

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique Computationnelle

Par

RECHAHE TAMDI

Sur le thème

***L'étude du lagrangien d'un champ scalaire
en ϕ^4***

Soutenu le 24/06/2018 devant le jury composé de :

Mr Abada Ahmed	Président	M.C.A	U. Saida
Mr Kouidri Ismail	Rapporteur	M.C.A	U. Saida
Mr Boudali Abdelkader	Examineur	M.C.A	U. Saida
Mr SahabiToufik	Examineur	M.C.A	U. Saida

Année Universitaire 2017 - 2018

Dédicace

*Je dédie cet humble travail à l'homme qui m'a
apporté un soutien moral et matériel et la source
de ma joie et de mon bonheur*

*La personne qui s'est toujours sacrifiée pour me
voir la villa la plus réussie de ma carrière
académique, mon Père Dieu préserve.*

*La lumière de mes jours, la source de mes efforts,
la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur,
et à tous mes frères et sœurs, et à ma chère mère
qui est aux personnes que j'ai aimées et à mes amis
Cheikh Mohammed Ibrahim Noah et à mon
professeur Ismaïl Kouidri.*

*Je dédie ce travail, qui leur fait grand plaisir
d'abord de les conseiller, de les aider et de les
encourager.*

*Aux personnes qui m'ont toujours aidé et
encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, qui
m'accompagnaient durant ma carrière senior, mes
gentils amis, mes camarades de classe.*

Remerciements

Je remercie Dieu Tout-Puissant de nous avoir donné la santé, le bien-être et le désir de commencer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne sera pas riche et ne peut être mis en œuvre sans l'aide, les conseils et les conseils du Dr Ismail Kouidri. Je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel et pour sa patience, sa précision et sa disponibilité alors que nous préparons cette note.

Je suis très reconnaissant au président du jury, Mr. Abada Ahmed, et les membres du comité, Mr. Boudali Abdelkader et Mr. Sahabi Toufik, ont accepté de revoir ce travail.

Je tiens également à remercier tous les professeurs pour leur générosité et pour la grande patience dont ils ont fait preuve malgré leurs responsabilités académiques et professionnelles.

Je vous remercie profondément pour tous ceux qui m'ont aidé et m'a soutenu de loin et de près.

SOMMAIRE

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre I

lagrangien d'un champ scalaire réel libre	4
--	----------

I.1.Introduction	5
------------------------	---

I.2. lagrangien d'un champ scalaire réel libre	5
--	---

I.2.1.Formalisme de lagrangien	5
--------------------------------------	---

I.2.2.Les équations d'Euler Lagrange.....	6
---	---

I.2.3.Le formalisme hamiltonien	7
---------------------------------------	---

I. 3. Equation de klein-gordon	8
--------------------------------------	---

I.4. l'écriture de la solution de l'équation de K G dans l'espace de phases...	9
--	---

I.5. Calcul de hamiltonien.....	12
---------------------------------	----

I.6. Quantification de hamiltonien	14
--	----

I.6.1. Rappel classique	14
-------------------------------	----

I.6.1.1. Lagrangien.....	14
--------------------------	----

I.6.1.2. Hmlitonien.....	16
--------------------------	----

I.6.2. Quantification canonique	16
---------------------------------------	----

RéférencesI	21
-------------------	----

Chapitre II

Lagrangien d'un champ scalaire lié.....	22
--	-----------

II.1 Introduction	23
-------------------------	----

II.2 Lagrangien d'un champ scalaire en interaction	23
--	----

II.2.1.Formalisme de lagrangien.....	23
--------------------------------------	----

II.2.2.Les équations d'Euler lagrange.....	23
--	----

II.3. Méthode de résolution.....	24
II.3.1.Les fonctions de Green	24
II.3.2.Les opérateurs de symetrie.....	26
II.3.3 l'écriture de l'équation de K G dans l'espace de phases	26
II.4.Fonctions de Green avances et retardée	27
II.5.L'hamiltonien du systeme	32
RéférencesII	35
 Chapitre III	
Résolution numerique de l'équation de K G non linéaire	36
III.1 Introduction	37
III.2.Méthode de calcul	37
III.3 La solution statique.....	38
III.4 Méthode des différences finies	40
III.5. Organigramme de calcul.....	41
III.6.Résolution numérique	45
III.7 Discussions des résultats.....	46
III.7.1 Utilisation les champs de forme de Gaussienne comme base	46
III.7.2 Utilisation les champs de forme sinusoïdale	50
Référence III:	52
Conclusion générale.....	53

Introduction général

Introduction général

Ce travail de mémoire de master entre dans le cadre de l'obtention d'un diplôme de master en physique computationnelle dont le sujet est l'étude des lagrangien d'un champ scalaire en ϕ^4 . Ce sujet qui présente un bon travail pour la physique computationnelle se base principalement sur la construction d'un lagrangien du champ scalaire en ϕ^4 toute en l'étudiant dans un premier temps comme si c'était libre puis on passe à une forme lié.

La physique computationnelle a connu un essor considérable grâce aux modélisations numérique et aux formulations théoriques. Le développement des lagrangien du champ scalaire libre et lié nous a permet en premier lieu d'aboutir à des équations fondamentales qui décrivent la nature du mouvement en se basant sur l'utilisation des équations d'Euler Lagrange [1].

L'étude de l'équation de Klein Gordon non linéaire pour des champs en ϕ^4 constitue le pilier de ce travail non seulement d'un point de vue théorique mais aussi l'analyse numérique basé sur des méthodes assez sophistiquées en analyse numérique telle que la méthode des différences finies.

Ce mémoire présente des méthodes de résolution numériques de la fameuse équation dite Equation de Klein Gordon en premier temps puis en ajoutant le terme non linéaire qui décrit la densité du champ scalaire. Cette équation qui peut être obtenue de la même manière que l'équation de Schrödinger mais en partant cette fois-ci de la relation énergie-impulsion relativiste et en injectant à chaque fois le terme non linéaire exprimant la constante de couplage λ .

Ce travail est divisé en trois parties:

Introduction général

- La première partie s'attache à présenter les fondements des lagrangien en champ libre c'est-à-dire en absence totale de l'interaction ou l'équation résultante est celle de Klein Gordon standard.

- La seconde partie est dédiée aux fondements des lagrangien en champ lié en présence d'une source j ce qui nous permet d'avoir de bonnes solutions via les fonctions de Green.

- La dernière partie est consacrée à l'exposition de nos résultats numériques toute en se basant sur des programme informatique capables de nous donner des solutions acceptables de notre fameuse équation dite Equation de Klein Gordon non linéaire. Nous discutons tout d'abord le cas où le champ est libre puis nous étendons notre calculs à des champs liés par des potentiels de type ϕ^4 [2-6].

Enfin une conclusion nous donnera les résultats obtenus et proposera des futurs travaux.

Introduction général

Références

- [1] S. Kouidri ‘Théorie quantique et renormalisation’ polycopie en préparation 2016.
- [2] P.G. Drazin and R.S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1989.
- [3] Maciej Dunajski, Solitons, instantons and twistors, Oxford University Press, 2010.
- [4] Jan Govaerts, An introduction to quantum physics et relativiste quantum field theory, Un-published manuscript, 2008.
- [5] V.G. Kiselev, Ya.M. Shnir, and A.Ya. Tregubovich, Introduction to quantum field theory, CRC PRESS, 2000.
- [6] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe (eds.), Topologie solitons, Cambridge University Press, 2004.

Chapitre I
Lagrangien d'un
champ scalaire
réel libre

I.1.Introduction :

Nous nous intéresserons dans ce chapitre de vous exposé le formalisme du lagrangien d'un champ scalaire réel libre c'est-à-dire en absence d'une source. Nous déterminerons nos équations d'Euler Lagrange puis avec la transformée de Fourier nous allons essayer de déterminer le Hamiltonien et de quantifier cette grandeur physique [1].

Dans un premier temps, nous introduisons notre travail par formalisme de lagrangien Ensuite, nous esquissons la solution de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace des phases et ensuite calculons l'hamiltonien. Et finalement terminer par quantification dans cette grandeur physique

I.2. lagrangien d'un champ scalaire réel libre :

L'écriture du Lagrangien d'un champ scalaire libre repose sur la détermination de son énergie cinétique qui joue un rôle central en théorie quantique des champs [1-2].

I.2.1. Formalisme de lagrangien

En partant du lagrangien \mathcal{L} d'un champ scalaire réel s'écrit:

Où le potentiel est pratiquement nul c'est-à-dire que $V(x^\mu) = 0$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (\text{I} - 1)$$

Où $\varphi(x^\mu)$ est un champ scalaire.

L'idée générale est d'obtenir l'équation d'Euler-Lagrange. Dans le cas où il existe des contraintes tel que :

$$\varphi(x) = 0 \quad (\text{I} - 2)$$

L'ajout des contraintes repose sur le fait que le Lagrangien et ces équations du mouvement correspondant doivent être invariantes sous la transformation de Lorentz transformation liant les deux référentiels R et R' via les coordonnées x, y, z .

I.2.2 Les équations d'Euler Lagrange :

Après minimisation de l'action S on en déduit les équations suivantes :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{I} - 3)$$

Les équations du mouvement correspondant à l'équation de Klein-Gordon se calculent facilement selon le processus suivant [2]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu)} = \partial^\mu \varphi \end{array} \right. \quad (\text{I} - 4\text{a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu)} = \partial^\mu \varphi \end{array} \right. \quad (\text{I} - 4\text{b})$$

Alors

$$-m^2 \varphi - \partial^\mu \partial_\mu \varphi = 0 \quad (\text{I} - 5\text{a})$$

$$-m^2 \varphi - (\partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i) \varphi = 0 \quad (\text{I} - 5\text{b})$$

Et on a

$$\partial^0 = \partial_0 \text{ et } \partial^i = \partial_i \quad (\text{I} - 6)$$

On obtient que

$$-m^2 \varphi - (-\partial_i^2 + \partial_0^2) \varphi = 0 \quad (\text{I} - 7\text{a})$$

$$(m^2 + \partial_i^2 - \partial_0^2) \varphi = 0 \quad (\text{I} - 7\text{b})$$

On trouvera notre fameuse équation de Klein-Gordon qui s'écrit aussi comme:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \quad (\text{I} - 8\text{a})$$

$$\blacksquare\phi + m^2\phi = 0 \quad (\text{I} - 8\text{b})$$

$$(\blacksquare + m^2)\phi = 0 \quad (\text{I} - 8\text{c})$$

Avec L'opérateur d'alembertien \blacksquare

$$\blacksquare: \partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i = \partial_i^2 + \partial_0^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

Comme ce l'opérateur $\blacksquare + m^2$ est invariant de Lorentz, on peut en principe l'appliquer à un champ de spin arbitraire. Elle s'applique en particulier au champ scalaire, sans spin $\phi(x)$

Qui décrit avec succès le mouvement des particules de spin entier appelé aussi équation de Klein Gordon.

Bien cette équation joue un rôle essentiel dans la description des systèmes Bosoniques, elle présente un certain inconvénient au niveau des systèmes fermionique [3].

I.2.3. Le formalisme hamiltonien

L'hamiltonien repose sur la détermination des moments conjugués $\pi(x, t)$ de la variable canonique $\phi(x, t)$ via la relation suivant :

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial^0 \phi \equiv \dot{\phi}(x) \quad (\text{I} - 9)$$

Et en faisant appel à la mécanique classique ou le hamiltonien se définit comme :

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (\text{I} - 10)$$

Chapitre I Lagrangien d'un champ scalaire réel libre

Qui se réécrit selon le principe de correspondance entre la mécanique classique et la théorie quantique par :

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L} \quad (\text{I} - 11)$$

En insérant l'expression de π_i de l'équation (I - 9) on obtient :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) \quad (\text{I} - 12)$$

I.3. Equation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon s'obtient par le remplacement des dérivées du lagrangien selon la relation suivante:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \equiv (\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \quad (\text{I} - 13)$$

Où $\phi(x)$ est la fonction d'onde de la particule relativiste.

Les solutions s'écrivent comme des ondes planes de la forme :

$$\phi(x) = e^{ik_\mu x^\mu} \quad (\text{I} - 14)$$

Avec

$$k_\mu x^\mu = k_0 x^0 + k_i x^i \quad (\text{I} - 15)$$

En injectant l'expression (I - 12) dans l'équation (I - 11) nous obtenons une relation fondamentale exprimant la fameuse équation de Albert Einstein :

$$E = \mp \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (\text{I} - 16)$$

Alors en plus des solutions d'énergie positive l'équation de Klein-Gordon possède aussi des solutions d'énergie négative à laquelle est associée une

Chapitre I Lagrangien d'un champ scalaire réel libre

densité de probabilité ρ négative donnée par qui n'est autre que l'équation temporelle [4]:

$$\rho = i \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) = 2E|N|^2 \quad (\text{I} - 17)$$

Ou N est la constante de normalisation

De la même façon on déterminera l'équation spatiale exprimant le courant via l'équation de continuité :

$$\vec{j} = (\varphi \vec{\nabla} \varphi^* - \varphi^* \vec{\nabla} \varphi) = 2|N|^2 \vec{p} \quad (\text{I} - 18)$$

De ce fait on peut dire que l'équation de Klein-Gordon est valable que pour les particules et les antiparticules scalaires de spin entier en particulier les particules de spin 0.

1.4. L'écriture de la solution de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace des phases

L'écriture de la solution de Klein- Gordon via la transformée de Fourier se base principalement sur l'expression suivante [5-6] :

$$\varphi(t, x) = \varphi(t) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (\text{I} - 19)$$

En injectant cette fonction dans l'équation (I - 7) on obtient :

$$\ddot{\varphi}(k) + (k^2 + m^2)\varphi(x) = 0 \quad (\text{I} - 20)$$

Soit encore :

$$\ddot{\varphi}_k + \omega_k^2 \varphi_k = 0 \quad (\text{I} - 21)$$

On trouve que

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 \quad (\text{I} - 22)$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique qui a pour la solution

$$\varphi_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t} \quad (\text{I} - 23)$$

Chapitre I Lagrangien d'un champ scalaire réel libre

Et donc

$$\varphi_k(t, x) = a_k e^{-i(\omega_k - k \cdot x)} + b_k e^{i(\omega_k + k \cdot x)} \quad (I - 24)$$

D'une façon générale, on peut réécrire la fonction toute en l'intégrant sur les k comme :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(a_k e^{-i(\omega - k \cdot x)} + b_k e^{i(\omega + k \cdot x)} \right) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (I - 25)$$

Ou on impose la condition de réalité : $\varphi = \varphi^*$

Nous aurons :

$$\varphi_k^*(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(a_k^* e^{-i(\omega - k \cdot x)} + b_k^* e^{i(\omega + k \cdot x)} \right) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (I - 26a)$$

$$\varphi_k^*(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(a_{-k}^* e^{-i(\omega - k \cdot x)} + b_{-k}^* e^{i(\omega + k \cdot x)} \right) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (I - 26b)$$

Le changement de variable d'intégration $k \rightarrow -k$ donne l'identification entre les constants (I - 25) selon les relations suivantes :

$$a_{-k}^* = b_k \quad (I - 27a)$$

$$b_{-k}^* = a_k \quad (I - 27b)$$

Avec ces relations nous obtenons :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(a_k e^{-i(\omega t - k \cdot x)} + a_{-k}^* e^{i(\omega t + k \cdot x)} \right) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (I - 28a)$$

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k (a_k e^{-i(\omega t - k \cdot x)} + a_k^* e^{i(\omega t - k \cdot x)}) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (\text{I} - 28\text{b})$$

Et avec le changement de variable d'intégration $k \rightarrow -k$ dans l'intégrale du second terme et en définissant le quadrivecteur

$$k^\mu = (\omega, k) \quad (\text{I} - 29)$$

Nous obtenons:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k (a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}) \quad (\text{I} - 30)$$

Le remplacement de d^3k donne :

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \delta(\omega^2 - \omega_k^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \delta((\omega^2 + \omega_k^2)(\omega^2 - \omega_k^2)) \quad (\text{I} - 31\text{a})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{2\omega_k} (\delta(\omega^2 + \omega_k^2) + \delta(\omega^2 - \omega_k^2)) \quad (\text{I} - 31\text{b})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int \frac{d\omega}{2\pi 2\omega_k} \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (\text{I} - 31\text{c})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \quad (\text{I} - 31\text{d})$$

Ici nous avons utilisé le fait que $\omega \geq 0$:

$$\delta(\mathcal{F}(x)) = \sum_{\{\chi_i\}} \frac{\delta(x - \chi_i)}{|g'(\chi_i)|} \quad (\text{I} - 32)$$

χ_i sont les racines de \mathcal{F}

Après simplification nous aurons :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} (a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)} + a_k^* e^{i(\omega_k t + k \cdot x)}) \quad (\text{I} - 33)$$

Remarquons que la solution n'est plus explicitement covariante sous cette formule.

$$\mathcal{F}^\pm(x) = e^{\mp(i\omega_k t - k \cdot x)} \quad (\text{I} - 34)$$

Nous écrivons la solution sous cette forme

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} (a_k \mathcal{F}_k^+(x) + a_k^* \mathcal{F}_k^-(x)) \quad (\text{I} - 35)$$

Nous utiliserons parfois l'expression c. c. Indiquant qu'il faut prendre le complexe terme précédent :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} (a_k e^{-ikx} + c. c.) \quad (\text{I} - 36)$$

I.5. Calcul de l'Hamiltonien

Nous cherchons l'expression de l'hamiltonien sous la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \int d^3 x \left(\frac{1}{2} \{ \dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \} \right) \quad (\text{I} - 37)$$

Qui est fonctions de φ , Commençant alors par calculer $\dot{\varphi}$ et $\nabla \varphi$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 k i (-a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}) \quad (\text{I} - 38a)$$

$$\nabla \varphi = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} ik (a_k e^{-ikx} - a_k^* e^{ikx}) \quad (\text{I} - 38b)$$

Il est important d'utiliser des k différents dans l'intégration.

Nous calculons le premier terme en $\dot{\varphi}^2$:

$$\int d^3 x \dot{\varphi}^2 = \int d^3 x \left(\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 k i (-a_k e^{-ikx} + c. c.) \right) \left(\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 r i (-a_r e^{-ikx} + c. c.) \right) \quad (\text{I} - 39a)$$

$$= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k d^3r \int d^3x (a_k a_r e^{-i(k+r)x} - a_k a_r^* e^{-i(k-r)x} + c. c.) \quad (\text{I} - 39\text{b})$$

$$= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k d^3r (a_r a_k \delta^{(3)}(r+k) e^{-i(\omega_k + \omega_r)t} - a_k a_k^* \delta^{(3)}(r-k) e^{-i(\omega_k - \omega_r)t} c. c.) \quad (\text{I} - 39\text{c})$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k (-a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + c. c.) \quad (\text{I} - 39\text{d})$$

car $\omega_k = \omega_{-k}$, et de même on trouvera que :

$$\int d^3x (\nabla\varphi)^2 = \int d^3x \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} ik (a_k e^{-ikx} + c. c.) \right) \times \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3r}{2\omega_r} ir (a_r e^{-rx} - c. c.) \right) \quad (\text{I} - 40\text{a})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3r}{4\omega_k \omega_r} \int d^3x (-kr) (a_r a_k e^{-i(k+r)x} - a_k a_r^* e^{-i(k-r)x} + c. c.) \quad (\text{I} - 40\text{b})$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3r}{4\omega_k \omega_r} kr (a_k a_r \delta^{(3)}(r+k) e^{-i(\omega_k + \omega_r)t} - a_k a_r^* \delta^{(3)}(r-k) e^{-i(\omega_k - \omega_r)t} + c. c.) \quad (\text{I} - 40\text{c})$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{4\omega_k^2} k^2 (-a_k - a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - a_k a_k^* + c. c.) \quad (\text{I} - 40\text{d})$$

Finalement :

$$\int d^3x \varphi^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k^2} m^2 (a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + c. c.) \quad (\text{I} - 41)$$

En rassemblant les trois termes dans une expression du l'hamiltonien, on obtient

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) \right) \quad (\text{I} - 42\text{a})$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k^2} \left(-\omega_k^2 a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + \omega_k^2 a_k a_k^* \right. \\ \left. + (\omega_k^2 - m^2) a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + m^2 a_k a_k^* + c.c \right) \quad (\text{I} - 42\text{b})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k^2} (a_k a_k^* + a_k^* a_k) \quad (\text{I} - 42\text{c})$$

En posant :

$$N_k = (2\pi)^3 2\omega_k a_k^* a_k \quad (\text{I} - 43)$$

On obtient :

$$\mathcal{H} = \int d^3k \omega_k N_k \quad (\text{I} - 44)$$

$\omega_k N_k$ Correspond donc à la densité d'hamiltonienne par unité de k .

I.6. La Quantification de hamiltonien

I.6.1. Rappel classique :

Quantifier le hamiltonien revient à le réécrire sous forme des opérateurs de création et d'annihilation pour mieux comprendre ce que nous devons le faire par la suite. Nous allons commencer par traiter un exemple simple relatif à un système de N oscillateurs harmoniques de fréquences ω_i [7].

I.6.1.1. Lagrangien

Le lagrangien de ce système est :

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} (p_i^2 - \omega_i^2 q_i^2) \quad (\text{I} - 45)$$

Ce qui donne les équations du mouvement

$$\ddot{q} + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (\text{I} - 46)$$

Qui ont pour solution :

$$q_i = a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^* e^{i\omega_i t} \quad (\text{I} - 47a)$$

$$p_i = -i\omega_i a_i e^{-i\omega_i t} + i\omega_i a_i^* e^{i\omega_i t} \quad (\text{I} - 47b)$$

Si on promeut p_i et q_i en opérateurs, alors a_i et a_i^* deviennent aussi :

$$\begin{cases} q_i \rightarrow \hat{q}_i \\ p_i \rightarrow \hat{p}_i \\ a_i \rightarrow \hat{a}_i \\ a_i^* \rightarrow \hat{a}_i^\dagger \end{cases} \quad (\text{I} - 48)$$

On a les relations de commutations suivantes [4] :

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j^\dagger] = i\delta_{ij} \quad (\text{I} - 49a)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (\text{I} - 49b)$$

Nous calculons le commutateur de \hat{a}_i et \hat{a}_i^\dagger à partir de celui le commutateur de \hat{q}_i et \hat{p}_i^\dagger :

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_i^\dagger] = [\hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + \hat{a}_i^\dagger e^{i\omega_i t}, -i\omega_i \hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + i\omega_i \hat{a}_i^\dagger e^{i\omega_i t}] \quad (\text{I} - 50a)$$

$$= i\omega_i [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] - i\omega_i [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i] \quad (\text{I} - 50b)$$

$$= 2i\omega_i [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = i \quad (\text{I} - 50\text{c})$$

Tous les autres commutateurs seront nuls à cause des relations de commutations (I - 49a) et (I - 49b):

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \frac{1}{2} \omega_i \delta_{ij} \quad (\text{I} - 51\text{a})$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (\text{I} - 51\text{b})$$

I.6.1.2. L'hamiltonien

L'hamiltonien du système qui s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_i \omega_i \left(\hat{N}_i + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{I} - 52)$$

Avec :

$$\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (\text{I} - 53)$$

Un état ψ se décompose sur la base des états propres $|n_i\rangle$ de \hat{N}_i

$$|\varphi\rangle = \sum_i \varphi_{n_1, \dots, n_N} |n_1 \dots n_N\rangle \quad (\text{I} - 54)$$

I.6.2. Quantification quantique :

Traitant maintenant notre cas via le principe de correspondance.

Si i désigne l'indice continu, on obtient le champ de Klein-Gordon et à partir de les relations de commutations canoniques suivantes [4] (pour un rappel $\pi = \dot{\varphi}$) on obtient :

$$[\hat{\varphi}(t, x), \hat{\pi}(t, \dot{x})] = i\delta^{(3)}(x - \dot{x}) \quad (\text{I} - 55\text{a})$$

Chapitre I Lagrangien d'un champ scalaire réel libre

$$[\hat{\varphi}(t, x), \hat{\varphi}(t, x')] = [\hat{\pi}(t, x), \hat{\pi}(t, x')] = 0 \quad (\text{I} - 55\text{b})$$

Ces relations sont valables à n'importe quel temps

Et avec analogie nous trouvons alors les régales de commutation des a_k^\dagger et \hat{a}_k :

$$[\hat{a}_k, a_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - k') \delta(\omega_k - \omega_{k'}) \quad (\text{I} - 56\text{a})$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (\text{I} - 56\text{b})$$

On a les différentes relations (avec $|\varphi\rangle = |n_{k_1} \dots \dots n_{k_N}\rangle$) :

$$\hat{a}_k |0\rangle_k = 0 \quad (\text{I} - 57\text{a})$$

$$(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle_k = |n_k\rangle \quad (\text{I} - 57\text{b})$$

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle \quad (\text{I} - 57\text{c})$$

$$\hat{N}_{k_1} |\varphi\rangle = n_{k_1} |n_{k_1}\rangle \quad (\text{I} - 57\text{d})$$

$$\hat{N} |\varphi\rangle = (n_{k_1} + \dots + n_{k_N}) |\varphi\rangle \quad (\text{I} - 57\text{e})$$

Finalement on introduit le nombre total d'excitation :

$$\hat{N} = \int d^3k \hat{N}_k \quad (\text{I} - 58)$$

Un seul champ permet de décrire plusieurs particules:

- une particule : $|n_k 0 0 \dots\rangle$.
- deux particules : $|n_{k_1} n_{k_2} 0 \dots\rangle$.

En partant de l'expression (I - 43) on obtient l'hamiltonien:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k} \omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger) \quad (\text{I} - 59\text{a})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k} \omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger]) \quad (\text{I} - 59\text{b})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k} \omega_k (2\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0)) \quad (\text{I} - 59\text{c})$$

$$= \int d^3k \omega_k \hat{N}_k + \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \delta^{(3)}(0) \quad (\text{I} - 59\text{d})$$

Où on a :

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \delta^{(3)}(0) \quad (\text{I} - 60)$$

Le deuxième terme H_0 du membre de droite est infini mais constant : on définit l'origine des énergies de sorte que ce terme vaut zéro :

$$H_0 |0\rangle = E_0 |0\rangle \quad (\text{I} - 61)$$

Replaçons le système dans un volume fini V , alors

Nous aurons :

$$H_0 = \int 2d^3k \omega_k \delta^{(3)}(0) \quad (\text{I} - 62\text{a})$$

$$H_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int 2d^3k \omega_k V \quad (\text{I} - 62\text{b})$$

Car :

$$\int d^3x e^{ikx} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k) = \int d^3x = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k=0) \quad (\text{I} - 63)$$

Réécrive la densité de l'énergie par le volume

Chapitre I Lagrangien d'un champ scalaire réel libre

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2\omega_k \quad (\text{I} - 64)$$

Mais cette expression diverge pour k grand (divergence UV).

On définit une fréquence de coupure Λ :

$$\varepsilon_0 = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2\omega_k \text{ telque: } |k| < \Lambda \quad (\text{I} - 65)$$

Pour cette expression diverge comme la fréquence de coupure Λ^4 .

On conduit a:

$$\hat{\mathcal{H}} |n_1 \dots n_N\rangle = \int d^3k \omega_k \hat{N}_k |n_1 \dots n_N\rangle \quad (\text{I} - 66)$$

On obtenu :

$$\hat{N}_k |n_1 \dots n_N\rangle = \left(n_1 \delta^{(3)}(k - k_1) + \dots + n_N \delta^{(3)}(k - k_N) \right) |n_1 \dots n_N\rangle \quad (\text{I} - 67)$$

Ce qui donne :

$$\hat{\mathcal{H}} |n_1 \dots n_N\rangle = \sum_i \omega_i n_i |n_1 \dots n_N\rangle \quad (\text{I} - 68)$$

Avec:

$$E = \sum_i \omega_i n_i \quad (\text{I} - 69)$$

L'impulsion p est :

$$\hat{p} = \int d^3x (-\dot{\phi} \nabla \phi) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k \hat{N}_k \quad (\text{I} - 70)$$

Et obtiendra:

$$\hat{p}|n_1 \dots n_N\rangle = \sum_i n_i k_i |n_1 \dots n_N\rangle \quad (\text{I} - 71)$$

Finalement :

$$\hat{\mathcal{H}}|p\rangle = \omega_p |p\rangle \quad (\text{I} - 72\text{a})$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (\text{I} - 72\text{b})$$

Avec

$$\omega_p = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (\text{I} - 73)$$

Après avoir présenté notre le lagrangien d'un champ scalaire réel libre, nous allons maintenant passer au deuxième chapitre qui traite le lagrangien d'un champ scalaire en interaction.

Références I :

- [1] S. Kouidri 'Théorie quantique et renormalisation' polycopie en préparation.
- [2] MAHSER ZAHIRA mémoire de master Résolution numérique de l'équation de Dirac 2017
- [3] BENBRAHIM KHALED Ibn El WALID Mémoire de master Résolution numérique de l'équation de Klein-Gordon 2016
- [4] Livre Théorie des champs classiques Harold Erbine Notes de cours de Magistère M1, donné par M. Nitti.
- [5] HOLSTEIN, Barry. Topics in Advanced Quantum Mechanics, Addison Wesley publishing company, 1991.
- [6] P.G. Drazin and R.S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1989.
- [7] Jan Govaerts, An introduction to quantum physics et relativiste quantum field theory, Un-published manu script, 2008.

Chapitre II

Lagrangien d'un champ scalaire lié

I.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons vous exposer le formalisme du lagrangien d'un champ scalaire en interaction c'est-à-dire en présence d'une source de courant $j(x)$. Les nouvelles équations qui en résultent proviennent de la présence de la source $j(x)$. Nous en donnerons ici un bref aperçu. Nous introduisons notre travail par formalisme de lagrangien Ensuite, nous esquissons la fonction de Green et écriture l'équation de Klein-Gordon dans l'espace des phases et finalement nous calculons l'hamiltonien du système.

II.2. Lagrangien d'un champ scalaire en interaction

II.2.1 Formalisme de lagrangien

En partant du lagrangien spécifiant la source j [1]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + j\varphi \quad (\text{II} - 1)$$

II.2.2 Les équations d'Euler Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = j(x) \quad (\text{II} - 2)$$

En injectant les dérivées nous obtenons :

$$-m^2 \varphi - \partial^\mu \partial_\mu \varphi = j(x) \quad (\text{II} - 3a)$$

$$-m^2 \varphi - (\partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i) \varphi = j(x) \quad (\text{II} - 3b)$$

On obtient que

$$-m^2\varphi - (-\partial_i^2 + \partial_0^2)\varphi = j(x) \quad (\text{II} - 4a)$$

$$(m^2 + \partial_i^2 - \partial_0^2)\varphi = j(x) \quad (\text{II} - 4b)$$

On trouvera notre fameuse du mouvement qui n'est autre que l'équation de Klein-Gordon en présence d'une source:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = j(x) \quad (\text{II} - 5a)$$

$$\square\varphi + m^2\varphi = j(x) \quad (\text{II} - 5b)$$

$$(\square + m^2)\varphi = j(x) \quad (\text{II} - 5c)$$

Remarquons que si $j \neq 0$ alors $\varphi = 0$ n'est plus solution.

II.3.Méthode de résolution

II.3.1.Les Fonctions de Green

La meilleure méthode qui nous permettra de déterminer avec beaucoup plus de précision est la méthode des fonctions de Green $G(x, y)$ de l'équation Klein-Gordon déjà mentionnée au chapitre I [2]

Alors en formalisant notre équation sous la relation de base suivante :

$$-(\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2)G(x - y) = \delta^{(4)}(x - y) \quad (\text{II} - 6a)$$

$$(\square_x + m^2)G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) \quad (\text{II} - 6b)$$

Avec $y = \acute{x}$

Nous utilisons la transformée de Fourier de G :

$$\tilde{G}(k) = \int d^4x e^{ikx} G(x) \quad (\text{II} - 7)$$

Nous aboutissons à une équation écrite dans l'espace des k :

$$-(\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2)\tilde{G}(k) = (k_0^2 + k^2 + m^2)\tilde{G}(k) \quad (\text{II} - 8a)$$

$$= (|k|^2 + m^2)\tilde{G}(k) = 1 \quad (\text{II} - 8b)$$

Avec $k^2 \neq m^2$

Il est bien entendu que la transformée de Fourier de $G(x)$ est donnée suivant la relation précédente (II – 8b)

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{(|k|^2 + m^2)} \quad (\text{II} - 9)$$

Qui se déduit par:

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{|k|^2 + m^2} \quad (\text{II} - 10)$$

Si $m^2 = 0$, on déduit :

$$G(x - y) = \frac{1}{4\pi|x - y|^2} \quad (\text{II} - 11)$$

Revenons à ce que nous avons fait au début en réécrivant notre champ scalaire en fonction des fonctions de Green suivant l'expression :

$$\varphi(x) = \int d^4y G(x, y)j(y) + \varphi_0(x) \quad (\text{II} - 12)$$

Où φ_0 est solution de l'équation sans source dans le chapitre I(I – 8).

Et essayant de montrer qu'il s'agit en effet d'une seule solution :

$$(\square_x + m^2)\varphi = (\square_x + m^2) \int d^4y G(x, y)j(y) + (\square_x + m^2)\varphi_0(x) \quad (\text{II} - 13a)$$

$$= \int d^4y (\square_x + m^2)G(x, y)j(y) + 0 \quad (\text{II} - 13\text{b})$$

$$= \int d^4y \delta^{(4)}(x - y)j(y) = j(x) \quad (\text{II} - 13\text{c})$$

Ce qui bien vérifié.

II.3.2. Les opérations de symétrie

Parmi les opérations qu'on va les utiliser dans notre travail on trouve la translation :

$$x \rightarrow x + a \quad (\text{II} - 14\text{a})$$

$$y \rightarrow y + a, \quad (\text{II} - 14\text{b})$$

La fonction de Green est invariante sous cette transformation car elle dépend que de la différence $(x - y)$ en effet :

$$G(x, y) = G(x - y) \quad (\text{II} - 15)$$

II.3.3. L'écriture de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace des phases

Après l'utilisation de la transformée de Fourier de l'équation (II - 8), on trouve :

$$(-k^2 + m^2)\tilde{G}(k) = (-k_0^2 + \omega^2)\tilde{G}(k) = 1 \quad (\text{II} - 16)$$

Nous avons impossible d'inverser cette équation à cause du fait qu'elle n'est pas définie pour $k^2 = m^2$: une solution est de déformer le contour C et d'intégrer dans \mathbb{C}

$$G_C = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int_C \frac{dk_0 e^{-ik_0 t + ik \cdot x}}{-k_0 + \omega^2} \quad (\text{II} - 17)$$

Mais G n'est alors pas défini de manière univoque.

Il reste ensuite à refermer le contour par un demi-cercle, en prenant garde à ce qu'il ne contribue pas à l'intégrale : pour ce faire, il faut que la partie réelle de l'argument de l'exponentielle soit négative :

$$\Re(-ik_0 t) = t\Im(k_0) < 0 \quad (\text{II} - 18)$$

Donc

$$\begin{cases} t > 0 \Rightarrow \Im(k_0) < 0 \\ t < 0 \Rightarrow \Im(k_0) > 0 \end{cases} \quad (\text{II} - 19)$$

Et ainsi que

$$e^{-ik_0 t} = e^{it\Re(k_0)} e^{t\Im(k_0)} \xrightarrow{|k_0| \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{II} - 20)$$

II.4. Fonctions de Green avancée et retardée

Nous utilisons la distribution $\Delta(x, y)$ pour construire les fonctions de Green avancées et retardées de l'opérateur de K-G ($\square + m^2$) [3]

$$\begin{cases} G_1(x - y) = \theta(y_0 - x_0)\Delta(x, y), (\square_x + m^2)G_1(x - y) = \delta^4(x - y) \\ G_2(x - y) = -\theta(x_0 - y_0)\Delta(x, y), (\square_x + m^2)G_2(x - y) = \delta^4(x - y) \end{cases} \quad (\text{II} - 21)$$

Les contours C_1 et C_2 de la (*Figure-1*) permettent de définir les fonctions avancée G_1 et retardée G_2 , avec les propriétés suivantes

$$\begin{cases} -G_1(t - \hat{t}, x - y) = 0 \text{ si } t > \hat{t} \\ -G_2(t - \hat{t}, x - y) = 0 \text{ si } t < \hat{t} \end{cases} \quad (\text{II} - 22)$$

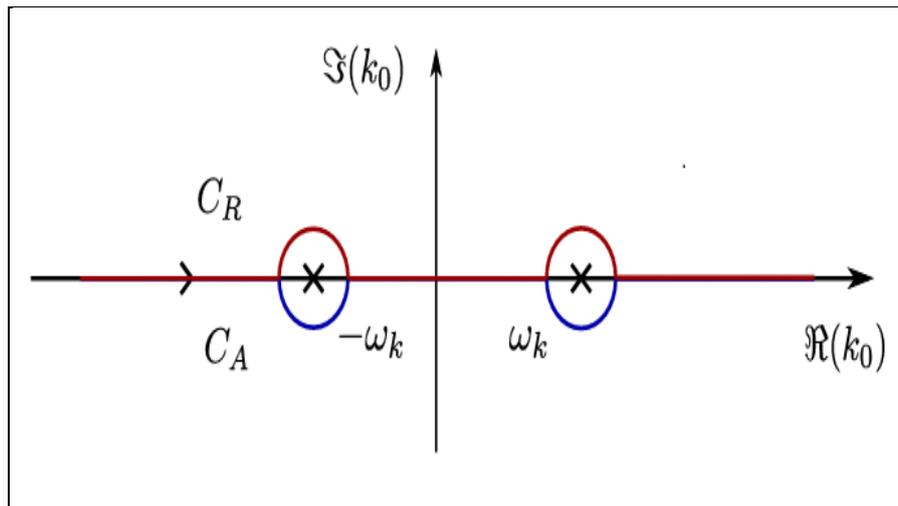


Figure II-1 Possibilités de déformation du contour d'intégration.

Nous commençons par étudier la fonction de Green retardée G_2 .

Cette dernière est nulle pour $t > 0$ car le contour ne contient aucun pôle (Figure- 2) et donc l'intégrale est nulle.

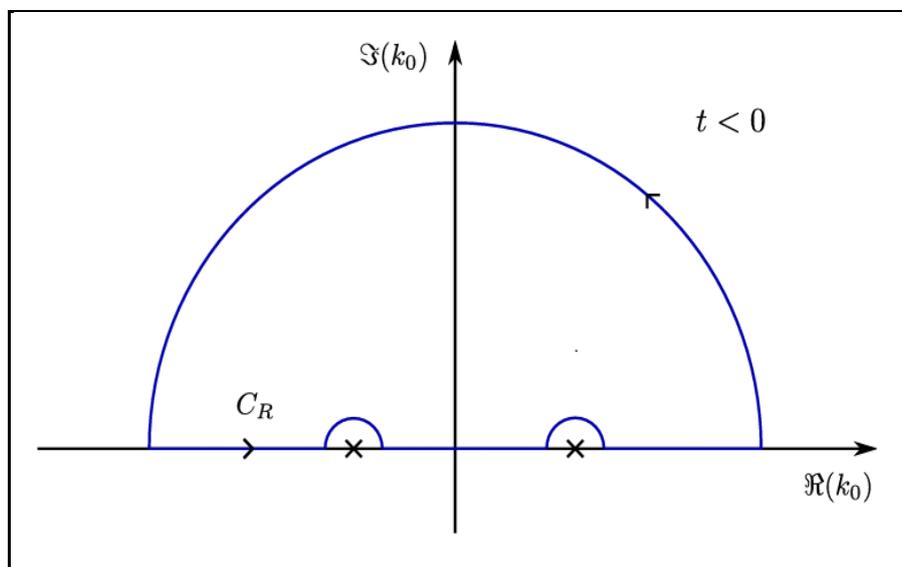


Figure II-2 Contour d'intégration pour la fonction de Green retardée (G_2) Avec $t < 0$.

Considérons maintenant la valeur de l'intégrale pour $t < 0$ (Figure-3)

$$G_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int_{CR} \frac{dk_0 e^{-ik_0 t + ik \cdot x}}{2\pi (-k_0^2 + \omega_k^2)} \quad (\text{II} - 23a)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot x} \int_{CR} \frac{dk_0 e^{-ik_0 t}}{2\pi (\omega_k + k_0)(\omega_k - k_0)} \quad (\text{II} - 23b)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{ik \cdot x} 2\pi i \left(\frac{e^{i\omega_k t}}{-2\omega_k} + \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} \right) \quad (\text{II} - 23c)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{ik \cdot x}}{2\omega_k} i(e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) \quad (\text{II} - 23d)$$

Pour tout les t , nous donnons la fonction de Green retardée:

$$G_2(t - \hat{t}, x - y) = \theta(t - \hat{t}) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k e^{ik \cdot x}}{2\omega_k} i(e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) \quad (\text{II} - 24)$$

Une autre procédure tout à fait équivalente à la déformation des contours consiste à déplacer les pôles d'une valeur $\pm i\varepsilon$ (Figure 4) en faisant tendre ε vers 0 à la fin :

$$\frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2} \rightarrow \frac{1}{(k_0 - i)^2 - \omega_k^2} = \frac{1}{(k_0 + (\omega_k + i\varepsilon))(k_0 - (\omega_k - i\varepsilon))} \quad (\text{II} - 25)$$

Nous donnons le champ par la fonction de Green retardée:

$$\varphi_2(t, x) = \int d^3y \int_{-\infty}^t dt G_2(t - \hat{t}, x - y) j(\hat{t}, y) \quad (\text{II} - 26)$$

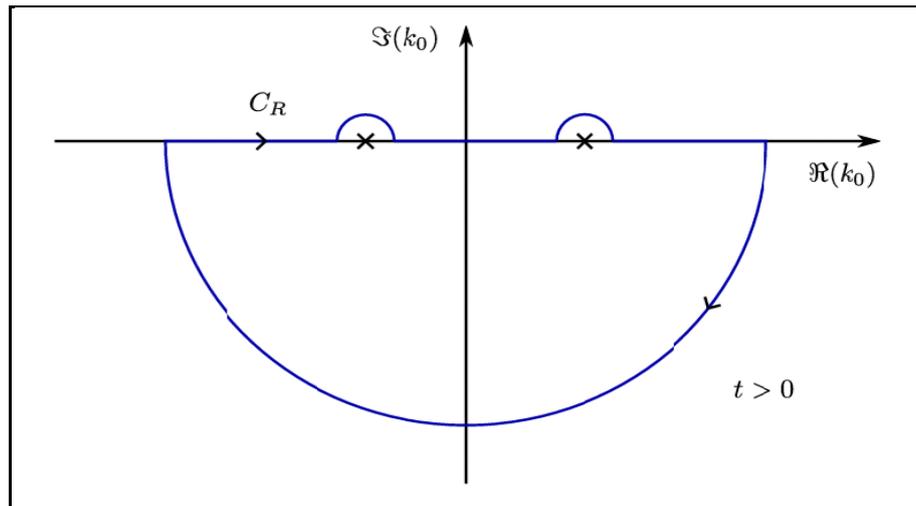


Figure II-3 Contour d'intégration pour la fonction de Green retardée avec $t > 0$.

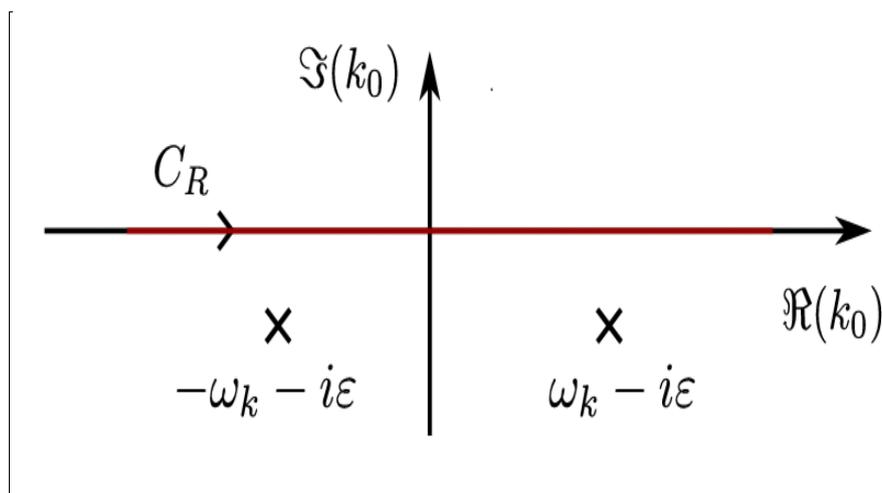


Figure II-4 Contour d'intégration, pour la fonction de Green retardée, avec les pôles déplacés.

La fonction de Green retardée donne l'effet de la source à un instant donné en prenant en compte tout ce qui s'est produit avant. Elle respecte ainsi la causalité.

Pour de fonction de Green retardée sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\tilde{G}_2(t, k) = \frac{i}{2\omega_k} (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) \theta(t) \quad (\text{II} - 27)$$

La fonction avancée possède une interprétation inverse de celle de la fonction retardée avec $\theta(t)$ est de Heaviside.

En connaissant le système au temps présent, il est possible de déterminer la source dans le passé :

$$\varphi_1(t, x) = \int d^3 y \int_t^\infty dt G_1(t - t, x - y) j(t, y) \quad (\text{II} - 28)$$

Pour la fonction de Green avancée sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\tilde{G}_1(t, k) = \frac{i}{2\omega_k} (e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}) \theta(-t) \quad (\text{II} - 29)$$

Nous rappelons l'expression de fonction Green retardée (II - 24)

Pour $m = 0$ on a $\omega_k = |k|$ et $|x| = t$

Donc

$$G_2(x) = i\theta(t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{ik \cdot x} - e^{-ik \cdot x}}{2\omega_k} \quad (\text{II} - 30)$$

Alors

$$G_2(x) = i\theta(t) \frac{\delta(t - |x|)}{4\pi|x|} \quad (\text{II} - 31)$$

En peut écrire le champ φ comme :

$$\varphi(t, x) = \int d^4 y G(x - y) j(y) \quad (\text{II} - 32a)$$

$$= \int d^3 y j(t - |x - y|, y) j(y) \frac{1}{4\pi|x - y|} \quad (\text{II} - 32b)$$

Ce qui donne :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{4\pi|x - x_0(t_1)|} \quad (\text{II} - 33)$$

Ou

$$t_1 = t - |x(t) - x_0(t_1)| \quad (\text{II} - 34)$$

II.5. L'hamiltonien du système :

L'hamiltonien pour un champ scalaire en interaction s'écrit via les équations des moments conjugués donnant les dérivés partiels du Lagrangien comme :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 - j\varphi \quad (\text{II} - 35)$$

La quantification de Hamiltonien revient à exprimer les champs φ et dans l'espace $\varphi(x)$

Ce qui donne l'hamiltonien comme :

$$\mathcal{H} = \int d^3k \left(\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) - j\varphi \right) \quad (\text{II} - 36)$$

Pour les fonctions de φ , nous terminons par calculer $\dot{\varphi}$ et $\nabla\varphi$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k i(-a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}) \quad (\text{II} - 37a)$$

$$\nabla\varphi = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} ik(a_k e^{-ikx} - a_k^* e^{ikx}) \quad (\text{II} - 37b)$$

Il est important d'utiliser des k différents dans l'intégration.

Nous calculons le premier terme en $\dot{\varphi}^2$:

$$\int d^3x \dot{\phi}^2 = \int d^3x \left(\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k i(-a_k e^{-ikx} + c.c.) \right) \left(\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3r i(-a_r e^{-ikx} + c.c.) \right) \quad (\text{II} - 38\text{a})$$

$$= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k d^3r \int d^3x (a_k a_r e^{-i(k+r)x} - a_k a_r^* e^{-i(k-r)x} + c.c.) \quad (\text{II} - 38\text{b})$$

$$= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k d^3r (a_r a_k \delta^{(3)}(r+k) e^{-i(\omega_k + \omega_r)t} - a_k a_k^* \delta^{(3)}(r-k) e^{-i(\omega_k - \omega_r)t} + c.c.) \quad (\text{II} - 38\text{c})$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k (-a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + c.c.) \quad (\text{II} - 38\text{d})$$

car $\omega_k = \omega_{-k}$, et de même on trouvera que :

$$\int d^3x (\nabla \phi)^2 = \int d^3x \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} ik(a_k e^{-ikx} + c.c.) \right) \times \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3r}{2\omega_r} ir(a_r e^{-rx} - c.c.) \right) \quad (\text{II} - 39\text{a})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3r}{4\omega_k \omega_r} \int d^3x (-kr) (a_r a_k e^{-i(k+r)x} - a_k a_r^* e^{-i(k-r)x} + c.c.) \quad (\text{II} - 39\text{b})$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3r}{4\omega_k \omega_r} kr (a_k a_r \delta^{(3)}(r+k) e^{-i(\omega_k + \omega_r)t} - a_k a_r^* \delta^{(3)}(r-k) e^{-i(\omega_k - \omega_r)t} + c.c.) \quad (\text{II} - 39\text{c})$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{4\omega_k^2} k^2 (-a_k - a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - a_k a_k^* + c.c.) \quad (\text{II} - 39\text{d})$$

Finalement :

$$\int d^3x \varphi^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k^2} m^2 (a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + c.c.) \quad (\text{II} - 40)$$

Pour une source de la forme delta de Dirac :

$$j(x) = r\delta(x - x_0) \quad (\text{II} - 41)$$

On conduit a

$$\tilde{j}(k) = \int d^3x e^{-ik.x} j(x) \quad (\text{II} - 42a)$$

$$\tilde{j}(k) = \int d^3x e^{-ik.x} r\delta(x - x_0) \quad (\text{II} - 42b)$$

$$\tilde{j}(k) = r e^{-ik.x_0} \quad (\text{II} - 42c)$$

En rassemblant les quatre termes dans une expression du l'hamiltonien, on obtient

$$\mathcal{H} = \int d^3k \left(\frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) - j\varphi \right) \quad (\text{II} - 43)$$

Finalement nous écrivons l'hamiltonien

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\omega_k^2} (-\omega_k^2 a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + \omega_k^2 a_k a_k^* \\ &\quad + (\omega_k^2 - m^2) a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + m^2 a_k a_k^* - r e^{-ik.x_0} \end{aligned} \quad (\text{II} - 44)$$

Après avoir quantifié notre hamiltonien qui correspond au lagrangien en interaction nous passerons au chapitre III ou à la place de J la source on prend une interaction en termes de φ^4 ce qui est l'objectif du dernier chapitre.

Références

[1] Harold Erbine Livre Théorie des champs classiques, donné par M. Nitti février 2011

[2] S. Koudri numérique 'Théorie quantique et renormalisation'

[3]HOLSTEIN, Barry. Topics in Advanced Quantum Mechanics, Addison Wesley publishing company, 1991.

Chapitre III

Résolution numérique de l'équation de Klein Gordon non linéaire

III-1. Introduction

Nous arrivons à la partie la plus laborieuse du travail, ou nous convertissons tout ce que nous avons vu dans les chapitres I et II d'un point de vue théorique à des équations numériques accessibles aux calculs. Pour cela réécrivons notre lagrangien et formant nos équations d'Euler Lagrange puis déterminant nos équations du mouvement [1-10].

Résoudre ces équations numériquement revient à construire un organigramme de calcul inspirés par un programme écrit en fortran 77 qui repose sur la méthode d'Euler. Nous utilisons alors, notre algorithme basé:

III-2. Méthode de calcul

Alors en partant de l'équation de lagrangien suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \quad (\text{III} - 1a)$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{4} \lambda \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 \quad (\text{III} - 1b)$$

Alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{4} \lambda \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 \quad (\text{III} - 2)$$

Les équations de d'Eluer Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III} - 3a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\lambda \left(\varphi^3 - \frac{m^2}{\lambda^2} \varphi \right) \quad (\text{III} - 3b)$$

$$= -\lambda\varphi^3 + \frac{m^2}{\lambda}\varphi \quad (\text{III} - 3\text{c})$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = \blacksquare \varphi \quad (\text{III} - 3\text{d})$$

Les équations du mouvement

$$\blacksquare \varphi = m^2 \varphi - \lambda \varphi^3 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (\text{III} - 4\text{a})$$

$$\blacksquare \varphi = 0 \Rightarrow m^2 \varphi - \lambda \varphi^3 = 0 \quad (\text{III} - 4\text{b})$$

Et

$$\varphi(m^2 - \lambda \varphi^2) = 0 \quad (\text{III} - 5)$$

III.3.La solution statique

Pour le cas statique nous avons posé $\ddot{\varphi} = 0$, alors l'équation

$$\blacksquare \varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (\text{III} - 6)$$

Qui donne la forme

$$\ddot{\varphi} = \frac{dV}{d\varphi} \quad (\text{III} - 7)$$

Accordé à l'équation $\blacksquare \varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, cette solution statique peut être en deux équations ainsi obtenus s'écrivent comme :

$$\begin{cases} \varphi(x) = -m/\sqrt{\lambda}; \text{ à } x \rightarrow -\infty \\ \varphi(x) = +m/\sqrt{\lambda}; \text{ à } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (\text{III} - 8)$$

Chapitre III Résolution numérique de l'équation de K G non linéaire

Finalement on obtiendra la fameuse expression :

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{dV}{d\varphi} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = V(\varphi) + C \quad (\text{III} - 9)$$

Ou C est une constante d'intégration asymptotique pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Nous avons

$$|\varphi| = |\varphi_0| = m/\sqrt{\lambda} \quad (\text{III} - 10)$$

Avec $\ddot{\varphi} = 0$,

Alors

$$V(\varphi_0) = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (\text{III} - 11)$$

Ce qui conduit :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \dot{\varphi}(x) = \pm\sqrt{2V(\varphi)} \quad (\text{III} - 12a)$$

$$dx = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}} \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}} \quad (\text{III} - 12b)$$

Avec

$$\sqrt{2V(\varphi)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)} \quad (\text{III} - 13)$$

Alors

$$x - x_0 = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)}} \quad (\text{III} - 14a)$$

$$x - x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{m^2} th^{-1} \left[\left(\frac{m^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \varphi(x) \right]_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \quad (\text{III} - 14b)$$

Ou x_0 est la valeur initiale et $\varphi(x_0)$ est une constante

La nouvelle solution s'obtient, alors comme.

$$\varphi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} th \left[\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) (x - x_0) \right] \quad (\text{III} - 15)$$

III.4 Méthode des différences finies

Pour résoudre numériquement l'équation de Klein-Gordon second terme, il semble pertinent d'appliquer la méthode de discrétisation de l'espace et des opérateurs. Sous les hypothèses $\varphi(x)$ qu'est au moins de classe C^2 , un développement de Taylor nous permet d'écrire les deux égalités suivantes [1différence finie]:

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^3) \quad (\text{III} - 16a)$$

$$\varphi(x - h) - \varphi(x) = -h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^3) \quad (\text{III} - 16b)$$

Le somme de ces deux égalités :

$$\frac{\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)}{h^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^2) \quad (\text{III} - 17)$$

Chapitre III Résolution numérique de l'équation de K G non linéaire

Apparaît alors équivalent discret de l'opérateur Δ (à une dimension, mais le cas à trois dimensions s'en déduit aisément). La précision de cette expression est en $O(h^2)$.

En discrétisant l'espace d'un pas "h" et en injectant le résultat précédent dans l'équation de Klein-Gordon, il vient :

$$\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} + f(x)\varphi(x) + O(h^2) = 0 \quad (\text{III} - 18a)$$

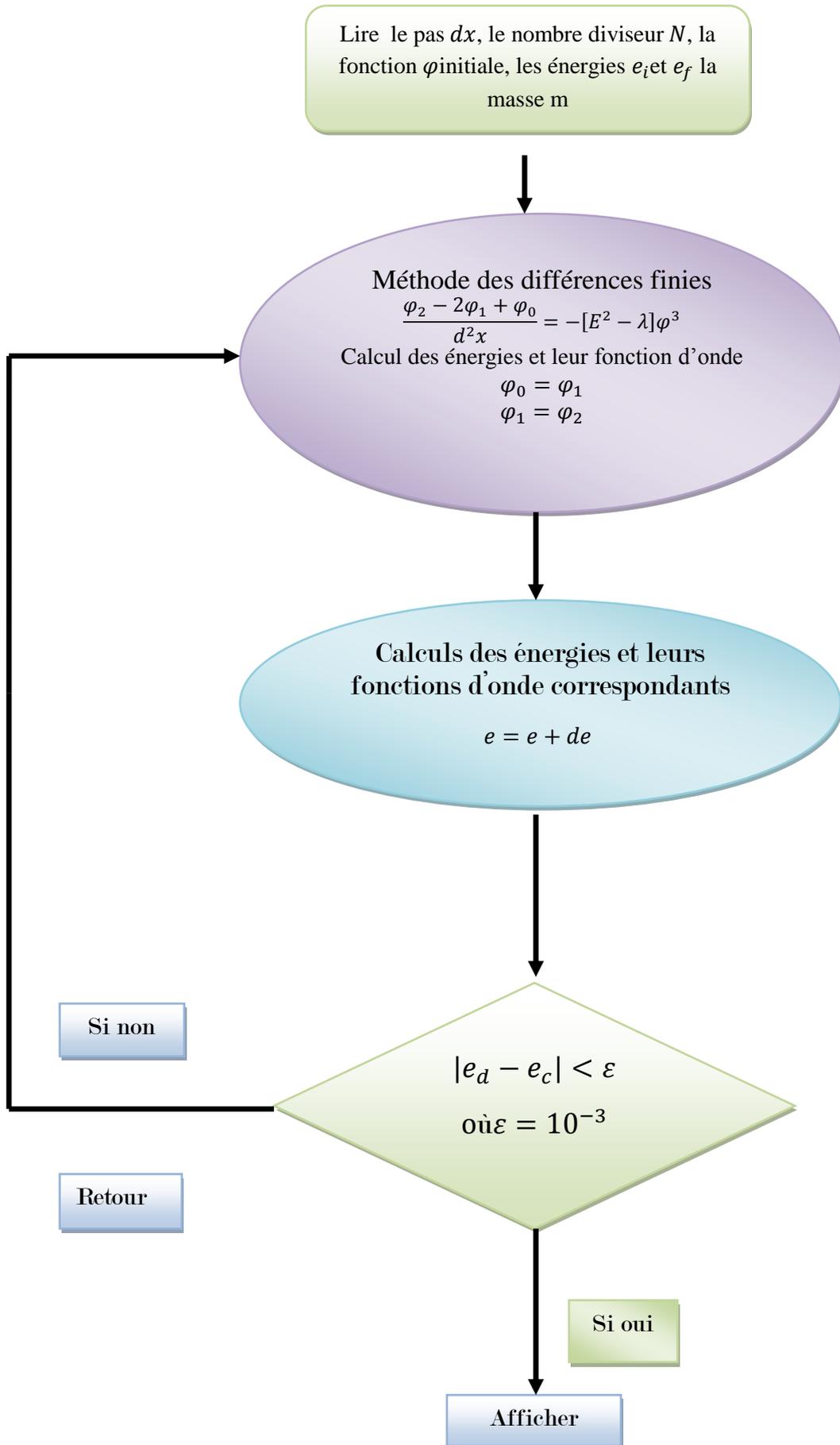
$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) + h^2 f(x)\varphi(x) + O(h^4) = 0 \quad (\text{III} - 18b)$$

Cette équation peut être réécrite de façon à faire apparaître une relation de récurrence entre les valeurs de φ aux nœuds du maillage. Le pas de la discrétisation est fixé à h et l'origine est définie par le point O .

Lors de la résolution numérique, l'algorithme débute à $x = -2h$. La connaissance des deux premières valeurs de φ_n (il s'agit de l'onde plane écrite précédemment) permet d'initier la récurrence qui donne accès à tous les φ_n .

III.5 Organigramme de calcul :

Chapitre III Résolution numérique de l'équation de K G non linéaire



Chapitre III Résolution numérique de l'équation de K G non linéaire

Nous commencerons par la résolution de l'équation Klein-Gordon second terme dans deux cas différents :

- Le cas où le second terme est nul, la particule serait libre.
- Le cas où le potentiel à une forme en ϕ^4 , la particule serait maintenant liée.

Revenons maintenant à notre fameuse équation:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \varphi(x) = 0 \quad (\text{III} - 19)$$

Cette équation équivalents la forme suivants :

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi(x, t) = 0 \quad (\text{III} - 20)$$

Car :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{E^2}{-\hbar^2} \text{ et } \nabla^2 = \frac{P^2}{-\hbar^2} \quad (\text{III} - 21)$$

Pour simplifier on a pris les unités suivantes (unité choisie en théorie des champs) :

$$\hbar = c \equiv 1$$

Revenons à ce que nous avons discutés dans l'organigramme et essayons à nouveau de re-déterminer les dérivées secondes de notre fonction :

$$\varphi(x + a) = \varphi(x) + a \frac{d}{dx} \varphi(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \quad (\text{III} - 22a)$$

$$\varphi(x - a) = \varphi(x) - a \frac{d}{dx} \varphi(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \quad (\text{III} - 22b)$$

Chapitre III Résolution numérique de l'équation de K G non linéaire

On faisant l'addition (III – 22) nous obtenons :

$$\varphi(x + a) + \varphi(x - a) = 2\varphi(x) + a^2 \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \quad (\text{III} - 23a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = \frac{\varphi(x + a) + \varphi(x - a) - 2\varphi(x)}{a^2} \quad (\text{III} - 23b)$$

En appliquant ce résultat à notre fonction $\varphi(x, t)$, on aura :

$$\varphi(x, t) \equiv \varphi(i, j) \quad (\text{III} - 24)$$

Ou i varie de 1 à N :

Laplacien s'écrit :

$$D1 = \Delta\varphi(x, t) = \Delta\varphi(i, j) = \frac{\varphi(i + 1, j) + \varphi(i - 1, j) - 2\varphi(i, j)}{h^2} \quad (\text{III} - 25)$$

De la même manière faisant varier j de 1 à N le Laplacien correspondant est :

$$\begin{aligned} D2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(i, j) \\ &= \frac{\varphi(i, j + 1) + \varphi(i, j - 1) - 2\varphi(i, j)}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{III} - 26)$$

Avec :

$$x_f = x_i + Nh \quad (\text{III} - 27a)$$

$$t_f = t_i + Nh \quad (\text{III} - 27b)$$

Le pas se calcule par :

$$h = \frac{x_f - x_i}{N} \quad (\text{III} - 27c)$$

L'équation de Klein Gordon deviendrait pour un cas libre :

$$(D2 - D1 + m^2)\varphi(x, t) = 0 \quad (\text{III} - 28)$$

Et à partir de ceci (III - 28) on peut déduire le cas lié ou la particule est totalement liée :

$$[P^2 + m^2 - E^2 - \lambda\varphi^2]\varphi(x) = 0 \quad (\text{III} - 29)$$

III.6. Résolution numérique

L'équation à résoudre est :

$$(\blacksquare + m^2)\varphi - \lambda\varphi^3 = 0 \quad (\text{III} - 30a)$$

$$\blacksquare\varphi = 0 \quad (\text{III} - 30b)$$

$$m^2\varphi = \lambda\varphi^3 \Rightarrow \varphi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{III} - 30c)$$

- 1. Je vais annuler $\blacksquare\varphi$ devant $m^2\varphi - \lambda\varphi^3$

$$m^2\varphi = \lambda\varphi^3 \Rightarrow \varphi = \frac{m^2}{\lambda} \quad (\text{III} - 31)$$

$\Rightarrow \varphi = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ Est une solution limite

- 2. Je vais annuler λ devant m^2

$$(\blacksquare + m^2)\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = e^{ik_\mu x^\mu} \quad (\text{III} - 32)$$

$\varphi = e^{ik_\mu x^\mu}$ Onde plane

- 3. Or notre problème est

$$(\blacksquare + m^2)\varphi - \lambda\varphi^3 = 0 \quad (\text{III} - 33)$$

Alors la solution de notre équation sera de la forme suivante

$$e^{ik_\mu x^\mu} \leq \varphi(x) \leq \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{III} - 34\text{a})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (m)^2 - \lambda |\varphi|^2 \right) \varphi = 0 \quad (\text{III} - 34\text{b})$$

$$\varphi = e^{ikx} \Rightarrow |\varphi|^2 = \varphi \varphi^* = 1 \quad (\text{III} - 34\text{c})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (m)^2 - \lambda \right) \varphi = 0 \quad (\text{III} - 34\text{d})$$

Avec

$$m'^2 = m^2 - \lambda \quad (\text{III} - 34\text{e})$$

Le nouveau champ $\varphi = e^{ik_\mu x^\mu}$

$$(\blacksquare + m'^2)\varphi = 0 \quad (\text{III} - 36\text{a})$$

$$(-k^2 + \omega^2 + m'^2)\varphi = 0 \quad (\text{III} - 36\text{b})$$

$$k^2 = \omega^2 + m'^2 \quad (\text{III} - 36\text{c})$$

$$k = \pm \sqrt{\omega^2 + m'^2} \quad (\text{III} - 36\text{d})$$

Avec

$$m' = \sqrt{m^2 - \lambda} \quad (\text{III} - 36\text{e})$$

III.7. Discussions des résultats

III.7.1 Utilisation les champs de forme de Gaussien comme base :

Soit la base formée par le champ suivant :

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^\mu x^\mu} \cdot e^{ik^\mu x_\mu} \quad (\text{III} - 37)$$

Chapitre III Résolution numérique de l'équation de K G non linéaire

Sur cette base nous développons notre champ solution de l'équation de Klein Gordon non linéaire comme :

$$\varphi(x) = a^\mu \varphi_\mu \quad (\text{III} - 38)$$

En injectant cette expression dans l'équation (III – 36a), nous aboutissons aux résultats suivants donnés par les figures au dessous.

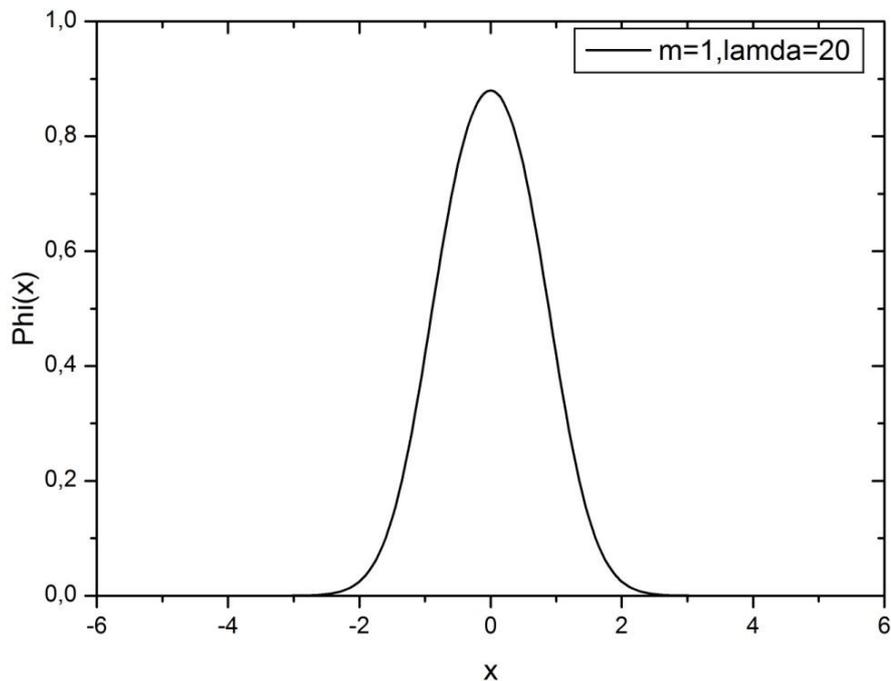


Figure III-1 Présentation du champ $\varphi(x)$ pour $\lambda = 20$

La forme du champ $\varphi(x)$ via cette figure III-1. Indique qu'au fur à mesure que x le champ est augmenté le champ $\varphi(x)$ diminue

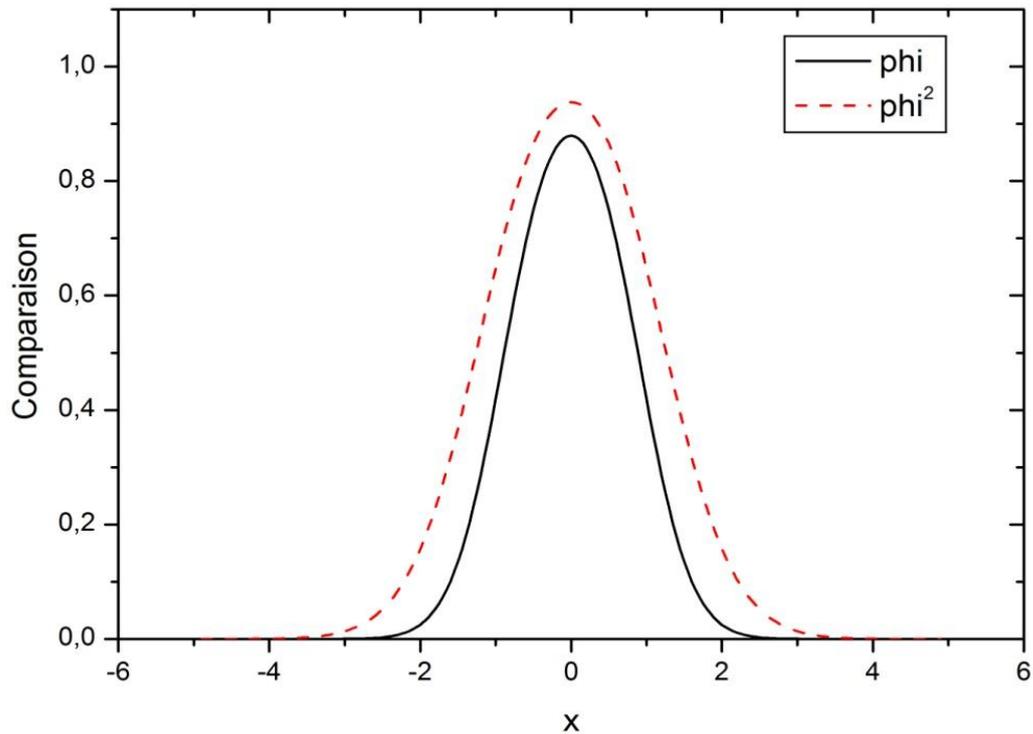


Figure III-2 Présentation du champ $\varphi(x)$ et de sa densité $|\varphi(x)|^2$

Les figures III-2 et III-3 montrent la variation du champ $\varphi(x)$ et de sa densité $|\varphi(x)|^2$

Notre figure indique qu'au fur à mesure x augmente le champ φ et sa densité ont une forme Gaussienne c'est-à-dire une montée et une descende caractérisée par un pic situé au centre.

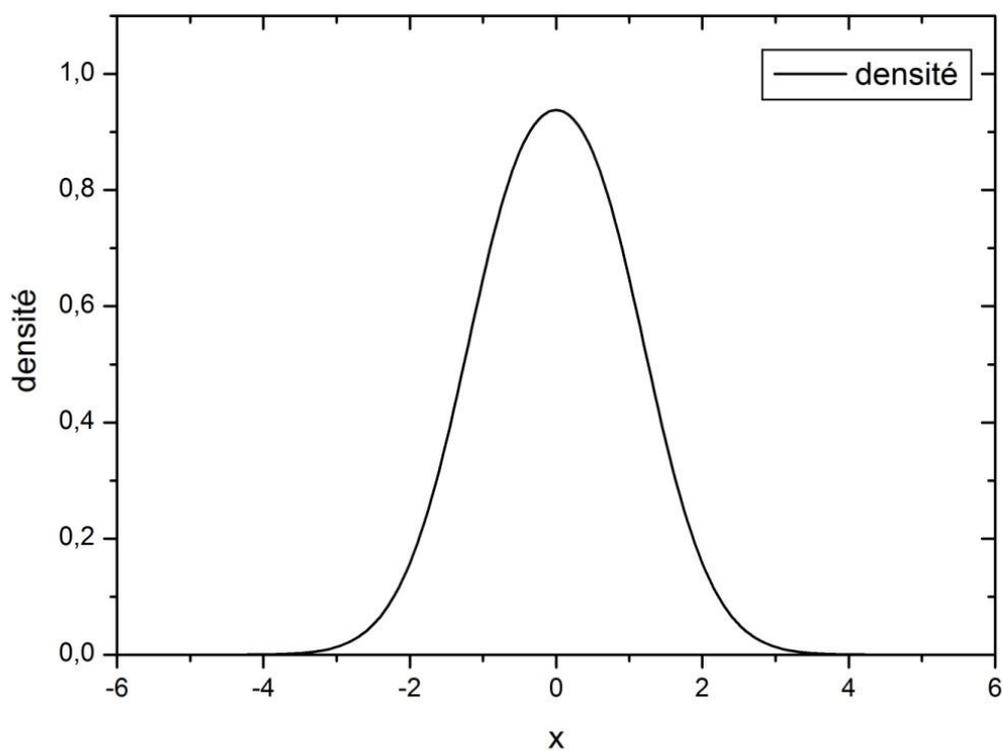


Figure III-3 : Présentation de la densité du champ

La figure III-3 La densité est augmentée pour $x = [-2,0]$ en amplitude et diminue en allure pour $x = [0,2]$

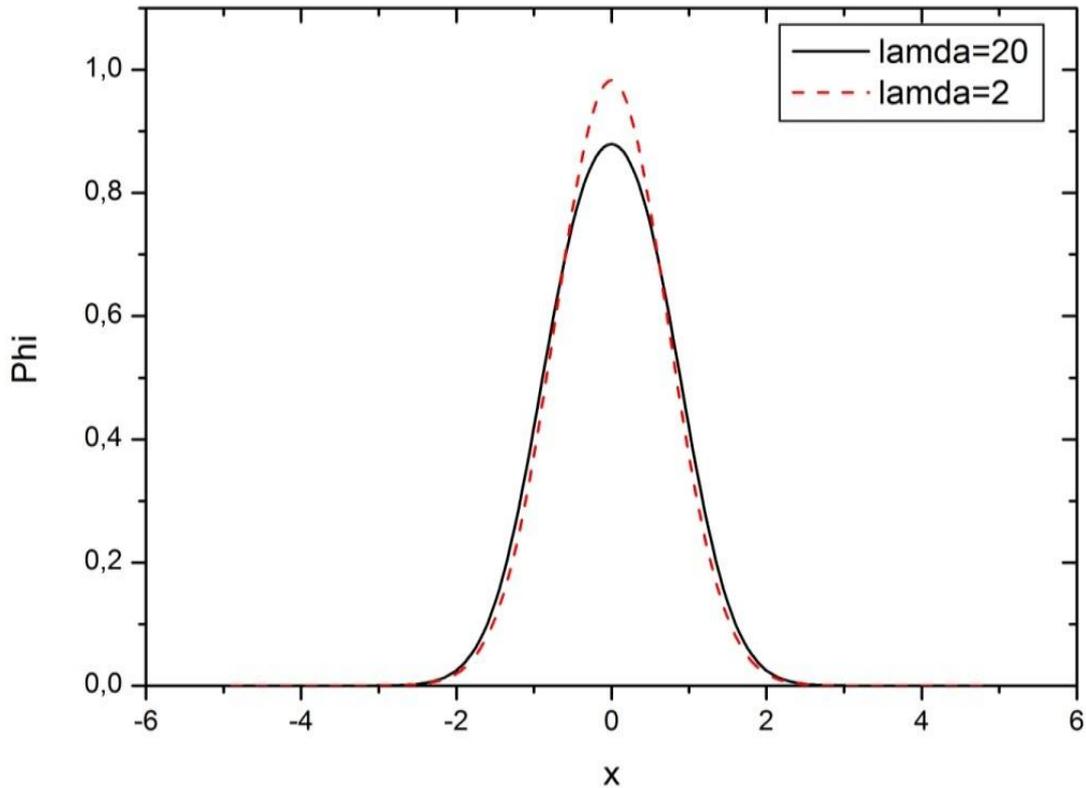


Figure III-4 Comparaison entre les courbes pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 20$

La figure III-4La comparaison entre les courbes pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 20$ montrent que tant que λ augmente les champs $\varphi(x)$ et leurs densité $|\varphi(x)|^2$ diminuent

III.7.2 Utilisation des champs de forme sinusoïdale

Construisant maintenant une base de la forme suivante

$$\varphi(x) = e^{ik^\mu x_\mu} \quad (\text{III} - 39)$$

Sur cette base nous développons notre champ solution de l'équation de Klein Gordon non linéaire comme :

$$\varphi(x) = a^\mu \varphi_\mu$$

En injectant cette expression dans l'équation (III – 36a), nous aboutissons aux résultats suivants donnés par les figures au dessous.

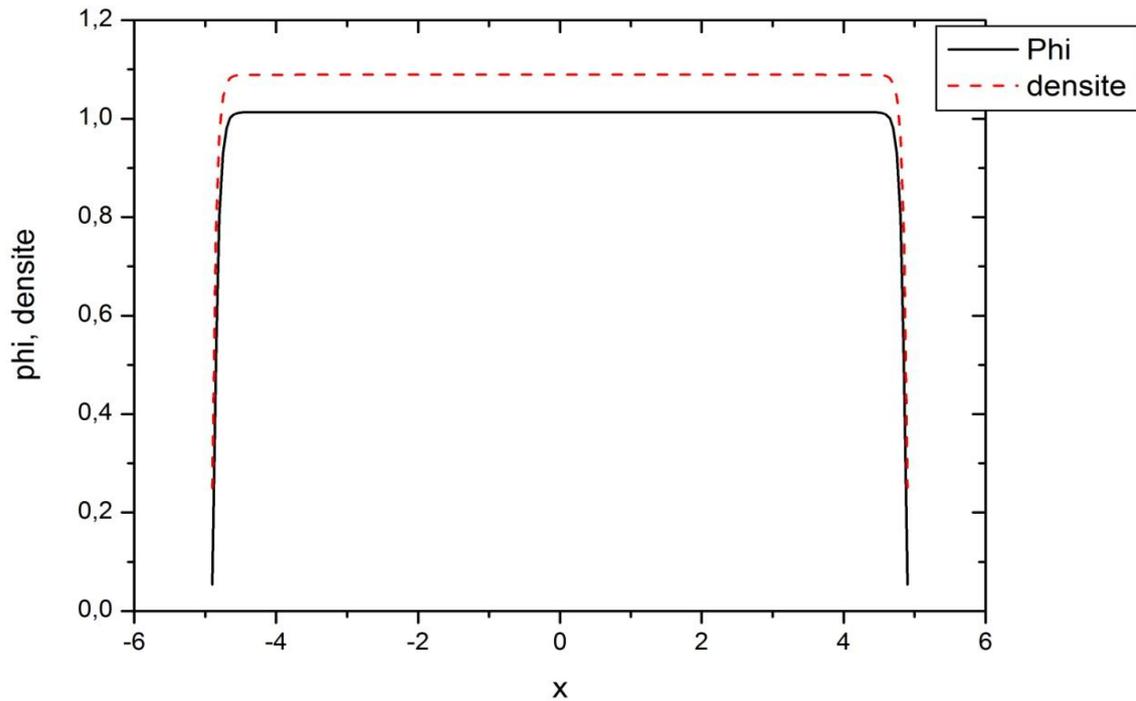


Figure III-5 La variation du champ $\varphi(x)$ et de sa densité

La figure III-5 montre la variation du champ $\varphi(x)$ sur l'intervalle $[-5,5]$ de $[-4,4]$ $\varphi(x)$ paraît constante et $[-5,-4]$ le champ augmente par contre de $[4,5]$ il diminue.

Nous arrivons maintenant à la finalisation de ce mémoire, où nous avons résolu notre équation de Klein-Gordon non rigoureusement. Nous avons tracé les profils du champ et de sa densité.

References III

- [1] P.G. Drazin and R.S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1989.
- [2] Maciej Dunajski, Solitons, instantons and twistors, Oxford University Press, 2010.
- [3] Jan Govaerts, An introduction to quantum physics et relativiste quantum eld théorie, Un-published manuscript, 2008.
- [4] V.G. Kiselev, Ya.M. Shnir, and A.Ya. Tregubovich, Introduction to quantum eld théorie, CRC PRESS, 2000.
- [5] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe (eds.), Topologique solitons, Cambridge Université Press, 2004.
- [6] William H. Press, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling, Numerical recépés in fortran 77, 2 ed., vol. 1, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
- [7] R. Rajaraman, An introduction to solitons and instantons in quantum eld theory, North-Holland, 1989.
- [8] More information about solitons, [http:// people. seas. Harvard. edu/ ~ Jones/solitons/ solitons. html](http://people.seas.harvard.edu/~Jones/solitons/solitons.html) .
- [9] Numérique méthodes, [http:// math. fullerton. edu/ mathews/ n2003/ Numérique Diff Formule Mod. html](http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/NumériqueDiffFormuleMod.html) .
- [10] Nouredine Zettili, Quantum mechanics concepts and applications, 2 ed., John Wiley & Sons Ltd, 2009.

Conclusion général

Conclusion général :

Ce travail de mémoire a été pour moi l'occasion d'aborder un certain nombre de solutions de l'équation de Klein Gordon non linéaire via des calculs numériques assez clair.

Nous avons en effet proposé de simplifier autant que possible la fonction Lagrangienne d'un champ scalaire libre et lié via les équations d'Euler Lagrange.

L'équation de Klein Gordon non linéaire était notre premier pas d'aborder ce travail d'une manière rigoureuse.

Sa solution numérique nous renseigne sur l'état du champ ainsi que sur sa densité de probabilité via des potentiels en ϕ^4 et afin de réaliser cet objectif nous avons dans un premier temps développé les lagrangiens des systèmes physiques en particulier pour un champ scalaire libre et en champ lié.

Le premier nous a permis d'aboutir à l'équation de Klein Gordon standard et le deuxième nous donne une équation de Klein Gordon non linéaire.

Notre dernière étape était basée sur la programmation où on écrit des programmes inspirés par le langage fortran 77 et à ce stade nous avons pu résoudre cette fameuse équation d'une manière numérique.

Enfin nous avons présentés nos résultats numériques via d'autres travaux donnés par les références situées auparavant où la conclusion était un bon accord avec ces derniers.

Conclusion général

References

- [1] Lalit K. Sharma, Pearson V. Luhanga and Samuel Chimidza
Potentials for the Klein-Gordon and Dirac Equations, Chiang Mai J. Sci.
2011; 38(4) : 514-526.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le formalisme du lagrangien en champ scalaire libre et lié, ou nous avons introduit pour le cas du champ lié un terme en. L'équation résultante était de Klein-Gordon non linéaire. Nous avons résolu notre équations d'une manière rigoureuse et nous avons présente nos résultats numérique.

Enfin, nous avons abordé la résolution numérique en s'appuyant sur le programme nommé Fortran 77 qui calcule le coefficient de transmission, qui nous a aidé à ressortir les calcules

Mots clés: théorie des champs, champs scalaire libre et lié, formalisme de lagrangien et hamiltonien, équation d'Euler Lagrange, l'équation de Klein-Gordon

Abstract

In this works, west u died the formalism of the Lagrangian in free and bound scalar field, or we have introduced for the case of the bound field a term in. The resulting equation was Klein-Gordon nonlinear. We solve dour equations in a rigorous way and presented our numerical results.

Finally, we approached the numerical resolution by relying on the program named Fortran 77 which calculates the transmission coefficient, which helped us to highlight the computations.

Key words: field theory, free and bound scalar fields, Lagrangian and Hamiltonian formalism, Euler Lagrange equation, Klein-Gordon equation

ملخص:

في هذا العمل، درسنا شكلية لاغرانج في مجال عددي الحر والمحدد، وقدمنا حالة الحقل المربوط مصطلحًا في. المعادلة الناتجة كانت من كلاين جوردون غير خطية. لقد حللنا معادلاتنا بطريقة دقيقة وقدمنا نتائجنا العددية.

وفي الأخير اقتربنا من القرار العددي بالاعتماد على البرنامج المسمى Fortran 77 الذي يحسب معامل الإرسال، والذي ساعدنا في تسليط الضوء على الحسابات.

الكلمات المفتاحية: نظرية المجال، الحقول العددية الحرة و المحددة، الشكلية اللاغرانجية والهاملتونية، معادلة اويلر لاغرانج، معادلة كلاين جوردون