République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Consommation et investissement optimaux dans un marché financier à coefficients déterministes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique des processus et Applications

par

Mlle. Asmaa Abid[1]

Sous la direction de

Mr. M. Laouni

Soutenu le 26/06/2018 devant le jury composé de

Dr. S. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Mr. M. Laouni	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : somaa2929@gmail.com .

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à :

mes chers parents

pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

ma mère :

qui aoeuvré pour ma réussite, son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

mon père :

qui peut être fier et trouve ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit, merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

ma famille

toute ma famille (Abid, Belkenadil et Zerrouki) pour leur appui, encouragement et leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués, et le fruit de votre soutien infaillible.

mes proches

mes proches khaoula et Hadjer , mes amis Imene, Naima, Assma et tout ceux qui, de prés ou de loin, m'ont apporté leurs assistance pour accomplir ce travail.

Merci d'être toujours là pour moi

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à : Dieu Tout Puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire, qui m'a ouvert les portes du savoir.

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire.

En premier lieu, je remercie Mr M. Laouni, enseignant à l'université de Saida, en tant que directeur de mémoire, qui m'a guidé, m'a aidé à trouver des solutions pour avancer, et m'a encadré tout au long de ce travail.

Je tiens à lui exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements pour sa précieuse présence, sa disponibilité et l'intérêt majeur qu'il a manifesté pour ce modeste travail. Je lui remercie pour ses orientations et son enthousiasme, ainsi que les judicieux conseils et rigueur qu'il m'a fournit au long de ce travail.

Je remercie aussi Mademoiselle S.Idrissi d'avoir accepté de présider le jury qui examinera ce mémoire, et je tiens également à présenter mes vifs remerciements à Madame N.Ait Ouali et à Mademoiselle F. Benziadi d'avoir accepté d'évaluer mon modeste travail au sein du jury de soutenance. Je tiens à vous remercier pour tout, car j'ai appris beaucoup plus que les mathématiques.

Enfin, je remercie tous mes enseignants le long de mon parcours scolaire et universitaire et spécialement ceux du département des mathématiques.

Table des matières

Introduction

Depuis la création des marchés financiers, les économistes observent que ces marchés connaissent une alternance de phase d'euphorie et de dépression. La question qu'ils se posent et celle de savoir comment "battre le marché" ?.

Les mathématiciens ont depuis longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de finance. Une des caractéristiques de ces questions est qu'elles font apparaître des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation.

L'idée remonte en 1900 par la thèse de Louis Bachelier [2] "*Théorie des spéculations*", qui propose l'utilisation, sans le nommer, du mouvement Brownien MB pour décrire les cours boursiers et en déduire le prix des options.

En 1944, Kiyoshi Itô a publié la célèbre formule qui prend son nom le calcul stochastique ou calcul d'Itô est en effet un calcul d'intégrale par rapport au mouvement Brownien MB, cette notion d'intégrale n'est pas usuelle.

Après, en 1973 Fischer Black et Myron Scholes [4] ont utilisé la formule d'Itô qui l'ont permise de représenter de façons explicites les prix des options en fonction de la volatilité.

Le modèle de Black Scholes devient le paradigme de référence pour la valorisation des produits dérivés et vaudra à leurs auteurs le prix Nobel en 1997.

La théorie des processus stochastiques semble maintenant dépasser largement le cadre de la finance, dans un monde où le hasard fait la loi !

Ce travail comporte trois chapitres dont le but est la recherche de la stratégie optimale dans un marché financier régie par le modèle de Black-Scholes multidimensionnel à coefficients déterministes. Nous considérons un problème d'investissement et consommation optimal visant la consommation attendue sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et la richesse terminale à la date T avec la mesure du risque limitée uniformément sur [0,T]. L'approche classique à ce problème est dû à Merton, qui consiste à optimiser une fonctionnelle sous certaines contraintes. Ce problème d'optimisation a été étudié par Pergamenchtchikov et Klüppelberg avec VaR limitée pour une classe de stratégies financières non aléatoires et dans le cas où la fonction d'utilité est logarithmique. Notre travail, considère le problème d'investissement et consommation optimal avec contrainte liée à la mesure de risque "value-at-risk" VaR limitée uniformément sur [0,T] pour des stratégies financières admissible et des fonctions d'utilité puissance.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions essentielles concernant les processus stochastiques et le mouvement Brownien qui sont les outils majeurs des modèles de Black Scholes et servent à construire la plupart des modèles d'actifs en finance. Puis nous construirons l'intégrale stochastique d'Itô ainsi nous introduisons le calcul différentiel stochastiques qui lui est associé : le calcul d'Itô.

Le deuxième chapitre repose sur certains modèles de finance en utilisant la modélisation stochastique d'un marché financier du type Black-Scholes multidimensionnel à coefficients déterministes. Pour la gestion du portefeuille et l'étude de l'investissement et la consommation, nous introduisons la fonction de coût et l'ensemble des contrôles admissibles, puis nous donnons une solution optimale sans contraintes d'un problème optimal de contrôle stochastique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la consommation et l'investissement optimaux dans le cas où la fonction d'utilité est une fonction puissance. En utilisant le calcul d'Itô et l'optimisation stochastiques, nous donnons une solution optimale avec les contraintes liées à la mesure de risque "Value at risk" VaR selon les changements des régimes de la fonction de coût.

Finalement, une conclusion et bibliographie présente des compléments au mémoire.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques et calcul différentielle

Le but de ce chapitre est d'introduire le mouvement Brownien et les outils de base du calcul stochastique essentiels pour comprendre et formuler le modèle de Black-Merton-Scholes :

- Après une présentation générale des processus en temps continu, nous présentons ensuite le mouvement Brownien et étudions quelques propriétés importantes de ce processus.
- Nous introduisons la notion d'intégrale stochastique qui nous servira par la suite à modéliser l'évolution du processus de richesse dans un modèle financier où les transactions se déroulent de manière continue dans le temps.
- Enfin, nous présentons les processus d'Itô, le Lemme d'Itô et les équations différentielles stochastiques.

1.1 Généralités

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et d'une fonction $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ représentant l'état du système. Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $X_t(\omega)$, en revanche, pour une évolution particulière du système (i.e à ω fixé) les états successifs sont représentés par la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ que l'on nomme par abus de langage une trajectoire. Commençons par préciser ce que l'on entend par processus à temps continu.

1.1.1 Processus stochastique, filtration

Dans toute la suite, on supposera donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)*** *Un processus stochastique X est la donnée de $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$, où, à t fixé, X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.
Si $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \longmapsto X_t(\omega), t \geq 0$ est une trajectoire du processus X. X_t peut représenter par exemple le prix d'une action ou titre financier, à l'instant t.

Définition 1.1.2 ***(Filtration)*** *Une filtration (ou flôt d'information) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$:*

$$\text{pour tout} \quad t \geq s \geq 0, \quad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

- La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t et elle augmente avec le temps.
- Si l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on parlera de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.
- On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$.
  On parle d'hypothèses habituelles si : les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$ et la filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.
- La filtration **naturelle** associée à un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, est par définition la famille de sous tribus :
  $$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$$
  où $\mathcal{F}_t$ est la plus petite tribu rendant mesurable les applications $\omega \longmapsto X_s(\omega)$, pour $s \leq t$.

Définition 1.1.3 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique.*

- *Le processus X est dit* ***mesurable*** *si l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} ([0,+\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,+\infty[)\otimes\mathcal{F}_t) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (t,\omega) & \longmapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

  est mesurable.
- *Le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit* ***adapté*** *à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- *Le processus X est dit* ***progressivement mesurable*** *par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$ l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} ([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) & \rightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s,\omega) & \longmapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

  est mesurable.
- *On dit que le processus est à* ***trajectoires continues*** *(ou est continu) si les applications $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout $\omega \in \Omega$.*
- *Le processus X est dit* ***càdlàg*** *(continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*
- *Le processus X est dit* ***càglàd*** *(continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*
- *Le processus X est dit à* ***accroissements stationnaires*** *si : pour tout t, la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t.*
- *Le processus X est dit à* ***accroissements indépendants*** *si :*
  pour tout $t_1 \leq \cdots \leq t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

1.1.2 Martingales à temps continu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration de cet espace.

Définition 1.1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré . Une famille adaptée $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires intégrables (c'est- à-dire vérifiant $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ pour tout t) est :*

– *une martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.
– *une sur-martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$.
– *une sous-martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$.

Propriétés

1. On déduit de la définition d'une martingale que, si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$, pour tout t.
2. Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t)$.
   Cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance.
3. Si X est une martingale, alors, X^2 est une sous martingale.

1.2 Le mouvement Brownien (M.B.)

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement Brownien. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition 1.2.1 *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles,* $(W_t)_{t\geq 0}$*, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :*
– *continuité :* $\mathbb{P}$ *p.s. la fonction* $s \longmapsto W_s(\omega)$ *est une fonction continue.*
– *indépendance des accroissements : Si* $s \leq t, W_t - W_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u \leq s)$.
– *stationnarité des accroissements : si* $s \leq t$*, la loi de* $W_t - W_s$ *est identique à celle de* $W_{t-s} - W_0$.

Autrement dit, les accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps $(t - s)$.

Remarque 1.2.1 *Un mouvement Brownien est dit standard si :*

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P}.p.s \qquad \mathbb{E}(W_t) = 0, \qquad \mathbb{E}(W_t^2) = t.$$

Définition 1.2.2 ***(M.B. standard de dimension d)*** *Un mouvement Brownien (standard) de dimension d, $\{W_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est la donnée d'un processus mesurable W à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et d'une filtration, tels que W est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et vérifie :*

a) $W_0 = 0$ *presque sûrement.*

b) *W est continu i.e $t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$.*

c) *Pour $0 \leq s < t$, l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.*

d) *Pour $0 \leq s < t$, l'accroissement $W_t - W_s$ suit une loi normale centrée, de matrice de covariance $\sqrt{t-s}Id_d$ où Id_d désigne la matrice identité de dimension d.*

Remarque : Un processus $W = (W_t^1, \cdots, W_t^d)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel standard si les composantes $W_t^i, i = 1, \cdots, d$ de W sont des mouvements Browniens standards indépendants.

Proposition 1.2.1 [16] ***(propriétés de martingale)*** *Si $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ sa filtration naturelle, alors*

1. *le processus W est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, de carré intégrable, i.e.*

$$\forall\, 0 \leq s < t; \quad \mathbb{E}(W_t/\mathcal{F}_s) = W_s.$$

2. *le processus $(W_t^2 - t)_{t\in[0,T]}$ est aussi une martingale par rapport à la même filtration.*

3. *le processus $(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t})_{t\in[0,T]}$ (Brownien Exponentiel) est $\mathcal{F}_t$-martingale.*

Quelques résultats concernant la régularité des trajectoires.

Théorème 1.2.1 *[16]* ***(Régularité)***

1. *Le M.B. est à variation infinie sur tout intervalle.*
2. *Le M.B. n'est dérivable en aucun point.*
3. *Les trajectoires du M.B. sont localement Hölder-continues d'ordre α, avec $\alpha < 1/2$. Par contre c'est faux si $\alpha \geq 1/2$.*

Exemple :(Le mouvement Brownien géométrique)

Un mouvement Brownien géométrique, de valeur initiale $S_0 > 0$ déterministe, de coefficient de tendance (ou dérive) μ et de coefficient de diffusion σ, est un processus $(S_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$S_t = S_0 \exp^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

où $\{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard réel.

1.3 Intégrale stochastique

1.3.1 Intégration des processus élémentaires

Dans toute la suite, on fixe un horizon de temps $T > 0$. On s'intéressera aux trajectoires des processus considérés seulement sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Définition 1.3.1 *(Processus élémentaire) Un processus réel $H = (H_t)_{t\geq 0}$ défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé élémentaire s'il peut s'écrire comme :*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\omega) 1_{]t_{i-1}, t_i]}, \quad \forall t \in]0, T], \tag{1.1}$$

où $\{t_0 \leq \cdots \leq t_n = T\}$ est une subdivision de $[0, T]$ et $(\theta_i)_{0\leq i\leq n}$ est une suite de variables aléatoires telles que θ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et la variable aléatoire $\sup_i |\theta_i|$ est bornée.
Dans toute la suite on note $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ l'ensemble des processus élémentaires définis sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.
On commence par définir l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires.

Définition 1.3.2 ***(Intégrale stochastique I)*** *Soit $H \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un processus élémentaire et θ_i les variables qui interviennent dans l'écriture de l'équation* (1.1). *L'intégrale stochastique de H contre le mouvement Brownien entre la date 0 et la date $t \leq T$,* *notée* $\int_0^T H_u dW_u$ *est définie par*

$$\int_0^T H_u dW_u = \sum_{i=1}^{n} \theta_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}})$$

Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, *on définit* $\int_s^t H_u dW_u$ *par*

$$\int_s^t H_u dW_u = \int_0^t H_u dW_u - \int_0^s H_u dW_u$$

Remarque : Notons que si k est l'entier tel que $t \in]t_k, t_{k+1}]$, alors

$$\int_0^t H_u dW_u = \sum_{i=1}^{k} \theta_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \theta_{k+1}(W_t - W_{t_k}) = \sum_{i=1}^{k} H_{t_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + H_t(W_t - W_{t_k}).$$

En particulier :

$$\int_0^t 1 dW_u == W_t - W_0 = W_t.$$

Proposition 1.3.1 [*16*] ***(Propriétés de l'intégrale stochastique I)*** *L'intégrale stochastique du processus élémentaire* H *contre le mouvement Brownien, satisfait les propriétés :*

1. *Le processus* $\{\int_0^t H_u dW_u, 0 \leq t \leq T\}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté et à trajectoires continues.*
2. *Le processus* $\{\int_0^t H_u dW_u, 0 \leq t \leq T\}$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale qui démarre à zéro.*
3. *Le processus* $\{\int_0^t H_u dW_u, 0 \leq t \leq T\}$ *vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_u dW_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^2 du\right].$$

4. *Le processus* $\left\{\left(\int_0^t H_u dW_u\right)^2 - \int_0^t H_u^2 du, 0 \leq t \leq T\right\}$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale qui démarre à zéro.*

1.3.2 Intégration des processus de $\mathcal{L}^2([0,T])$

On considère l'ensemble $\mathcal{L}^2([0,T])$ défini par :

$$\mathcal{L}^2([0,T]) = \left\{(H_t, 0 \leq t \leq T), \text{processus } \mathcal{F}_t\text{-adapté tel que } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u^2 du\right] < \infty\right\}.$$

On désigne par $\mathcal{M}^2([0,T])$ l'ensemble des martingales de carré intégrable :

$$\mathcal{M}^2([0,T]) = \left\{M = (M_t, 0 \leq t \leq T),\ \text{martingale et } \ \forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}[M_t^2] < \infty\right\}.$$

Proposition 1.3.2 [16] *La fonction : $H \longmapsto \sqrt{\mathbb{E}[\int_0^T H_u^2 du]}$ définit une norme sur $\mathcal{L}^2([0,T])$. Elle sera notée $||H||_{\mathcal{L}^2}$.*

Lemme 1.3.1 [16] *L'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{L}^2([0,T])$ muni de la norme $||\cdot||_{\mathcal{L}^2}$. C'est à dire, pour tout processus $H \in \mathcal{L}^2([0,T])$ il existe une suite de processus élémentaires $(H^n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ telle que :*

$$||H - H^n||_{\mathcal{L}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_u - H_u^n)^2 du\right] \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Théorème 1.3.1 [16]***(Intégrale stochastique II)*** *Il existe une unique application linéaire $\mathcal{I}$ qui a tout processus $H \in \mathcal{L}^2([0,T])$ associe une martingale continue de carré intégrable $\mathcal{I}[H] \in \mathcal{M}^2([0,T])$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *L'application $\mathcal{I}$ coïncide avec l'intégrale stochastique des processus élémentaires :*

$$\mathcal{I}[H]_t = \int_0^t H_u dW_u, \qquad \forall H \in \mathcal{E},\ \forall t \in [0,T].$$

2. *L'application $\mathcal{I}$ vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{I}[H]_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right], \qquad \forall H \in \mathcal{L}^2([0,T]), \forall t \in [0,T].$$

Pour $H \in \mathcal{L}^2([0,T])$, le processus $\mathcal{I}[H]$ est appelé intégrale stochastique de H par rapport au mouvement Brownien W. On note : $\int_0^t H_s dW_s = \mathcal{I}[H]_t$.

Remarque : L'isométrie nous renseigne que la norme de $\mathcal{I}[\cdot]$ en tant qu'application linéaire de $\mathcal{L}^2$ dans $\mathcal{M}^2$ est bornée égale à 1. Donc en particulier il s'agit d'une application continue et par exemple avec les notations du Lemme (1.2.1) nous aurons que

$$\lim_{n\to 0} \mathcal{I}[H^n] = \mathcal{I}[H].$$

Ceci est utile pour calculer $\mathcal{I}[H]$.
Considérons le cas particulier de l'intégrale de Wiener :

Proposition 1.3.3 ***(Intégrale de Wiener)*** *Soit $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dans L^2. Le processus $\{\int_0^t f(s)dW_s, t \in [0,T]\}$ est appelé intégrale de Wiener et vérifie*

$$\int_0^t f(s)dW_s \sim N\Big(0, \int_0^t f^2(s)ds\Big)$$

1.3.3 Intégration des processus de $\mathcal{L}([0,T])$

On considère l'ensemble $\mathcal{L}([0,T])$ défini par :

$$\mathcal{L}([0,T]) = \Big\{(H_t, 0 \le t \le T), \text{ processus } \mathcal{F}_t\text{-adapté tel que } \Big[\int_0^T H_u^2 du\Big] < \infty \quad \mathbb{P}-p.s\Big\}.$$

Théorème 1.3.2 [16] ***(Intégrale stochastique III)*** *Il existe une unique application linéaire $\mathcal{I}$ qui a tout processus $H \in \mathcal{L}([0,T])$ associe un processus $\mathcal{I}[H]$ à trajectoires continues sur $[0,T]$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *L'application $\mathcal{I}$ coïncide avec l'intégrale stochastique des processus élémentaires :*

$$\mathcal{I}[H]_t = \int_0^t H_u dW_u \qquad \forall H \in \mathcal{E},\ \forall t \in [0,T].$$

2. *L'application $\mathcal{I}$ vérifie la propriété de continuité : si $(H^n)_{n\in N}$ est une suite de processus simples telle que $\displaystyle\int_0^T (H_u^n)^2 du \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ en probabilité, alors*

$$\sup_{t\in[0,T]} (\mathcal{I}(H^n)_t) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

en probabilité.

Pour $H \in \mathcal{L}([0,T])$, le processus $\mathcal{I}[H]$ est appelé intégrale stochastique ou encore intégrale d'Îto de H par rapport au mouvement Brownien W. On note

$$\int_0^t H_s dW_s = \mathcal{I}[H]_t.$$

Par ailleurs si H est continue et localement bornée et Δ^n est une suite de subdivisions de $[0,t]$ avec $|\Delta|^n \longrightarrow 0$ alors (propriété de sommes de Riemann- Itô) :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_k \in \Delta^n} H_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \int_0^t H_s dW_s \qquad \mathbb{P}.p.s$$

1.4 Calcul d'Itô

On va maintenant introduire un calcul différentiel sur les intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô". On commence par préciser la définition de la classe de processus pour la quelle on peut énoncer cette formule.

1.4.1 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que*

$$\forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

avec
- X_0 $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *des processus adaptés à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ $\quad\mathbb{P}$ *p.s.*
- $\int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty$ $\quad\mathbb{P}$ *p.s.*

La décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens, si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_s$$

alors $X_0 = X_0'$ $\mathbb{P}.p.s.$, $K_t = K_t'$ $dt \otimes \mathbb{P}.p.s.$ et $H_t = H_t'$ $dt \otimes \mathbb{P}.p.s.$

1.4.2 Formule d'Itô

Théorème 1.4.1 *[18] Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s.$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$. On a

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s$$

où, par définition,

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d_s,$$

et

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

De même si $(t, x) \to f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiables en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, x) (on dit dans ce cas que f est de classe $C^{1,2}$), on a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s) ds + \int_0^t f_x'(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}''(s, Xs) d\langle X, X\rangle_s.$$

Exemples d'utilisation de la formule d'Itô :

Commençons par traiter un exemple élémentaire. Si $f(x) = x^2$ *et* $X_t = W_t$ *on a* $K_s = 0$ *et* $H_s = 1$*, donc*

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds,$$

on obtient

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s.$$

1.4.3 Formule d'Itô multidimensionnelle

Dans le cas où la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens la formule d'Itô se généralise.

Définition 1.4.2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé muni d'une filtration et* $(W_t)_{t\geq 0} = (W_t^1, \ldots, W^d)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien standard d-dimensionnel. On dit que* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus d'Itô si*

$$\mathbb{P}p.s. \quad \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^i dW_s^i,$$

avec

- X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et les* $(H_t^i)_{0\leq t\leq T}$ *sont des processus adaptés à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*.*
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty \quad \mathbb{P}$ *p.s.*
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P}$ *p.s.*

La formule d'Itô prend la forme suivante :

Théorème 1.4.2 *[19] Soient* $X = (X_t^1, \cdots, X_t^p)$ *p processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,j} dW_s^j, \quad t \in [0, T],$$

alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t,x) :

$$f(t,X_t^1,\cdots,X_t^p)=f(0,X_0^1,\cdots,X_0^p)+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s^1,\cdots,X_s^p)ds+\sum_{i=1}^p\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s^1,\cdots,X_s^p)dX_s^i$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^d\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(s,X_s^1,\cdots,X_s^p)d<X^i,X^j>_s,$$

où

$$d<X^i,X^j>_s=\sum_{m=1}^d H_s^{i,m}H_s^{j,m}ds,\qquad et \qquad dX_s^i=K_s^i ds+\sum_{j=1}^d H_s^{i,j}dW_s^j.$$

1.5 Équations différentielles stochastiques (EDS)

1.5.1 Définitions

$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t>O},\mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.5.1 *Une équation différentielle stochastique EDS est une équation de la forme*

$$X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s \tag{1.2}$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t, \\ X_0=x \end{cases}.$$

où l'inconnu X est un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, W est un mouvement Brownien standard de $\mathbb{R}^d$ et

$$b:[0,T]\times\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^p \qquad et \qquad \sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$$

sont des applications continues avec $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $p \times d$ à coefficients réels.

Définition 1.5.2 *Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien W sur cet espace. Une solution de l'équation différentielle stochastique* (1.2) *est un processus X continu $\mathcal{F}_t$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ ont un sens et l'égalité*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P}$ p.s.

1.5.2 Solutions fortes

Définition 1.5.3 *Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ est appelé une solution forte de l'EDS* (1.2) *avec condition initiale X_0 si*

- *X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in [0, T]$;*
- *on a les conditions de régularité*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T |b(s, X_s)|ds < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty\right) = 1;$$

- *pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

  avec probabilité 1.

1.5.3 Théorème d'existence

Théorème 1.5.1 [22] *On suppose que*

1) *les fonctions b et σ sont continues,*

2) *il existe* $K > 0$ *tel que pour tout* $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$

i) $\|b(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq k(1 + \|x\|)$

ii) $\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq k\|x - y\|$

3) *La condition initiale* X_0 *est indépendante de* $(W_t)_{t\geq 0}$ *et est de carré intégrable, alors l'équation* (1.2) *admet une unique solution* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *à trajectoires continues pour tout* $t \leq T$. *de plus cette solution vérifie*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t\|^2) < \infty.$$

1.5.4 Exemples

1. **Le mouvement Brownien géométrique**
   On considère l'équation différentielle suivante
   $$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x \tag{1.3}$$
   où μ et σ sont des constantes.
   Cette équation est appelée l'équation de ***Black et Scholes*** ; μ est appelé le coefficient de dérive (il traduit la tendance générale de processus) et σ le coefficient de diffusion (il traduit la variabilité ou encore la "volatilité" du processus). Cette équation, ou des généralisations de celle-ci, sont couramment utilisées en mathématiques financières pour décrire l'évolution des prix des actifs.

   Proposition 1.5.1 [*19*] *L'équation différentielle stochastique* (1.3) *admet une solution unique qui est donnée par*
   $$X_t = xe^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}.$$
   le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $X_t = e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$ est appelé le Brownien géométrique
   Preuve (Il suffit d'appliquer la formule d'Itô).

2. Dans le cas où μ et σ sont des fonctions déterministes adaptées et bornées, l'équation différentielle stochastique précédente est définie par
   $$dX_t = \mu_t X_t dt + \sigma_t X_t dW_t, \quad X_0 = x$$

et elle admet une solution unique qui est donnée par

$$X_t = x \exp\{\int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds\}.$$

1.5.5 Exponentielle stochastique

On fixe un horizon fini $T > 0$ et on suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$.

Définition 1.5.4 *Une exponentielle stochastique est un processus $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par*

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t(\beta) = e^{\int_0^t \beta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds}$$

où $\beta = (\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus stochastique adapté tel que $\mathbb{P}(\int_0^T \beta_t^2 dt < \infty) = 1$.

Proposition 1.5.2 *[16]Soit $\beta = (\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus stochastique adapté càdlàg tel que $\mathbb{E}(\int_0^T \beta_t^2 dt) < \infty$. La solution de l'équation différentielle stochastique*

$$d\mathcal{E}_t = \beta_t \mathcal{E}_t dW_t, \quad \mathcal{E}_0 = 1$$

est l'exponentielle stochastique $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t(\beta) = e^{\int_0^t \beta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds}.$$

De plus, si $\mathbb{E}(\exp[\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt]) < \infty$, alors le processus $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale d'espérance 1.

1.6 Changement de probabilité, Théorème de représentation des martingales

1.6.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une probabilité $\mathbf{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbf{Q}(A) = 0.$$

Théorème 1.6.1 *[19] $\boldsymbol{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si, et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} \qquad \boldsymbol{Q}(A) = \int_A Z(w) d\mathbb{P}(w)$$

Z est appelée densité de $\boldsymbol{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et parfois notée $\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont dites équivalentes si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Noter que si $\mathbf{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, de densité Z, alors $\mathbb{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont équivalentes si et seulement si $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

1.6.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, dont la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ indexé par l'intervalle de temps $[0, T]$. Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov.

Théorème 1.6.2 *[19] Soit $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :*

$$L_t = exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

soit une martingale. Alors , sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(\widetilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$, est un mouvement Brownien standard.

Remarque 1.6.1 *Une condition suffisante pour que $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ soit une martingale (c'est-à-dire $\mathbb{E}[L_T] = 1$) est donnée par la condition suivante, due à Novikov :*

$$\mathbb{E}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right\}\right] < +\infty.$$

1.6.3 Théorème de représentation des martingales Browniennes

Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement Brownien standard construit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle. On rappelle que si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) < \infty$, le processus $\left(\int_0^T H_t^2 dt\right)$ est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes les martingales Browniennes peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

Théorème 1.6.3 [*19*] *Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale continue de carré intégrable, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Alors, il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ et, pour tout $t \in [0, T]$,*

$$M_t = M_0 + \int_0^T H_s dW_s \ p.s.. \tag{1.4}$$

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement Brownien.
Il résulte du théorème que si U est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :

$$U = \mathbb{E}(U) + \int_0^T H_s dW_s \text{ p.s.}$$

où (H_t) est un processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 ds) < +\infty$. Il suffit pour cela de considérer la martingale $M_t = \mathbb{E}(U/\mathcal{F}_t)$. On peut démontre aussi que si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale (non nécessairement de carré intégrable) il existe une représentation du type (1.4) mais avec un processus vérifiant seulement $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$, p.s..

Chapitre 2

Marchés financiers en temps continu

2.1 Marché financier

Définition 2.1.1 *Un marché financier est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers (appelés aussi actifs financiers), qui sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent. Le prix d'un titre financier est le montant convenu entre les deux parties en échange du titre. Certains marchés autorisent la vente à découvert (short sell), c'est-à-dire autorisent les agents à vendre des titres qu'ils ne possèdent pas, ce qui leur permet de faire à tout moment des paris à la hausse ou à la baisse. En pratique, un agent ayant vendu un actif à découvert doit l'emprunter au jour le jour auprès d'un autre opérateur de marché (ce qui a un coût).*

2.2 Les actifs financiers

Les actifs financiers peuvent être classés en deux grandes catégories :

- **L'actif sans risque :** il rapporte un rendement constant connu à l'avance, i.e. le rendement du titre entre les dates t et $t + dt$ est connu à la date t. Il s'agit en général d'une obligation émise par l'état, i.e. sans risque de défaut.
- **Les actifs risqués :** ils rapportent un rendement non connu à l'avance. Il s'agit par exemple des actions, des obligations émises par des entreprises pouvant faire défaut, etc...

  On appelle marché parfait un marché sur lequel on peut acheter et vendre les différents actifs sans restriction de quantité et sans payer de coût de transaction ou taxes.

2.3 Cadre probabiliste

- L'incertitude sur les marchés financiers est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ où
  - Ω représente tous les états du monde,
  - la tribu $\mathcal{F}$ représente la structure d'information globale disponible sur le marché,
  - $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}_t$ décrive l'information disponible aux agents du marché à la date t, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Dans le cas où l'horizon T des investisseurs sur le marché est fini, on suppose usuellement $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
  - la probabilité $\mathbb{P}$ est la probabilité historique qui donne les probabilités à priori des évènements considérés.
- **L'actif sans risque :** Dans cet actif le taux sans risque est modélisé par un processus $\mathcal{F}$-prévisible $(r_t)_{t\in[0,T]}$, i.e. r_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in [0, T]$. Un dinars placé sur un intervalle dt rapporte un rendement $r_t dt$. Autrement dit, un dinars placé à la date s rapporte à la date $t > s$ la somme $e^{\int_s^t r_u du}$.
  Si on note par S_t^0 la valeur de prix de cet actif à l'instant t, alors la dynamique de S_t^0 est régie par l'équation différentielle ordinaire suivante
  $$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt, \quad \text{avec} \quad S_0^0 = 1.$$
- **L'actif risqué :** Si on note par S_t la valeur (aléatoire) de prix de l'actif risqué alors, l'actif risqué est modélisé par un processus stochastique $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ qui est adapté à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ et que on supposera continu. La dynamique de cette processus est régie par une équation différentielle stochastique définie par
  $$dS_t = S_t \mu_t dt + S_t \sigma_t dW_t, \quad \text{avec } S_0 = s,$$
  où
  - μ_t est appelé le taux de rendement instantané, on interprète comme le rendement relatif espéré par unité de temps : il mesure la tendance du marché et est souvent comparé au taux sans risque r_t.

- σ_t est appelée la volatilité, elle mesure l'aléa de l'actif risqué.
- $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

Remarque : On peut considérer des modèles où les coefficients μ et σ sont déterministes : $\mu = \mu(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, sont des fonctions du temps et du prix : $\mu = \mu(t, s), \sigma = \sigma(t, s)$, on parle alors de modèle de diffusion avec volatilité locale, ou encore des processus aléatoires.

Définition 2.3.1 *Un* ***portefeuille autofinançant*** *est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. On notera X_t la valeur en t du portefeuille X.*

Définition 2.3.2 *Un* ***arbitrage*** *sur la période $[0, T]$ est un portefeuille autofinançant X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive.*

$$X_0 = 0, \quad X_T \geq 0 \quad et \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$$

La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit.
On imagine sans peine que les gens qui tentent de réguler le marché cherchent à tout prix à proscrire les opportunités d'arbitrage. En effet, si de telles opportunités sont admises le marché ne tarde pas à "exploser". Une hypothèse communément faite est donc celle d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA, no free lunch) entre tout instant 0 et T.

$$\{X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_T \geq 0\} \Longrightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

2.4 Investissement et consommation en temps continue

2.5 Le modèle de marché

Soit T un nombre réel strictement positif fixé, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfait aux conditions habituelles, $W = (W_t, t \in [0,T])$ un mouvement Brownien standard d-dimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}, t \geq 0$ est la filtration engendrée par le mouvement Brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ augmentée par les ensembles négligeables et on travail sur l'intervalle du temps $[0,T]$ avec T est la date d'échéance.
On considère un marché financier de type de black-scholes consiste $(d+1)$ actifs financiers :

- L'un sans risque de prix S_t^0 régie par l'équation différentielle ordinaire :

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt, \qquad S_0^0 = 1.$$

- Les autres actifs sont risqués, de prix $S_t^1, S_t^2, \cdots, S_t^d$ respectivement et l'évolution du cours de ces actifs est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j), \quad i = 1, \cdots, d, \quad S_0^i > 0,$$

et si $S_t = (S_t^1, \cdots, S_t^d)'$ est le vecteur des prix des actifs financiers risqués, alors

$$\begin{aligned} dS_t &= \begin{pmatrix} dS_t^1 \\ \vdots \\ dS_t^i \\ \vdots \\ dS_t^d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^i \\ \vdots \\ S_t^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t^1 \\ \vdots \\ \mu_t^i \\ \vdots \\ \mu_t^d \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^i \\ \vdots \\ S_t^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_t^{11} & \sigma_t^{12} & \dots & \sigma_t^{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_t^{i1} & \sigma_t^{i2} & \dots & \sigma_t^{id} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_t^{d1} & \sigma_t^{d2} & \dots & \sigma_t^{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ \vdots \\ dW_t^i \\ \vdots \\ dW_t^d \end{pmatrix} \\ &= S_t \mu_t dt + S_t \sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Où

- $\mu_t = (\mu_t^1, \cdots, \mu_t^d)'$: est le vecteur de taux de rendement, avec $(\cdot)'$ désigne la notation du transposé.
- r_t : est le taux d'intérêt.
- σ_t : $(\sigma_t^{ij})_t$ est la matrice de volatilité.

On suppose que les coefficients r_t, μ_t, σ_t sont des fonctions déterministes continues à droite admet une limite à gauche (càdlàg), de plus la matrice σ_t est non singulier.

Remarque : Dans le modèle de Black et Scholes et d'après le théorème de Girsanov et le théorème de représentation des martingales Browniennes, on voit qu'il existe une probabilité risque neutre si et seulement si il existe un processus progressivement mesurable $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que

$$\mu_t - r_t = \sigma_t\theta_t, \qquad \int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty,$$

$$\text{et} \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right\}\right] = 1.$$

Dans ce cas, si $\mathbb{P}^*$, est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ définie par le processus $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$, alors

$$d\widetilde{S}(t) = \widetilde{S}(t)\sigma_t d\widetilde{W}_t, \qquad i.e. \qquad \widetilde{S}(t) = S_0 \exp\left\{-\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right\},$$

où $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$ et $\widetilde{S}(t)$ désigne le prix actualisé à l'instant t.

2.6 Stratégie financières et portefeuille.

On considère un investisseur muni d'un capital initial $X_0 = x > 0$ veut l'a distribué dans ce marché par les stratégies $(\phi, \varphi_t^1, ..., \varphi_t^d)$, où :

- ϕ_t est la quantité investie dans l'actif sans risque,

- $\varphi_t = (\varphi_t^1, \cdots, \varphi_t^d)$ les quantités des actifs risqués, c'est-à-dire possède une quantité φ^j d'actifs S_j, $(1 \leq j \leq d)$.

Définition 2.6.1 ***(Une stratégie financière)*** *Une stratégie financière est un processus stochastique $H = (\phi_t, \varphi_t)_{t\in[0,T]}$ où $(\phi_t, \varphi_t)_{t\in[0,T]} = (\phi_t, \varphi_t^1, \cdot, \cdot\cdot, \varphi_t^d)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et tel que les intégrales*

$$\int_0^T \phi_t dS_t^0 \quad et \quad \int_0^T \varphi_t^i dS_t^i, \quad 1 \leq i \leq d$$

aient un sens. Pour chaque $i \leq d$ et $t \in [0,T]$, φ_t^i représente la quantité d'actifs risqués S^i détenus dans le portefeuille et ϕ_t la somme placée au taux sans risque.
La somme ϕ_t placée au taux sans risque rapporte un rendement instantané $\phi_t r_t dt$. La somme $\varphi_t^i S_t^i$ placée en actif S^i induit un gain lié à la variation du cours de l'actif égal à $\varphi_t^i dS_t^i$.
La valeur à $t \in [0,T]$ du portefeuille associé à une stratégie H est donnée par

$$X_t = \phi_t S_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i S_t^i.$$

Le processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ appelé aussi processus de richesse.

Remarque : Le fait que le processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ soit progressivement mesurable est très naturel : la prise de décision en t ne peut se faire qu'avec la connaissance de l'information disponible à t i.e $\mathcal{F}_t$.

Définition 2.6.2 ***(Une stratégie financière autofinancée)*** *Une stratégie financière $H = (\phi_t, \varphi_t)_{t\in[0,T]}$ est dite autofinancée si la valeur du portefeuille associée vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dX_t = \phi_t dS_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i dS_t^i \tag{2.1}$$

Remarque : Sur un intervalle de temps $[t, t+dt]$, (2.1) implique que

$$X_{t+dt} - X_t = \int_t^{t+dt} \phi_t dS_t^0 + \sum_{i=1}^d \int_t^{t+dt} \varphi_t^i dS_t^i$$

les changements de valeur du portefeuille proviennent uniquement des changement de valeur des actifs. Il n'y a ni retrait ni injection de cash entre 0 et T. Une stratégie autofinancée est donc une stratégie où la seule marge de manIJuvre est de pouvoir ré agencer les actifs en permanence.
Maintenant, on suppose que l'investisseur peut consommer à chaque instant t une proportion de sa richesse X_t, et on note par c_t le taux de sa consommation.
Le processus $(c_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus non-négative, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ progressivement-mesurable satisfait pour l'horizon d'investissement $T > 0$

$$\int_0^T c_t dt < \infty$$

et il est appelé le processus de consommation.

Définition 2.6.3 *Une stratégie financière $H = (\phi_t, \varphi_t)_{t\in[0,T]}$ et un processus de consommation $(c_t)_{t\in[0,T]}$ sont dite autofinancée si le processus de richesse $(X_t)_{t\in[0,T]}$ associée satisfait à l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dX_t = \phi_t dS_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i dS_t^i - c_t dt, \qquad X_0 = x, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

i.e

$$X_t = x + \int_0^t \phi_u dS_u^0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_u^i dS_u^i - \int_0^t c_u du, \quad t \geq 0.$$

Nous allons travailler avec des quantités relatives par rapport à la richesse, donc pour $j = 1 \cdots d$, on définit :

$$\pi_j(t) = \frac{\varphi_j(t)S_j(t)}{\phi_t S_0(t) + \sum_{j=1}^{d} \varphi_i(t)S_i(t)}, \qquad t \geq 0.$$

où $\pi_t = (\pi_1(t), \cdots, \pi_d(t))'$, $t \geq 0$, est un processus $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurable vérifie pour un horizon d'investissement fixé $T > 0$

$$\|\pi\|_T^2 = \int_0^T |\pi_t|^2 dt < \infty.$$

et de plus, si on définit aussi avec $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)' \in \mathbb{R}^d$ les quantités :

$$y_t = \sigma_t^{'} \pi_t \qquad \text{et} \qquad \theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbf{1}), \qquad t \geq 0 \tag{2.3}$$

avec

$$\|\theta\|_T^2 = \int_0^T |\theta_t|^2 dt < \infty \qquad \text{et} \qquad \|y\|_T^2 = \int_0^T |y_t|^2 dt < \infty,$$

et on choisit que le processus de consommation $(c_t)_{t\geq 0}$ est un proportion du processus de richesse $(X_t)_{t\geq 0}$, i.e :

$$c_t = v_t X_t$$

où $(v_t)_{t\geq 0}$ est une fonction déterministe non-négative satisfait à

$$\int_0^T v_t dt < \infty.$$

Alors, l'équation de la richesse (2.2) est donnée par

$$dX_t = X_t(r_t - v_t + y_t^{'}\theta_t)dt + X_t y_t^{'} dW_t, \quad X_0 = x > 0. \tag{2.4}$$

Proposition 2.6.1 *Sous les hypothèses et les définitions précédentes, l'équation différentielle stochastique* (2.4) *admet une unique solution forte définie pour tout* $t \in [0, T]$ *par*

$$X_t = x \exp\big(R_t - V_t + (y, \theta)_t\big)\xi_t(y)$$

où

$$R_t = \int_0^t r_s ds, \qquad (y,\theta)_t = \int_0^t y'_s \theta_s ds \quad et \quad V_t = \int_0^t v_s ds \tag{2.5}$$

et $(\xi_t(y))_{t\geq 0}$ *est l'exponentielle stochastique définie par*

$$\xi_t(y) = \exp(\textstyle\int_0^t y'_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |y_s|^2 ds), \qquad t \geq 0.$$

Preuve : On utilise la formule d'Itô à la fonction de classe C^2 définie par $f(x) = ln(x)$, pour l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = X_t(r_t - v_t + y'_t\theta_t)dt + X_t y'_t dW_t$$

On pose :

- $K_t = X_t(r_t - v_t + y'_t\theta_t)$
- $H_t = X_t y'_t$
- $f'(X_s) = \frac{1}{X_s}$
- $f''(X_s) = \frac{-1}{X_s^2}$
- $f(X_0) = ln(X_0)$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t f'(X_s)dX_s &= \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s \\
&= \int_0^t \frac{1}{X_s} \times X_s(r_s - v_s + y'_s\theta_s)ds + \int_0^t \frac{1}{X_s} \times X_s y'_s dW_s \\
&= \int_0^t (r_s - v_s + y'_s\theta_s)ds + \int_0^t y'_s dW_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< X, X >_t &= \int_0^t H_s^2 ds \\
&= \int_0^t X_s^2 y_s^2 ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X, X >_s \\ &= ln(X_0) + \int_0^t (r_s - v_s + y_s'\theta_s)ds + \int_0^t y_s' dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{X_s^2} \times X_s^2 y_s^2 ds \\ &= ln(X_0) + \int_0^t (r_s - v_s + y_s'\theta_s)ds + \int_0^t y_s' dW_s - \int_0^t \frac{1}{2} y_s^2 ds \end{aligned}$$

Et comme $f(x) = ln(x)$, on obtient

$$ln(X_t) = ln(X_0) + \int_0^t (r_s - v_s + y_s'\theta_s)ds + \big(\int_0^t y_s' dW_s - \int_0^t \frac{1}{2} y_s^2 ds\big)$$

Et on déduit que :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 \exp\left(\int_0^t r_s - v_s + y_s'\theta_s ds\right) \exp\left(\int_0^t y_s' dW_s - \int_0^t \frac{1}{2} y_s^2 ds\right) \\ &= x \exp\left(\int_0^t r_s - v_s + y_s^{'}\theta_s ds\right) \xi_t(y) \end{aligned}$$

avec

$$\xi_t(y) = \exp\left(\int_0^t y_s' dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t y_s^2 ds\right).$$

2.7 L'ensemble des contrôles et la fonction de coût

2.7.1 Processus de contrôle

La dynamique de l'évolution du processus de richesse $(X_t)_{t\in[0,T]}$ définie dans l'équation différentielle stochastique (2.4) est influencée par un contrôle que nous modélisons par un processus $\nu = (\nu_t)_{t\in[0,T]}$ avec $\nu_t = (y_t, v_t)$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que ν est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle A où

$A \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$.
Le processus $\nu = (\nu_t)_{t\in[0,T]}$ avec $\nu_t = (y_t, v_t)$ est appelé processus de contrôle.

Définition 2.7.1 *Soit $T > 0$ un horizon du temps fixé. Un processus de contrôle $\nu = (\nu_t)_{0\le t\le T} = ((y_t, v_t))_{0\le t\le T}$ est dit admissible s'il est $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, et l'equation (2.4) à une unique solution forte, positive et continue sur $[0, T]$.*

On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tout les processus du contrôles $\nu = (\nu_t)_{t\in[0,T]} = ((y_t, v_t))_{t\ge 0}$ progressivement mesurable et admissible.

2.7.2 La fonction de coût

Nous supposons que l'investisseur veut optimiser l'utilité attendue de la consommation sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et la richesse X_T à la fin de l'horizon d'investissement T. Pour une richesse initiale $x > 0$ et un processus de contrôle $\nu = (y_t, v_t)_{t\ge 0}$ dans $\mathcal{U}$, nous introduisons la fonction objectif (la fonction de coût) par :

$$J(x, y) = \mathbb{E}_x\bigg(\int_0^T U(c_t)dt + h(X_T)\bigg), \tag{2.6}$$

où

- $\mathbb{E}_x$ l'espérance conditionnelle, avec $x = X_0$,
- $J(x, y)$ est la fonction de coût.
- U et h sont deux fonctions croissantes et concaves définies sur $\mathbb{R}^+$.
  La fonction U représente la satisfaction liée directement à la consommation, on l'appelle *fonction d'utilité.*
  La fonction h représente la satisfaction enfendré par la valeur finale du portefeuille, on l'appelle *fonction d'héritage.*

Dans notre travaille, on suppose que la fonction d'utilité U et la fonction d'héritage h sont des fonctions puissances, i.e :

$$U(z) = z^{\gamma_1}, \quad avec \quad 0 < \gamma_1 \le 1,$$

et

$$h(z) = z^{\gamma_2}, \quad avec \quad 0 < \gamma_2 \le 1.$$

Remarques :

1. La fonction d'utilité représente la satisfaction liée directement à la consommation.
2. La fonction d'héritage h est croissante ce qui exprime l'amour de la richesse de l'individu.
3. La fonction d'utilité U et la fonction d'héritage h sont supposées usuellement concaves pour formaliser l'aversion pour le risque de l'individu.

2.8 Investissement et consommation optimaux sans contrainte

Pour étudier l'investissement et la consommation optimaux, nous nous intéressons à résoudre le problème d'optimisation sans contrainte suivant :

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu). \tag{2.7}$$

Pour résoudre ce problème, on a traité deux régimes avec des fonctions de coût (2.6) pour $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ et $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$.
Dans le premier cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, on a

$$\begin{aligned} J(x, \nu) &= \mathbb{E}_x \left(\int_0^T C_t dt + X_T \right) \\ &= x \left(\int_0^T v_t e^{R_t - V_t + <y,\theta>_t} dt + e^{R_T - V_T + <y,\theta>_T} \right). \end{aligned}$$

Et la solution de notre problème est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.8.1 [*15*] *On considère le problème (2.7) avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ et on suppose pour tout $t \in [0, T]$ le taux d'intérêt sans risque $r_t \geq 0$, alors*

- *Si $\|\theta\|_T > 0$ on a*

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) = \infty$$

- *Si $\|\theta\|_T = 0$ alors une solution existe et la valeur optimale de $J(x, \nu)$ est donnée par*

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = xe^{R_T}$$

correspond au contrôle optimal $\nu_t^* = (y_t^*, 0)$ pour tout $t \in [0,T]$ avec y_t^* fonction arbitraire, déterministe et carré intégrable. Dans ce cas, le processus richesse optimal $(X_t^*)_{t\geq 0}$ satisfait à l'équation :

$$dX_t^* = X_t^* r_t dt + X_t^* y_t^{*'} dW_t, \qquad X_0^* = x.$$

□

Dans le deuxième cas où $0 < \gamma_1 < 1$ et $0 < \gamma_2 < 1$, la fonction de coût est donnée par

$$\begin{aligned} J(x,\nu) &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^T C_t^{\gamma_1} dt + X_T^{\gamma_2}\Big) \\ &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^T \upsilon_t^{\gamma_1} x^{\gamma_1} e^{\gamma_1 R_t - \gamma_1 V_t + \gamma_1 <y,\theta>_t} \xi^{\gamma_1}(t) dt + x^{\gamma_2} e^{\gamma_2 R_T - \gamma_2 V_T + \gamma_2 <y,\theta>_T} \xi^{\gamma_2}(T)\Big). \end{aligned}$$

Et pour la solution de notre problème, on définit d'abord les fonctions suivantes

$$A_1(t) = \gamma_1^{q_1} \int_t^T e^{\int_t^s \beta_1(u)du} ds \quad et \quad A_2(t) = \gamma_2^{q_2} e^{\int_t^T \beta_2(u)du}, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.8}$$

où $\quad q_i = (1-\gamma_i)^{-1} \quad$ et $\quad \beta_i(t) = (q_i - 1)(r_t + \frac{q_i}{2}|\theta_t|^2)$.
Ensuite, pour tout $t \in [0,T]$ et $x > 0$, on définit la fonction $g(t,x) > 0$ par

$$A_1(t) g^{-q_1}(t,x) + A_2(t) g^{-q_2}(t,x) = x \tag{2.9}$$

et on pose

$$p(t,x) = q_1 A_1(t) g^{-q_1}(t,x) + q_2(t) A_2 g^{-q_2}(t,x).$$

Et la solution du problème est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.8.2 [*15*]*On considère le problème* (2.7) *avec* $0 < \gamma_1 < 1$ *et* $0 < \gamma_2 < 1$*, alors la valeur optimale de $J(x,\nu)$ est donnée par*

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x,\nu) = J(x,\nu^*) = \frac{A_1(0)}{\gamma_1} g^{1-q_1}(0,x) + \frac{A_2(0)}{\gamma_2} g^{1-q_2}(0,x),$$

où le contrôle optimal $\nu^* = (y^*, v^*)$ *est pour tout* $t \in [0, T]$ *de la forme*

$$\begin{cases} y_t^* = \frac{p(t,X_t^*)}{X_t^*}\theta_t, & (\pi_t^* = \frac{p(t,X_t^*)}{X_t^*}(\sigma_t\sigma_t^{'})^{-1}(\mu_t - r_t\boldsymbol{1})); \\ v_t^* = (\frac{\gamma_1}{X_t^* g(t,X_t^*)})^{q_1} & . \end{cases}$$

Le processus richesse optimal $(X_t^*)_{0\le t\le T}$ *vérifie l'équation stochastique*

$$dX_t^* = a^*(t, X_t^*)dt + (b^*(t, X_t^*))^{'}dW_t, \qquad X_0^* = x, \tag{2.10}$$

avec

$$a^*(t,x) = r_t x + p(t,x)|\theta_t|^2 - (\frac{\gamma_1}{g(t,x)})^{q_1} \quad et \quad b^*(t,x) = p(t,x)\theta_t.$$

Maintenant et dans cas particulier du théorème (2.8.2) où $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \in (0,1)$, on peut voir la solution de notre problème dans le corollaire suivant :

Corollaire 2.8.1 [*15*] *On considère le problème* (2.7) *avec* $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \in (0,1)$. *On suppose pour tout* $t \in [0, T]$

$$\widetilde{g}_\gamma(t) = exp(\gamma R_t + \frac{q-1}{2}\|\theta\|_t^2) \quad et \quad q = \frac{1}{1-\gamma}.$$

Alors la valeur optimale de $J(x, \nu)$ *est donnée par*

$$\max_{\nu\in\mathcal{V}} J(x,\nu) = J(x,\nu^*) = x^\gamma(\|\widetilde{g}\|_{q,T}^q + \widetilde{g}_\gamma^q(T))^{\frac{1}{q}}, \tag{2.11}$$

où le contrôle optimal $v^* = (y^*, c^*)$ *est pour tout* $t \in [0, T]$ *de la forme*

$$\begin{cases} y_t^* = \frac{\theta_t}{1-\gamma}, & (\pi_t^* = \frac{(\sigma_t\sigma_t^{'})^{-1}(\mu_t - r_t\boldsymbol{1})}{1-\gamma}); \\ c_t^* = \nu_t^* X_t^* \quad et \quad \nu_t^* = \frac{\widetilde{g}_\gamma^q(t)}{\widetilde{g}_\gamma^q(T) + \int_t^T \widetilde{g}_\gamma^q(s)ds} & . \end{cases} \tag{2.12}$$

Le processus optimal de la richesse $(X_t^*)_{0\le t\le T}$ *est la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t^* = X_t^*(r_t - \nu_t^* + \frac{|\theta_t|^2}{1-\gamma})dt + X_t^*\frac{\theta_t^{'}}{1-\gamma}dW_t, \qquad X_0^* = x. \tag{2.13}$$

Chapitre 3

Investissement et consommation optimale avec contrainte VaR

Pour la gestion d'un portefeuille d'un agent dans le marché financier défini dans le chapitre précédent, on suppose que l'agent cherche à déterminer la stratégie financière optimale qui maximise l'utilité de la consommation attendue sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et la richesse terminale à la date d'échéance T et satisfait à une contrainte basée sur la mesure de risque VaR "Value-at-risk". En utilisant des fonctions d'utilités puissance, et après la définition de la valeur à risque VaR et formulation de la condition de contrainte, on va déterminer cette stratégie optimale par résolution d'un problème d'optimisation stochastique avec contrainte.

3.1 La mesure de risque VaR "Value-at-risk"

La VaR est une notion utilisée généralement comme critère de mesure du risque de marché d'un portefeuille d'instrument financiers. Elle correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné.

Définition 3.1.1 *La valeur à risque VaR est définie pour une dotation initiale $x > 0$, un processus de contrôle $\nu \in \mathcal{U}$ et $0 \leq \alpha \leq 1/2$ par*

$$VaR_t(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t} - \lambda_t, \qquad t \geq 0,$$

où $\lambda_t = \lambda_t(x, \nu, \alpha)$ est le α-quantile de X_t^ν, c'est-à-dire

$$\lambda_t = \inf\{\lambda \geq 0 : \mathbb{P}(X_t^\nu \leq \lambda) \geq \alpha\}.$$

Corollaire 3.1.1 *Dans la situation de la définition* 3.1.1 *précédente, pour tout $\nu \in \mathcal{U}$ le α-quantile λ_t est donné par*

$$\lambda_t = x \exp\left(R_t - V_t + < y, \theta >_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t\right), \qquad t \geq 0,$$

où z_α est le α-quantile de la distribution normale standard, et les autres grandeurs sont définies dans (2.3) *et* (2.5).

On définit la fonction de niveau de risque "*level risk function*" pour un certain coefficient $0 < \zeta < 1$ par

$$\zeta_t(x) = \zeta x e^{R_t}, \qquad t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

On ne considère que les contrôles $\nu \in \mathcal{U}$ pour lesquels la valeur à risque VaR est bornée par la fonction de niveau de risque (3.1) sur l'intervalle $[0, T]$; c'est-à-dire on exige

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{VaR_t(x, \nu, \alpha)}{\zeta_t(x)} \leq 1. \tag{3.2}$$

Remarques :

1. Le coefficient ζ introduit une certaine aversion pour le risque de comportement dans le modèle. En ce sens, il agit de même comme une fonction l'utilité fait. La différence, toute fois, c'est que ζ a une interprétation claire, et tout les investisseurs peuvent choisir et comprendre l'influence de ζ à l'égard du risque correspondant.
2. Si $\|y\|_t = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, alors

   $$VaR_t(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t}(1 - e^{-V_t}), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

   En revanche, si $\|y\|_t > 0$ pour $t \in [0, T]$, alors

   $$Lim_{\alpha \longrightarrow 0} VaR_t(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t}.$$

Cela signifie que le choix de α influence sur la borne de risque (3.2). On note, toutefois, que α est choisie par les autorités de réglementation et non par l'investisseur. L'investisseur choisit seulement la valeur ζ. Si ζ est proche de 0, le niveau de risque est plutôt faible, alors que pour ζ proche de 1, le niveau de risque est assez élevé, en effet, dans ce cas, les bornes de risque ne devraient pas être restrictif du tout.

3. Comme la borne de risque (3.2) implique tout le chemin échantillon de la $(X_t^\nu)_{0\le t\le T}$, alors on ne peut que considérer les problèmes d'optimisation de contrainte dans l'ensemble des stratégies $\mathcal{U}$.

3.2 Problème et solution

On considère maintenant un problème d'optimisation stochastique qui concerne les bornes sur les valeurs à risque "Value-at-Risk". Donc nous nous intéressons à résoudre le problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\max_{\nu\in\mathcal{U}} J(x,\nu) \quad \text{sous la contrainte} \quad \sup_{0\le t\le T} \frac{VaR_t(x,\nu,\alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1. \tag{3.3}$$

Pour formuler la solution de ce problème, on définit d'abord pour z_α le α-quantile normal tel que $0<\alpha\le 1/2$ et la constante $\zeta\in(0,1)$ comme dans (3.1) et pour θ comme dans (3.2) la quantité suivante

$$\rho^*_{VaR} = \sqrt{(|z_\alpha| - \|\theta\|_T)^2 - 2\ln(1-\zeta)} - (|z_\alpha| - \|\theta\|_T). \tag{3.4}$$

On présente maintenant la solution du problème (3.3), et on commence par le premier cas où $\gamma_1=\gamma_2=1$.

Théorème 3.2.1 [13] *On considère le problème* (3.3) *avec* $\gamma_1=\gamma_2=1$ *et on suppose pour tout* $t\in[0,T]$ *le taux d'intérêt sans risque* $r_t\ge 0$*, alors pour*

$$\max(0, 1 - e^{z_\alpha^2/2 - |z_\alpha|\|\theta\|_T}) < \zeta < 1$$

une valeur optimale de $J(x,\nu)$ *est donnée par*

$$\max_{\nu\in\mathcal{U}} J(x,\nu) = J(x,\nu^*) = x e^{\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T + R_T}.$$

- Si $\|\theta\|_T > 0$*, alors le contrôle optimal* $\nu^* = (y^*, v^* X^*)$ *est pour tout* $t \in [0,T]$ *de la forme*

$$y^* = \rho^*_{VaR} \frac{\theta_t}{\|\theta\|_T} \qquad \left(\pi^*_t = \frac{(\sigma_t \sigma_t^{'})^{-1}}{\|\theta\|_T} (\mu_t - r_t \mathbf{1}) \right) \quad et \quad v^*_t = 0,$$

et le processus richesse optimal $(X^*_t)_{0 \le t \le T}$ *est donné par*

$$dX^*_t = X^*_t \big(r_t + \rho^*_{VaR} \frac{|\theta_t|^2}{\|\theta\|_T} \big) dt + X^*_t \rho^*_{VaR} \frac{\theta'_t}{\|\theta\|_T} dW_t, \qquad X^*_0 = x.$$

- Si $\|\theta\|_T = 0$*, alors la valeur optimale de* $J(x, \nu)$ *est donnée par*

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = x e^{R_T},$$

correspondant au contrôle optimal $\nu^* = (y^*_t, 0)$ *pour* $0 \le t \le T$ *et* $(y^*_t)_{0 \le t \le T}$ *sont des fonctions déterministes arbitraires tels que*

$$\|y^*\|_T \le \rho^*_{VaR} = \sqrt{z^2_\alpha - 2 \ln(1 - \zeta)} - |z_\alpha|.$$

Dans ce cas, le processus de richesse optimal $(X^*_t)_{0 \le t \le T}$ *satisfait à l'équation*

$$dX^*_t = X^*_t r_t dt + X^*_t y^{*'}_t dW_t, \quad X^*_0 = x$$

Démonstration

D'abord, on va démontrer que pour tout contrôle ν, la condition de la contrainte de notre problème $\sup\limits_{0 \le t \le T} \dfrac{VaR_t(x, \nu, \alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1$ est équivalente à

$$\inf_{0 \le t \le T} L_t(\nu) \ge \ln(1 - \zeta), \tag{3.5}$$

avec

$$L_t(\nu) = < y, \theta >_t - V_t - \frac{1}{2} \|y\|^2_t - |z_\alpha| \|y\|_t. \tag{3.6}$$

En effet : pour tout $\nu \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T} \frac{VaR_t(x,\nu,\alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T} \frac{xe^{R_t} - xe^{R_t - V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t}}{\zeta x e^{R_t}} \le 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T} \frac{1 - e^{-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t}}{\zeta} \le 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T} \left(1 - e^{-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t}\right) \le \zeta \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 - \inf_{0\le t\le T} \left(e^{-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t}\right) \le \zeta \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 - e^{\inf_{0\le t\le T}\left(-V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t\right)} \le \zeta \\
&\Longleftrightarrow \quad \inf_{0\le t\le T} \left(- V_t + <y,\theta>_t - \frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t\right) \ge \ln(1-\zeta) \\
&\Longleftrightarrow \quad \inf_{0\le t\le T} L_t(\nu) \ge \ln(1-\zeta).
\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$<y,\theta>_t \le \|y\|_t\|\theta\|_t$$

et pour $t = T$,

$$\begin{aligned}
\|y\|_T\|\theta\|_T - \frac{1}{2}\|y\|_T^2 - |z_\alpha|\|y\|_T \quad &\ge \quad <y,\theta>_T - \frac{1}{2}\|y\|_T^2 - |z_\alpha|\|y\|_T \\
&\ge \quad <y,\theta>_T - V_T - \frac{1}{2}\|y\|_T^2 - |z_\alpha|\|y\|_T \\
&\ge \quad \ln(1-\zeta).
\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\|y\|_T\|\theta\|_T - \frac{1}{2}\|y\|_T^2 - |z_\alpha|\|y\|_T \ge \ln(1-\zeta) \Longleftrightarrow (*)$$

$$
\begin{aligned}
(*) \iff & \|y\|_T^2 + 2\|y\|_T(|z_\alpha| - \|\theta\|_T) \leq -2\ln(1-\zeta) \\
\iff & \Big(\|y\|_T + \big(|z_\alpha| - \|\theta\|_T\big)\Big)^2 \leq \big(\|\theta\|_T - |z_\alpha|\big)^2 - 2\ln(1-\zeta) \\
\iff & \|y\|_T + \big(|z_\alpha| - \|\theta\|_T\big) \leq \sqrt{\big(\|\theta\|_T - |z_\alpha|\big)^2 - 2\ln(1-\zeta)} \\
\iff & \|y\|_T \leq \sqrt{\big(\|\theta\|_T - |z_\alpha|\big)^2 - 2\ln(1-\zeta)} - \big(|z_\alpha| - \|\theta\|_T\big)
\end{aligned}
$$

d'où

$$\|y\|_T \leq \rho^*_{VaR} \tag{3.7}$$

avec ρ^*_{VaR} est défini par

$$\rho^*_{VaR} = \sqrt{\big(\|\theta\|_T - |z_\alpha|\big)^2 - 2\ln(1-\zeta)} - \big(|z_\alpha| - \|\theta\|_T\big)$$

et satisfait l'équation

$$\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T - \frac{1}{2}(\rho^*_{VaR})^2 - |z_\alpha|\rho^*_{VaR} = \ln(1-\zeta). \tag{3.8}$$

De plus, pour tout $\nu \in \mathcal{U}$ on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(X_t^\nu) &= \mathbb{E}_x\Big(x \exp\big(R_t - V_t + < y, \theta >_t\big)\xi_t(y)\Big) \\
&= x \exp\big(R_t - V_t + < y, \theta >_t\big).
\end{aligned}
$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\|_T \leq \rho^*_{VaR}$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$
\begin{aligned}
< y, \theta >_t &\leq \|y\|_T\|\theta\|_T \\
&\leq \rho^*_{VaR}\|\theta\|_T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies & e^{<y,\theta>_t} \leq e^{\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T} \\
\implies & \sup_{0\leq t\leq T} e^{<y,\theta>_t} \leq e^{\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la fonction de coût $J(x,\nu)$ a une borne supérieure donnée par :

$$
\begin{aligned}
J(x,\nu) &= \mathbb{E}_x\bigg(\int_0^T C_t dt + X_T\bigg) \\
&= x\bigg(\int_0^T v_t e^{(R_t - V_t + (y,\theta)_t)} dt + e^{R_T - V_T + (y,\theta)_T)}\bigg) \\
&\leq x e^{\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T + R_T}\bigg(\int_0^T v_t e^{-V_t} dt + e^{-V_T}\bigg) \\
&= x e^{\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T + R_T}.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que le contrôle $\nu^* = (y_t^*, v_t^*)$ tel que $y_t^* = \rho^*_{VaR}\frac{\|\theta\|_t}{\|\theta\|_T}$ et $v_t^* = 0$ correspond à cette borne supérieure, c'est-à-dire $J(x,\nu^*) = xe^{\rho^*_{VaR}\|\theta\|_T + R_T}$. Pour finir, on va verifier la condition (3.5) pour ce contrôle, alors

– Si $\|\theta\|_T = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
L_t(\nu^*) &= -\frac{1}{2}\|y\|_t^2 - |z_\alpha|\|y\|_t \\
&\geq -\frac{1}{2}\|y\|_T^2 - |z_\alpha|\|y\|_T \\
&\geq -\frac{1}{2}(\rho^*_{VaR})^2 - |z_\alpha|\rho^*_{VaR} \\
&= \ln(1-\zeta).
\end{aligned}
$$

– Si $\|\theta\|_T > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\max(0, 1 - e^{z_\alpha^2/2 - |z_\alpha| \|\theta\|_T}) < \zeta < 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 - e^{\frac{z_\alpha^2}{2}} - |z_\alpha| ||\theta||_T < \zeta \\
&\Rightarrow \quad e^{\frac{1}{2} z_\alpha^2 - |z|_\alpha ||\theta||_T} > (1 - \zeta) \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} z_\alpha^2 - |z|_\alpha ||\theta||_T > \ln(1 - \zeta) \\
&\Rightarrow \quad z_\alpha^2 - 2|z|_\alpha ||\theta||_T > 2\ln(1 - \zeta) \\
&\Rightarrow \quad \big(z_\alpha - ||\theta||_T\big)^2 > ||\theta||_T^2 + 2\ln(1 - \zeta) \\
&\Rightarrow \quad \big(z_\alpha - ||\theta||_T\big)^2 - 2\ln(1 - \zeta) > ||\theta||_T^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{(|z_\alpha| - ||\theta||_T)^2 - 2\ln(1 - \zeta)} > ||\theta||_T \\
&\Rightarrow \quad \rho_{VaR}^* > ||\theta||_T - (|z_\alpha| - ||\theta||_T) \\
&\Rightarrow \quad \rho_{VaR}^* > 2||\theta||_T - |z_\alpha| \\
&\Rightarrow \quad |z_\alpha| > 2||\theta||_T - \rho_{VaR}^*
\end{aligned}$$

donc, on en déduit que la condition $\max(0, 1 - e^{z_\alpha^2/2 - |z_\alpha| \|\theta\|_T}) < \zeta < 1$ implique que $|z_\alpha| \geq 2\|\theta\|_T - \rho_{VaR}^*$.

De plus, pour $\nu^* = (y^*, v^*)$ où $y^* = \frac{\rho_{VaR}^*}{\|\theta\|_T} \theta_t$ et $v^* = 0$,

$$\begin{aligned}
L_t(\nu^*) &= \langle \frac{\rho_{VaR}^*}{\|\theta\|_T} \theta, \theta \rangle_t - \frac{1}{2} \| \frac{\rho_{VaR}^*}{\|\theta\|_T} \theta \|_t^2 - |z_\alpha| \, || \frac{\rho_{VaR}^*}{||\theta||_T} \theta ||_t \\
&= \frac{\rho_{VaR}^*}{||\theta||_T} ||\theta||_t^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_{VaR}^{*2}}{||\theta||_T^2} ||\theta||_t^2 - |z_\alpha| \frac{\rho_{VaR}^*}{||\theta||_T} ||\theta||_t \\
&= \rho_{VaR}^* \Bigg(||\theta||_T \frac{||\theta||_t^2}{||\theta||_T^2} - \frac{1}{2} \rho_{VaR}^* \frac{||\theta||_t^2}{||\theta||_T^2} - |z_\alpha| \frac{||\theta||_t}{||\theta||_T} \Bigg) \\
&= \rho_{VaR}^* \Bigg(\big(2||\theta||_T - \rho_{VaR}^*\big) \frac{1}{2} \big(\frac{||\theta||_t}{||\theta||_T} \big)^2 - |z_\alpha| \frac{||\theta||_t}{||\theta||_T} \Bigg) \\
&= \rho_{VaR}^* f\big(\frac{||\theta||_t}{||\theta||_T} \big),
\end{aligned}$$

où

$$f(u) = \big(2||\theta||_T - \rho^*_{VaR}\big)\frac{u^2}{2} - |z_\alpha|u, \qquad 0 \leq u \leq 1.$$

En suite,

$$\inf_{0\leq t\leq T} L_t(\nu^*) = \rho^*_{VaR} \inf_{0\leq \eta\leq 1} f(\eta).$$

Tenant compte du fait que pour $|z_\alpha| \geq 2\|\theta\|_T - \rho^*_{VaR}$ ce borne inférieure égale à $f(1)$ et avec (3.8) on obtient

$$\inf_{0\leq t\leq T} L_t(\nu^*) = \rho^*_{VaR} f(1) = \ln(1-\zeta).$$

Cela prouve théorème (3.2.1).

□

Maintenant, on résoudre le problème (3.3) dans le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \in]0,1[$ et pour formuler la solution on va introduit la fonction $\tilde{g}$ par :

$$\tilde{g}_\gamma(t) = \exp(\gamma R_t + \frac{q-1}{2}||\theta||^2_t).$$

On présente une condition suffisante pour que la stratégie optimale (2.12) − (2.13) soit la solution de notre problème dans le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Pour cela on introduit les fonctions suivantes :

$$\tilde{\kappa}(\gamma) = \frac{\|\tilde{g}_\gamma\|^q_{q,T}}{\|\tilde{g}_\gamma\|^q_{q,T} + \tilde{g}^q_\gamma(T)} = 1 - e^{-V^*_T} = 1 - e^{-\int_0^T v^*_t dt},$$

où $(v^*_t)_{0\leq t\leq T}$ est le taux de consommation optimal introduit par

$$v^*_t = \frac{\widetilde{g}^q_\gamma(t)}{\widetilde{g}^q_\gamma(T) + \int_t^T \widetilde{g}^q_\gamma(s)ds},$$

avec

$$\widetilde{g}_\gamma(t) = \exp\big(\gamma R_t + \frac{q-1}{2}\|\theta\|^2_t\big) \quad \textit{et} \quad q = \frac{1}{1-\gamma}.$$

En fixant $\tilde{l}(\gamma) = \ln(1 - \tilde{\kappa}(\gamma))$, on définit $l_*(\gamma)$ par

$$\begin{cases} l_*(\gamma) = -q\|\theta\|_T|z_\alpha| + \tilde{l}(\gamma) & pour \quad 0 < \gamma \leq 1/2; \\ l_*(\gamma) = -q\|\theta\|_T|z_\alpha| + \tilde{l}(\gamma) - \frac{q(q-2)}{2}\|\theta\|_T^2 & pour \quad 1/2 < \gamma < 1. \end{cases}$$

Théorème 3.2.2 *[13] On considère le problème (3.3) avec $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \in]0,1[$. On suppose pour tout $t \in [0,T]$ le taux d'intérêt sans risque $r_t \geq 0$ et*

$$1 - e^{l_*(\gamma)} \leq \zeta < 1.$$

Alors la valeur optimale de $J(x,\nu)$ est donnée par

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x,\nu) = J(x,\nu^*) = x^\gamma \left(\|\widetilde{g}\|_{q,T}^q + \widetilde{g}_\gamma^q(T)\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.9}$$

où le contrôle optimal $\nu^* = (y^*, c^*)$ est pour tout $t \in [0,T]$ de la forme

$$\begin{cases} y_t^* = \frac{\theta_t}{1-\gamma}, & \left(\pi_t^* = \frac{(\sigma_t\sigma_t')^{-1}(\mu_t - r_t\mathbf{1})}{1-\gamma}\right); \\ c_t^* = v_t^* X_t^* \quad et & v_t^* = \frac{\widetilde{g}_\gamma^q(t)}{\widetilde{g}_\gamma^q(T) + \int_t^T \widetilde{g}_\gamma^q(s)ds} \quad . \end{cases} \tag{3.10}$$

Le processus richesse optimal $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ est la solution de

$$dX_t^* = X_t^*(r_t - v_t^* + \frac{|\theta_t|^2}{1-\gamma})dt + X_t^* \frac{\theta_t'}{1-\gamma} dW_t, \qquad X_0^* = x. \tag{3.11}$$

Démonstration : On note que la solution de notre problème (3.3) dans le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \in]0,1[$ est la même solution donnée par le corollaire 2.8.1 du problème sans contrainte et qui a démontrer par la méthode de programmation dynamique basée sur l'équation d'Hamilton Jacobi Belman dans ([15]).

Il suffit maintenant à prouver la condition (3.5) pour la stratégie (3.9),(3.10) et pour cela on a

$$\begin{aligned} L_t(\nu^*) &= < y^*, \theta >_t - V_t^* - \frac{1}{2}\|y^*\|_t^2 - |z_\alpha|\|y^*\|_t \\ &= \frac{1}{1-\gamma}\|\theta\|_t^2 - V_t^* - \frac{1}{2}(\frac{1}{1-\gamma})^2\|\theta\|_t^2 - \frac{1}{1-\gamma}|z_\alpha|\|\theta\|_t \\ &= q\|\theta\|_t^2 - V_t^* - \frac{1}{2}q^2\|\theta\|_t^2 - q|z_\alpha|\|\theta\|_t \\ &= (q - \frac{q^2}{2})\|\theta\|_t^2 - V_t^* - q|z_\alpha|\|\theta\|_t \\ &\geq (q - \frac{q^2}{2})\|\theta\|_T^2 \mathbf{1}_{\{q>2\}} - V_T^* - q|z_\alpha|\|\theta\|_T = l_*(\gamma). \end{aligned}$$

Et comme la condition $1 - e^{l_*(\gamma)} \leq \zeta < 1$ est équivalente à $l_*(\gamma) \geq \ln(1-\zeta)$, on obtient

$$L_t(\nu^*) \geq \ln(1-\zeta).$$

□

On résoudre maintenant le problème (3.3) dans le cas où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ et pour formuler la solution on introduit la fonction suivante pour $0 \leq \kappa \leq 1$

$$G(x,\kappa) = x^{\gamma_1}\kappa^{\gamma_1}\|\hat{g}_1\|_{q,T} + x^{\gamma_2}(1-\kappa)^{\gamma_2}\hat{g}_2(T), \qquad x > 0 \tag{3.12}$$

où $q = (1-\gamma_1)^{-1}$, $\hat{g}_i = \hat{g}_{\gamma_i}$ et $\hat{g}_{\gamma_i}(t) = e^{\gamma_i R_t}$.
De plus, pour $x > 0$ on fixe

$$\kappa_*(x) = arg \max_{0\leq\kappa\leq 1} G(x,\kappa). \tag{3.13}$$

On note que pour $0 < \gamma_1 < 1$ et $0 < \gamma_2 < 1$ cette fonction est strictement positive pour tout $x > 0$; i.e. $0 < \kappa_*(x) \leq 1$.
Il est facile de voir que, dans le cas $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ la fonction $\kappa_*(x)$ est indépendant de x et égal à

$$\hat{\kappa}(\gamma) = \frac{\|\hat{g}_\gamma\|_{q,T}^q}{\|\hat{g}_\gamma\|_{q,T}^q + \hat{g}_\gamma^q(T)}.$$

Théorème 3.2.3 [*13*] *On considère le problème* (3.3) *avec* $0 < \gamma_1 < 1$ *et* $0 < \gamma_2 < 1$ *et on suppose pour tout* $t \in [0, T]$ *le taux d'intérêt sans risque* $r_t \geq 0$ *et*

$$0 < \zeta < \min\{\kappa_*(x), \widehat{\kappa}(\gamma_1)\}. \tag{3.14}$$

De plus, on suppose que

$$|z_\alpha| \geq \left(1 + \frac{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}}{1-\zeta} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \zeta} \ln G(x, \zeta)}\right) \|\theta\|_T. \tag{3.15}$$

Alors la valeur optimale de $J(x, \nu)$ *est donnée par*

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = x^{\gamma_1} \zeta^{\gamma_1} \|\widehat{g}_1\|_{q,T} + x^{\gamma_2} (1-\zeta)^{\gamma_2} \widehat{g}_2(T),$$

où le contrôle optimal $\nu^* = (y^*, v^* X^*)$ *est pour tout* $t \in [0, T]$ *de la forme*

$$y_t^* = 0 \qquad (\pi_t^* = 0) \quad \textit{et} \qquad v_t^* = \frac{\zeta \widehat{g}_1^q(t)}{\|\widehat{g}_1\|_{q,T}^q - \zeta \|\widehat{g}_1\|_{q,t}^q}. \tag{3.16}$$

Et le processus richesse optimal $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ *est donné par la fonction déterministe*

$$X_t^* = x e^{R_t} \frac{\|\widehat{g}_1\|_{q,T}^q - \zeta \|\widehat{g}_1\|_{q,t}^q}{\|\widehat{g}_1\|_{q,T}^q} = x \frac{\zeta}{v_t^*} e^{R_t}, \qquad t \in [0, T]. \tag{3.17}$$

Démonstration : Tout d'abord, on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 [*13*] *Soit* G *une fonction positive deux fois continûment différentiable sur* $[a, b]$ *telles que* $\dot{G}(x) \geq 0$ *et* $\ddot{G}(x) \leq 0$ *pour tout* $a \leq x \leq b$. *De plus, soit* $\rho : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continûment différentiable de dérivée* $\dot{\rho}$ *négative et satisfaisant*

$$\sup_{a \leq \kappa \leq b} |\dot{\rho}(\kappa)| \leq \frac{(\ln G(b))'}{\max(\gamma_1, \gamma_2) \|\theta\|_T}. \tag{3.18}$$

Alors les fonctions $M_1(\rho(\cdot)) G(x, \cdot)$ *et* $M_2(\rho(\cdot)) G(x, \cdot)$ *sont croissantes sur* $[a, b]$ *où les* $M_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ *sont définies par*

$$M_i(u) = \exp\left(\gamma_i u ||\theta||_T - \frac{\gamma_i(1-\gamma_i)}{2} u^2\right).$$

Preuve

- Pour $\|\theta\|_T = 0$, le résultat est évident.
- Pour $\|\theta\|_T > 0$, on prouve que pour $i = 1, 2$ les fonctions $l_i(x) = \ln M_i(\rho(x)) + \ln G(x)$ sont croissantes sur $[a, b]$.

  Par la dérivation on a

$$\dot{l}_i(\kappa) = \gamma_i \dot{\rho}(\kappa) + \big(\|\theta\|_T - (1-\gamma_i)\rho(\kappa) + \frac{\dot{G}(x)}{G(x)}.$$

La dérivée de la fonction $\frac{\dot{G}(x)}{G(x)}$ est négative sur $[a, b]$ et ceci induit que $\frac{\dot{G}(x)}{G(x)}$ est décroissante sur $[a, b]$, d'où pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\frac{\dot{G}(x)}{G(x)} \geq \frac{\dot{G}(b)}{G(b)} > 0.$$

Par conséquent, comme $\rho > 0$ et $\dot{\rho} < 0$ on trouve

$$\dot{l}_i(x) \geq \big(\ln G(b)\big)' - \gamma_i \|\theta\|_T |\dot{\rho}(\kappa)|, \quad a \leq \kappa \leq b.$$

□

Preuve du théorème

Pour démontrer ce théorème, on va trouver tout d'abord une borne supérieure pour la fonction de coût $J(x, \nu)$, et d'autre part, on va montrer que le contrôle optimal (3.16) correspond à cette borne est satisfait la condition (3.5).

A partir de (3.16), on constate que pour $\nu \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x (X_t^\nu)^\gamma &= \mathbb{E}_x \left(x^\gamma e^{\gamma R_t - \gamma V_t + \gamma <y,\theta>_t} e^{\int_0^t \gamma y' dW_s - \frac{\gamma}{2} \int_0^t |y_s|^2 ds} \right) \\
&= \mathbb{E}_x \left(x^\gamma e^{\gamma R_t} e^{-\gamma V_t + \gamma <y,\theta>_t} e^{\int_0^t \gamma y' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma y_s|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma y_s|^2 ds - \frac{\gamma}{2} \int_0^t |y_s|^2 ds} \right) \\
&= \mathbb{E}_x \left(x^\gamma e^{\gamma R_t} e^{-\gamma V_t + \gamma <y,\theta>_t + \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \int_0^t |y_s|^2 ds} e^{\int_0^t \gamma y' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma y_s|^2 ds} \right) \\
&= x^\gamma \widehat{g}_\gamma(t) e^{-\gamma V_t + \gamma <y,\theta>_t - \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \|y\|_t^2}.
\end{aligned}$$

Ce la implique que pour $\nu \in \mathcal{U}$ la fonction de coût $J(x,\nu)$ est à la forme

$$\begin{aligned} J(x,\nu) &= \mathbb{E}_x\left(\int_0^T (v_t X_t^\nu)^{\gamma_1} dt + (X_T^\nu)^{\gamma_2} \right) \\ &= x^{\gamma_1} \int_0^T (e^{-V_t} v_t)^{\gamma_1} \widehat{g}_1(t) e^{\gamma_1 <y,\theta>_t - \frac{\gamma_1(1-\gamma_1)}{2} \|y\|_t^2} dt + x^{\gamma_2} \widehat{g}_2(T) e^{-\gamma_2 V_T} e^{\gamma_2 <y,\theta>_T - \frac{\gamma_2(1-\gamma_2)}{2} \|y\|_T^2} \\ &= x^{\gamma_1} \int_0^T (e^{-V_t} v_t)^{\gamma_1} \widehat{g}_1(t) \widehat{h}_1(t,y) dt + x^{\gamma_2} \widehat{g}_2(T) e^{-\gamma_2 V_T} \widehat{h}_2(T,y) \end{aligned}$$

où

$$\widehat{h}_i(t,y) = e^{\gamma_i <y,\theta>_t - \frac{\gamma_i(1-\gamma_i)}{2} \|y\|_t^2}, \quad i = 1,2.$$

On pose

$$\widehat{h}(t,y) = \max\{\widehat{h}_1(t,y), \widehat{h}_2(t,y)\},$$

et d'aprés l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{1}{\gamma_1}$ et $q = (1-\gamma_1)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} J(x,\nu) &\leq \sup_{0\leq t\leq T} \widehat{h}(t,y) \left(x^{\gamma_1} \int_0^T (e^{-V_t} v_t)^{\gamma_1} \widehat{g}_1(t) dt + x^{\gamma_2} \widehat{g}_2(T) e^{-\gamma_2 V_T} \right) \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq T} \widehat{h}(t,y) \left(x^{\gamma_1} (1-e^{-V_T})^{\gamma_1} \|\widehat{g}_1\|_{q,T} + x^{\gamma_2} \widehat{g}_2(T) e^{-\gamma_2 V_T} \right). \end{aligned}$$

Et comme $\|\widehat{g}_1\|_{q,T} = (\int_0^T e^{q\gamma_1 R_t} dt)^{\frac{1}{q}}$ et pour $\kappa = 1 - e^{-V_T}$, on obtient que

$$J(x,v) \leq \max_{0\leq t\leq T} \widehat{h}(t,y) G(x,\kappa), \tag{3.19}$$

où

$$G(x,\kappa) = x^{\gamma_1} \kappa^{\gamma_1} \|\widehat{g}_1\|_{q,T} + x^{\gamma_2} (1-\kappa)^{\gamma_2} \widehat{g}_2(T), \qquad x > 0.$$

De plus, la condition (3.5) implique que

$$\|y_T\| \leq \sqrt{(|z_\alpha| - \|\theta\|_T)^2 + 2\ln\frac{1-\kappa}{1-\zeta}} - (|z_\alpha| - \|\theta\|_T) = \rho(\kappa), \quad \text{et} \qquad 0 \leq \kappa \leq \zeta < 1. \tag{3.20}$$

Et on a pour tout $0 \leq \kappa \leq \zeta$: $\rho(\kappa) \leq \rho(0) = \rho^*_{VaR}$.

De cette inégalité on résulte que pour $i = 1, 2$ et $0 < \gamma_i \leq 1$ les fonctions $\widehat{h}_i(t, y)$ peut être délimitées par

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \widehat{h}_i(t, y) &\leq \exp\{\gamma_i \max_{0 \leq x \leq \rho(\kappa)} (x\|\theta\|_T - \frac{(1-\gamma_i)x^2}{2})\} \\ &= \exp\{\gamma_i \rho_i(\kappa)\|\theta\|_T - \frac{\gamma_i(1-\gamma_i)}{2})\rho_i^2(\kappa)\} \\ &= M_i(\rho_i(\kappa)), \end{aligned} \tag{3.21}$$

où $\rho_i(\kappa) = \min(\rho(\kappa), x_i)$ avec $x_i = q_i\|\theta\|_T$ pour $0 < \gamma_i < 1$ et $\rho_i(\kappa) = \rho(\kappa)$ pour $\gamma_i = 1$.

Ensuite, à partir de (3.19), on obtient la borne supérieure de la fonction de coût suivante

$$\begin{aligned} J(x, v) &\leq \max_{1 \leq i \leq 2} M_i(\rho_i(\kappa))G(x, \kappa) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq 2} \sup_{0 \leq \kappa \leq \zeta} M_i(\rho_i(\kappa))G(x, \kappa). \end{aligned}$$

Si $\rho(0) \leq x_i$ alors

$$\sup_{0 \leq \kappa \leq \zeta} M_i(\rho_i(\kappa))G(x, \kappa) = \sup_{0 \leq \kappa \leq \zeta} M_i(\rho(\kappa))G(x, \kappa).$$

On calcule cette borne supérieure par le biais de lemme3.2.1 avec $a = 0$ et $b = \zeta$. On note que la condition (3.14) garantit que $\zeta < \kappa_*(x)$, qui est définie dans (3.13). Par conséquent, la fonction $G(x, \cdot)$ a une première dérivée positive et une seconde négative sur $[0, \zeta]$. De plus, de (3.20) on trouve la dérivée de $\rho(\cdot)$ par

$$\dot{\rho}(\kappa) = -\frac{1}{(1-\kappa)\sqrt{(|z_\alpha| - \|\theta\|_T)^2 + 2\ln(1-\kappa) - 2\ln(1-\zeta)}}$$

et par conséquent,

$$\sup_{0 \leq \kappa \leq \zeta} |\dot{\rho}(\kappa)| \leq \frac{1}{(1-\zeta)(|z_\alpha| - \|\theta\|_T)}.$$

Par (3.15), on obtient que

$$\sup_{0\leq\kappa\leq\zeta} |\dot{\rho}(\kappa)| \leq \frac{1}{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}\|\theta\|_T} \frac{\partial \ln G(x,\zeta)}{\partial\zeta}.$$

Maintenant le lemme 3.2.1 mène à

$$\max_{0\leq\kappa\leq\zeta} M_i(\rho(\kappa))G(x,\kappa) = M_i(\rho(\zeta))G(x,\zeta) = G(x,\zeta). \tag{3.22}$$

On considère maintenant $x_i < \rho(0)$. On rappelle que $\rho(\cdot)$ est décroissante sur $[0,\zeta]$ avec $\rho(\zeta) = 0$.
En conséquence, il existe $\kappa_i \in [0,\zeta]$ tel que $\rho(\kappa_i) = x_i$. Comme $G(x,\cdot)$ est croissante sur $[0,T]$, on obtient

$$\max_{0\leq\kappa\leq\kappa_i} M_i(\rho_i(\kappa))G(x,\kappa) = M_i(\rho(\kappa_i))G(x,\kappa_i).$$

Ceci en combinant avec (3.22), on obtient

$$\sup_{0\leq\kappa\leq\zeta} M_i(\rho_i(\kappa))G(x,\kappa) = \sup_{\kappa_i\leq\kappa\leq\zeta} M_i(\rho(\kappa))G(x,\kappa) = G(x,\zeta)$$

Cela implique la borne superieure de la fonction de coût suivante

$$J(x,\nu) \leq G(x,\zeta). \tag{3.23}$$

Maintenant, on trouve un contrôle pour obtenir l'égalité (3.23). Il est clair que nous avons à prendre une consommation telle que

$$\int_0^T \widehat{g}_1(t)(e^{-V_t}v_t)^{\gamma_1} dt = (1-e^{-V_T})^{\gamma_1}\|\widehat{g}_1\|_{q_1,T}$$

et $V_T = -\ln(1-\zeta)$. Pour trouver cette consommation on résoudre l'équation différentielle sur [0,T]

$$\dot{V}_t e^{-V_t} = \frac{\zeta}{\|\widehat{g}_1\|^{q_1}_{q_1,T}} \widehat{g}_1^{q_1}(t), \qquad V_0 = 0.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$V_t^* = -\ln\left(1 - \zeta \frac{\|\widehat{g}_1\|_{q_1,t}^{q_1}}{\|\widehat{g}_1\|_{q_1,T}^{q_1}}\right)$$

et le taux de consommation optimal est

$$v_t^* = \dot{V}_t^* = \frac{\zeta \widehat{g}_1^{q_1}(t)}{\|\widehat{g}_1\|_{q_1,T}^{q_1} - \zeta \|\widehat{g}_1\|_{q_1,t}^{q_1}}.$$

Et comme $r_t \geq 0$, alors pour chaque $t \in [0,T]$

$$v_t^* \leq v_T^* = \frac{\zeta \widehat{g}_1^{q_1}(T)}{(1-\zeta)\|\widehat{g}_1\|_{q_1,T}^{q_1}}.$$

La condition $0 \leq \zeta \leq \widehat{\kappa}(\gamma_1)$ implique directement que la dernière borne supérieure à moins de 1, c'est-à-dire la stratégie v^* définie dans (3.16) appartient à $\mathcal{U}$. De plus, à partir de (3.20) on voit que la valeur $V_T^* = -\ln(1-\zeta)$ (i.e. $\kappa = \zeta$), le seul processus de contrôle qui satisfait à cette condition est identique à zéro, i.e. $y_t^* = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Dans ce cas, $\widehat{h}(t, y^*) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$ et, par conséquent, $J(x, \nu^*) = G(x, \zeta)$.

Conclusion

Le calcul stochastique d'Itô et la théorie du contrôle des processus stochastiques ont de nombreuses applications, notamment en industrie et en économie. Ils interviennent de façon essentielle dans des problèmes fondamentaux de finance, l'évaluation des produits dérivés et la gestion de portefeuille et des risques.
Dans notre travail nous avons utilisé des méthodes probabilistes telles que le calcul stochastique d'Itô et la théorie du contrôle de processus stochastique pour résoudre un problème d'investissement visant une consommation optimale durant un horizon $[0, T]$ et un héritage à une échéance T dans un marché financier de type Black-Sholes avec des coefficients déterministes.

Ainsi, l'investisseur devra contrôler son risque en utilisant un problème de maximisation de l'espérance d'une certaine fonction d'utilité choisie dans notre cas comme fonction puissance qui représente la consommation espérée sur l'intervalle du temps $[0, T]$ et la richesse terminale. Cette maximisation nous permet de minimiser les pertes et d'affaiblir les risques dans la gestion.

Comme l'investisseur doit contrôler son risque, nous avons voulu examiner les problèmes de contrôle sous contraintes sur les versions uniformes de la mesure Value-at-Risk (VaR) qui permette de mesurer les pertes potentielles d'un portefeuille et de choisir la stratégie financière idéale.

Comme perspective, une généralisation des résultats pour ce type de problème lorsque les coefficients des marchés financiers considérés sont aléatoires.

Bibliographie

[1] Artznèr, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heeath,D. : *Coherent measures of risk*. Math. Finance. **9**,203-228 (1999)

[2] Bachelier, L. : *Théorie de la spéculation*, Thèse, Ann. Sci. de l'ecole Norm. Sup., Série 3, janvier 1900, 17 :21-86

[3] Basak,S., Shapiro, A. : *Value at Risk Based Risk management : optimal policies and asset prices*. Review of Financial Studies. **14**(2), 371-405 (1999)

[4] Black, F., Scholes, M. : *The pricing of options and Corporate liabilities,* Journal of political Econoy, 81 : 637-654, (1973) (May-june)

[5] Chouaf, B. and Pergamenshchikov, S. :*Optimal investment with bounded VaR for power utility functions.* In Y.Kabanov, editor, *The collection of papers dedicated to the 60th anniversary of Marek Musiela.* Springer, 2012.

[6] Deheuvels (Paul). -L'intégrale. -Paris, Presses Universitaires de France, 1980. [179, 181]

[7] El karaoui, N. : *Mesures et couverture de risques dans les marchés financiers*, MATAPLI, 69 :43-66, (2002)

[8] Emmer, S., Klüppelberg, C., Korn, R. : *Optimal portfolios with bounded Capital-at-Risk*. Math. Finance. **11** 365-384 (2001).

[9] Gabih, A.,Grecksch, W., Wunderlich, R. : *Dynamic portfolio optimization with bounded Shortfall risks*. Stoch. anal. Appl.**23**, 579-594 (2005)

[10] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. : *A stochastic calculs model of continuous trading : complete markets*, Stochastic Process. Appl. **15** (1983), no. 3, 313-316.

[11] Huyên. pham. :*Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[12] Jorion, P. : *Value at Risk. McGraw-Hill*, New York (2001)

[13] Klüppelberg, C., Pergamenshchikov, S. :*Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for power utility functions* . Radon Ser. Comput. Appl. Math. 8., Walter de Gruyter, Berlin, 2009.

[14] Klüppelberg, C., Pergamenshchikov, S. :*Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for power utility functions.* In F. Delbaen, M.Rsonyi, and C.Stricker, editors, *Optimal and Risk : Modern Trends in Mathematical Finance.* The Kabanov Festschrift, pages 133-169. Springer, Heidelberg-Dordrecht-London-New York, 2009.

[15] Klüppelberg, C., Pergamenshchikov, S. :*Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for logarithmic utility functions* . Advanced Financial Modelling. Radon Ser. Comput. Appl. Math., Walter de Gruyter, Berlin, 8 :245-273, 2009.

[16] Karatzas, I. and Shreve, S.E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin (1988)

[17] Karatzas, I. and Shreve, S.E. : *Methods of Mathematical Finance*. Springer, Berlin (2001)

[18] Korn, R. :*Optimal Portfolios. World Scientific*, Singapore (1997)

[19] Lamberton, D., Lapeyre, B. :*Introdiction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, 1997

[20] Liptser, R.S., Shirayev, A.N. : *Statistics of Random Processes I.* General Theory. Springer, New York (1977)

[21] Merton, R.C. : *Continuous- Time Finance*. Blackwell, Cambridge MA (1990)

[22] Natanson, I. P. : *Theory of functions of a real variable.* New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1955. [179, 181]

[23] Touzi, N. : *Stochastic Control Problems*, Viscosity Solutions and Applicaton to Finance. Scuola Normale Superiore di Pisa. Quaderni. Scuolla Normale Superiore, Pisa, (2004)