République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Modèle de Black et Scholes avec sauts

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Moulay Tahar - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse stochastique, statistique des processus et applications (ASSPA)

par

Hocine Bahri

Sous la direction de

Dr. Mlle. F. Benziadi

Soutenu le 25/06/2018 devant le jury composé de

Dr. W. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreure
Dr. M. Laouni	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Pr. A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

REMERCIEMENTS

C'est un réel plaisir pour moi d'écrire ces lignes par lesquelles je tiens à remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de diverses manières, à ce travail.

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde gratitude à Mademoiselle ***Fatima Benziadi****, je lui remercie vivement pour son chaleureux intérêt et la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être encadreur de mon mémoire de master.*

Je tiens aussi à remercier Monsieur ***Abdeldjebbar Kandouci*** *pour ses encouragements et son aide précieux.*

J'adresse aussi mes remerciements à tous les enseignants du département de Mathématiques ainsi qu'à tous les membres du laboratoire LMSSA de l'université de Saïda, et particulièrement à Monsieur le Chef de département ***Djelloul Djebbouri****.*

Merci à ma mère, mon père, m'amie et toute ma famille de m'avoir soutenu avec beaucoup d'affection.

Table des matières

Introduction

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (corporate finance) et la finance de marché (market finance). La finance d'entreprise utilise essentiellement des mathématiques simples alors que la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques. Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier intitulée "Théorie de la spéculation" et soutenu à la Sorbonne en 1900, cette approche fut oubliée durant près trois quarts de siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black et Scholes. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu, et d'autre part celle des stratégies à temps continues pour la couverture de risque en finance.

Une des caractéristiques du modèle de Black et Scholes est que le prix de l'action est une fonction continue de temps, or certains évènements rares peuvent entraîner des variations brutales des cours. Pour mieux modéliser les risques associés à ces variations soudaines des prix de marché, on utilise les processus à trajectoires discontinues, dits "Processus de sauts".

Le but de ce travail est justement l'étude de ces processus dits avec sauts afin de trouver l'évaluation et la couverture des produits dérivés. Pour cela, on va introduire ces notions : calcul stochastique, mouvement Brownien, processus de Lévy pour atteindre ce but.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Une introduction où on situe notre travail et son plan.

Le premier chapitre est consacré à la présentation nomenclature de la finance.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les principales notions de calcul stochastique qui est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continu remplacent les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes utilisées dans le modèle de Black et Scholes à temps continu, qu'on va l'étudier en détail au prochain chapitre.
Dans le troisième chapitre, après l'obtention de la notion d'arbitrage et la relation de parité call-put, on étudie le modèle de Black et Scholes à temps continu, où l'intégrale stochastique va jouer un rôle important dans cette modélisation, en particulier, pour obtenir des formules explicites des prix d'options européennes et une couverture parfaite.
Le quatrième chapitre est consacré au calcul stochastique avec sauts. Le processus de Lévy va jouer un rôle important du fait que ces trajectoires sont discontinues contrairement au mouvement Brownien. On montre que le processus de Lévy se décompose en deux parties, une partie martingale et une autre partie à variation bornée, qui n'est rien d'autre qu'une semi martingale dont on va introduire l'intégrale par rapport à celle-ci.
Dans le cinquième chapitre, on applique les notions du chapitre précédent à la finance qui repose sur des idées analogues à celles déjà présentées dans le cadre des modèles continus. En effet, on calcule les prix des options européennes par la méthode de transformée de Fourier.

Chapitre 1

Vocabulaire des marchés financers

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (corporate finance) et la finance de marché (market finance). La finance d'entreprise utilise essentiellement des mathématiques simples alors que la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques. Nous verrons dans ce chapitre que la notion fondamentale de la finance de marché est le risque et que les mathématiques produisent des outils efficaces de gestion de risque. Ces notion sont tirées essentiellement de [9].

1.1 Marché et actif financier

Définition 1.1.1. *Le marché financier est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers (ou bien actifs financiers).*

1.1.1 Actifs financiers

Les actifs financiers sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent.

– Une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, ou un autre produit dérivé), appelé actif sous-jacent (underlying asset).

– Prix d'un titre financier (price) : est le montant convenu entre les deux parties en échange du titre.
– Maturité ou échéance (Maturity) : c'est la date à laquelle l'échange doit avoir lieu.
– Prix de livraison ou prix à terme (dettlement price or forward price) : le prix auquel l'actif sous-jacent est échangé.

Les transactions peuvent être directes entre le broker et le client (over the counter) ou sur une place financière organisée telle qu'une bourse (stock exchange).
Une bourse est un marché financier institutionnel avec un règlement spécifique choisi de manière à améliorer les conditions des transactions.

1.1.2 Rôle des marchés financiers

Les principales caractéristique d'un marché financier sont :
– La rencontre de deux contreparties (vendeurs et acheteurs).
– La cotation continue des produit financiers.
– L'élaboration de bonnes conditions pour les transactions, en prenant en compte les objectifs opposés des acteurs marché.

1.1.3 Principaux marché

Il s'agit, par ordre de volumes négociés décroissants :
– Marché de taux d'intérêt, c'est-à-dire les marchés de la dette, qu'il est d'usage de séparer en : Marché monétaire pour les dettes à court terme (moins d'un, deux ou mêmes parfois trois ans à émission). Marché obligataire pour les dettes originellement à moyen ou long terme ; Marché des changes, ou Forex, où l'on échange des devises les unes contre les autres.
– Marché d'actions, c'est-à-dire des titres de propriété des entreprises ;
– Et enfin, par tradition, à la frontière avec les marchés organisés de produits de base (en anglais : commodities), les marchés de deux métaux précieux, or et argent, bien qeu ceux-ci soient de moins en moins monétisés et que leurs marchés soient en fait minuscules en regard de la taille désormais atteinte par les autres marchés.

1.1.4 Produit primaire

un produit primaire est un titre avec une rémunération indépendante de tout autre titre. Il exisite deux types de produits primaires : les actions et les obligations.

Obligation (bond)

L'obligation est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de defaut (default risk) est supposé inexitant lorsque l'obligation est émise par l'état, celle-ci est échangée sur les marchés obligataires. Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du montant nominal (la somme empruntée) puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue. Une obligation est déterminée par :
– Une durée.
– Un taux d'arrêt.
– Coupons : ce sont des montants versés par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance et qui correspondant à des intérêts sur le nominal. D'autre terme, le revenu perçu par le détenteur d'une obligation est dit "intérêt" et d'une action est "dividende".

Obligation zéro-coupon (zéro-coupon bond)

Obligation zéro-coupon (zéro-coupon bond) est une obligation qui ne verse pas des coupons, donc à l'échéance, seul le nominal est remboursé. Lorsqu'il ya suffisamment de zéro-coupons, il est possible de construire la courbe des taux de rentabilité annuelle en fonction des échéances, appellée courbe des taux zéro-coupon par terme (zéro-rate curve). Lorsque cette courbe est croissante, cela signifie que le marché attend une rentabilité d'autant plus grande que l'échéance est lointaine, c'est à dire le risque de taux est important. Au contraire, une courbe décroissante signifie que le marché anticipe une baisse des taux. Une courbe plate n'existe jamais en pratique mais signifierait qu'un taux d'arrêt constante dans le temps. On va considérer cette derniére comme hypothèse par la suite pour simplifier les modèles.

Action (share)

Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable.

- Le prix d'une action devient est définit par sa cotation en bourse. Une action peut être vendu ou achetée à n'importe quel moment (pendant les heures d'ouverture la bourse).
- Le détenteur d'une action devient un associé, proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, l'actionnaire a des droits sur :
  - Le management,
  - Les bénéfices,
  - L'actif social.
- Les émetteurs des actions sont des entreprises. L'émission d'actions permet de recouvrir son investissement initial et ses bénéfices.
- Une action est un produit trés volatile, lié à la fois aux perfomances de l'entreprise et à la situation du marché. sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande sur les marchés financiers.

1.1.5 Produit dérivé

Un produit dérivé (dérivative) ou actif contingent est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, appelé l'actif sous-jacent. Il existe une multitude de produits dérivés. Les principaux exemples sont les futures, les forwards et les options.

Contrat a terme (forward)

Est un contrat qui donne à l'investisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

Future (futur)

Ce sont des contrats à terme négociables. Il ya une petite différence entre contrats à terme et les futures :

- Le forward est payé à maturité, alors que le future est marqué au marché.

- Le contrat futur est échangé sur un marché organisé, le contrat à terme est de gré à gré.
- Les prix du future et celui du forward sont différents lorsque les taux sont stochastiques.

Option

Un titre est appelé option d'achat (call) ou option de vente (put). Le sujet porte sur le prix d'une option. Nous nous concentrations maintenant sur ce produit ses principales caractéristiques sont

- Le strike, noté K : prix d'exercice de l'option, qui est choisi et fixé à l'instant initial.
- Le prix de l'option : prime de risque plus marge de l'intermédiaire.
- La date d'expiration : notéé T : fin de la période, elle aussi fixée à l'instant initial.
- La fonction payoff : fonction qui détermine la transaction finale.
- Des contraintes annexes. Par exemple, si le sous-jacent passe un certain niveau, le contrat s'annule (option barrière).

Les options les plus simples, et généralement les plus liquides (les plus vendues), sont les calls et les puts de types européens ou américains. Ces options sont souvent appelées options vanilles. Les autres options, appelées options exotiques, sont généralement beaucoup plus difficiles à preciser. Les options peuvent être utilisées :

- Soit en couverture de risque de baisse ou hausse,
- Soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent,
- soit pour spéculer sur la votalité.

Option européenne

Contrat qui donne à son détenteur (celui qui achète le contrat) le droit et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier (sous-jacent) à un prix fixé ou prix d'exercice (strike price) à une date fixée à l'avance (maturité).

Option américaine

Contrat qui donne à son détenteur le droit, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix et jusqu'a une date fixée à l'avance.

Ce droit lui même s'achète ou se vend, cela sur un marché d'options (une bourse spécialisée ou au gré à gré), contre un certain prix, appelé prime en francais et premium en anglais.

1.1.6 Théorie de portefeuille

Un portefeuille est un ensemble de titres (actions, obligations,$cdots$) détenu par un investisseur. Les principales problématiques de la gestion d'un porteffeuille sont :

- Comment minimiser le risque et maximiser le rendement ?
- Comment calculer le rndement espéré associé à un risque ?
- Quelle est la performance d'un porteffeuille ?

Pour simplifier l'analyse, nous prenons un marché avec les hypothèses suivantes :

- Le marché est sans arbitrage.
- Les brokers ont un comportement rationnel.
- Il existe une unique loi de propalité qui explique les comportements futurs des marchés financiers.

On peut considérer que les marchés en déhors de ces hypothèses sont des cas particuliers.

1.1.7 Hypothèse de marché

Hypothèse de non arbitrage

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future . Cette hypothèse est appelée absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A), et est justifiée par l'existence d'arbitragistes, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter. Ceux-ci créent alors une force qui tend à faire évoluer le prix de l'actif vers son prix de non-arbitrage.
Il n'existe pas beaucoup d'arbitrages sur les marchés développés. De plus, si un arbitrage apparaît les traders prennent avantage de celui-ci et donc il disparaît.

Arbitrage et prix unique

Dans le modèle de Black-Scholes dont nous parlerons avec détails au chapitre 3, le prix et la stratégie de couverture sont uniques. L'unicité est garantie par l'absence d'arbitrage sur les marchés. Illustrons ce résultat à travers le prix d'un call européen. Dans le modèle de Black-Scholes, une option est sans risque puisque la stratégie de couverture élimine complètement le risque de l'option.
la valorisation d'une option dépend ainsi principalement des éléments suivants :

1. du sous-jacent, en particulier.
2. de son prix.
3. de la volatilité de ce prix.
4. de la durée jusqu'à l'échéance.
5. des taux d'intérêt.

Marché viable

Le marché est viable s'il y a une absence d'opportunité d'arbitrage.

Marché complet

Une autre hypothèse, beaucoup plus remise en question, est que tout flux à venir peut être répliqué exactement, et quel que soit l'état du monde, par un portefeuille d'autres actifs bien choisis. Les modèles ne comprenant pas les hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés sont dits modèles de marchés imparfaits.

Probabilité martingale

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite probabilité martingale ou probabilité risque-neutre telle que le processus de prix des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

1.1.8 Valorisation (Evaluation)

La valorisation (pricing) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur, ne pas "mettre en exploitation" ou bien à "augmenter la valeur" comme l'indiquent les dictionnaires, mais simplement à évaluer. La notion d'arbitrage fournit un premier moyen de le faire.

Le problème d'évaluation des produits dérivés

L'évaluation (on dit aussi valorisation) des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix aujourd'hui d'un actif dont on ne connaît le prix qu'à une date future. Il se ramène donc au calcul d'une espérance conditionnelle.

Valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage

la valorisation des options est moins aisée que celle des contrat à terme dont la valeur pouvait être déterminée à partir d'un raisonnement par arbitrage. Par A.O.A la valeur d'une option est toujours supérieure à celle du contrat à terme correspondant puisque c'est le cas à l'échéance.

1.1.9 Stratégie de couverture

- L'achat d'un call (long call) permet de se prémunir contre une hausse éventuelle du sous-jacent.
- De même, le détenteur du sous-jacent pourra se prémunir contre une baisse de celui-ci en achetant un put (long put).

Dans ce cas, cette position de l'agent est une stratégie de couverture du sous-jacent.

- L'achat d'un call ou la vente d'un put (short put) peuvent également être des stratégies de spéculation à la hausse du sous-jacent.
- De même, la vente d'un call (short call) ou l'achat d'un put sont des stratégies plus complexes, par exemple l'anticipation d'une variation du sous-jacent dans un sens

indéterminé (à la hausse ou à la baisse) peut conduire à acheter simultanément un call et un put à la monnaie c'est à dire le prix d'exercice est égale au prix de marché actuel.

Donc, la couverture (hedging) est une protection contre le risque généré par une position. Les notion et les définitions de ce chapitre sont tirées de [14].

Chapitre 2

Calcul stochastique dans le cas continu

Dans ce chapitre on va donner quelques notions mathématiques qui seront utiles dans le prochain chapitre. Les résultats de cette partie se trouve dans plusieurs ouvrages généraux, "par exemple [4]".

2.1 Généralités sur les processus à temps continu

Définition 2.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{A}$.

Le tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t.

Définition 2.1.2. *On dit que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \geq 0$.

Définition 2.1.3. *On dit qu'une v.a* τ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *est un temps d'arrêt si* $\forall t \in [0, +\infty[$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

On dit que τ un temps d'arrêt fini si : $\tau < \infty$ p.s.

Proposition 2.1.1. *[4]*

1. *Si S et T sont des temps d'arrêt, et si $A \in \mathcal{F}_s$, alors $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_t$.*
2. *Si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*
3. *Si S et T sont des temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{s \wedge t}$.*
4. *Si T est un temps d'arrêt, alors : $\mathcal{F}_T = \sigma(A \cap \{n \leq T\}, A \in \mathcal{F}_n)$.*
5. *Si T et S sont des temps d'arrêt, alors la variable X_T définie par :*

$$X_{T(\omega)} = X_{T(\omega)}(\omega)\mathbb{1}_{T<\infty} = \sum_n X_n 1_{T=n}$$

est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Définition 2.1.4. *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est prévisible si X_0 est $\mathcal{F}_0$- mesurable, et que, pour tout $t \geq s$, X_t est $\mathcal{F}_s$- mesurable.*

Définition 2.1.5. *un processus stochastique $(\phi_t)_{t \in [0,T]}$ est dit un processus prévisible simple s'il est représenté comme suit :*

$$\phi_t = \phi_0 \mathbb{1}_{t=0} + \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbb{1}_{]T_i, T_{i+1}]}(t)$$

où $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < T_{n+1} = T$ sont des temps d'arrêt, et toute v.a ϕ_i est bornée et $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurable.

2.2 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers.

Définition 2.2.1. *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :*
– *continuité : $\mathbb{P}$ p.s. la fonction $s \mapsto X_s(\omega)$ est une fonction continue.*

– *indépendance des accroissement : si* $s \leq t$, $X_t - X_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s = \sigma(X_{u,u\leq s})$.
– *stationnarité des accroissement : si* $s \leq t$, *la loi de* $X_t - X_s$ *est identique à celle de* $X_{t-s} - X_0$.

Le mouvement Brownien peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des pas de temps de plus en plus courts.

Théorème 2.2.1. *[4] Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien si et seulement s'il est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t.$$

2.2.1 Mouvement Brownien standard

Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si : $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$ p.s ; $E(X_t) = 0$, $E(X_t^2) = t$. Dans ce cas, la loi de X_t est une loi normale.

2.2.2 Mouvement Brownien géométrique

Le **mouvement Brownien géométrique** est la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 &= x_0 \end{cases}$$

où W_t un mouvement Brownien standard.

2.3 Martingales

Définition 2.3.1. *Une famille adaptée* $(M_t)_{t\geq 0}$ *de variables aléatoires intégrables, c'est à dire :* $E(|M_t|) < \infty$ *pour tout* t *est :*
– *Une martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$.
– *Une sur martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$.
– *Une sous martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

2.3.1 Mouvement Brownien et martingales

Proposition 2.3.1. *[4] Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien standard alors :*

1. X_t *est une* $\mathcal{F}_t$*- martingale.*
2. $X_t^2 - X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$*- martingale.*
3. $\exp(\sigma X_t - \sigma^2 t/2)$ *est* $\mathcal{F}_t$*- martingale.*

Théorème 2.3.1. *[4] Si* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale continue par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, et si* τ_1 *et* τ_2 *sont deux temps d'arrêt tels que* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$*,* K *une constante réelle finie, alors* M_{τ_2} *est intégrable et* $\mathbb{E}(M_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1}$ $\mathbb{P}$ *p.s.*

2.3.2 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$$

.

Théorème 2.3.2. *[4]* Q *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si et seulement si, il existe une variable aléatoire* Z *à valeurs positives ou nulles sur* (Ω, F) *telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} :\; Q(A) = \int_A Z(\Omega) d\mathbb{P}(\Omega)$$

Z *est appelée densité de* Q *par rapport à* $\mathbb{P}$ *notée* $d(Q)/d(\mathbb{P})$*.*

2.4 Théorème de Girsanov

Théorème 2.4.1. *[4] Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$*, et soit* $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adaptévérifiant* $\int_0^t \theta_s^2 ds < \infty$ *p.s tel que le processus* $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$L_t = \exp(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$$

soit une $\mathcal{F}_t$-martingale, alors il exist une probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$ de densité L_t équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$B_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t$-mouvement Browien standard.

2.5 Représentations des martingales Browniennes

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle de B_t, il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$ et $\forall t \in [0,T]$, $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$ p.s.

Remarque 2.5.1. *Cette présentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement Brownien.*

2.6 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

2.6.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$- mouvement Brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 2.6.1. *L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire ϕ est alors, un processus continu $(I(\phi)_t)_{t\in[0,T]}$ défini par :*

$$I(\phi)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$I(\phi)_t$ peut s'écrire comme suit :

$$I(\phi)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i (W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t})$$

2.6.2 Formule d'isométrie

Proposition 2.6.1. *[4] Si $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ un processus prévisible vérifi $E(\int_0^t \phi_s^2 dt) < \infty$ alors*

1. $(\int_0^t \phi_s dW_s)_{t\in[0,T]}$ *est une martingale de carré intégrable.*
2. $\mathbb{E}(\int_0^t \phi_s dt) = 0$
3. $\mathbb{E}\Big((\int_0^t \phi_s dW_s)^2 \Big) = \mathbb{E}(\int_0^t \phi_s^2 ds)$ *appelée formule d'isométrie.*

2.6.3 Formule d'Itô

Définition 2.6.2. *Si X_t est un processus d'Itô de la forme :*

$$X_T = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t \phi_s dW_s$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, K et ϕ deux processus non anticipatifs tels que :

$$\textstyle\int_0^T \mid K_s \mid ds < \infty \text{ et } \int_0^T \mid \phi_s \mid^2 ds < \infty \ p.s$$

alors, la formule d'Itô s'écrit pour toute fonction $f : [0, \infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ et tout processus d'Itô X sous la forme suivante :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X\rangle_s.$$

2.6.4 Variation quadratique

La variation quadratique d'un mouvement Brownien est résumée dans le tableau suivant :

[d.,d.]	ds	dWs
ds	0	0
dWs	0	ds

– Si $B_t = \sigma W_t$ où W est un processus de Brownien standard, alors : $[B, B]_t = \sigma^2 t$.

Chapitre 3

Modèle de Black Scholes à trajectoires continues

Les raisonnements par arbitrage fournissent des nombreuses relations intéressantes, mais ils ne sont pas suffisants pour obtenir les formules des prix. Pour cela, on a besoin de modéliser l'évolution des cours d'une façon précise.
Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne donnant pas de dividendes. Black et scholes ont proposé un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'un call (européen) sur une action ne distribuant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option d'éliminer totalement le risque (c'est à dire se couvrir).
Dans la suite, on considère un marché d'espace de scénario $(\Omega, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est la filtration historique.
$(S_t)_{t\in[0,T]}$ est l'ensemble des cours d'actions (actifs risqués) à la date t et d'échéance T. $(S_t^0)_{t\in[0,T]}$ est l'ensemble des cours d'actifs sans risque $S_t^0 = exp(rt)$ où r est le taux d'intérêts.
Le facteur de discontinuité est donné par :

$$B(t,T) = \exp[-r(T-t)]$$

– Loption call peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

et son prix est donné par :

$$C_t(T, K) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}^Q((S_T - K)\backslash\mathcal{F}_t)$$

– De même l'option put peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$$

et son prix est donné par :

$$P_t(T, K) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}^Q((K - S_T)\backslash\mathcal{F}_t)$$

– La valeur $(S_T - K)$ $(resp(K - S_T))$ est la valeur intrinsèque de l'option, et $C_t(T, K) - (S_T - K)_+$ $(respP_t(T, K) - (K - S_T)_+)$ est sa valeur de temps.
En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on a la relation de parité :

$$C_t - P_t = S_t - K\exp[-r(T-t)]$$

– On désigne $\mathcal{M}(S)$ l'ensemble des mesures de probabilité $Q \backsim P$ telle que $\widetilde{S}_t$ la valeur actualisée de S_t est Q-martingale. $\mathbb{E}^Q$ est l'espérance sous Q.

– La valeur discontinue d'un portefeuille V_t est donnée par :$\widetilde{V}_t = V_t \backslash S_t^0$ tel que : $S_t^0 = \exp(rt)$. On désigne par S, l'ensemble des stratégies prévisibles simple

$$S = \left\{\phi : \text{càglàd prévisible, et } \mathbb{E} \mid \textstyle\int_t^T \phi_t d\widetilde{S}_t \mid^2 < \infty\right\}$$

– Et $\mathcal{A}$ l'ensemble de pay-off terminale atteignable par n'importe quelle stratégie

$$\mathcal{A} = \left\{V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t, V_0 \in \mathbb{R}, \phi \in S\right\}$$

– Le processus stochastique $(G_t(V_t))_{t\in[0,T]}$ est dit processus de gain de la stratégie ϕ et :

$$G_t(\phi) = \phi_0 S_0 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i (S_{T_{i+1}\wedge t} - S_{T_i \wedge t})$$

d'autre part, le portefeuille a une valeur $V_t = \phi_t S_t$ au temps t, et :

$$C_t(\phi) = V_t(\phi) - G_t(\phi) = \phi_t S_t + \int_0^t \phi_u dS_u$$

.

– Cette différence représente le coût de la stratégie au temps t et $C_t(\phi)$ est appelé processus de coût associé à la stratégie ϕ. Si la stratégie est autofinancée alors on a : $V_t(\phi) = G_t(\phi)$.

3.1 Notion d'arbitrage et la relation de parité call-put

L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risques.
À partir de cette hypothèse, on peut établir des relations entre les prix des call et des put européen de même échéance T, de même prix d'exercice K, sur une action de cours St à l'instant t, et un taux de placer ou d'emprunter de l'argent est constant égale r.
On désigne par C_t et P_t les prix respectifs du call et du put à l'instant t. Par l'A.O.A, pour tout instant $t < T$, on a la relation suivante appelée relation de parité call-put :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Profit sans risque si on a, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

À l'instant t, on achète une action et un put et on vend un call. Cela dégage un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si cette somme est positive, on la place au taux r jusqu'à la date T, on obtient deux cas :

1. $S_T > K$ donc, le call est exercé, on livre l'action, on encaisse la somme K et on solde l'emprunt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{-r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$$

2. $S_T \leq K$ donc, on exerce son put et on solde comme précédemment, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{-r(T-t)}(C_t - P_t - S_t)$$

Dans les deux cas, on a réalisé un profit positif sans mise de fond initiale, qui est un exemple d'arbitrage.

3.2 Description du modèle de Black et Scholes

Nous supposons que nous avons un espace de probabilité avec une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ tel que $(\mathcal{F}_t)$ qui est une filtration naturelle du mouvement Brownien standard B_t. Le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t).

– On suppose que l'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

$S_0^0 = 1$ de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$.

Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant égale à r.

– On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle Stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), S_0 > 0 \tag{3.1}$$

Où μ, σ, S_0 sont des constantes.

(B_t) : un mouvement Brownien standard.

μ : est un coefficient de croissance (derive).

σ : est un coefficient de volatilité.

S_0 : est une valeur initiale pour S_t.

Le modèle étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier.

Remarque 3.2.1. *L'hypothèse selon laquelle le cours d'une action est un mouvement Brownien n'était pas réaliste car le prix de l'action ne peut pas prendre des valeurs négatives. D'où l'idée de modéliser par un mouvement Brownien géométrique.*

La solution de l'EDS : $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ avec $S_0 > 0$ est :

$$S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.

La loi de S_t est une loi log-normale (son logarithme suit une loi normale).

Le processus (S_t) vérifie une équation de type 3.1 sauf si son logarithme est un mouvement Brownien.

3.2.1 Stratégie financière

Une stratégie financière de gestion est définie par un processus $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{0 \leq t \leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ du mouvement brownien. Les composantes de ϕ donnent les quantités d'actif sans risque ϕ_t^0 et l'actif risqué ϕ_t à chaque instant t, à cet instant la valeur du portefeuille est donnée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

3.2.2 Stratégie autofinancée

La condition d'autofinancement au temps continu est donnée par :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

pour que cette égalité ait un sens, on supposera que :

$$\int_0^T \mid \phi_t^0 \mid dt < \infty \text{ p.s et } \int_0^T \phi_t^2 dt < \infty \text{ p.s.}$$

Proposition 3.2.1. *[4] Si ϕ une stratégie autofinancée, alors elle vérifie :*

1. $\int_0^T \mid \phi_t^0 \mid dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < \infty$ *p.s.*
2. $\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = S_0^0 S_0^0 + \phi_0 S_0 + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u dS_u$ *p.s pour tout* $t \in [0, T]$

Notons $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ est le cours actualisé de l'actif risqué de sorte que $\widetilde{S}_t^0 = 1$.

Proposition 3.2.2. *Soit ϕ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et qui vérifie la condition (1) ci-dessus. On pose :*

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

et

$$\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$$

est la valeur actualisée du portefeuille à l'instant t. Alors ϕ définit une stratégie autofinancée si et seulement si :

$$\widetilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u d\widetilde{S}_u \ p.s$$

Preuve

Supposons la stratégie ϕ autofinancée. D'après la formule d'Itô :

$$d\widetilde{V}_t(\phi) = -r\widetilde{V}_t(\phi) + e^{-rt} dV_t(\phi)$$

Notons que $d\langle e^{-rt}, V_T(\phi)\rangle$ est nul. On déduit :

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= -re^{-rt}(\phi_t^0 e^{rt} + \phi S_t)dt + e^{-rt}\phi_t^0 e^{rt} + e^{-rt}\phi_t dS_t \\ &= \phi_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} d\widetilde{S}_t) \\ &= \phi_t d\widetilde{S}_t. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit ϕ une stratégie vérifiant :

$$dV_t(\phi) = \phi_t d\widetilde{S}_t \tag{3.2}$$

Aussi équivalente à l'égalité

$$dV_t(\phi) = d(S_t^0 \widetilde{V}_t(\phi)) = d(e^{rt}\widetilde{V}_t(\phi))$$

et comme

$$dS_t = e^{-rt} dS_t - r\widetilde{S}_t dt$$

on trouve

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

Cela signifie que la stratégie $(\phi)_t$ est autofinancée.$\square$

Dans notre étude, on va chercher une loi de probabilité équivalente à la probabilité initiale sous laquelle les prix actualisés des actifs seront des martingales, puis on va construire des stratégies autofinancées simulant les options.

3.2.3 Probabilité martingale

On va montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale $\mathbb{P}$, sous laquelle le prix actualisé $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ est une martingale sous Q.

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= \widetilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

posons

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t = B_t + \theta t$$

d'où

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \sigma dW_t \tag{3.3}$$

D'après le théorème de Girsanov, il existe $Q \backsim \mathbb{P}$ tel que W_t est un mouvement Brownien standard sous Q et on a :

$$\frac{dQ/\mathcal{F}_t}{dP/\mathcal{F}_t} = \exp\Big(-\frac{1}{2}\theta^2 t + \theta B_t \Big)$$

On déduit que $(\widetilde{S}_t)$ est une martingale, et que

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

3.2.4 Valorisation

Option européenne

Soit H une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable, positive, et de la forme $f(S_T)$ telle que $f(x) = (x-K)_+$ dans le cas d'un call, et $f(x) = (K-x)_+$ dans le cas d'un put. On va définir la valeur de l'option en la simulant.

Définition 3.2.1. *Une stratégie $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée $\widetilde{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t \widetilde{S}_t$ du portefeuille correspondant est positive et telle que $\sup\limits_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ est de carré intégrable sous Q pour tout t.*

Option simulable ou réplicable

Pour que H soit simulable, il faut que H soit de carré intégrable sous Q. Les cas du call et put sont simulables puisque $\mathbb{E}^*(S_T^2) < \infty$.

Théorème 3.2.1. *Dans le modèle de Black et Scholes, toute option est définie par une variable aléatoire H, positive, $\mathcal{F}_T$- mesurable et de carré intégrable sous la probabilité Q est simulable et la valeur à l'instant t de tout portefeuille simulant est donnée par :*

$$V_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

Preuve

Supposons qu'il existe une stratégie admissible (ϕ^0, ϕ) simulant l'option. La valeur du portefeuille (ϕ_t^0, ϕ_t) à l'instant t et $V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$ par hypothèse $H = V_T$. Soit

$\widetilde{V}_t = e^{-rt}V_t$, la valeur actualisée du portefeuille est

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t \phi_u d\widetilde{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t \phi_u \sigma \widetilde{S}_u dW_u\end{aligned}$$

$\sup_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ est de carré intégrable, sous la probabilité Q le processus $\widetilde{V}_t$ est défini par un intégrale stochastique par rapport à (W_t) et sous Q, définit une martingale de carré intégrable. D'où

$$\widetilde{V}_t = \mathbb{E}^Q(\widetilde{V}_t/\mathcal{F}_t)$$

par conséquent

$$V_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)}H/\mathcal{F}_t)$$

Il reste à montrer que l'option est bien simulable, on cherche des processus (ϕ_t^0) et (ϕ) définissent une stratégie admissible et tel que

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = E^Q(e^{-r(T-t)}H/\mathcal{F}_t)$$

Le processus $M_t = \mathbb{E}^Q(e^{-rT}H/\mathcal{F}_t)$, sous la probabilité Q, est une martingale de carré intégrable. D'après le théorème de représentation des martingales Browniennes, il existe un processus adapté $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}^Q(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$ et

$$\forall t \in [0,T]\ M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \text{ p.s}$$

La stratégie $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)$ avec $\phi_t = K_t/\sigma\widetilde{S}_t$ et $\phi_t^0 = M_t - \phi_t\widetilde{S}_t$, alors ϕ est une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant t est donnée par

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)}H/\mathcal{F}_t)$$

Il est clair que $V_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive, et que $\sup_{t\in[0,T]} V_t(\phi)$ est de carré integrable sous Q et $V_t(\phi) = H$, on a donc bien une stratégie admissible simulant H.$\square$

3.2.5 Valeurs des options vanilles

Calcul explicite

Lorsque la variable aleatoire H est de la forme $H = f(S_T)$, on peut expliciter la valeur V_t de l'option à l'instant t comme une fonction de t et S_t :

$$S_T = e^{rt}\widetilde{S}_T = (S_t e^{-rt})e^{rt}\exp\Bigg(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\Bigg)$$

$$\widetilde{S}_T = \widetilde{S}_t\exp\Bigg(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\Bigg)$$

donc

$$S_T = S_t\exp\Bigg((r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\Bigg)$$

On a, en effet

$$V_t = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}(f(S_T)/\mathcal{F}_t)]$$

$$V_t = \mathbb{E}^Q\Bigg(e^{-r(T-t)}f(S_t\exp{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t))}\Bigg)$$

La variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable sous Q, $W_T - W_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ donc $V_t = F(t, S_t)$. Et $W_T - W_t$ varie comme $\sqrt{T-t} * y$ tel que y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, implique que $W_T - W_t$ est une gaussienne centrée de variance $T - t$, avec

$$\begin{aligned} F(t,S_t) &= \mathbb{E}^Q\Bigg(e^{-r(T-t)}f(x)\exp\{(r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\}/\mathcal{F}_t\Bigg) \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Bigg((r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\Bigg)\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy. \end{aligned}$$

On a $F(t, S_t) = \mathbb{E}^Q\Bigg(e^{-r(T-t)}f(S_T)/\mathcal{F}_t\Bigg)$.

Valeur du call européen

Dans ce cas, on note que $F(t, S_t) = \mathcal{C}(t, S_t)$ où $f(x) = (x - K)_+$ d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(x \exp\left(r - \tfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t} \right) dy \\
&= \mathbb{E}^Q \left(e^{-r(T-t)} (x \exp((r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}) - K)_+ \right).
\end{aligned}$$

Posons $\tau = T - t$ et g est une gaussienne centée reduite.

$$\mathcal{C}(t, S_t) = \mathbb{E}\left(x \exp\left(\sigma \sqrt{\tau g} - \frac{\sigma^2}{2} \right) - K e^{-r\tau} \right)$$

comme $x \exp\left(\sigma \sqrt{\tau g} - \frac{\sigma^2}{2} \right) - K e^{-r\tau} \geq 0$ alors

$$g \geq \frac{\ln \frac{K}{x} - r\tau + \frac{\sigma^2 \tau}{2}}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

posons

$$d_1 = \frac{\ln \frac{K}{x} - r\tau + \frac{\sigma^2 \tau}{2}}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

d'où $g \geq -d_2$, avec ces notations on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t, S_t) &= \mathbb{E}\left((x \exp\{\sigma \sqrt{\tau g} - \tfrac{\sigma^2}{2}\} - K e^{-r\tau}) \mathbb{1}_{\{g + d_2 \geq 0\}} \right) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \exp\{\sigma \sqrt{\tau g} - \tfrac{\sigma^2}{2}\} - K e^{-r\tau} \right) \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = x\int_{-d_2}^{+\infty} \exp(\sigma\sqrt{\tau y} - \frac{\sigma^2}{2})\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy$$

et

$$I_2 = Ke^{-\tau r}\int_{-d_2}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}dy = Ke^{-\tau r}\varphi(d_2)$$

avec φ une fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. Pour calculer I_1 on fait le changement de variable $y = z + \sigma\sqrt{\tau}$,

$$I_1 = \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{+\infty} \exp\sigma\sqrt{\tau y} - \frac{\sigma^2}{2}dy = \int_{-d_1}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}dz = \varphi(d_1)$$

Donc, on obtient

$$C(t,S_t) = x\varphi(d_1) - Ke^{-\tau r}\varphi(d_2) \tag{3.4}$$

Valeur du put européen :
Pour le put, on note que $F(t,S_t) = P(t,S_t)$ où $f(x) = (K-x)_+$. Un calcul analogue nous donne

$$P(t,S_t) = Ke^{-\tau r}\varphi(-d_2) - x\varphi(-d_1)$$

3.2.6 Couverture des calls et des puts

Il est important de pouvoir construire le portefeuille simulant pour couvrir une option. Nous allons voir, dans le cas d'une option définie par la forme $H = f(S_T)$, comment expliciter le portefeuille de couverture. À chaque instant t, la valeur actualisée d'un portefeuille simulant est égale à :

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t &= e^{-rt}F(t,S_t)\\ &= \widetilde{F}(t,S_t)\end{aligned}$$

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$, on pose $\widetilde{F}(t,S_t) = e^{-rt}F(t,xe^{-rt})$. On a $\widetilde{V}_t = \widetilde{F} = (t,\widetilde{S}_t)$, et d'après la formule d'Itô pour chaque $t < T$:

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t &= [\widetilde{F}'(t,\widetilde{S}_t)\tfrac{\sigma^2}{2}x^2\widetilde{F}''_{xx}(t,\widetilde{S}_t)]dt\widetilde{F}'_x(t,\widetilde{S}_t)d\widetilde{S}_t \\ &= A_t dt + \widetilde{F}'_x(t,\widetilde{S}_t)d\widetilde{S}_t. \end{aligned}$$

Cela implique d'aprés 3.3 que

$$\widetilde{V}_t = \widetilde{V}_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t \widetilde{S}_t\widetilde{F}'_x(s,\widetilde{S}_s)\sigma dW_s$$

$\mathbb{E}(\int_0^t A_s d_s) = 0$ p.s pour tout t de plus $\int_0^t A_s d_s$ est une martingale donc $A_t = 0$ p.s pour tout t. On a

$$\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) = \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(u,\widetilde{S}_u)d\widetilde{S}_u$$

d'autre part

$$\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) = \widetilde{V}_0 + \int_0^t \sigma\phi_u dW_u$$

d'où

$$d\widetilde{F}_x(t,\widetilde{S}_t) = \sigma\phi_t dW_t$$

où

$$\phi_t = \frac{\partial Call}{\partial S}(t,S_t,T,K) = \varphi(d_1)$$

Si on pose : $\phi_t^0 = Call(t,S_t,T,K) - \phi_t S_t$, le portefeuille$(\phi_t^0,\phi_t)$ est autofinancé et sa valeur actualisée est bien $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$. Dans le cas de call on a $\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(d_1)$ et dans le cas de put on a $\frac{\partial F}{\partial x} = -\varphi(-d_1)$.

Chapitre 4

Calcul stochastique avec sauts

On considère les processus stochastiques avec sauts, c'est à dire, les processus dont les trajectoires peuvent avoir des discontinuités, et l'objetsera d'explorer les outils mathématiques nécessaires à l'étude du modèle Black et Scholes pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés.

4.1 Processus càdlàg (resp càglàd)

Définition 4.1.1. *une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est dite càdlàg (respectivement càglàd) si elle est continue à droite (respectivement à gauche) avec une limite à gauche (respectivement à droite).*

Les limites :

$$f(t^-) = \lim_{s \to t, s < t} f(s)$$

et

$$f(t^+) = \lim_{s \to t, s > t} f(s)$$

existent et

$$f(t) = f(t^+)$$

pour une fonction càdlàg, et

$$f(t) = f(t^-)$$

pour une fonction càglàd.

– Si t est un point de discontinuité, on note :

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t^-)$$

le saut de f (càdlàg) en t qui est définie comme une valeur avant le saut$f(t_i) = f(t^-)$, et

$$\Delta f(t) = f(t^+) - f(t)$$

est le saut de f (càglàd) en t qui est définie comme une valeur aprés le saut $f(t_i) = f(t^+)$

– L'espace des fonctions càdlàg (resp càglàd) est noté par $\mathcal{D}([0,T])$ $(resp\mathcal{L}([0,T]))$

– Un processus càdlàg (resp càglàd) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{D}([0,T])$ $(resp\mathcal{L}([0,T]))$.

4.2 Processus de Lévy

Les processus de Lévy forment une classe des processus avec sauts, qui est à la fois simple à étudier et, en même temps, assez riche pour l'application. Ils sont une brique de base pour construire des modèles plus réaliste.

Définition 4.2.1. *Soit* $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* F_t*-adapté* $(X_t)_{t\geq 0} \subset \mathbb{R}^d$ *avec* $X_0 = 0$ ׀ *p.s est appelé un processus de Lévy s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Accroissements indépendants : pour chaque subdivision de temps* $t_0, t_1, \cdots, t_n$ *les v.a* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
2. *Accroissements stationnaires : la loi de* $X_{t+h} - X_t$ *ne dépend pas de* t.
3. *La continuité en probabilité :* $\forall \epsilon > 0 \lim \mathbb{P}_{h\to 0}(\mid X_{t+h} - X_t \mid\geq \epsilon) = 0$ *La dernière condition n'implique pas que les trajectoires du processus sont continues.*

Théorème 4.2.1. *[4] Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy, alors* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à une version càdlàg (continu à droite avec une limite à gauche).*

4.2.1 Loi et variables infiniment divisibles

Définition 4.2.2. *Une distribution de probabilité F sur $\mathbb{R}^d$ à une divisibilité infinie si pour chaque entier $n \geq 2$, il existe n variables aléatoires i.i.d $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ telle que $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ a la même distribution F.*

Les exemples les plus connus de divisibilité infinie sont les distributions gaussiennes, Gamma, Poisson.

Proposition 4.2.1. *[4] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy, alors pour tout t, X_t a une distribution infiniment divisible, alors il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que la distribution de X_1 est donnée par F.*

4.3 Processus de Poisson

Le premier pas vers la caractérisation d'un processus de Lévy est de caractériser les processus de comptages.

4.3.1 Processus de comptage

Soit $(T_n)_n$ une suite strictement croissante de variables aléatoires réelles avec$T_0 = 0$. Le processus de comptage N_t associé à $(T_n)_n$ est défini par

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}.$$

1. les trajectoires de N sont constantes par morceaux dont les sauts ne prennent que la valeur 1.
2. $\forall t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :
$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
3. La fonction caractéristique d'un processus de Poisson est :
$$\mathbb{E}(e^{izN_t}) = \exp[\lambda t(e^{iu} - 1)],\ \forall u \in \mathbb{R}$$

Définition 4.3.1. *Un processus de comptage N_t adapté est appelé un processus de Poisson si :*
- $N_0 = 0$ *p.s.*
- N_t *est à accroissements indépendants.*
- N_t *est à accroissements stationnaires.*

Remarque 4.3.1. *λ est le nombre moyen des arrivées par unité de temps ou bien intensité. Lorsque λ augmente, le temps moyen entre les sauts diminue, ce qui n'est pas surprenant puisque l'amplitude des sauts est fixée, égale à* 1.

4.3.2 Mesure aléatoire de Poisson

Définition 4.3.2. *Soit Y_t un processus de Lévy, alors Y_t a une version càdlàg, et le saut de Y_t en $t \geq 0$ est défini par*

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t^-}$$

Soit B_0 la famille des ensembles Boréliens $A \subset \mathbb{R}$ dont sa fermeture $\overline{A}$ ne contient pas le zéro. Pour $A \in B_0$, on définit

$$M(A) = \sum_{0<s\leq t} \mathbb{1}_A(\Delta Y_s)$$

$M(A)$ est appelée la mesure aléatoire de Poisson ou la mesure de saut aléatoire associée à N.

Remarque 4.3.2. *L'intensité λ d'un processus de Poisson détermine une valeur moyenne de la mesure aléatoire M :*

$$\mathbb{E}(M(A)) = \lambda \mid A \mid$$

où $\mid A \mid$ la mesure de Lebesgue de A.

4.3.3 Processus de Poisson compensé

On définit la version centrée d'un processus de Poisson par

$$\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t$$

sa fonction caractéristique est

$$\phi_{\widetilde{N}_t}(z) = \exp[\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)]$$

$\widetilde{N}$ est aussi a accroissement indépendant, comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_t/N_s, s \leq t) &= \mathbb{E}(N_t - N_s + N_s/N_s) \\ &= \mathbb{E}(N_t - N_s) + N_s \\ &= \lambda(t - s) + N_s\end{aligned}$$

alors $(\widetilde{N}_t)$ est une martingale,

$$\forall s \leq t, \ \mathbb{E}(\widetilde{N}_t/\widetilde{N}_s) = \widetilde{N}_s$$

$(\widetilde{N}_t)$ est dit Processus de Poisson compensé et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t\geq 0}$ est dite compensateur de $(N_t)_{t\geq 0}$. Pour un processus de Poisson compensé, la mesure aléatoire est définie par

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \lambda \mid A \mid$$

$\widetilde{M}(A)$ vérifie :

$$\mathbb{E}(\widetilde{M}(A)) = 0 \text{ et } Var(\widetilde{M}(A)) = \lambda \mid A \mid$$

Remarque 4.3.3. *Pour définir la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$, on peut remplacer $A \subset \mathbb{R}^+$ par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ et la mesure de Lebesgue $\mid . \mid$ par une mesure de Radon-Nykodim μ sur E.*

4.3.4 Mesure aléatoire de Poisson compensé

La mesure aléatoire de Poisson compensé est définit par

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \mu(A)$$

et elle vérifie pour tous les ensembles compacts disjoints $A_1, \cdots, A_n \in \varepsilon$, les variables $\widetilde{M}(A_1), \cdots, \widetilde{M}(A_n)$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(\widetilde{M}(A_i)) = 0,\ Var(\widetilde{M}(A_i)) = \mu(A_i)$$

Le processus de Poisson définit par un processus de comptage n'est pas utilisé pour modéliser les cours d'actifs, car la condition que la taille est toujours égale à 1, n'est pas réaliste. C'est pour ça, on va définir le processus de Poisson composé.

4.3.5 Processus de Poisson composé

Définition 4.3.3. *Le processus de Poisson composé d'intensite de sauts λ et de distribution de taille de sauts μ est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est defini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

ou $\{Y_i\}_{\{i\geq 1\}}$ est une suite de v.a independantes de loi μ et N est un processus de Poisson standard d'intensité λ independant de $\{Y_i\}_{\{i\geq 1\}}$.

Remarque 4.3.4.

1. *Les trajectoires de X sont des fonctions continues par morceau avec une version càdlàg.*
2. *Les temps de sauts $(T_n)_{n\geq 1}$ ont la même loi que les temps de sauts d'un processus de Poisson N_t, ils peuvent s'écrire comme une somme partielle de v.a exponentielles de paramètre λ.*
3. *Le processus de Poisson lui même peut être écrit comme un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}$ tel que $Y_i = 1$.*

Proposition 4.3.1. *[4] Un processus de Poisson $(X_t)_{t\geq 0}$ est composé si et seulement si, il est un processus de Lévy et ses trajectoires sont des fonctions continues par morceau.*

Fonction caractéristique d'un processus de Poisson composé

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique est :

$$\mathbb{E}(e^{izX_t}) = \exp[\lambda t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iux} - 1) f(dx)],\ \forall u \in \mathbb{R}^d$$

où λ est l'intensité de saut et f la distribution des tailles de sauts.

Mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé

Pour tout processus càdlàg et, en particulier, pour tout processus de Poisson composé, on peut associé une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ qui décrit les sauts de X pour chaque ensemble mesurable $B \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty[$:

$$J_X(B) = \mathbb{E}(\sum_{t\in[0,T]} 1_B(X_t - X_{t^-}, t))$$

Pour chaque ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X(A \times [t_1, t_2])$ contient le nombre de sauts de X entre t_1 et t_2 dont les tailles des sauts sont dans A.

Mesure de saut d'un processus de Poisson composé

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}^d$ avec intensité λ et distribution des tailles de saut f. Sa mesure de saut J_X est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ avec une mesure d'intensité :

$$\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt = \lambda f(dx)dt$$

La mesure d'un processus de Poisson composé définit le nombre moyen de sauts par unité de temps.

Proposition 4.3.2. *[4] Tout processus de Poisson composé peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx).$$

Mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé compensé

La mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé compensé est définie par :

$$\widetilde{J}_X(ds \times dx) = J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds$$

où $J_X(ds \times dx)$ est la mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé, $\nu(dx)ds$ sa mesure de saut.

4.3.6 Structure des trajectoires d'un processus de Lévy

Mesure de Lévy

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$. La mesure ν sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$\nu(A) = \mathbb{E}\Bigg(\sum_{t\in[0,1],\Delta X_t\neq 0} \mathbb{1}_A(\Delta X_t)\Bigg),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

est appelée la mesure de Lévy de X. Autrement dit, $\nu(A)$ est le nombre, par unité de temps, de sauts dont la taille est dans A.

Décomposition de Lévy-Itô

Théorème 4.3.1. *[12] Soit (X_t) un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de mesure de Lévy ν alors :*

- *ν Sa mesure de sauts J_X est une mesure aléatoire de Poisson sur $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ d'intensité $\nu(dx) \times dt$.*
- *ν sa mesure de Lévy sur $\mathbb{R}^d \backslash 0$ satisfait, $\int_{\mathbb{R}^d}(\parallel x \parallel^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty$*
- *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^d$ et un mouvement Brownien d-dimensionnel $(W_t)_{t\geq 0}$ de matrice de covariance A tels que*

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + X_t^l + \lim_{\epsilon\to 0} X_t^\epsilon,$$

où

$$X_t^l = \int_{|x|\geq 1, s\in[0,t]} x J_X(ds.dx)$$

et

$$X_t^{\epsilon} = \int_{\epsilon \leq |x|, s\in[0,t]} x\widetilde{J}_X(ds.dx)$$

Les trois derniers termes sont indépendants et la convergence dans le dernier terme est presque sure et, est uniforme en t sur les compactes. Le triplet(A, ν, γ) est appelé triplet caractéristique de X.

Moments d'un processus de Lévy

Proposition 4.3.3. *[12] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ de triplet caractéristique (A, ν, γ), le moment d'ordre n de X_t,$\mathbb{E}(\mid X_t \mid^n)$ est fini si et seulement si $\int_{|x|\geq 1} \mid x \mid^n \nu(dx) < \infty$, et on a*

$$\mathbb{E}(\mid X_t \mid) = t(\gamma + \int_{|x|\geq 1} x\nu(dx))$$

$$Var(\mid X_t \mid) = t(\gamma + \int_{|x|\geq 1} x^2\nu(dx)).$$

Exponentielle des moments

Proposition 4.3.4. *[12] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ de triplet caractéristique (A, ν, γ), et soit $u \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de moment $\mathbb{E}(\exp(uX_t))$ est finie pour tout $t > 0$, si et seulement si :*

$$\int_{|x|\geq 1} e^{ux}\nu(dx) < \infty$$

et dans ce cas

$$\mathbb{E}(\exp(uX_t)) = \exp(t\psi(-iu))$$

où ψ est l'exposant caractéristique de X_t.

Fonction caractéristique et exposant caractéristique

Définition 4.3.4. *[12] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy. La fonction caractéristique de X_t est :*

$$\phi_{X_t}(z) = \mathbb{E}(e^{iz.X_t}),\ z \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 4.3.2. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$, il existe une fonction continue ψ :$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ appelée exposant caractéristique de X telle que :*

$$\mathbb{E}(e^{iz.X_t}) = e^{t\psi(z)},\ z \in \mathbb{R}^d$$

Le processus de Poisson est l'exemple le plus simple du processus de Lévy, que l'on peut considérer comme un processus de Poisson dont les sauts sont aléatoires.

Formule de Lévy-Khinchin

Théorème 4.3.3. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ de triplet caractéristique (A, ν, γ), alors :*

$$\mathbb{E}(e^{iz.X_t}) = e^{T\psi(z)},\ z \in \mathbb{R}^d$$

avec

$$\psi(z) = \frac{-1}{2} z.Az + i\gamma.z + \int_{\mathbb{R}_d} (e^{iz.x} - 1 - iz.x\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx).$$

Processus de Lévy et variation finie

Proposition 4.3.5. *[12] un processus de Lévy a une variation finie si et seulement si son triplet caractéristique vérifie*

$$A = 0,\ et\ \int_{|x|\leq 1} |\ x\ |\ \nu(dx) < \infty$$

Pocessus de Lévy et martingales

Proposition 4.3.6. *[12]*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ de triplet caractéristique (A, ν, γ)

1. *(X_t) est une martingale si et seulement si*

$$\int_{|x|\geq 1} \mid x \mid \nu(dx) < \infty$$

et

$$\gamma + \int_{|x|\geq 1} \mid x \mid \nu(dx) = 0$$

2. *exp (Xt) est une martingale si et seulement si*

$$\int_{|x|\geq 1} e^{x}\nu(dx) < \infty$$

et

$$\frac{A}{2} + \gamma + \int_{\infty}^{+\infty} (e^{x} - 1 - \mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx) = 0$$

Remarque 4.3.5. *Le résultat qui peut être le plus important de la théorie de processus de Lévy est que la mesure de sauts d'un processus de Lévy général est également une mesure aléatoire de Poisson.*

4.3.7 Intégrale stochastique par rapport aux mesures de Poisson

La notion de l'intégrale stochastique par rapport à une mesure de Poisson est plus générale que celle de l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Lévy, elle nous permettra de définir une classe de processus qui généralise celle de processus de Lévy appelée classe de processus de Lévy-Itô.

Proposition 4.3.7. *[12] Pour tout fonction prévisible simple $\phi : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, le processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ défini par l'intégrale compensée*

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\widetilde{M}(ds,dy)$$

est une martingale de carré intégrable et vérifie la formule d'isométrie

$$\mathbb{E}(X_T^2) = \mathbb{E}\bigg(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(s,y)^2 \mu(ds,dy) \bigg)$$

4.3.8 Formule de changement de variables pour les processus Lévy-Itô

En absence de sauts, la formule de changement de variable (formule d'Itô) pour une fonction $f \in \mathcal{C}^2$ prend la forme :

$$f(X_T) = f(X_0) + \int_0^T f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(X_t)\sigma_t^2 dt$$

Quand le processus n'a qu'un nombre fini de sauts sur $[0, T]$, on peut écrire

$$X_t = X_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta X_s$$

et appliquer la même formule entre les sauts.

Proposition 4.3.8. *[4] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, ν, γ) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$, alors*

$$\begin{aligned} f(X_T) &= f(X_0) + \int_0^T f'(X_{t^-})dX_t + \tfrac{1}{2}\int_0^T f''(X_t)\sigma_t^2 dt \\ &+ \sum_{t \leq s, \Delta X_t \neq 0} \{f(X_{t^-} + \Delta X_t) - f(X_{t^-}) - \Delta X_t f'(X_{t^-})\}. \end{aligned}$$

Proposition 4.3.9. *[4] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, ν, γ) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et ses deux dérivées sont bornées par une constante C. alors $X_t = M_t + V_t$, où M est la partie martingale donnée par*

$$M_t = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\sigma_s dW_s + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} \{f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-})\}\widetilde{J}_X(ds, dx)$$

et V est un processus à variation finie continue

$$\begin{aligned} V_t &= \int_0^t \tfrac{\sigma^2}{2} f''(X_s)ds + \int_0^t \gamma f'(X_s)ds \\ &+ f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\sigma_s dW_s + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-}) - yf(X_{s^-})\mathbb{1}_{|y|\leq 1} ds.\nu(dy) \end{aligned}$$

Remarque 4.3.6. – *Si X_t est de Lévy, $Y_t = f(t, X_t)$ ne l'est pas toujours. C'est pour ça on va introduire les semi-martingales.*

– *La classe des processus de Lévy-Itô a des propriétés de stabilité : Si $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy-Itô, alors pour toute fonction $f \in C^2$, $(f(X_t))$ est également un processus de Lévy-Itô. Ce que ne le possède pas la classe des processus de Lévy.*

4.3.9 Semi-martingale

Pour pouvoir écrire la valeur actualisé d'un portefeuille d'une valeur initiale V_0, géré selon une stratégie autofinancée, on fait intervenir la notion d'intégrale stochastique qui est définie par des sem-martingales. Pour les démonstration voir [8] et [11]. On note D l'espace des processus adaptés càdlàg et L l'espace des processus adaptés càglàd.

Définition 4.3.5. *Une suite $(\phi)^n$ de processus converge uniformement en probabilité vers un processus ϕ sur les compacts si*

$$\forall t > 0, \sup_{0\leq t\leq s} (\phi_s^n - \phi_s) \xrightarrow{\text{!}} 0$$

on note cette convergence par ucp.
On note $\mathcal{S}_{ucp}$ l'espace $\mathcal{S}$ des processus simplement prévisibles muni de la topologie de convergence ucp en (t, ω), et on note $\mathcal{L}_{ucp}$ et $\mathcal{D}_{ucp}$ l'espace de processus adaptés continus à gauche, et à droite respectivement. muni de la convergence ucp respéctivement.

Définition 4.3.6. *Pour $\phi \in \mathcal{S}$ et X un processus càdlàg, on définit la fonction linéaire $I_X : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ par :*

$$I_X(\phi) = \phi_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i (X^{T_{i+1}} - X^{T_i})$$

où $0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{n+1} < \infty$ des temps d'arrêts. On note $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ et $I_X(\phi)$ l'intégrale stochastique de ϕ par rapport à X.

$$I_X(\phi) = \int \phi_s dX_s = \phi.S$$

Pour effectuer une extention par continuité de l'opérateur d'intégration stochastique $I_X(\phi)$ de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{L}_{ucp}$, il faut que cet opérateur soit un opérateur continu de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{D}_{ucp}$ qui estla définition des semi-martingales.

Définition 4.3.7. *Un processus $X \in \mathcal{D}$ est une semimartingale si l'opérateur d'intégration stochastique $I_X(\phi)$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{D}_{ucp}$.*

Théorème 4.3.4. *[4] Soit X une semi-martingale, alors l'application $I_X : \mathcal{S}_{ucp} \to \mathcal{D}_{ucp}$ est continue.*

Définition 4.3.8. *un processus X non anticipatif càdlàg est décomposable s'il pourra être décomposer comme suit*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où $M_0 = A_0 = 0$, M est une martingale locale de carré intégrable, A un processus càdlàg adapté à variation bornée.

4.3.10 Variation quadratique

Définition 4.3.9. *Soient X une semi-martingale, la variation quadratique de X, notée $[X, X] = ([X, X]_t)_{t\geq 0}$ est définie par*

$$[X, X] = X^2 - 2\int X_- dX$$

où $X_{0^-} = 0$.

Théorème 4.3.5. *[4] Le processus de variation quadratique de X est un processus càdlàg, croissant adapté, et satisfait*

1. *$[X, X]_0 = X_0^2$ et $\Delta[X, X] = (\Delta X)^2$*
2. *Si σ_n une suite de partitions aléatoires identiques, alors :*

$$X_0^2 + \sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 \to [X, X]$$

avec une convergence en ucp, σ_n est $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_i^n \cdots \leq T_k^n$. Où T_i^n sont des temps d'arrêts.

3. *Si T un temps d'arrêt, alors $[X^T, X] = [X, X^T] = [X^T, X^T] = [X, X]^T$ et que $\Delta(X_{-}.X) = X_{-}\Delta X$.*

Définition 4.3.10. *Pour une semi-martingale X, On peut écrire*

$$[X, X]_t = [X, X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X)^2$$

où le processus $[X, X]^c$ représente la partie continue, trajectoire par trajectoire, de $[X, X]$ telle que $[X, X]_0^c = 0$.

Proposition 4.3.10. *Ces processus sont des semi-martingales :*

1. *Processus de Wiener (car il est une martingale de carré intégrable).*
2. *Processus de Poisson (car il a une variation bornée).*
3. *Un processus déterministe est une semi-martingale si et seulement si, il a une variation bornée.*
4. *Tous les processus de Lévy sont des semi-martingales parce que le processus de Lévy est une somme des martingales de carré intégrable et des processus à variation bornée, "c'est la décomposition de Lévy-Itô".*

4.3.11 Formule d'Itô pour les semi-martingales

Proposition 4.3.11. *[4] Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{1,2} : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(t, X_0) \ &= \textstyle\int_0^t \frac{\partial f}{ds}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{dx}(s, X_{s^-})dX_s \\ &+ \textstyle\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{dx^2}(s, X_{s^-})d[X, X]_s^c \\ &+ \textstyle\sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(s, X_s) - f(s, X_{s^-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{dx}(s, X_{s^-})] \end{aligned}$$

où

$$d[X, X]_s = d[X, X]_s^c + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s^2).$$

Chapitre 5

Modèle de Black Scholes à trajectoires discontinues

Le prix de nombreux actifs financiers comporte des mouvements imprévisibles de grande amplitude. La prise en compte de ces sauts, qui ont un impact non-négligeable sur le rendement et le risque, a conduit au développement de modèles stochastiques basés sur des processus discontinus applés "processus de sauts". De nombreuses questions restent ouvertes notamment concernant l'implémentation numérique de ces modèles, à la fois pour l'évaluation des options et pour la calibration des modèles aux données de marché.
La principale application de l'intégrale stochastique en finance est la représentation d'un portefeuille autofinancé. On a déjà vu que, en absence de taux d'intérêt, lorsque le prix d'actif risqué est un processus aux trajectoires continues S de quantité ϕ, la valeur du portefeuille est :

$$V_t = \int_0^T \phi_t dS_t$$

En présence de sauts, quelles sont les propriétés à imposer sur S et ϕ pour que cette relation soit vraie ? Comme les sauts dans les prix arrivent d'une façon inattendue, le processus S doit être continu à droite. Par contre la stratégie de couverture ϕ, doit être continue à gauche, parce qu'elle est basée sur les observations du gérant du portefeuille. Pour les processus prévisibles simples ϕ_t, on définit l'intégrale stochastique par :

$$\int_0^t \phi_s dS_s = \sum_{i=0}^{n} \phi_i (S_{T_{i+1}\wedge t} - S_{T_i \wedge t})$$

Généralement, pour les processus adaptés continus à gauche, on définit l'intégrale stochastique par extension par continuité. On a $\mathcal{S}_{ucp}$ est l'espace S muni par la topologie de convergence ucp, et on note $\mathcal{L}_{ucp}$ et $\mathcal{D}_{ucp}$ l'espace de processus adaptés continus à gauche, et à droite respectivement. On a l'espace $\mathcal{S}_{ucp}$ est dense dans $\mathcal{L}_{ucp}$, et on peut associer cette topologie ucp une métrique sur $\mathcal{D}_{ucp}$, pour laquelle cet espace sera complet. Pour effectuer cette extension par continuité de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{L}_{ucp}$, il faut que cet opérateur soit continu de $\mathcal{S}_{ucp}$ dans $\mathcal{D}_{ucp}$, qui est la définition des semi-martingales. Donc il faut que S soit une semi-martingale. On concentre notre étude sur la notion des intégrales par rapport à une mesure aléatoire de Poisson parce qu'elle est plus générale que celle d'intégrales par rapport à un processus de Poisson, et elle nous permettra de définir la classe des processus Lévy-Itô (plus générale que les processus de Lévy) qui a une propriété de stabilité que ne possèdent pas celle de Lévy. Si S est un processus de Lévy constant par morceau on a :

$$\int_0^T \phi_t dS_t = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_t y J_S(dt \times dy)$$

5.1 Modèle exponentielle-Lévy

On a déjà vu que la dynamique risque neutre dans le modèle B-S avec des trajectoires continues s'crit sous la forme d'une exponentielle d'un mouvement Brownien avec drift :

– En prenant l'exponentielle

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right) = S_0 \exp B_t^0 \tag{5.1}$$

– Et en utilisant la formule d'Itô on obtient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t = dB_t^1 \tag{5.2}$$

où $B_t^1 = rt + \sigma W_t$ qui est une exponentielle stochastique. Donc, il y a deux méthodes pour définir la dynamique risque neutre de B-S avec des trajectoires discontinues (avec sauts) :

– En remplaçant B_t^0 dans 5.1 par un processus de Lévy X_t :

$$S_t = S_0 \exp(rt + X_t). \tag{5.3}$$

Ces modèles sont des modèles exp-Lévy (exponentielle ordinaire) Pour que $e^{-rt}S_t$ soit une martingale, on impose les conditions suivantes sur le triplet caractéristique (σ^2, ν, γ) de X :

$$\int_{|x|\geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$$

et

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx) = 0 \tag{5.4}$$

– Une autre méthode, est de remplacer B_t^1 dans 5.2 par un processus de Lévy Z_t :

$$dS_t = rS_t - dt + S_t - dZ_t$$

Alors S_t correspond à l'exponentielle stochastique de Z. $e^{-rt}S_t$ est une martingale si et seulement si le processus de Lévy Z_t est une martingale qui vérifie $E[Z_1] = 0$

Remarque 5.1.1. *L'exponentielle stochastique et l'exponentielle ordinaire sont deux processus stochastiques différents, par exemple, Contrairement à l'exponentielle ordinaire qui est toujours positive, l'exponentielle stochastique n'est pas nécessairement positive sauf si tous les sauts de processus X sont plus grand que -1, ce qui revient à dire (pour les processus de Lévy) que la mesure de Lévy satisfait* $\nu((-\infty, -1]) = 0$ *Donc, lequel de deux processus convient mieux pour construire des modèles financiers ? La proposition suivante montre que les deux approches sont équivalentes (elles correspondent la même classe des processus positifs).*

Proposition 5.1.1. *[4]*

1. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy de triplet caractéristique* (σ^2, ν, γ) *et* $Z = \varepsilon(x)$ *son exponentielle stochastique.*

Si $Z > 0$ p.s, alors il existe un autre processus de Lèvy $(L_t)_{t\geq 0}$ de triplet caractéristique $(\sigma_L^2, \nu_L, \gamma_L)$ tel que $Z_T = e^{L_t}$ où

$$L_t = \ln Z_t = X_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sum_{0\leq s\leq t} \ln(1+\Delta X_s) - \Delta X_s$$

$$\sigma_L = \sigma$$

$$\nu_L(A) = \nu(\{x : \ln(1+x) \in A\}) = \int \mathbb{1}_A \ln(1+X)\nu(dx)$$

$$\gamma_L = \gamma - \frac{\sigma^2}{2} + \int \nu(dx)\{\ln(1+x)\mathbb{1}_{|x|\leq 1}(\ln(1+x)) - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}(x)\}$$

2. *Soit $(L_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique $(\sigma_L^2, \nu_L, \gamma_L)$ et $S_t = e^{L_t}$ son exponentielle.*
Il existe un autre processus de Lèvy $(X_t)_{t\geq 0}$ de triplet caractéristique (σ^2, ν, γ) tel que S_t est l'exponentielle stochastique de X : $S = E(X)$ où

$$X_t = L_t + \frac{\sigma^2 t}{2} + \sum_{0\leq s\leq t} (e^{\Delta L_s} - 1 - \Delta L_s)$$

$\sigma = \sigma_L$

$$\nu(A) = \nu_L(x : e^x - 1 \in A) = \int \mathbb{1}_A(e^x - 1)\nu_L(dx)$$

$$\gamma = \gamma_L + \frac{\sigma^2 t}{2} + \int \nu_L(dx)(e^x - 1)\mathbb{1}_{|x|\leq 1}(e^x - 1) - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}(x)$$

Et du fait que les formules qui utilisent l'exponentielle ordinaire sont plus lisibles, cette dernière est plus utilisée pour construire les modèles de prix. Cependant, dans certaines situations, l'exponentielle stochastique est mieux adaptée. donc, on considère le modèle

$$\begin{cases} dS_t^0 &= rS_t^0 dt \quad \text{tel que } S_0^0 = 1 \\ S_t &= S_0 e^{rt+X_t}. \end{cases} \tag{5.5}$$

où X_t est un processus de Lévy. Ce modèle n'admet pas d'opportunité d'arbitrage s'il existe une probabilité Q équivalente à P telle que e^X est une Q-martingale. Si le triplet caractéristique de X sous Q est (A, ν, γ), alors la condition de martingale s'écrit

$$\gamma + \frac{A}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e_x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu^Q(dx) = 0$$

Pour appliquer les modèles 5.5 à l'évaluation d'options, il faut donc établir l'existence d'une probabilité martingale équivalente.

5.1.1 Probabilité martingale

Proposition 5.1.2. *Soient $(X, \mathbb{P})$ et (X, Q) deux processus de Poisson composés de mesures de Lévy ν^P et ν^Q, alors $\mathbb{P} \backsim Q$ sur $[0, T]$ si et seulement si $\nu^{\mathbb{P}} \backsim \nu^Q$ et dans ce cas,*

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \backslash \mathcal{F}_T = \exp\left(T(\lambda^{\mathbb{P}} - \lambda^Q) - \sum_{s\leq t, \Delta X_s \neq 0} \phi(\Delta X_s)\right) = \exp(Z_T)$$

Où $\lambda^{\mathbb{P}} = \nu^{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$, $\lambda^Q = \nu^Q(\mathbb{R})$ et $\phi = \log \frac{d\nu^Q}{d\nu^{\mathbb{P}}}$

Théorème 5.1.1. *[4] Soient (X, P) et(X, Q) deux processus de Lévy de triplets caractéristiques $(A^{\mathbb{P}}, \nu^{\mathbb{P}}, \gamma^{\mathbb{P}})$,$(A^Q, \nu^Q, \gamma^Q)$ respectivement, Alors $\mathbb{P} \sim Q$ sur $[0, T]$ pour tout T si et seulement si*

1. *Les coefficients de diffusion vérifient $A^{\mathbb{P}} = A^Q = A$.*
2. *Les mesures de Lévy vérifient $\nu^{\mathbb{P}} \sim \nu^Q$ avec la fonction $\phi = \log \frac{d\nu^Q}{d\nu^{\mathbb{P}}}$ qui satisfait*

$$\int (e^{\phi/2})\nu^{\mathbb{P}}(dx) < \infty$$

3. *Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ avec*

$$\gamma^Q = \gamma^{\mathbb{P}} + \int_{|x|\leq 1} (e^{\phi} - 1)\nu^{\mathbb{P}}(dx) + \beta A.$$

Proposition 5.1.3. *Soit $(X,\mathbb{P})$ un processus de Lévy de triplet caractéristique (A,ν,γ). Il existe une probabilité $Q \sim \mathbb{P}$ telle que e^X est une Q-martingale si et seulement si X n'est pas p.s croissant ni p.s décroissant.*

Preuve

Si $A > 0$, on peut obtenir une probabilité équivalente par un simple changement de drift. On suppose que $A = 0$ (sans perte de généralité). de plus on suppose que $\int_{|x|\geq 1} e^{\theta x}\nu(dx) < \infty$ pour toute θ. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on prend $\nu^Q = e^{\theta x}$ et $\gamma^Q = \gamma + \int_{|x|\leq 1}(e^{\theta x} - 1)\nu(dx)$ et soit (X,Q) un processus de Lévy de triplet caractéristique $(0,\nu^Q,\gamma^Q)$. Alors par le théorème précédent, $Q \sim \mathbb{P}$. Pour démontrer qu'il existe une probabilité martingale équivalente, il faut trouver un θ tel que :

$$\gamma^Q + \int_{\mathbb{R}}(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu^Q(dx) = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$f(\theta) = \gamma + \int_{\mathbb{R}}(e^{\theta(x+1)} - e^{\theta x} - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx) = 0$$

La fonction $f(\theta)$ est croissante de dérivée

$$f'(\theta) = \int xe^{\theta x}(e^x - 1)\nu(dx)\nu(dx) \geq 0$$

si $\nu((-\infty,0)) > 0$ et $\nu((0,\infty)) >$ la dérivée f' est bornée inférieurement par

$$\min\left(\int_0^{-\infty} x(e^x - 1)\nu(dx), \int_0^{+\infty} x(e^x - 1)\nu(dx)\right)$$

Ce qui implique dans ce cas que $f(\theta) = 0$ a une solution. Supposons donc $\nu((-\infty,0)) = 0$

$$\lim_{\theta\to+\infty} f(\theta) = +\infty$$

et

$$\lim_{\theta\to-\infty} = \lim_{\theta\to-\infty}\{\gamma + \int_0^1 x(e^{\theta x} - 1)\nu(dx)\}$$

Lorsque $\int_1^1 x\nu(dx) = \infty$ (processus à variation infinie), cette limite vaut $-\infty$ et donc $f(\theta) = 0$ a une solution. Dans le cas contraire, cette limite vaut

$$\gamma - \int_1^1 x\nu(dx)$$

et $f(\theta) = 0$ a une solution si et seulement si $\gamma - \int_0^1 x\nu(dx) < 0$ c'est à dire, le drift du processus doit être négatif. et comme on a supposé que les sauts sont positifs, alors X ne doit pas être croissant. De même, on montre que X ne doit pas être décroissant.□

5.1.2 Call européen dans le modèle exp-Lévy

Dans le modèle exp-Lévy, l'expression du call européen, par stationnarité et indépendance des accroissements, est simplifiée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (t, S, T = t+\tau, K) = e^{-r\tau}\mathbb{E}\Big((S_T - K)\backslash S_t = S\Big) \\ &= e^{-r\tau}\mathbb{E}\Big((Se^{r\tau - X_\tau} - e^k)^+\Big) \\ &= Ke^{-r\tau}\mathbb{E}\Big((e^{x+X_\tau} - 1)^+\Big) \end{aligned}$$

où x est le log du "forward moneyness" donné par :

$$x = \ln(S/K) + r\tau.$$

Définissons le prix d'option "forward" relatif par les variables relatives (x, τ) par

$$u(x,\tau) = \frac{e^{r\tau}\mathcal{C}(t, S, T = t+\tau, K)}{K}$$

On conclu que, la structure entière des prix d'options dans les modèles exp-Lévy est paramétrée par deux variables seulement :

$$u(x,\tau) = E[(e^{x+X_\tau} - 1)^+]$$

5.2 Valorisation des options européennes

À l'opposé du cas de Black et Scholes classique, les modèles exp-Lèvy n'ont pas une formule explicite des prix des call, parce que la densité de probabilité du processus de Lévy n'a pas une forme précise.

Méthode de Carr et Madan

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que e^{X_T} est une martingale, dans l'ordre de calculer le prix d'option call :

$$\mathcal{C}(k) = e^{-rT}\mathbb{E}\bigg((e^{rT-X_T} - e^k)^+\bigg)$$

$k = \ln K$ est le log strike.
On préfère écrire sa transformée de Fourier en log strike des termes d'une fonction caractéristique $\phi_T(\upsilon)$ de X_T et trouver alors, le prix des strike par la transformée de Fourier inverse. On ne peut pas faire ça directement parce que $\mathcal{C}(k)$ n'est pas intégrable (elle tend vers une constante positive quand $k \to -\infty$).

– La méthode de la transformée de Fourier est fondée sur l'observation suivante Si on soustrait du prix de l'option call sa valeur intrinsèque

$$z_T(k) = e^{-rT}\mathbb{E}\bigg((e^{rT+X_T} - e^k)^+\bigg) - (1 - e^{k-rT})^+ \tag{5.6}$$

alors, la quantité qui reste est, sous certaines conditions, intégrable et on peut évaluer sa transformée de Fourier

$$\xi_T(\upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\upsilon k} z_T(k)dk = e^{i\upsilon rT}\frac{\phi_t(\nu - i) - 1}{i\upsilon(1 + i\upsilon)}$$

où ϕ_T est la fonction caractéristique de X_T . Les prix d'options peuvent être évalués en calculant la transformée de Fourier inverse de ξ_T .

Proposition 5.2.1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que e^{X_T} est une martingale, et*

$$\mathbb{E}(e^{(1+\alpha)X_t}) < \infty, \ \forall t \tag{5.7}$$

Pour $\alpha > 0$ la transformée de Fourier des variables du temps d'une option call est donnée par

$$\xi_T(\upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\upsilon k} z_T(k)dk = e^{i\upsilon rT}\frac{\phi_t(\nu - i) - 1}{i\upsilon(1 + i\upsilon)} \tag{5.8}$$

Preuve

Premièrement, comme le processus des prix discontinus est une martingale, on peut écrire

$$z_T(k) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx)(e^{rT+x} - e^k)(\mathbb{1}_{k \leq x+rT} - \mathbb{1}_{K \leq rT})$$

où ρ_T est une densité risque neutre de X_T. La condition 5.7 permet de calculer $\xi_T(\upsilon)$ par la permutation des intégrales :

$$\begin{aligned}
\xi_T(\upsilon) &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx)e^{i\upsilon k}(e^{rT+x} - e^k)(1_{k \leq x+rT} - 1_{K \leq rT}) \\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx)\int_{x+rT}^{rT} e^{i\upsilon k}(e^k - e^{rT+x})dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx)\left\{\frac{e^{i\upsilon rT(1-e^x)}}{i\upsilon+1} - \frac{e^{i\upsilon rT+x}}{i\upsilon(1+i\upsilon)} + \frac{e^{(i\upsilon+1)x}+i\upsilon rT}{i\upsilon(1+i\upsilon)}\right\}
\end{aligned}$$

Le premier terme disparu à cause de la condition des martingales, et après les calculs des deux termes qui restent, on trouve le résultat 5.8.□

Remarque 5.2.1. *La condition des martingales garantie que le numérateur est égal à zéro pour $\upsilon = 0$. Sous l'hypothèse 5.7 le numérateur devient une fonction analytique et 5.8 a une limite finie quand $\upsilon \to 0$, et les prix d'options peuvent être trouver par la transformée de Fourier inverse :*

$$\widetilde{z}_T(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\upsilon k}\widetilde{\zeta}_T(\upsilon)d\upsilon$$

$\xi_T(\upsilon)$ converge comme $\mid \upsilon \mid^{-2}$ à l'infini ce qui implique que l'erreur de troncature dans l'évaluation numérique de la transformée de Fourier inverse est grande. La raison pour laquelle la convergence est lente est que la valeur du temps 5.6 n'est pas

différentiable. On peut diminuer l'erreur de troncature de la transformée de Fourier inverse en remplaçant la valeur intrinsèque de l'option par son prix dans le modèle de Black et Scholes (qui est une fonction différentiable) avec une non zéro volatilité. On suppose que les hypothèses de la proposition ci-dessus sont satisfaites, et on note

$$\widetilde{z}_T(\upsilon) = e^{-rT}\mathbb{E}\bigg((e^{rT+X^T} - e^k)\bigg) - C^\sigma_{BS}(k)$$

où C^σ_{BS} est le prix de Black et Scholes d'une option call de volatilité σ et log strike k, et

$$\phi^\sigma_T = \exp\left(\frac{-\sigma^2 T}{2}(\upsilon^2 + i\upsilon)\right)$$

alors la transformée de Fourier de $\widetilde{z}_T(k)$, notée $\widetilde{\zeta}_T(\upsilon)$ est donnée par :

$$\widetilde{\zeta}_T(\upsilon) = e^{i\upsilon rT}\frac{\phi(\upsilon - i) - \phi^\sigma_T(\upsilon - i)}{i\upsilon(1 + i\upsilon)}$$

Pour presque tous les modèles paramétriques, discutés dans la littérature cette quantité converge vers zéro plus vite que toute puissance de $\mid \upsilon \mid$ lorsque $\mid \upsilon \mid \to \infty$, et l'intégrale dans la transformée de Fourier inverse converge plus vite pour toute $\sigma > 0$.

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude des modèles de Black et Scholes dans le cas continu et avec saut, dans le but de leur application en finance. Pour cela, on a commencé par un rapel des outils mathématiques nécessaires, à savoir le mouvement Brownien, les martingale, les processus de Lévy, les mesures aléatoires de Poisson, et les semi-martingales qui jouent un rôle essentiel dans le calcul stochastique (continu et avec sauts). Dans le modèle de Black et Scholes continu, les formules des prix des options européennes sont explicites, la couverture est parfaite, et la stratégie de couverture a un risque résiduel égale à zéro. Par contre dans le cas du modèle de black et Scholes avec sauts, et comme le processus est basé essentiellement sur les sauts, et que la distribution des sauts n'a pas une formule explicite, les prix des options sont implicites (transformée de Fourrier), il n'y a pas de couverture parfaite : les options sont des investissements risqué, et la stratégie de couverture est donnée par la solution du problème d'optimisation du portefeuille.

Bibliographie

[1] A. Gerschenfeld C. Nadal, Lois indéfiniment divisibles et processus de Lévy, DMA, Ecole Normale Supérieure, 24 juin 2006.

[2] A. Sulem, B. Oksendal,Applied Stochastique Control of Jump Diffusions, Springer. August 2004.

[3] D. Applebaum, Lévy prosses and stochastic calculus, Cambridge university Press, New york 2004.

[4] D. Lamberton, B. Lapeyer. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipses(2nd. ed.1997).

[5] E. Gobet, G. Pagès, M.Yor, Mathématiques et finance.

[6] E.Janvresse, S. Pergamenchtchikov, P. R.de Fitte, Mathématiques pour la finance et l'assurance.

[7] J. Gatheral, foreword by Nassim Nicholas Taleb, The volatility surface : a practioner's guide, John Willy and sons 2006.

[8] J-P. Laurent, Modèles de Prix de Produits Financiers, 14 octobre 1996.

[9] N. Rousseau, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance Laboratoire Dieudonné,

[10] P.E. Protter, Stochastic Integration and Differential equations, Springer (1990,2nd. ed.2003).

[11] P. Tankov, Lévy Processes in Finance : Inverse Problems and Dependence Modelling, Theèse soutenue septembre2004, Ecole Polytechnique.

[12] P. Tankov, R. Cont. Financial Modelling with Jump Processes, Chapman Hall CRC press, 2004.

[13] R.F. Bass, Stochastic Differential equations with Jumps. Septembre 2003.

[14] R. ELIE, Calcul stochastique appliqué à la finance , ENSAE Avril 2006.

[15] T.G. Kurtz, Lectures on Stochastic Analysis, Departments of Mathematics and Statistics University of Wisconsin - Madison, Revised September 7, 2001.