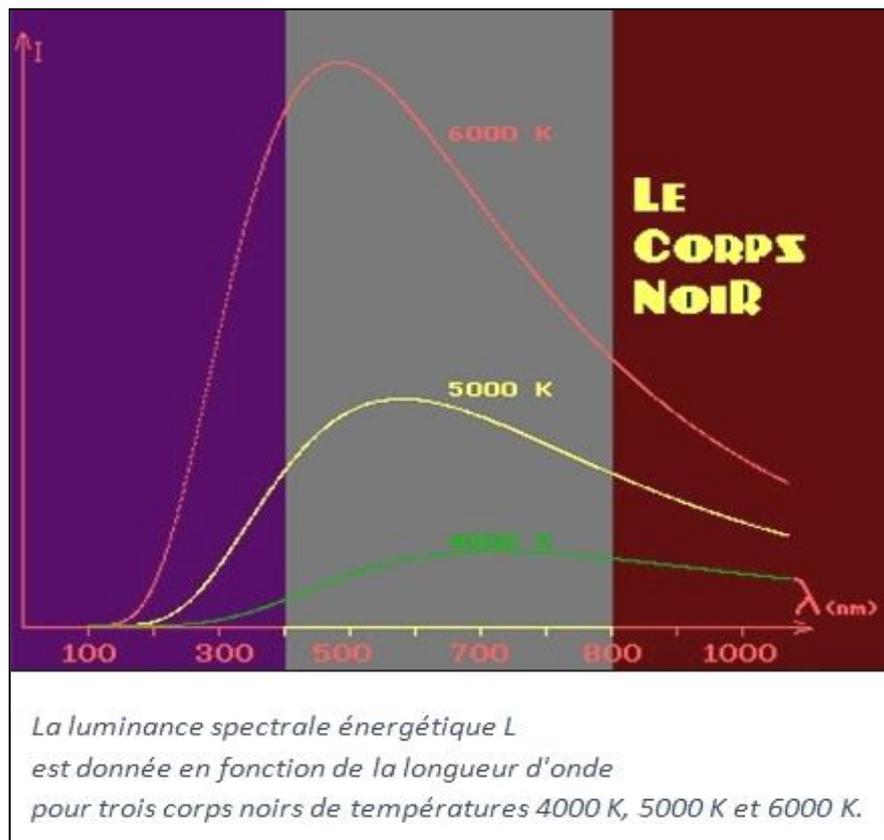
$$I(\lambda) = (2hc^2 / \lambda^5) / [e^{hc / \lambda kT} - 1]$$

où h , k et c sont des constantes universelles, respectivement la constante de Planck ($h = 6,62 \times 10^{-34}$ J s), la constante de **Boltzmann** ($k = 1,38 \times 10^{-23}$ J K⁻¹) et la vitesse de la lumière dans le vide. Il s'agit donc d'un spectre continu.

Ce qu'il convient essentiellement de retenir dans cette loi, c'est que les courbes décrivant la lumière spectrale de corps noirs à différentes

températures (en fonction de la longueur d'onde) ont toutes la même forme et sont "emboîtées" les unes dans les autres.

On notera que la luminance d'un corps noir est d'autant plus grande que la température est plus élevée. La loi de Planck montre également que le rayonnement du corps noir est le même dans toutes les directions : il est isotrope.



II-2- Loi De Wien (Relation Température-Couleur)

La courbe représentative de la loi de Planck, $I(\lambda)$, en fonction de λ à température constante passe par un maximum, ce qui veut dire qu'un corps noir, bien qu'il rayonne dans toutes les longueurs d'onde, émet préférentiellement dans un domaine particulier. La longueur d'onde λ_m qui correspond au maximum de rayonnement, est inversement proportionnelle à la température Kelvin T :

$$\lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}.$$

Cette relation s'écrit souvent sous une forme plus commode, en exprimant la longueur d'onde en microns :

$$\lambda_m T = 2900 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K}.$$

Elle porte le nom de loi de Wien, du nom du physicien qui l'avait mise en évidence expérimentalement, avant que la loi de Planck soit établie.

On peut comprendre qualitativement son origine : dans un milieu en équilibre, par le jeu des absorptions et des émissions successives de lumière par la matière, les photons, dans leur majorité, ont la même énergie que celle qui caractérise les particules matérielles; cela montre que

$$h\nu = hc/\lambda$$

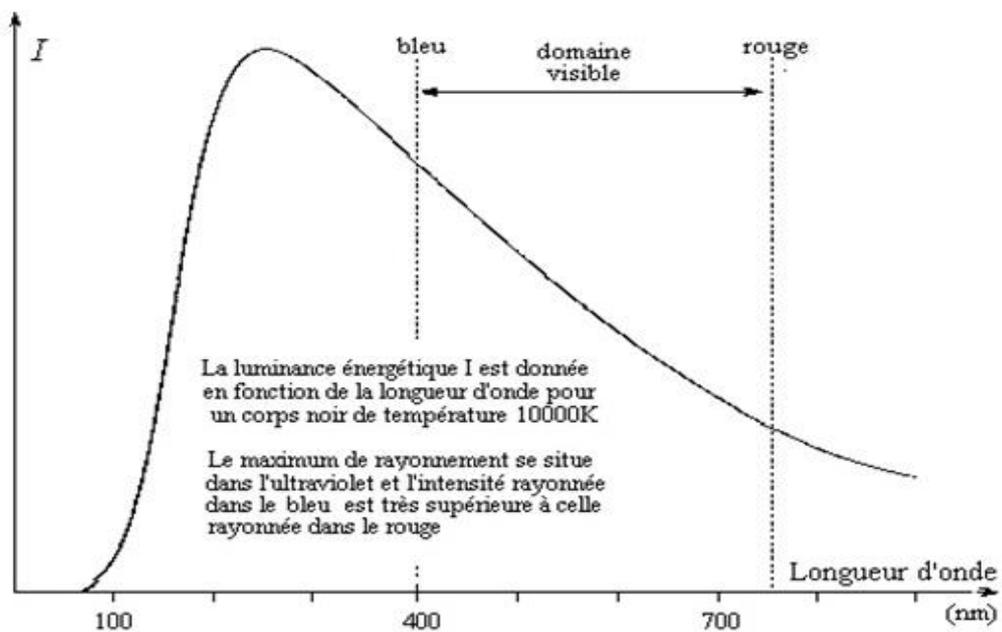
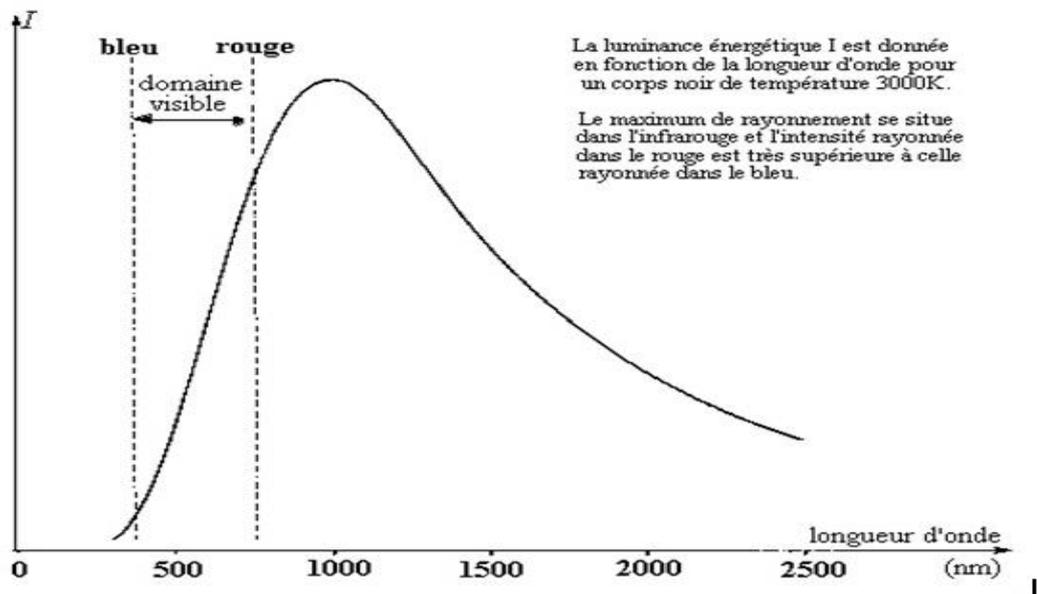
Est de l'ordre de kT , ce qui entraîne que λ varie comme l'inverse de T .

Ainsi, à faible température, le maximum de rayonnement se produit pour de grandes longueurs d'onde ; à plus haute température, il se déplace vers des longueurs d'onde plus courtes. A la température ambiante d'une pièce, le rayonnement thermique, qui provient des murs ou des objets disposés dans la pièce, se produit essentiellement dans l'infrarouge lointain : pour une température de l'ordre de 300 K, on voit que le maximum du rayonnement est émis vers 10 μm . Ce n'est qu'à des températures beaucoup plus élevées qu'un corps rayonne à des longueurs d'onde assez courtes pour que le rayonnement soit visible.

Le rayonnement émis par les étoiles est assimilable, en première approximation, à un rayonnement de corps à température élevée. Ce rayonnement est généralement centré dans la partie visible du spectre et même parfois au-delà, dans l'ultraviolet. Le Soleil, par exemple, émet le maximum de son rayonnement dans le vert. Mais la quantité de lumière émise par le Soleil dans tout le domaine visible est suffisante pour qu'il paraisse blanc à l'observateur quand il est haut dans le ciel. Il paraît jaune, et même

rouge, quand il est bas sur l'horizon ou en partie masqué par des nuages parce que les radiations de grande longueur d'onde sont moins diffusées que celles de courte longueur d'onde.

Notre œil étant insensible aux longueurs d'onde plus grandes que celle du rouge ou plus courtes que celle du violet, il ne perçoit pas toute l'énergie rayonnée dans ces domaines. Une étoile plus froide que le Soleil émet davantage aux grandes longueurs d'onde et moins aux courtes longueurs d'onde. De ce fait, elle paraît plus rouge. En revanche, une étoile plus chaude paraît plus bleue.



On peut déceler très facilement à l'oeil nu les couleurs des étoiles brillantes. Par exemple, dans la constellation d'Orion, Bételgeuse est rouge alors que Rigel est bleue. Antarès, dans la constellation du Scorpion, est très rouge et doit d'ailleurs son nom, qui veut dire "rivale de Mars", à sa couleur (les anciens grecs avaient pensé qu'Antarès pouvait être une autre planète rouge).

Cependant, l'oeil perd la capacité de déceler les couleurs pour les objets faiblement brillants, et les couleurs des étoiles peu brillantes ne sont plus décelables. Il faut regarder un champ d'étoiles à travers un télescope ou une paire de jumelles pour que leurs couleurs deviennent frappantes.

Les couleurs apparentes des étoiles correspondent donc à leur température superficielle. Dans la mesure où l'on peut assimiler le rayonnement d'une étoile à celui d'un corps noir, la loi de Wien nous permet de déterminer cette température. Elle nous conduit à une valeur de l'ordre de 3 000 K pour Antarès ou Bételgeuse, de 6 000 K pour le Soleil et de 20 000 K pour Rigel. Cependant les étoiles ne sont pas à température uniforme, ce qui implique en particulier qu'elles ne sont pas exactement assimilables à un corps noir ; les températures que nous venons de citer concernent les régions les plus superficielles, là où se forme l'essentiel du rayonnement qui nous parvient.

II-3- Loi Stefan (Relation Entre La Puissance Totale Rayonnée, La Température Et La Surface:

La puissance totale L rayonnée par un corps noir dans toutes les longueurs d'onde et dans toutes les directions est proportionnelle à sa surface S et à la quatrième puissance de sa température :

$$L = \sigma S T^4$$

Cette loi porte le nom de loi de Stefan. Si deux étoiles ont la même température superficielle, c'est la plus grosse qui rayonne la plus grande puissance. Si deux étoiles ont même rayon et si l'une a une température deux fois plus élevée, elle rayonne une puissance 16 fois plus grande. C'est cette dépendance importante en fonction de la température qui explique la grande luminosité des étoiles en dépit de leurs dimensions relativement modestes : elles sont aussi brillantes parce qu'elles sont chaudes. Par exemple, le Soleil a un rayon cent fois plus grand environ que celui de la Terre et une température superficielle à peu près 20 fois plus élevée. Il rayonne donc $1,6 \times 10^9$ fois plus que la Terre ; s'il était à la même température, sa puissance rayonnée ne serait plus que 10 000 fois celle de la Terre, compte tenu de la valeur plus grande de son rayon.

La loi de Stefan est un outil précieux pour l'astronome, car elle permet d'évaluer le rayon des étoiles. En effet, si l'on sait mesurer l'énergie totale rayonnée chaque seconde par l'étoile (que les astronomes appellent sa luminosité) et déduire sa température de la loi de Wien (par l'observation de son spectre et la détermination de μm), on peut en déduire sa surface S , donc son rayon. Il faut cependant remarquer que la loi de Stefan fait intervenir la puissance globale rayonnée par l'étoile dans tous les domaines de longueur d'onde, y compris ceux situés en dehors du domaine visible. Il ne suffit donc pas de mesurer la puissance rayonnée par une étoile dans le visible. Si l'étoile rayonne comme un corps noir, on peut évaluer la proportion d'énergie qu'elle rayonne en dehors du domaine visible, en fonction de sa température. La puissance totale rayonnée par l'étoile est proportionnelle à l'aire comprise entre la courbe des variations de $I(\lambda)$ et l'axe des longueurs d'onde. Cette proportion varie beaucoup avec la température. Une étoile très bleue, donc très chaude, rayonne surtout dans l'ultraviolet ; au contraire, une étoile rouge,

donc relativement froide, rayonne surtout dans l'infrarouge. Il est donc important de disposer d'observations dans toutes les gammes du spectre.

Chapitre 3

III-1-Hypothèses de Planck et conséquences:**III-1-1-Formule de Planck:**

En considérant le rayonnement à l'intérieur d'une cavité dont les parois sont maintenues à une température T à l'équilibre s'établissent des ondes stationnaires certaines ondes peuvent être assimilées à un ensemble d'oscillateurs harmoniques de fréquences différentes et d'énergies quantifiées proportionnelles aux fréquences

$$\varepsilon_n = n h \nu$$

n: entier

ν = Fréquence du rayonnement

Les échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière se font au moyen d'un oscillateur de fréquence, obtenue à partir de la distribution de **Boltzmann-Maxwell**.

En effectuant la sommation

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \delta}} \quad \text{D'où} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{h \delta}{e^{\beta h \delta}}$$

(on pose $q = e^{-\beta \varepsilon_i}$; $Z = 1 + q + q^2 + \dots$)

Le nombre d'oscillateurs dans l'intervalle de fréquence $d\nu$ s'obtient en divisant le volume de l'espace des phases, correspondant à une énergie donnée, par la dimension h^3 d'un état microscopique à trois dimensions.

$$\frac{dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z}{h^3} = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3}$$

La quantité de mouvement d'un photon $p = \frac{h \nu}{c}$

- Pour chaque fréquence, l'état de polarisation est la superposition de deux états indépendants.

- Il en résulte que le nombre d'oscillateurs, dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$ est:

$$2. \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi V \nu^2 d\nu}{c^3} \quad \left(dp = \frac{h}{c} d\nu \right)$$

L'énergie interne du dans la bande de fréquence $d\nu$ et l'énergie interne volumique spectrale w_ν

$$dU = V \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

$$w_\nu = \frac{1}{V} \frac{dU}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \nu^3 \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{8\pi h \nu^3}{e^3 \left(\frac{h\nu}{kT} - 1 \right)}$$

On retrouve la statistique de *Bose–Einstein* dans laquelle le potentiel chimique est nul

Approximation de Rayleigh- Jeans :

Cette approximation donne l'énergie interne volumique spectrale dans l'as de faibles fréquences.

Obtenue à partir de la relation précédente en considérant un développement ayant

$$w_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\beta h\nu} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2$$

III-2-Approximation de Wien :

Elle est relative aux hautes fréquences. Décroissance exponentielle trouvée expérimentalement par Wien

III-3-Représentations spectrales du rayonnement du corps noir :

III-3-1-Représentation en fonction de la fréquence:

La courbe w_ν passe par un maximum tel que :

$$\frac{dw_\nu}{d\nu} = \frac{8\pi h \nu^2 3(e^{\beta h\nu} - 1) - \beta h\nu \cdot e^{\beta h\nu} \cdot \nu^3}{(e^{\beta h\nu} - 1)^2} = 0$$

$$3(e^{\beta h\nu} - 1) = \beta h\nu \cdot e^{\beta h\nu}; 3(1 - e^{-\beta h\nu}) = \beta h\nu$$

La résolution numérique de cette équation donne

$$\beta h\nu = 2.82144$$

Soit la fréquence pour laquelle est maximale

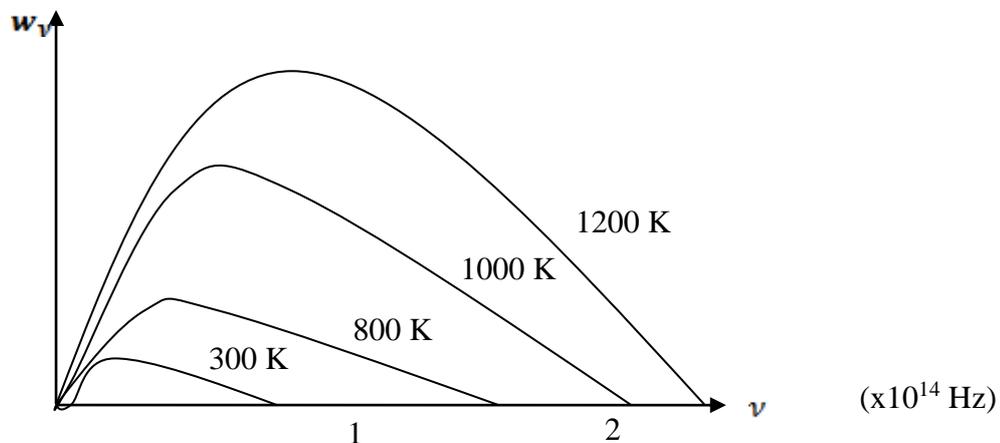
$$\nu_m = \frac{2.82144}{\beta h} = 2.82144 \frac{K}{h} T = 5.879 \cdot 10^{10} T$$

Exemple :

Pour le soleil la température de surface est : $T = 5600 \text{ K}$

Le maximum pour w_ν relatif à un corps noir se produit pour le rayonnement de fréquence

$\nu_n = 3.29 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ soit une longueur d'ordre correspondante



III-3-2-Représentation en fonction de la longueur d'onde:

Il est souvent plus pratique d'exprimer le rayonnement spectral du corps noir en fonction de λ

Les deux représentations sont reliées par :

$$w_\nu d\nu = -w_\lambda d\lambda \quad \text{soit} \quad w_\lambda = -w_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = w_\nu \frac{c}{\lambda^2} \quad \text{car} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

On en déduit

$$w_{\lambda} = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda}} - 1}$$

Où écrite sous la forme :

$$\text{où } \begin{cases} c_1 = 2\pi hc^2 = 374,1832 \cdot 10^{-18} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \\ c_2 = \frac{hc}{k} = 14,387 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \end{cases}$$

Pour les grandes longueurs d'ondes on retrouve le résultat de Rayleigh-Jeans

Pour les faibles longueurs d'ondes

III-4-Interprétation de la loi de déplacement de Wien:

Les grandeurs w_{λ} et $w_{\lambda}(\lambda)$ peuvent se mettre sous la forme de produits de deux fonctions

Ces deux fonctions sont positives et passent par un maximum.

En utilisant une méthode graphique, on détermine.

$$w_{\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot T^3 \cdot \frac{\left(\frac{\nu}{T}\right)^3}{e^{\beta h \nu} - 1} = T^3 f_{\nu}\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Soit $\lambda T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{T}$

Résultat en bon accord avec la valeur expérimentale pour le soleil $T = 5600\text{K}$, le maximum de $w_{\lambda}(\lambda)$ relatif à un corps noir, correspond à un rayonnement de longueur d'onde $0,52\mu\text{m}$ (Jaune-Vert).

III-5-Interprétation de la loi de Stefan – Boltzmann:

L'énergie interne volumique totale s'obtient en étendant la sommation à toutes les fréquences

$$w = \int_0^{\infty} w_{\nu} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

en procédant à un changement de variable.

$$w = \frac{8\pi(kT)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi^4}{15}$

Il vient
$$w = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4$$

L'énergie interne volumique totale \square dans la cavité est proportionnelle à T^4

Avec

$$\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} = 0.756464 \cdot 10^{-15} \text{ J.m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

Conclusion

Conclusion:

L'application des lois concernant le corps (loi du rayonnement, loi de Wien, loi de Planck, loi de Stefan) est très souvent féconde... mais il faut tout d'abord retenir de ces pages les conditions physiques dans lesquelles peut s'appliquer le modèle du corps noir : le rayonnement doit traduire l'équilibre thermique de l'objet considéré. Sans cette hypothèse, l'application des lois précédentes reste vaine, et peut conduire à de gros contresens (que l'on retrouve souvent dans la littérature, lorsque la notion de température de couleur est utilisée tellement loin de son domaine de validité qu'elle en perd tout son sens). En première approximation, les étoiles rayonnent comme des corps noirs... mais les nombreuses raies d'absorption peuvent conduire à un profil de rayonnement bien déformé. Le rayonnement du fond cosmologique est quant à lui un excellent corps noir.

Annexes

I-1- Approximation de Stirling

Nous commençons par calculer l'intégrale de $\ln x$

$$\int_1^n \ln x dx$$

En intégrant par parties:

$$u' = 1 \quad v = \ln x$$

$$u = x \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x dx &= [x \ln x]_1^n - \int_1^n dx \\ &= n \ln n - n + 1 \end{aligned}$$

La méthode de rectangles, de largeur unité, donne une approximation de cette intégrale lorsque n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x dx &\approx \frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \dots + \frac{\ln(n-1) + \ln n}{2} \\ &\approx \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n \\ &\approx \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n \end{aligned}$$

En galant les deux résultats, on a:

$$\ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n \approx n \ln n - n + 1$$

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1$$

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n$$

I-2- Méthode des multiplicateurs de Lagrange:

Supposons que l'on cherche l'extremum d'une fonction f de k variables $n_{i=1\dots k}$ au point extremum de coordonnées $\{n_1^0, \dots, n_k^0\}$ la différentiel totale de f est nulle.

$$df(n_1, \dots, n_k) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial f}{\partial n_2} dn_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial n_k} dn_k = 0 \quad (27)$$

Si les variables $n_{i=1\dots k}$ sont indépendantes, nous avons directement,

$$\forall i = 1 \dots k \quad \frac{\partial f}{\partial n_i} = 0 \quad (28)$$

Car les n_i variant indépendamment, il faut annuler leurs coefficients respectifs. Lorsque les variables sont dépendantes, elles sont reliées par une contrainte.

$$h(n_1, \dots, n_k) = 0 \quad (29)$$

Qui est valable en tout point, donc aussi au point extremum par conséquent, h étant constante et nulle, sa différentielle totale est nulle partout, donc aussi au point extremum :

$$\frac{\partial h}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial h}{\partial n_2} dn_2 + \dots + \frac{\partial h}{\partial n_k} dn_k = 0 \quad (30)$$

A ce stade, on pourrait isoler par exemple dn_k dans l'équation précédente et remplacer son expression dans l'équation (27) en choisissant d'exprimer l'une des coordonnées en fonction des autres on rompt la symétrie, ce qui rend le problème plus difficile à résoudre. La méthode de Lagrange est suivante:

On multiplie l'équation (30) par λ et on l'additionne avec l'équation (27):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial n_1} \right) dn_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial n_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial n_k} \right) dn_k = 0$$

Sur les k variables $k-1$ sont indépendantes puisque dans cet exemple nous n'avons qu'une seule équation de contrainte. Supposons que ce sont $k-1$ premières variables qui soient indépendantes nous pouvons choisir λ de façon à éliminé le dernier coefficient, celui de dn_k

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n_k} + \lambda \frac{\partial h}{\partial n_k} \right) = 0$$

Il ne reste alors que les différentielles des $k-1$ variables indépendantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial n_1} \right) dn_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial n_{k-1}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial n_{k-1}} \right) dn_{k-1} = 0$$

Par conséquent, comme pour l'équation (28) nous avons directement

$$\forall i = 1 \dots k - 1 \left(\frac{\partial f}{\partial n_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial n_i} \right) = 0$$

Ce qui signifie qu'après l'introduction du paramètre λ toutes les variables peuvent être considérées comme indépendantes puisque

$$\forall i = 1 \dots k \left(\frac{\partial f}{\partial n_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial n_i} \right) = 0$$

La solution au problème sera donne en termes de λ qui sera déterminé par la suite grâce à l'équation de contrainte (29)

I-3- Calcul de l'intégrale de Gauss

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \\ I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

En parcourant l'espace en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a(r^2)} dr \times r d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-ar^2} dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

D'où

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

I-4- Fonction Gamma d'Euler:

Elle est définie comme suit:

$$\forall z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0 \quad \Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

On trouve sa principale propriété en intégrant par partie ; on pose

$$\begin{aligned} u' &= t^z - 1 & v &= e^{-t} \\ u &= \frac{1}{z} t^z & v' &= -e^{-t} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \left[-\frac{1}{z} t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} t^z e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} t^z e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \Gamma(z+1) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons la propriété

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

Nous voyons que la fonction Gamma *d'EULER* prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes, excepté pour les entiers négatifs ou nuls

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Nous devons maintenant trouver l'expression de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

On effectue le changement de variable

$$T=x^2 \text{ d'où } dt=2xdx$$

Pour avoir:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} x^{-1} e^{-x^2} 2xdx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\end{aligned}$$

On procède comme pour l'intégrale de **Gauss**, donnée en annexe 14.3

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 2 \int_0^\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr Xrd\theta \\ &= \pi\end{aligned}$$

Donc:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

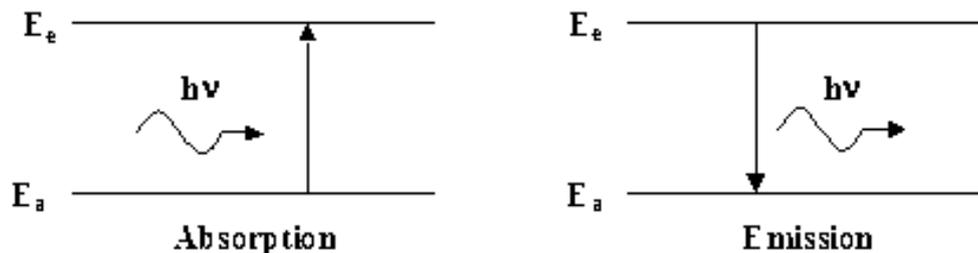
II- Démonstration de la loi du corps noir:

II-1- Probabilité d'échange atome-photon:

Le photon est un boson, il suit donc la statistique de Bose-Einstein. La probabilité d'émission d'un boson en présence de n bosons identiques est proportionnelle à $n+1$: $P_e = (n+1) p$ et la probabilité d'absorption est proportionnelle à n : $P_a = n p$ (p : probabilité d'émission du boson seul) *

II-2- Équilibre thermique du corps noir:

Le corps noir est constitué d'une cavité creuse de volume V à la température T en équilibre thermique. Les atomes de la paroi absorbent, puis réémettent les photons présents dans la cavité. Ils oscillent donc entre des niveaux d'énergie E_a et E_e , séparés de $\Delta E = h\nu$



N_e atomes sont dans l'état E_e et N_a dans l'état E_a . La cavité contient n photons.

Le nombre de photons émis est donc $N_e P_e = N_e (n+1) p$ et le nombre de photons absorbés est $N_a P_a = N_a n p$ A l'équilibre thermique, ces deux nombres sont égaux, donc:

$$N_e(n+1) p = N_a n p \quad \text{ou} \quad N_e (n+1) = N_a n$$

Or à l'équilibre thermique, on a aussi $N_e/N_a = e^{-\Delta E/kT}$ (formule de **Boltzmann**) donc $n/(n+1) = e^{-\Delta E/kT}$ et donc:

$$n = 1/(e^{\Delta E/kT} - 1) = 1/(e^{h\nu/kT} - 1)$$

L'énergie des photons de fréquence ν est donc $E_\nu = n h\nu = h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)$

II-3- Nombre de modes contenus dans l'intervalle de fréquence $\delta\nu$:

Sur une longueur L , il y a une onde stationnaire de polarisation donnée si $L = j \lambda / 2$ ou $L = j \pi / k_j$ donc $k_j = j \pi / L$ (j entier)

L'intervalle entre deux nombres d'onde successifs est donc $\delta k = \pi / L$.

Le nombre de valeurs de k compris dans un intervalle $\delta k \gg \delta k$ est donc $\Delta k / \delta k = \Delta k L / \pi$

Cependant, une onde stationnaire contenant 2 ondes, Le nombre de modes δM n'est que la moitié du nombre de valeurs de k donc:

$$\delta M = \Delta k L / 2\pi$$

A 3 dimensions, $\delta M = \delta M_x \delta M_y \delta M_z = \Delta k_x L_x / 2\pi \Delta k_y L_y / 2\pi \Delta k_z L_z / 2\pi = L_x L_y L_z / (2\pi)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$

$$\delta M = V / (2\pi)^3 \delta k^3$$

Le photon ayant 2 états de polarisation possibles, $\delta M = 2V / (2\pi)^3 \delta k^3$ δk^3 est l'intervalle de volume sphérique dans l'espace des k et vaut donc:

$$4\pi k^2 \delta k.$$

Donc: $\delta M = 8\pi V / (2\pi)^3 k^2 \delta k = V / \pi^2 k^2 \delta k.$

$$k = 2\pi\nu/c \text{ donc } \delta M = 8\pi V \nu^2 / c^3 \delta\nu$$

II-4- Énergie volumique du corps noir:

La cavité contient δM modes contenant chacun l'énergie $E_\nu = h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1)$ dans chaque intervalle de fréquence $\delta\nu$, L'énergie contenue dans l'intervalle de fréquence $\delta\nu$ est donc:

$$\delta E = 8\pi V \nu^2 / c^3 h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1) \delta\nu$$

$$dE = 8\pi V h \nu^3 / (c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)) \delta\nu$$

Energie volumique par intervalle de fréquence $d\nu$: $dE = \delta E / V$

$$dE = 8\pi h \nu^3 / (c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)) d\nu$$

Énergie volumique par intervalle de pulsation $d\omega$:

$$v = \omega/2\pi \quad \text{donc } dv = d\omega/2\pi .$$

On a alors:

$$dE = 16\pi^2 \hbar \omega^3 / (c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)) d\omega / 16\pi^4 = \hbar \omega^3 / (\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)) d\omega$$

avec $\hbar = h/2\pi$

$$dE = \hbar \omega^3 / (\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)) d\omega$$

Énergie volumique par intervalle de longueur d'onde $d\lambda$

$$\lambda = c/v \text{ ou } v = c/\lambda \quad \text{donc } dv = (-) c/\lambda^2 d\lambda .$$

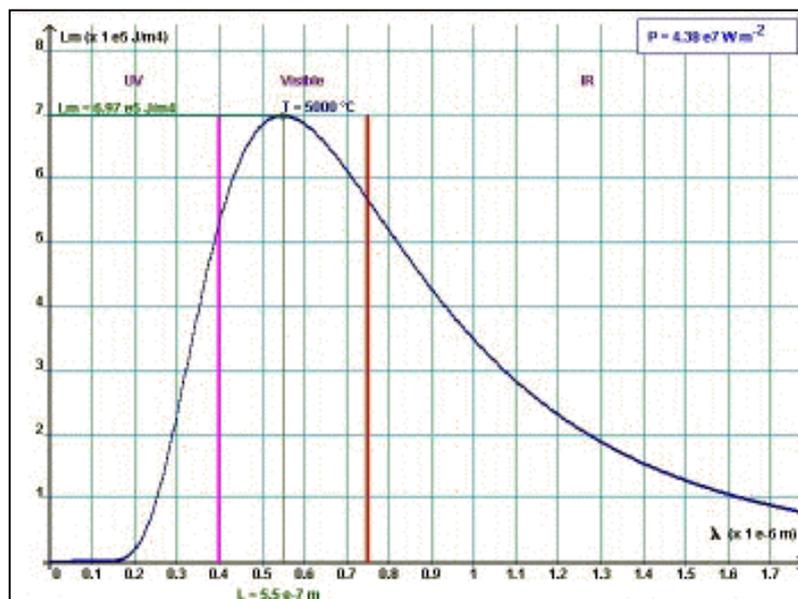
On a alors $dE = 8\pi \hbar c^3 / (\lambda^3 c^3 (e^{\hbar c/\lambda T} - 1)) c/\lambda^2 d\lambda .$

$$dE = 8\pi \hbar c / (\lambda^5 (e^{\hbar c/\lambda T} - 1)) d\lambda$$

Loi d'émission du corps noir (loi de Planck):

Energies volumique par intervalle de longueur d'onde.

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{8\pi \hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{[e^{\frac{\hbar c}{\lambda T}} - 1]}$$



Courbe $dE/d\lambda = f(\lambda)$

II-5- Loi de Wien:

La courbe passe par un maximum quand $\lambda^5 (e^{hc/k\lambda T} - 1)$ passe par un minimum.

On dérive par rapport à λ : $5\lambda^4 (e^{hc/k\lambda T} - 1) - \lambda^5 hc/(k\lambda^2 T) e^{hc/k\lambda T} = 0$.

On simplifie par λ^4 : $5 (e^{hc/k\lambda T} - 1) - hc/(k\lambda T) e^{hc/k\lambda T} = 0$

$$\text{donc } (5 - hc/(k\lambda T)) e^{hc/k\lambda T} - 5 = 0$$

On pose $hc/(k\lambda T) = u$ $(5 - u) e^u - 5 = 0$

On pose $5 - u = x$ alors $x e^{5-x} = 5$

donc $x e^5 e^{-x} = 5$ et ainsi $e^{5/5} x = e^x$

Il reste à résoudre cette équation, ce qui n'est pas si évident si on ne veut pas le faire numériquement:

La solution est le point de concours inférieur des courbes $y = e^{5/5} x$ et $y = e^x$

ce qui fait à peu près $y = 30 x$ et $y = e^x$. Manifestement, y est voisin de 1 et donc x voisin de 1/30

Comme $x \ll 1$, On peut développer e^x en série de Taylor au 2^{ème} ordre :

$$e^x = 1 + x + x^2/2$$

Donc $1 + x + x^2/2 = e^{5/5} x$

$$x^2 - 2(e^{5/5} - 1) x + 2 = 0$$

La solution est donc $x = (e^{5/5} - 1) - ((e^{5/5} - 1)^2 - 2)^{1/2} = 0,03488552$

(La détermination numérique donne 0,0348857682557236963 donc l'approximation est plutôt bonne)

$$u = hc/(k\lambda T) = 5 - x = 4,9651142317442763037$$

$$\lambda = hc/(4,9651142317442763037 kT) = 2,8977686 \times 10^{-3}/T,$$

C'est la loi du déplacement de **Wien**

Loi de Wien: $\lambda_{\max} = 2897,77 \times 10^{-6}/T$

II-6- Intensité lumineuse en fonction de la fréquence:

L'intensité lumineuse I est la puissance lumineuse par m^2 à la fréquence ν à l'intérieur du corps noir.

C'est l'énergie produite en une seconde à la fréquence ν par une section $1 m^2$, c'est donc l'énergie contenue dans un volume de section $1 m^2$ et de longueur c : $V = c$

C'est donc $I(\nu) = V dE/d\nu = c dE/d\nu = 8\pi h\nu^3 / (c^2(e^{h\nu/kT} - 1))$

ou $I(\omega) = c dE/d\omega = \hbar\omega^3 / (\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1))$

$$I(\nu) = 8\pi h\nu^3 / (c^2(e^{h\nu/kT} - 1)) \quad \text{ou} \quad I(\omega) = \hbar\omega^3 / (\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1))$$

II-7- Loi de Stefan-Boltzmann:

La loi de Stefan-Boltzmann (ou loi de *Stefan*) donne la puissance lumineuse sortant du corps noir par une surface de $1 m^2$

Cette énergie est le quart de l'énergie à la fréquence ν contenue dans un volume V de section $1 m^2$ et de longueur $c \cdot 1s$: $V = c$

C'est donc le quart de l'intensité lumineuse à la fréquence ν . Pourquoi le quart ? Parce que la moitié de la lumière se déplace vers l'arrière et que la lumière qui vient vers l'avant se propage dans toutes les directions, il y a donc un facteur cosinus qui donne à nouveau un facteur $1/2$.

C'est donc l'intégrale sur toutes les ν de la fonction $I(\nu)/4 = 2\pi h\nu^3 / (c^2(e^{h\nu/kT} - 1))$

$$P = \int_0^\infty I(\nu)/4 d\nu = \int_0^\infty 2\pi h\nu^3 / (c^2(e^{h\nu/kT} - 1)) d\nu$$

On pose $u = h\nu/kT$, on a alors $I d\nu = 2\pi h(kTu/h)^3 / c^2 / (e^u - 1) kT/h du = 2\pi k^4 T^4 / h^3 / c^2 u^3 / (e^u - 1) du$

$$\text{donc } P = 2\pi k^4 T^4 / h^3 / c^2 \int_0^\infty u^3 / (e^u - 1) du \quad \text{or} \quad \int_0^\infty u^3 / (e^u - 1) du = \pi^4 / 15 **,$$

donc $P = 2\pi^5 k^4 / (15 h^3 c^2) T^4 = \sigma T^4$ (Loi de *Stefan*)

La constante de *Stefan-Boltzmann* :

$$\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15 h^3 c^2) = 5,6703994 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Loi de Stefan-Boltzmann

$$P = \sigma T^4 \quad s = 5,67040 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

II-8- Exemples d'applications:

II-8-1- Détermination de l'albédo terrestre:

L'albédo est la proportion d'énergie lumineuse solaire qui n'est pas absorbée par la Terre, elle est réfléchiée par l'atmosphère.

Données et mesures possibles depuis la Terre :

R_T : rayon de la Terre

R_S : rayon du Soleil

d : distance Terre-Soleil

θ : diamètre apparent du Soleil = $2R_S/d = 32' = 9,308 \times 10^{-3} \text{ rd}$

T_T : Température moyenne de l'atmosphère terrestre = $-18 \text{ }^\circ\text{C} = 255 \text{ K}$

T_S : Température de surface du Soleil

λ_{max} du Soleil = $0,5014 \text{ } \mu\text{m}$

$T_S = 2,898 \times 10^{-6} / \lambda_{\text{max}} = 5780\text{K}$ (Application de la loi de Wien)

Puissance émise par le soleil $P_0 = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$ (Application de la loi de Stefan)

Puissance reçue par la Terre $P_S = P_0 \pi R_T^2 / 4\pi d^2 = P_0 R_T^2 / 4d^2 = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 R_T^2 / 4d^2 = \pi \theta^2 \sigma T_S^4 R_T^2 / 4$

Puissance émise par la Terre $P_T = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$ (Application de la loi de *Stefan*)

$$P_T/P_S = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4 / (\pi \theta^2 \sigma T_S^4 R_T^2 / 4) = 16/\theta^2 (T_T/T_S)^4 = 0,689$$

Albédo $a = 1 - P_T/P_S = 0,311$ (Environ 30 % de l'énergie reçue est réfléchiée par l'atmosphère).

II-8-2- Détermination de la perte de masse du Soleil:

Données :

R_S : rayon du Soleil = 696265 km

T_S : Température de surface du Soleil = 5780K

Puissance émise par le soleil $P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 = 3,85 \times 10^{26}$ W

Masse perdue par seconde (relation d'Einstein) = $P_S/c^2 = 4,291 \times 10^9$ kg/s
(plus de 4 millions de tonnes par seconde !!)

D'autre part, le Soleil perd aussi environ 1 million de tonnes de matière par seconde par l'intermédiaire du vent solaire.

Masse perdue par le Soleil depuis sa formation ($4,6 \times 10^9$ années) :

$M = 5,3 \times 10^9 \times 4,6 \times 10^9 \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 7,7 \times 10^{26}$ kg (environ 128 masses terrestres, ce qui est très peu (0,038%) par rapport à la masse du Soleil égale à 333432 masses terrestres.

Calcul de l'intégrale de $u^3/(e^u - 1)du$:

Sachant que $\sum q^n = q/(1 - q) = 1/(1/q - 1)$, on a $1/(e^u - 1) = 1/(1/e^{-u} - 1) = \sum (e^{-u})^n = \sum e^{-nu}$ donc :

$$\int_0^\infty u^3/(e^u - 1)du \text{ est égale à } \int_0^\infty \sum (u^3 e^{-nu}) du = \sum \int_0^\infty u^3 e^{-nu} du$$

On intègre trois fois par parties, on a alors :

$$\sum \int_0^\infty 3u^2 e^{-nu} / n du, \quad \int_0^\infty -6ue^{-nu} / n^2 du, \text{ puis } 6e^{-nu} \int_0^\infty 1/n^3 du \text{ qui vaut } \sum 6/n^4 = 6\sum 1/n^4$$

$$\text{or } \sum 1/n^4 = \pi^4/90, \text{ donc } \int_0^\infty u^3/(e^u - 1) du = \pi^4/15$$

Les puristes pourraient s'inquiéter d'une probabilité qui peut manifestement dépasser 1! Il faudrait la normaliser. En réalité, il n'y a pas lieu de s'en préoccuper puisqu'on n'utilise que le rapport des probabilités.

III-Exemple des corps noir réel :

une étoile :

Est un corps noir. Le lien peut déjà apparaître, celle prise par un photon pour traverser directement un rayon stellaire, et celle mesurant qu'effectivement l'énergie produite au sein du soleil est évacuée en surface.

le soleil :

Le Soleil nous apparaît visuellement jaune, il émet de la lumière blanche, on dit que c'est un corps noir à la température de 5 780 °K (Soit environ 5 500 °C).

Il y a matière à s'interroger...

Le fait qu'il émette de la lumière blanche, constituée de toutes les couleurs de l'arc-en-ciel, et qu'il nous apparaisse visuellement jaune s'explique parce que le ciel est bleu : le mélange de gaz constituant l'atmosphère terrestre diffuse, dans toutes les directions, la partie du spectre solaire située dans le bleu. Dans la lumière solaire qui nous parvient directement, les radiations correspondant à la couleur bleue manquent, alors, le Soleil semble jaune (mélange visuel des radiations correspondant aux couleurs vert et rouge).

La traversée directe du rayon solaire à la vitesse de la lumière prend à peine plus de 2 secondes, alors qu'il faut près d'un million d'années pour que l'énergie soit extraite du soleil.

Cette durée est incomparablement plus longue, car le trajet de l'énergie est une marche au hasard entrecoupée d'incessantes absorptions et réémissions de photons.

les atomes ont aussi un mode d'émission propre de photons, les raies caractéristiques (ce phénomène est utilisé pour l'analyse chimique en spectrométrie d'émission, de fluorescence et d'absorption) .

Les raies du spectre rendent compte de la nature de la matière solaire dans les couches superficielles d'où s'échappent les photons.

IV-Applications :

IV-1- Corps Noir: (Source Infrarouge de Référence)

Un corps noir est une source infrarouge de référence qui se révèle indispensable à tout utilisateur de systèmes infrarouges. En effet, les corps noirs sont utilisés aussi bien dans le secteur de l'industrie pour l'étalonnage de pyromètres, scanners ou caméras, que dans les laboratoires spécialisés pour la caractérisation de systèmes optiques infrarouges complexes.

HGH propose une large gamme de corps noirs pour répondre au mieux à la diversité des besoins potentiels de ses Clients :

- Le corps noir différentiel pour la caractérisation des performances de systèmes infrarouges (DCN1000N).
- Le corps noir à cavité haute température pour l'étalonnage de capteurs infrarouges (RCN).
- Le corps noir étendu (ECN100).
- Le corps noir basses températures (DCN1000L).
- Le corps noir sous vide à température cryogénique (DCN1000V).

De plus, *HGH* peut adapter ses corps noirs aux besoins de ses Clients et également concevoir des sources infrarouges spécifiques sur demande. N'hésitez pas à nous contacter pour nous soumettre votre besoin.

A chaque corps noir peuvent être associés un collimateur infrarouge (*IRCOL*) et ses accessoires (mires, roues porte-mines...).

IV-2-Intérieur d'un four:

L'objet réel qui se rapproche le plus de ce modèle est l'intérieur d'un four. Afin de pouvoir étudier le rayonnement dans cette cavité, une de ses faces est percée d'un petit trou laissant s'échapper une minuscule fraction du rayonnement interne. C'est d'ailleurs un four qui fut utilisé par Wien pour

déterminer les lois d'émission électromagnétique en fonction de la température. Les parois de l'intérieur de l'enceinte émettent un rayonnement à toutes les longueurs d'ondes : théoriquement des ondes radio aux rayons X.

Cette émission est due à l'agitation des atomes. En effet, la température mesure l'agitation des atomes (ceux-ci «oscillent» autour de leur position). Ce faisant, chaque atome se comporte comme un dipôle électrostatique vibrant (dipôle formé par le noyau et le nuage électronique), qui rayonne donc de l'énergie.

Chaque paroi du four émet et absorbe du rayonnement. Il y a ainsi échange d'énergie entre les parois, jusqu'à ce que l'objet atteigne l'équilibre thermique. La répartition de la quantité d'énergie émise, en fonction de la longueur d'onde, forme le spectre. Celui-ci est la signature d'un rayonnement purement thermique. Il s'appelle donc spectre du corps noir et ne dépend que de la température du four.

IV-3-Application médicale:

Les caméras d'infrarouge de *FLIR* aident à la détection de la grippe porcine et d'autres maladies virales.

La croissance des échanges, des voyages et des migrations économiques à l'international ont augmenté les risques de propagation des maladies virales.

Lors d'épidémies de virus dangereux tels la grippe porcine, le SRAS ou d'autres infections virales, les autorités de santé publique du monde entier ont besoin d'une méthode rapide, facile, fiable, non invasive et qui n'implique aucun contact pour la détection d'une élévation importante de la température corporelle. La technologie des caméras infrarouges est capable de satisfaire ce besoin.

Une caméra infrarouge est un outil très efficace pour le dépistage des maladies virales au stade précoce. Elle produit des images infrarouges qui mettent en évidence le moindre écart de température. La thermographie infrarouge permet d'élaborer une véritable «carte» de la température de la peau en temps réel. En outre, les caméras infrarouges sont des appareils d'une grande sensibilité. Les caméras infrarouges *FLIR* sont capables de détecter des écarts de température de 0,08 °C.

L'infrarouge, un outil efficace pour la détection de l'élévation de la température corporelle

Parmi les symptômes de la plupart des maladies infectieuses, on compte le malaise, l'angine, la toux et, bien entendu, la fièvre. Par conséquent, il est très facile de détecter les personnes susceptibles d'être porteuses d'un risque de maladie infectieuse. L'image infrarouge d'un sujet permet de mesurer si sa température corporelle dépasse ou non une valeur donnée.



**Figure 2 : Les couleurs facilite
l'identification des personnes
nécessitant un examen complémentaire.**

Un investissement modique pour la protection de la santé publique.

La technologie des caméras infrarouges *FLIR* est déjà un succès dans le monde entier au sein d'aéroports, d'hôpitaux, de gares, de terminaux, etc. qui l'utilisent pour contrôler toutes les personnes circulant dans leurs bâtiments.

La méthode est rapide et ne nécessite aucun contact : une garantie de sécurité à la fois pour l'opérateur de la caméra et le sujet examiné. Les résultats sont extrêmement