République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Convergence des opérateurs

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathematique

par

Nouari **A**icha [1]

Sous la direction de

Dr. A. Azzouz

Soutenu le 25/06/2018 devant le jury composé de

Pr. H. M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Pr. G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M^{elle}**. H.** Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : aichanouaristd@outlook.fr

Remerciements

Louanges A Dieu tout puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail. Prière et Saluts soient sur Notre Cher Prophète "Mohammed" et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je désire remercier trés chaleusement mes parents et ma famille, car ceci et le fruit de tant d'années de leur éducation, de leur attention et de leur efforts. Qu'ils trouvent ici ma profonde grattitude.

Au terme de ce travail, je saisis cette occasion pour exprimer mes vifs remerciements à toute personne ayant contribué, de prés ou de loin, à la réalisation de ce travail.
Tout d'abord je remercie mon prommoteur, **A. Azzouz** pour la bienveillance avec laquelle il a encadré ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils mont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.
Je tiens remercie vivement les membres jurys : **Dr. H.M. Dida**, **M**^{elle}. **H. Abbas**, **Pr.G.Djellouli** de m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail. Je les remercie pour leurs remarques et leurs suggestions.
Mes vifs remarciements vont à tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation, et aussi à mes camarades des deux cycles qui m'ont fait profiter de leurs diverses expériences.

Dédicaces

Il m'est agréable de dédier ce modeste travail à :

Mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi,

sans leur amour et leur confiance,

je ne serais jamais arrivée là.

Mes trés chers frères qui m'ont toujours soutenus

avec beaucoup d'amour et de compréhension.

Toute la famille "Nouari"

A mes amies

Table des matières

Liste des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de notre travail :

X espace de Banach, X^* son espace dual.

T Un opérateur linéaire borné dans X.

$Lin(X)$ Ensemble des opérateurs inversibles sur X.

$\mathcal{L}(X)$ Ensemble des opérateurs linéaires bornés dans X

$\mathcal{K}(X)$ L'ensemble des opérateurs compacts dans X.

$\widetilde{T}$ Opérateur de rang fini sur X

$N(T)$ Espace nul (ou noyau) d'un opérateur linéaire, T $R(T)$ son image

$\mathbf{R}_\lambda(T)$ Résolvante de T, $\rho(T)$ Ensemble résolvant de $T \in \mathcal{L}(X)$

$\sigma(T)$ Spectre de T

$\sigma_p(T)$ Spectre ponctuel de T, $\sigma_c(T)$ Spectre continu de T

$\sigma_r(T)$ Spectre résiduel de T, $\sigma_d(T)$ Spectre discret de T

$\sigma_{ess}(T)$ Spectre essentiel de T, $\sigma_w(T)$ Spectre essentiel de Weyl

$\sigma_f(T)$ Spectre essentiel de Wolf, Λ L'ensemble spectral

$r(T)$ Rayon Spectral de T

$\alpha(T)$ Dimension de $N(T)$, $\beta(T)$ Codimension de $R(T)$

$\Phi(X)$ L'opérateur de Fredholm

$\Phi_+(X)$ Semi-Fredholm supérieur, $\Phi_-(X)$ Semi-Fredholm inférieur

$\Phi_\pm(X)$ Opérateur Semi-Fredholm, $\Phi^b(X)$ Opérateur de Fredholm borné

$i(T)$ Indice de l'opérateur de Fredholm

$\mathcal{F}(X)$ Ensemble des perturbations de Fredholm

$\mathcal{R}(X)$	Opérateur de Riesz
$T_n \xrightarrow{n} T$	Convergence en norme de T_n vers T
$T_n \xrightarrow{p} T$	Convergence ponctuelle de T_n vers T
$T_n \xrightarrow{n} T$	Convergence collectivement compacte de T_n vers T
$T_n \xrightarrow{\nu} T$	ν-convergence de T_n vers T

Introduction Générale

Ce mémoire a pour thème central la convergence des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X, plus particulièrement s'agit de présenter un mode de convergence non conventiel des opérateurs dans $\mathcal{L}(X)$. Ahues (1987) et Bouldin (1990) ont été les preminers investigateurs approximations fortement stables de suite opérateurs (T_n) d'opérateurs (ayant une valeur propre isolée).Ce traitement a permit étendre ces résultats et les généraliser de manière à faciliter leur application à une large classe d'opérateurs bornés. En 1992, M.T. Nair donna un résultat sur les approximations fortement stables donnant lieu à un nouveau mode de convergence : ν convergence réalisé plus tard par M. Ahues. Dans ce mémoire on s'intéresse principalement à la ν-convergence des opérateurs linéaire bornés et la (semi) continuité du spectre.

Cette travail est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous rappellons l'essentiel des notions et résultats classiques dont nous avons besoin pour la suite. En addition, on donnera une attention particluière à l'étude des opérareurs compacts. Dans le deuxième chapitre, on définit les opérateurs de Fredholm et le spectre essentiel associé. D'abord, on donnera quelques propriétés des opérateurs de Fredholm $\Phi(X)$ dans le cas borné sur X et de l'application indice $i(T)$. On s'intéresse aussi à des sous classes fondamentales de ces opérateurs, à savoir les opétrateurs semi-Fredholm $\Phi_{\pm}(X)$, opérateur de Riesz $\mathcal{R}(X)$. Nous terminons ce chapitre par l'étude de deux classes du spectre essentiel, appelés spectre essentiel de **Weyl** et **Wolf** (resp. $\sigma_w(T), \sigma_f(T)$). On présente aussi une caractérisation du ces deux spectres essentiels.

Le troisième chapitre sera consacré l'étude de la continuité du spectre et de la ν-convergence. On commence d'abord par introduire l'approximation spectrale des opérateurs et les théorèmes existants. On étalera en fin du chapitre les modes de convergence (convergence en norme $T_n \overset{n}{\to} T$, convergence ponctuelle $T_n \overset{p}{\to} T$ et convergence collectivement compacte $T_n \overset{cc}{\to} T$). Ensuite, on définit de nouveau mode de convergence, appelée la ν-convergence et dnner quelque propriété. Dans le dernierre, nous donnons les liens qui peuvent exister entre la ν-convergence et les autres modes de convergence.

Le dernier chapitre, qui donne une extension au chapitre précédent, est consacré à l'étude des propriétés spectrales de quelques types d'opérateurs sous la ν-convergence précisement la semi continuité du spectre. D'abord, on définit le continuité et semi continuité du spectre. Ensuite, on expose les propriétés des spectres essentiels sous la ν-convergence et caractériser les spectres essentiels de **Wolf** et **Weyl** d'un suite d'opérateurs linéaires sous la ν-convergence. Ainsi, on définit la ν continuité du spectre essentiel de **Wolf** et **Weyl** (resp $\sigma_w; \sigma_f$) qui est motivée par la notion de ν-convergence. A la fin de chapitre, on donne des applications aux matrices dopérateurs $n \times n$. L'idée est d'approcher un opérateur défini sur un espace de Banach X par une suite des opérateurs (T_n) de rang fini sur X. On donnera ainsi une application du concept de ν convergence au calcul des solutions approximatives de problème de valeurs propres pour T en résolvant le problème de la valeur propre pour T_n et montrer que le problème de la valeur propre pour opérateur de rang fini $\widetilde{T}$ peut être résolu en le réduisant à un problème de valeur propre de matrice de manière canonique.

Chapitre 1

Eléments de la théorie des opérateurs linéaires bornés

Introduction

Au sein de ce premier chapitre, on expose des notions générales sur les opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X. Il est principalement tiré de plusieurs références, voir [[11], [16], [17], [18]]. Ce concept est ici largement intreduit à travers les notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions et résultats sur l'opérateur linéaire borné sur X. Ensuite nous donnons quelques propriété du opérateur inverse et adjoint. En outre, on définit l'opérateur compact .

1.1 Opérateur linéaire

Définition 1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $u \to Tu \in F$ définie sur un sous-espace vectoriel E.*

Définition 1.2. *Un opérateur T sur un espace de Banach X est une application linéaire de X dans lui même.*

Définition 1.3. *(**Opérateur linéaire borné**) Un opérateur continu ou borné est un opérateur tel que*

$$\sup_{||x||=1} ||Tx|| < +\infty$$

On note par $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur X.

Définition 1.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné de X dans Y toute application linéaire continue de X dans Y . Pour $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note $R(T) = \{Tx, x \in X\}$ et $N(T) = \{x \in X, Tx = 0\}$.*

L'opérateur identité de X dans X sera noté par I

Définition 1.5. *(**Densité**) Soient E et F deux espace normés. Un opérateur $T : E \to F$ est dit densément défini si son domaine $D(T)$ est dense dans E c'est-à-dire $\overline{D(T)} = E$*

Définition 1.6. *(**Somme de deux opérateurs**) Soit X un espace de Banach, $S, T \in \mathcal{L}(X)$. On définit l'opérateur somme $S + T$ par :*

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x)$$

pour tout $x \in X$.

1.2 Spectre des opérateurs bornés

Soit X un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même, muni de la norme $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_X$
L'espace $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach unifère (posséde un élément e tel que $\|e\| = 1$)

Définition 1.7. *(**Ensemble résolvant, résolvante**)*
Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, on appelle ensemble résolvant de T est : $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\ (\lambda I - T)$ soit une bijection de X sur $X\}$,(i,e : $\lambda I - T$ à un inverse borné c-à-d $(\lambda I - T\ )^{-1} \in \mathcal{L}(X)$). L'opérateur $(\lambda I - T)^{-1}$ est appelé la résolvante de T en et noté $\mathbf{R}_\lambda(T)$.

Définition 1.8. *(**Spectre**)*
Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, on appelle spectre de T et on note $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$ (L'ensemble résolvant de T) donc : $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - T$ n'est pas inversible dans $X\}$, $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.

cette définition dégage trois types des spectres distincts :

1) Spectre ponctuel : noté $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T, il est défini comme suit : $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$, c-à-d $\lambda I - T$ n'est pas injectif alors

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad Tx = \lambda x, x \in X, x \neq 0\}$$

2) Spectre continu : noté par $\sigma_c(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - T$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans X, c.-à-d

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus N(\lambda I - T) = \{0\}, R(\lambda I - T) \neq X, \overline{R(I - T)} = X\}$$

3) Spectre résiduel noté $\sigma_r(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - T$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans X, c-à-d.

$$\sigma_r(T) = \{N(\lambda I - T) = \{0\}, (R(\lambda I - T))^{\perp} \neq \{0\}\}$$

Remarque 1.2.1. *Le spectre de T est $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$*

Définition 1.9. *(**Rayon spectral**) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, on appelle rayon spectral de T, la quantité*

$$r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

1.3 Opérateur inverse et adjoint

1.3.1 Opérateur inverse

Définition 1.10. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : Y \to X$ tel que*

$$TS = I_Y \text{ et } ST = I_X$$

L'ensemble des opérateurs inversibles sera noté par $Lin(X)$

Théorème 1.3.1. *Soit X un espace de Banach, $T, S \in Lin(X)$ tels que $R(T) \subset X$ et $R(S) \subset X$. Alors $(I_X - \lambda TS)$ est inversible si et seulement si $(I_X - \lambda ST)$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$(I_X - \lambda ST)^{-1} = I_X + \lambda S(I_X - \lambda TS)^{-1}T \tag{1.1}$$

et

$$(I_X - \lambda TS)^{-1} = I_X + \lambda T(I_X - \lambda ST)^{-1}S$$

Preuve. Soit $\lambda \neq 0$. Supposons que $(I_X - \lambda TS)$ est inversible d'inverse C, alors

$$(I_X - \lambda TS)C = C(I_X - \lambda TS) = I_X \Leftrightarrow C - \lambda TSC = C - \lambda CTS = I_X.$$

Doù

$$\lambda CTS = C - I_X.$$

Autrement,

$$\begin{aligned}(I_X + \lambda SCT)(I_X - \lambda ST) &= I_X - \lambda ST + \lambda SCT - \lambda^2 SCTST \\ &= I_X - \lambda ST + \lambda SCT - \lambda S(C - I_X)T \\ &= I_X\end{aligned}$$

La deuxième équation se démontre de la même manière puisque $\lambda TSC = C - I_X$, on obtient alors

$$(I_X - \lambda ST)(I_X + \lambda SCT) = I_X.$$

Par suite $(I_X - \lambda ST)$ est inversible et

$$(I_X - \lambda ST)^{-1} = (I_X + \lambda SCT) = I_X + \lambda S(I_X - \lambda TS)^{-1}T$$

L'autre égalité se déduit en permutant T et S.

■

Corollaire 1.3.1. *Soit $T, S \in \mathcal{L}in(X)$ tels que $R(T) \subset X$ et $R(S) \subset X$. Si $\lambda^{-1} \in \rho(TS)$ alors*

$$(I_X - \lambda TS)^{-1}T = T(I_X - \lambda ST)^{-1}$$

Preuve. Si $\lambda^{-1} \in \rho(TS)$, en vertu du théorème (1.3.1) ona

$$\begin{aligned}(I_X - \lambda TS)^{-1}T &= [I_X + \lambda T(I_X - \lambda ST)^{-1}S]T \\ &= T[I_X + \lambda(I_X - \lambda ST)^{-1}ST] \\ &= T[I_X + \lambda ST(I_X - \lambda ST)^{-1}] \\ &= T[(I_X - \lambda ST)(I_X - \lambda ST)^{-1} + \lambda ST(I_X - \lambda ST)^{-1}] \\ &= T(I_X - \lambda ST)^{-1}.\end{aligned}$$

■

1.3.2 Opérateurs transposé et Adjoint

Définition 1.11. *(**Opérateur transposé**)*
Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach et T un opérateur densement défini de B_1 dans B_2 ; on définit la transposée de T , de B_1 dans B_2 de domaine de ${}^tT$ par l'ensemble des $y^* \in B_2^*$ tel que la forme linéaire $x \in D(T) \to y^*(T(x))$ soit continue.

Corollaire 1.3.2. *Soient X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$; on a*

$$\sigma({}^tT) = \sigma(T)$$

Preuve. Il suffit de remarquer que ${}^t(T - \lambda I_X) ={}^t T - \lambda I_{X^*}$ pour tout nombre complexe λ. ∎

Remarque 1.3.1. *Soient X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$; on a :*

- *$\sigma_r(T) = \sigma_p({}^tT) \backslash \sigma_p(T)$ et $\sigma_c({}^tT) \subset \sigma_c(T)$.*
- *Si X est réflexif, on a l'égalité $\sigma_c({}^tT) = \sigma_c(T)$.*

Définition 1.12. *(**Opérateur adjoint**) L'espace dual X^* de X est l'ensemble des formes linéaires bornées x^* sur X. X^* est aussi un espace de Banach muni de la norme*

$$\|x\|_{X^*} = \inf\{|x^*(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Si $T : X \longrightarrow Y$ est de domaine dense, on peut définir l'opérateur adjoint $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ par : le domaine $\mathcal{D}(T^*)$ est l'ensemble des $y^* \in Y^*$ tels que l'application

$$\mathcal{D}(T) \ni x \mapsto y^*(Tx) \tag{1.2}$$

est continue (de X dans $\mathbb{C}$). Puisque $\mathcal{D}(T)$ est dense dans X, l'application se prolonge par continuité sur X, et alors il existe un unique $x^* \in X^*$ tel que

$$y^*(Ax) = x^*(x), \text{ pour } x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.3}$$

Ainsi x^* est déterminé par y^*, on peut définir l'opérateur A^* de Y^* dans X^* par :

$$A^*y^* = x^*, \text{ pour } y^* \in \mathcal{D}(A^*). \tag{1.4}$$

Théorème 1.3.2. *Soit X espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(X)$ et $T' \in \mathcal{L}(X')$ l'adjoint de T, alors*

$$\sigma(T) = \sigma(T') \, et \, \lambda \in \rho(T), R_\lambda(T') = R_\lambda(T)'.$$

1.4 Opérateur Compact

Définition 1.13. *Soient X et Y deux espaces de Banach, un opérateur $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ est dit* ***compact*** *s'il transforme toute partie bornée de X en une partie relativement compact de Y . Autrement dit, T est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X la suite $(Tx_n)_n$ admet une sous-suite convergente.*

Remarque 1.4.1. *Un opérateur compact est nécessairement continu car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornè tel que $\|Tx_n\| \longrightarrow \infty$, ce qui contredit la compacité.*

Applications linéaires compactes *: Si E est un espace vectoriel normé, on note $B_E(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B_E(0,r)}$*
la boule fermée. Dans le cas où $r = 1$, on note pour simplifier $B_E = B_E(0,1)$ et $\overline{B_E} = \overline{B_E}(0,1)$. S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on oubliera parfois de préciser que la boule est dans E, en notant simplement $B(0;r)$ où $\overline{B}(0;r)$.
Commençons par une proposition simple mais utile.

Proposition 1.4.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est compact.*

(ii) *Pour toute partie A bornée de X, l'ensemble $T\overline{(A)}$ est relativement compact dans Y.*

Preuve. *(ii) $\Longrightarrow$ (i) : on applique (ii) à $T = B_E$.*
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : soit A une partie bornée quelconque de X. Par définition 1.13, il existe donc $r > 0$ tel que $A \in B_E(0;r) = rB_E$. D'où, avec la linéarité de T, on obtient que

$$T(\overline{A}) \subset T(r\overline{B}_E) = rT(\overline{B}_E)$$

Comme $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact, on vérifie alors facilement que $rT(\overline{B}_E)$ est relativement compact et donc $T(\overline{A})$ est aussi relativement compact La proposition suivante décrit la structure de $\mathcal{K}(X;Y)$.

∎

Remarque 1.4.2. *Il est clair que tout opérateur T de* ***rang fini*** *[i,e : l'image de T est dimention fini] est* ***compact*** *: En effet, l'ensemble $T(\overline{B}_X)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'aprés le résultat précédent, si une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini dans $\mathcal{L}(X,Y)$ converge vers T dans $\mathcal{L}(X,Y)$, alors T est compact. Cela constitue une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Théorème 1.4.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ est compact alors pour tout suite $(x_n)_n$ tel que $x_n \to x$ on a $Tx_n \to Tx$. La réciproque est vraie seulement si X est **reflexif.***

Lemme 1.4.1. *Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$, alors $I - T$ est à image fermée et*

$$dim(N(I-A)) = codim(R(I-A)) < \infty$$

Théorème 1.4.2. *Soit X un espace de Banach. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T \in \mathcal{K}(X)$;*
2. *$T^* \in \mathcal{K}(X^*)$.*

Tout d'abord, rappelons que T^* est défini grâce à la relation suivante :

$$\langle T^*x^*, x\rangle =< x^*, Tx >,$$

Pour tout $x^* \in X^*$ et $x \in X$. Ainsi

$$\|T^*x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |< T^*x^*, x >| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x^*, Tx\rangle|$$

avec $|\langle x^*, Tx\rangle| \leq \|x^*\| \, \|Tx\| \leq \|x^*\| \, \|T\| \, \|x\|$. Ainsi, nous avons

$$\|T^*x^*\| \leq \|T\| \, \|x^*\|$$

ce qui prouve en particulier la continuité de T^* comme application linéaire de X^* dans X^* . De plus, on a $\|T^*\| \leq \|T\|$

Proposition 1.4.2. *Soit X un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact et $T = I_X - K$. Alors le noyau de T est de dimension finie et l'image $T(X)$ est fermée.*

Corollaire 1.4.1. *Soit X un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact et $T = (I_X - K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est injectif.*

(ii) *T est surjectif.*

Spectre d'un opérateur compact

Définition 1.14. *Soit X un espace de Banach. On appelle spectre d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, le sous-ensemble du plan complexe défini par :*

$$\sigma(T)=\{\lambda \in \mathbb{C} : \quad (\lambda I - T) \text{ n'est pas bijective } \}$$

On dit que $\lambda \in \sigma(T)$ est une valeur propre de T de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si $\lambda I - T$ n'est pas injective et $dim(N(\lambda I - T) = m$.

Corollaire 1.4.2. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. Alors on a $\sigma(T) = \{0\}$ ou $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est fini ou $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est une suite qui tend vers 0.*

Chapitre 2

Théorie spectrale des Opérateurs de Fredholm

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à deux objets qui sont au centre de nos intérêtes et qui vont nous occuper jusqu'a à la fin de ce travail : les opérateurs de ***Fredholm*** *et le spectre essentiel, nous intéressons spécifiquement aux spectres essentiels de* ***Weyl*** *et* ***Wolf****.*

2.1 Opérateurs de Fredholm

Définition 2.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et on note $N(T)$ le nayau de T, $R(T)$ l'image de T. On dit que T est un*

1. ***Opérateur de Fredholm*** *noté par $\Phi(X,Y)$ [ou $\Phi(X)$ lorsque $X = Y$] si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*
   - *$R(T)$ est fermé,*
   - *$\dim N(T)$ est finie,*
   - *$codim R(T)$ est finie.*
2. ***Semi-Fredholm supérieurement*** *si $R(T)$ est fermé et $\dim N(T)$ est finie noté par $\Phi_+(X,Y)$ ou $\Phi_+(X)$ lorsque $X = Y$.*
3. ***Semi-Fredholm inférieurement*** *si $R(T)$ est fermé et $R(T)$ est fini, noté par $\Phi_-(X,Y)$ ou $\Phi_-(X)$ lorsque $X = Y$.*

4. ***Semi-Fredholm*** *si* $A \in \Phi_{\pm}(X, Y) = \Phi_{+}(X, Y) \cup \Phi_{-}(X, Y)$
5. ***Fredholm borné*** *de* X *vers* Y*, noté par* $\Phi^{b}(X, Y) = \Phi(X, Y) \cap \mathcal{L}(X, Y)$ *ou et noté par* $\Phi^{b}(X)$ *lorsque* $X = Y$.
6. $\Phi^{b}_{\mathcal{U}}(X, Y) = \{\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda - \mathcal{U} \in \Phi^{b}(X, Y)\}$*, noté par* $\Phi^{b}_{\mathcal{U}}(X)$ *lorsque* $X = Y$.

Remarque 2.1.1. *Comme l'image d'un opérateur est fermée si elle est de codimention finie alors :*
(i) $\Phi(X, Y) = \Phi_{+}(X, Y) \cap \Phi_{-}(X, Y)$
(ii) $\Phi(X)$ *est un ensemble non-vide puisqu'il contient l'identité. Par contre* $\Phi(X, Y)$ *peut-être vide lorsque* $X \neq Y$

Définition 2.2. *Pour tout opérateur* $T \in \mathcal{L}(X)$*, on note* $\alpha(T) = \dim N(T)$ *et* $\beta(T) = codim R(T)$*, on appelle* ***l'indice*** *d'un opérateur de* ***Fredholm*** *est la fonction à valeurs entières suivante :*

$$\begin{array}{rcl} i : \mathcal{L}(X) & \to & \mathbb{Z} \\ T & \to & i(T) = \alpha(T) - \beta(T) \end{array}$$

Et dans ce cas, on a $i(T) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$*, Il est clair que*

- *Si* $T \in \Phi(X)$ *alors* $i(T) < \infty$
- *Si* $T \in \Phi_{+}(X) \backslash \Phi(X)$ *alors* $i(T) = -\infty$
- *Si* $T \in \Phi_{-}(X) \backslash \Phi(X)$ *alors* $i(T) = +\infty$

Remarques 2.1.1. *(i) Dans le cas ou* X *et* Y *sont de dimension finie, tous les opérateurs sont de* ***Fredholm*** *et leur indice est égal à* $\dim X - \dim Y$
(ii) Tout opérateur inversible de $\mathcal{L}(X, Y)$ *est de* ***Fredholm*** *d'indice nul. En effet, il découle de l'inversibilité de* T *que* $N(T) = \{0\}$ *(bijection), c-à-d* $\alpha(T) = 0$*, et* $R(T) = X$ *qui est fermée et sa codimension est nulle (*$\beta(T) = 0$*), ainsi :* $i(T) = 0 - 0 = 0$.
(iii) Si $K \in \mathcal{L}(X)$ *est un opérateur compact, alors* $K - \lambda$ *est un opérateur de* ***Fredholm*** *pour tout compact non-nul* $\lambda \in \mathbb{C}$
(iv) Tout opérateur injectif à image fermée est ***semi-Fredholm supérieur*** *d'indice négatif*
(v) Tout opérateur surjectif est de ***semi-Fredholm inférieur*** *d'indice positif*
Voici un premier critère de fermeture des opérateurs linéaires.

Théorème 2.1.1. *soit* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *un opérateur à image fermée . Alors on a :*

(i) T est ***semi-Fredhom supérieur*** *si et seulement si, T^* est* ***semi-Fredhom inférieur***
(ii) T est ***semi-Fredhom inférieur*** *si et seulement si, T^* est* ***semi-Fredhom supérieur***
(iii) T est ***semi-Fredhom*** *si et seulement si, T^* est* ***semi-Fredhom***
(iv) T est ***Fredhom*** *si et seulement si, T^* est* ***Fredhom***
Et dans tous ces cas, on a $i(T^*) = -i(T)$.

Preuve. *Puisque $R(T)$ alors $R(T^*)$ est fermée, donc :*

$$R(T) = N(T^*)^{\perp} \text{ et } R(T^*) = N(T)^{\perp}$$

Par conséquence, $\alpha(T^*) = \dim N(T^*) = codimR(T) = \beta(T)$ et $\beta(T^*) = codimR(T^*) = \dim N(T) = \alpha(T)$. Puisque $\dim N(T^*)$ et $codimR(T^*)$ est finis alors T^* est de ***Fredhom.***

$$i(T^*) = \alpha(T^*) - \beta(T^*) = \beta(T) - \alpha(T) = -i(T)$$

Maintenant, les autres assertions se vèrifient facilement. ■

Corollaire 2.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$.*

(i) *Si $T \in \Phi_+(X)$ alors $T^n \in\in \Phi_+(X)$ pour tout $n \geq 1$.*

(ii) *Si $T \in \Phi_-(X)$ alors $T^n \in\in \Phi_-(X)$ pour tout $n \geq 1$.*

(iii) *Si $T \in \Phi(X)$ alors $T^n \in\in \Phi(X)$ pour tout $n \geq 1$.*

2.2 Perturbations semi-Fredholm et Fredholm

En premier lieu, on commence par une définition des perturbations

Définition 2.3. *Soient A et B deux opérateurs de caractères différents, l'opérateur $A + B$ [de domaine $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ supposé dés maintenant non nul], un premier pas dans la théorie des perturbations, consiste à étudier le caractère de l'opérateur $A + B$ lorsqu'on perturbe A par un autre opérateur B*

Définition 2.4. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$.*

- *On dit que T est une perturbation de Fredholm si $U + T \in \Phi(X)$ pour tout $U \in \Phi(X)$.*
- *T est dite une perturbation semi-Fredholm supérieure (resp. une perturbation semi-Fredholm inférieure) si $T + U \in \Phi_+(X)$ (resp.Φ_-) pour tout $U \in \Phi_+(X)$(resp. $\Phi_-(X)$).*

Les ensembles des perturbations de Fredholm, perturbations semi-Fredholm supérieures (inférieures) sont notés par $\mathcal{F}(X), \mathcal{F}_{+}(X), \mathcal{F}-(X)$.

Proposition 2.2.1. *Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie et soit $F \in \mathcal{F}(X)$, alors $ind(A+F) = ind(A)$ pour tout $A \in \Phi(X)$.*

Lemme 2.2.1. *Soit $T, U \in \mathcal{L}(X)$. Alors*

(i) *Si $T \in \Phi(X)$ et $U \in \mathcal{F}(X)$, alors $T+U \in \Phi(X)$ et $i(T+U) = i(T)$*

(ii) *Si $T \in \Phi_{+}(X)$ et $U \in \mathcal{F}_{+}(X)$, alors $T+U \in \Phi_{+}(X)$ et $i(T+U) = i(T)$*

(iii) *Si $T \in \Phi_{-}(X)$ et $U \in \mathcal{F}_{-}(X)$, alors $T+U \in \Phi_{-}(X)$ et $i(T+U) = i(T)$*

Opérateur de Riesz

Définition 2.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, T est dit opérateur de Riesz (et on note $T \in \mathcal{R}(X)$) si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est de Fredholm.*

Remarque 2.2.1. *Pour un opérateur $T \in \mathcal{R}(X)$, on a :*

(a) *$0 \in \sigma(T)$ et $\sigma(T)$ est au plus dénombrable ayant pour seul point d'accumulation eventuel zéro.*

(b) *$\forall\lambda \neq 0, ind(T-\lambda I) = 0$. En particulier pour $\forall\lambda \neq 0$,*

$$N(T-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow T-\lambda I \text{ inversible}$$

(c) *Si $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ alors λ est isolé dans le spectre de T, en plus la projection spectrale associée à l'ensemble spectral $\{\lambda\}$ est de rang fini.*

2.3 Spectre essentiel

2.3.1 Spectre discret et Spectre essenciel

Dans un espace de Banach X, soit $T \in \mathcal{L}(X)$

Définition 2.6. *On appelle spectre **discret** de X, noté $\sigma_d(T)$ l'ensemble des valeurs propres isolées de X, de multiplicité finie.*

Définition 2.7. *On appelle spectre* ***essentiel*** *de* X*, noté par* $\sigma_{ess}(T)$ *l'esnsemble* $\sigma(T)\backslash\sigma_d(T)$*. En mathématiques, le spectre* ***essentiel*** *de* A *opérateur est lié un certain sous-ensemble de son spectre, défini par un état qui indique, en général, " a n'est pas inversible".*

Définition 2.8. *Le spectre* ***essentiel*** *d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble*

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda - T) \quad \textit{n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\}$$

.

On voit immediatement avec cette définition que la réunion du spectre ponctuel et du spectre ***essentiel*** *couvre tout le spectre. En effet, l'ensemble des valeurs propres et le spectre* ***essentiel*** *sont évidemment inclus dans le spectre. Inversement, si* λ *n'appartient ni a l'un ni' a l'autre, '*

$$0 = \dim N(\lambda - T) = codimR(\lambda - T),$$

et donc $(\lambda - T)$ *est une bijection sur* X*, ce qui signifie que* λ *appartient a l'ensemble résolvant de* T*. Donc*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ess}(T).$$

Cependant il ne s'agit pas a priori d'une réunion disjointe. En effet, l'intersection $\sigma_{ess}(T)\cap\sigma_p(T)$ *est composée des valeurs propres* λ *pour les quelles*
- *Soit* N $(\lambda - T)$ *n'est pas de dimension finie,*
- *Soit* R $(\lambda - T)$ *n'est pas fermé,*
- *Soit* $dimN(T) \neq codimR(T)$

On peut de plus décomposer

$$\sigma_{ess}(T)\backslash\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; N(\lambda - T) = \{0\} \text{ et } R(\lambda - T) \subsetneq X\}.$$

Proposition 2.3.1. $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ *si et seulement si il existe une suite* $(f_n)_n$ *bornée non compacte tel que* $(T - \lambda I)f_n \to 0$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$*, pour la suite, on pose*
- $G = N(T - \lambda I)$
- $T^{'} = T|_{G^{\perp}}$

Théorème 2.3.1.
1. *Si* $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$ *alors* $(T^{'} - \lambda I)^{-1}$ *est continu*
2. *Si* $(T^{'} - \lambda I)^{-1}$ *est continu et* λ *n'est pas une valeur propre de dimension infinie, alors* $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$

2.4 Spectre essentiel de Weyl et Wolf

Dans un espace Banach X, le spectre essentiel de ***Wolf*** *d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est défini par :*

$$\sigma_f(T) := \mathbb{C} \backslash \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \in \Phi(X)\}$$

le spectre essentiel de ***Weyl*** *$T \in \mathcal{L}(X)$ est défini par :*

$$\sigma_w(T) := \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(T + K),$$

avec $\mathcal{K}(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts sur X.

2.4.1 Caractérisation du spectre essentiel de Weyl et Wolf

Donnons une caractérisation élémentaire du spectre essentiel de ***Weyl*** *et* ***Wolf*** *par la proposition suivante :*

Proposition 2.4.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors $\lambda \notin \sigma_w(T)$ si seulement si $\lambda - T \in \Phi(X)$ et $i(\lambda - T) = 0$.*

Remarque 2.4.1. **(i)** *On a la relation entre le spectre essentiel de Weyl et le spectre essentiel de Wolf de T par :*

$$\sigma_w(T) = \sigma_f(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(\lambda - T) \neq 0\}.$$

(ii) *On rappelle pour $\theta \in \{\sigma_f(T), \sigma_w(T)\}, T \in \mathcal{R}(X)$ si seulement si $\theta = \{0\}$ (Voir [1], Théorème 3.111).*

Chapitre 3

Continuité du spectre et Convergence des Opérateurs

Introduction

Le long de ce chapitre, on est entrain de parler de la continuité du spectre et ν-convergence ; cette derniere a été fondée à partir de l'approximation spectrale des opérateurs la quelle est fondée par le savant T.Nair[13] .

Motivations

Soient T et T_n des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach complexe X, que l'on notera T, $T_n \in B(X)$. Sauf mention contraire, la convergence se passe toujours lorsque n tend vers $+\infty$. $\sigma(T_n), \sigma(T)$ étant les spectres de T_n et T respectivement. Si T_n converge vers T dans un sens, plusieurs questions se posent naturellement :

1. *Si $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$, A-t-on $\lambda \in \sigma(T)$?*
2. *Si $\lambda \in \sigma(T)$, Est, ce qu'il existe $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ pour tout n assez grand tel que $\lambda_n \to \lambda$?*

Selon un mode de convergence donné, on dit que :

Propriéte U *est vérifiée si pour toute suite $(T_n)_n / \ T_n \longrightarrow T, \lambda_n$ appartient à $\sigma(T_n)$ et convergeant vers λ on a $\lambda \in \sigma(T)$;*

Propriété L *est vérifiée si pour toute suite $(T_n)_n / \ T_n \longrightarrow T$ et $\lambda \in \sigma(T)$, il existe une suite $(\lambda_n)_n / \lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$ pour n assez grand.*

Considérons la propriété suivante :

$$\text{'Pour tout } T_n \to T, sup\{dist(\mu;\sigma(T)), \mu \in \sigma(T_n)\} \to 0 \text{ '}$$

cette propriété est connue comme étant la ***semi continuité supérieure*** *du spectre sous un mode de convergence donné. Dans ce cas, la propriété* ***U*** *en est une conséquence directe.*
Par ailleurs, la propriété ***L*** *est connue comme étant la* ***semi continuité inférieure*** *du spectre avec ce mode de convergence. Explicitement :*

$$\text{'Pour tout } T_n \to T \text{ et } \lambda \in \sigma(T) \text{ , } dist(\lambda, \sigma(T_n)) \to 0 \text{ '}$$

La ***semi continuité supérieure*** *du spectre et la* ***semi continuité inférieure*** *, prises ensembles donnent la* ***continuité*** *du spectre au sens de Kuratowski.*

3.1 Approximation spectrale des opérateurs

Plusieurs problèmes liés aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles se ramènent à des problèmes de valeurs propres. Une des questions principales dans cet axe est la suivante :
Etant donné un opérateur borné T et et une perturbation notée E, que sera le spectre de T et le spectre de $E + T$ relatif.
Hélas, aucune réponse ne peut être donnée que dans des cas particuliers, ceci est causé par l'absence de la propriété de semi continuité inférieure du spectre d'un opérateur quelconque T.
Le cadre favorable était de considérer des perturbations compactes, ensuite étendre ces études aux cas des perturbations non compactes.
Pour un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach complexe X, une solution approchée du problème :

$$T\varphi = \lambda\varphi \quad pour\ \varphi \in X\backslash\{0\}$$

est obtenue en résolvant le problème approximé suivant :

$$T_n\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \quad pour\ \varphi_n \in X\backslash\{0\}$$

Plusieurs modes de convergence ont été introduits pour l'approximation des éléments spectraux de l'opérateur T : Convergence collectivement compacte, converge compacte, convergence régulière, convergence fortement stable... ([3], [13]).

Soit λ une valeur propre isolée de T de multiplicité algébrique égale à m, alors sous plusieurs modes de convergence cités plus haut, T_n admet exactement m valeurs propres comptées avec leurs multiplicités algébriques.

3.1.1 Approximation fortement stable

Commençons par donner quelques modes de convergence usuels. Soit X un espace de Banach :

- ***Convergence ponctuelle*** *: On dit que T_n converge ponctuellement vers T noté $T_n \xrightarrow{p} T$ si*

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \textit{ pour tout } x \in X$$

- ***Convergence en norme*** *: On dit que T_n converge normalement vers T noté $T_n \xrightarrow{n} T$ si*

$$\|T_n - T\| \to 0$$

- ***Convergence collectivement compact*** *: On dit que T_n converge collectivement compact vers T noté par $T_n \xrightarrow{cc} T$ si $T_n \xrightarrow{p} T$, et pour n_0 fixé, l'ensemble :*

$$\bigcup_{n \geq n_0} \{(T_n - T)x : x \in X, \|x\| \leq 1\} \textit{ est relativement compact de } X.$$

  Si T est compact, cette condition est équivalente à $\bigcup\limits_{n \geq n_0} \{(T_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ est relativement compact de X

On s'intéresse à voir comment sont liées les multiplicités algébriques des valeurs spectrales λ_n et λ entre elles et si une base du sous espace spectral associé à λ peut être approximée par des bases correspondantes de T_n.

La convergence ponctuelle *et* **la convergence en norme** *sont des concepts classiques, cependant le concept de la convergence collectivement compacte à été développé séparément par Atkinson et Anselone [3].*

Remarque 3.1.1. *Soit X un espace de Banach. La convergence collectivement compacte ou en norme entraine la convergence ponctuelle, càd : Si $T_n \xrightarrow{n} T$ ou $T_n \xrightarrow{cc} T$, alors $T_n \xrightarrow{p} T$. L'inverse n'est pas nécessairement vraie comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 3.1.1. *Dans cet exemple,* $T_n \overset{p}{\to} I$ *mais* $T_n \overset{n}{\nrightarrow} I$ *et* $T_n \overset{cc}{\nrightarrow} I$.
Considérons $X := \ell^p, 1 < p < \infty$. $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ *dans* X, *définissons une suite des opérateurs* T_n *sur* X *par :*

$$T_n x := \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Alors pour tout n, T_n *est un opérateur borné de rang fini sur* X *et* $T_n \overset{p}{\to} I$. *Mais* $T_n \overset{n}{\nrightarrow} I$ *puisque* $\|T_n - I\| = 1, \forall n$, *(On peut aussi la montrer par l'absurde, dans ce cas I devra être de rang fini dans un espace de dimension infinie ce qui est faux).)*
On a aussi $T_n \overset{cc}{\nrightarrow} I$, *pour tout entier positif* n_0 *fixé,*

$$e_k \in \{(I - T_n)x : x \in X, \|x\| \leq 1\} \text{ pour } k = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$$

Mais la suite (e_k) *n'a pas de sous-suite convergente.*

Remarque 3.1.2. *Si* X *est un espace de Banach de dimension infinie, ni la convergence en norme ni la convergence collectivement compacte est plus forte que l'autre.*
Donnons un exemple de cette situation, si $T := I$ *et* $T_n := c_n I$ *avec* $c_n \to 1$ *dans* $\mathbb{C}$, *alors* $T_n \overset{n}{\to} T$, *mais* $T_n \overset{cc}{\nrightarrow} T$, *sauf si* $c_n := 1$.
D'autre part, par un résultat de Josefson et Nissenzweig (voir[7], chapitre XII), il existe une suite (f_n) *dans* X^* *tel que* $\|f_n\| = 1$ *pour tout* n *et* $\langle x, f_n \rangle \longrightarrow 0$ *pour tout* $x \in X$. *Pour* $x_o \in X \backslash \{0\}$ *fixé, soit* $T_n x := \langle x, f_n \rangle x_o$, $x \in X$ *et* $T := 0$. *Alors* $T_n \overset{cc}{\to} T$, *mais* $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T$.
Sous des hypothèses additionnelles, la convergence en norme peut impliquer la convergence collectivement compacte, ou réciproquement.
On constate aussi que la convergence ponctuelle ne garantit pas que la propriété L soit vérifié ni U .

Exemple 3.1.2. *[2] Soit* $x = \ell^2$, *pour* $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$, *soit* $Tx = x_1 e_1$ *et pour tout* $n \geq 2$

$$T_n x = x_1 e_1 - x_n e_n$$

Puisque, $\|T_n x - Tx\|_2 = |x_n| \to 0, \forall x \in X$, *on constate que* $T_n \overset{p}{\to} T$. *On a :*

$$\sigma(T) = \{0, 1\} \text{ et } \sigma(T_n) = \{-1, 0, 1\}$$

Puisque, $\lambda_n = -1 \in \sigma(T_n), \forall n$, *mais* $-1 \notin \sigma(T)$. *Alors, la propriété U n'est pas vérifiée. Aussi, si pour* $x \in X$, *posons :*

$$T_n x = x_1 e_1 + x_n e_n,$$

alors $T_n \xrightarrow{p} T$, 1 *est une valeur propre de* T_n *de multiplicité algébrique égale à* 2, *mais* 1 *est une valeur propre de* T *de multiplicité algébrique* 1. *On voit alors que la multiplicité algébrique n'est pas préservée sous la convergence ponctuelle.*

D'autre part, il est possible de montrer que sous la convergence en norme les propriétés L et U sont vérifiées en chaque point isolé du spectre.

Définition 3.1. *Soit* T *est un opérateur linéaire compact dans un espace de Banach* X *complexe de dimension infinie et* $(T_n)_n$ *une suite d'opérateurs linéaires bornés dans* X *(*(T_n) *n'est pas exigé compact) tels que*

C1 : $\forall x \in X \lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx,$

C2 : $\lim\limits_{n\to\infty} \|(T_n - T)T_n\| = 0,$

alors $(T_n)_n$ *est une approximation fortement stable de* T *dans un voisinage de chaque valeur propre non nulle.*

Remarque 3.1.3. *Les conditions C1 et C2 sont satisfaites par des discrétisations uniformes et collectivement compacte, mais elles sont également satisfaites par des perturbations de norme d'approximation compacte* T *c'est-à-dire,* $T_n = K_n + B_n$ *tel que* B_n *converge en norme vers* 0 *et* K_n *est approximation collectivement compacte de* T

Théorème 3.1.1. *[2] Soit* X *un espace de Banach complexe,* λ *une valeur propre isolée non nulle d'un opérateur borné* T. *Soit* $(T_n)_n$ *une suite d'opérateurs bornés sur* X. *Si :*

(A1) T *est un opérateur compact,*

(A2) $\|(T - T_n)x\| \longrightarrow 0$ *pour tout* $x \in X$,

(A3) $\|(T - T_n)T_n\| \longrightarrow 0$

Alors $(T_n)_n$ *est une approximation fortement stable de* T.

D'autre part, Bouldin au théorème suivant , montre ce résultat sans condition de compacité sur T

Théorème 3.1.2. *[6] Soit* X *un espace de Banach complexe,* λ *une valeur propre isolée non nulle d'un opérateur borné* T *tel que* T *n'est pas compact. Soit* $(T_n)_n$ *une suite d'opérateurs bornés sur* X. *Si :*

B1 *λ est de multiplicité algébrique finie ;*

B2 $\|T_n(T-T_n)\| \to 0$ *;*

B3 $\|(T-T_n)x\| \to 0$ *pour tout* $x \in X$ *;*

B4 $\|(T-T_n)T_n\| \to 0$.

Alors $(T_n)_n$ *est une approximation fortement stable de* T.

Théorème 3.1.3. *Une suite d'opérateurs bornés* $(T_n)_n$ *sur un espace de Banach* X *est une approximation fortement stable de* T *en* λ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

C $\|(T-T_n)T_n\| \to 0$, $(\|T-T_n\|)$ *est borné ;*

aussi bien que l'une des conditions suivantes :

D1 $\|(T-T_n)T\| \to 0$,

D2 $rang P(T,T) < \infty, \|(T-T_n)x\| \to 0$ *pour chaque* $x \in X$,

et l'une des conditions :

E1 $\|(T-T_n)T\| \to 0$,

E2 $\|T_n(T-T_n)\| \to 0$,

E3 *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $n \geq N$, T_n *est compact,*

E4 *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $n \geq N$, $(T-T_n)$ *est compact.*

Exemples et Remarques 3.1.1.

1. *Si* (T_n) *est une approximation de* T, *c-à-d* $\|T-T_n\| \to 0$, *alors les conditions (C), (D1)et (E2)du théorème 3.1.3 sont satisfaites. Ici, l'opérateur* T *n'est pas supposé compact et la multiplicité algébrique de la valeur spectrale isolée de* T *n'est pas finie. En général les résultats de Ahues et Bouldin ne sont pas appliqués.*
   Pour exemple : Si $T = I$ *, l'opérateur identité sur un espace Banach de dimension infini et* $T_n = K_n I$*,où* K_n *sont des vecteurs tel que* $K_n \to 1$, *alors* $\|T-T_n\| \to 0$, *mais* T *n'est pas un opérateur compact et la valeur propre isolée* $\lambda = 1$ *est de multiplicité infinie.*
2. *Si* (T_n) *est une approximation collectivement compacte de l'opérateur compact* T, *c'est à dire* $\|(T-T_n)x\| \to 0$ *pour chaque* $x \in X$ *l'ensemble*
   $$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \{(T-T_n x) : \|x\| < 1\}$$
   est relativement compact pour $n_0 \in \mathbb{N}$, *alors les conditions (C), (D1), (D2), (E3) et (E4) du théorème 3.1.3 sont satisfaites (voir [2]). Mais (E2) n'est pas vérifiée (voir [6]). Alors le résultat de Bouldin ne peut être appliqué.*

3. *Soit T un opérateur non compact sur un espace Hilbert séparable défini par la matrice $(a_{ij})_{ij}$ dans la base hilbertienne canonique $(e_i)_i$ avec $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, défini par*

$$T = \sum_{i,j=0} \langle ., e_j \rangle a_{ij} e_i,$$

Définissons une suite d'opérateurs (T_n) par :

$$T_n = \sum_{i,j=0}^{n} \langle ., e_j \rangle a_{ij} e_i$$

Alors pour tout n, T_n est compact et satisfait

$\|(T - T_n)x\| \to 0$ *pour chaque* $x \in X$

$\|(T - T_n)T_n\| = 0 = \|T_n(T - T_n)\|, n \in \mathbb{N}.$

Cette observation de Bouldin [[6], section 3] satisfait (C), (D2), (E2) et (E3) du théorème (3.1.3), mais le résultat de Ahues n'est pas vérifié.

3.2 ν-convergence

Le concept de ν-convergence a émergé comme un nouveau mode de convergence introduit par Ahues [3]. Ce concept vise à rendre possible et intéressant l'approximation des opérateurs non compacts par des opérateurs de rang fini.

3.2.1 ν-convergence

Définition 3.2. *Une suite $(\mathcal{U}_n)$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite ν-convergente vers $\mathcal{U}$, noté par $\mathcal{U}_n \stackrel{\nu}{\to} \mathcal{U}$, si*
- *$(\|\mathcal{U}_n\|)$ est borné,*
- *$\|(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})\mathcal{U}\| \to 0$*
- *$\|(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})\mathcal{U}_n\| \to 0.$*

Remarque 3.2.1. *La ν-convergente est une pseudo convergence. Explicitement, il existe une suite $(\mathcal{U}_n)_n$ tels que $\mathcal{U}_n \stackrel{\nu}{\to} \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_n \stackrel{\nu}{\to} \mathcal{V}$ sans qu'on ait $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.*
En effet, Soit X un espace de Banach, $C \in \mathcal{L}(X)$, $A_n, B_n \in \mathcal{L}(X)$. Considérons une suite des opérateurs $\mathcal{U}_n$ sur $X \otimes X$ par $\mathcal{U}_n = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & B_n \end{bmatrix}$ et soit $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $A_n \to 0$ *et* $B_n \to 0$ *alors* $\|\mathcal{U}_n\| = max\{\|A_n\|, \|B_n\|\} \to 0$ *ce qui donne* $\mathcal{U}_n \to 0$ *donc* $\mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} 0$. *D'autre part, du fait que* $\mathcal{V}^2 = 0$, *d'aprés [[3], p 107] on a alors* $\mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{V}$.

Malgré cet incovénient, il reste que l'égalité des spectre $(\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{V}))$ *constitue un point essentiel pour la résolution des problèmes de valeurs propres de type* $A\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U}$.

Remarque 3.2.2. *Notons aussi que, dans la définition (3.2), aucune des assertions ne peut être déduite des deux autres. En effet, Soit* $X = \mathcal{M}^n(\mathbb{C}), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $A_n = \begin{bmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *pour* $n = 1, 2, \ldots,$ *alors* $\|(A_n - A)A\| = 0 = \|(A_n - A)A_n\|$, *mais* $(\|A_n\|)$ *est non borné.*

3.2.2 Lien avec les modes de convergence

Donnons les liens qui peuvent exister entre la ν*-convergence et les modes de convergence cités plus haut :*

Lemme 3.2.1. **(a)** *Si* $T_n \overset{n}{\to} T$, *alors* $T_n \overset{\nu}{\to} T$. *La réciproque est vraie si* $0 \notin \sigma(T)$.

(b) *Soit* $T_n \overset{\nu}{\to} T$ *et* $\mathcal{U}_n \overset{n}{\to} \mathcal{U}$. *Alors* $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T + \mathcal{U}$ *si seulement si* $(T_n - T)\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$.

En particulier ,

- **(i)** *Si* $T_n \overset{\nu}{\to} T$ *et* $\mathcal{U}_n \overset{n}{\to} O$, *alors* $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T$,
- **(ii)** *Si* $T_n \overset{\nu}{\to} O, \mathcal{U}_n \overset{n}{\to} \mathcal{U}$ *et* $T_n\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$, *alors* $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{U}$.

(c) *Si* $T_n \overset{cc}{\to} T$ *et* T *est un opérateur compact. Alors* $T_n \overset{\nu}{\to} T$.

(d) *Soient* $T_n, \mathcal{U}_n \in \mathcal{L}(X)$, $T_n \overset{cc}{\to} T$, T *est compact et* $\mathcal{U}_n \overset{n}{\to} O$. *Posons* $\hat{T}_n := T_n + \mathcal{U}_n$, *alors* $\hat{T}_n \overset{\nu}{\to} T$. *On a de plus, si* $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T$, *alors* $\hat{T}_n \overset{n}{\nrightarrow} T$; *et si* $\mathcal{U}_n \overset{cc}{\nrightarrow} O$, *alors* $\hat{T}_n \overset{cc}{\nrightarrow} T$.

Preuve.

(a) *Soit* $T_n \overset{n}{\to} T$. *Du fait que* $\|T_n\| \leq \|T_n - T\| + \|T\|$, $\|(T_n - T)T\| \leq \|T_n - T\| \|T\|$ *et* $\|(T_n - T)T_n\| \leq \|T_n - T\| \|T_n\|$, *on déduit que* $T_n \overset{\nu}{\to} T$.
Inversement, si $0 \notin \sigma(T)$ *et* $T_n \overset{\nu}{\to} T$. *Alors* T *est inversible ce qui permet d'écrire*

$$\left\|(T_n - T)(TT^{-1})\right\| \leq \|(T_n - T)T\| \left\|T^{-1}\right\|,$$

et donc $T_n \overset{n}{\to} T$.

(b) *Puisque* $\|T_n - \mathcal{U}_n\| \leq \|T_n\| + \|\mathcal{U}_n\|$ *, on voit que la suite* $(\|T_n - \mathcal{U}_n\|)$ *est bornée . Supposons que* $(T_n - T)\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$*. Comme*

$$\|(T_n + \mathcal{U}_n - T - \mathcal{U})(T + \mathcal{U})\| \leq \|(T_n - T)T\| + \|(T_n - T)\mathcal{U}\| + \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| + \|T + \mathcal{U}\|,$$

et

$\|(T_n + \mathcal{U}_n - T - \mathcal{U})(T_n + \mathcal{U}_n)\| \leq \|(T_n - T)T_n\| + \|(T_n - T)\mathcal{U}_n\| + \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| + (\|T_n\| + \|\mathcal{U}_n\|)$,

d'où $\|(T_n - T)\mathcal{U}_n\| \leq \|T_n - T\| \, \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| + \|(T_n - T)\mathcal{U}\|$ *, on conclut que,* $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T + \mathcal{U}$*.*
Inversement, supposons que $T_n + \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} T + \mathcal{U}$*. Puisque*

$$(T_n - T)\mathcal{U} = (T_n + \mathcal{U}_n - T - \mathcal{U})(T + \mathcal{U}) - (T_n - T)T - (\mathcal{U}_n - \mathcal{U})(T + \mathcal{U}),$$

On obtient $(T_n - T)\mathcal{U} \overset{n}{\to} O$*. Les deux cas particuliers (i) et (ii) sont similaires et se démontrent de façon similaire.*

(c) *Soit* $T_n \overset{cc}{\to} T$*, par le principe de la borne uniforme, la suite* $(\|T_n\|)$ *est bornée et la convergence ponctuelle* $T_n \overset{p}{\to} T$ *est uniforme sur les ensembles relativement compacts* $\{Tx : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ *et* $\bigcup_{n \geq n_0} \{Tx : x \in X, \|x\| \leq 1\}$*. Donc* $\|(T_n - T)T\| \to 0$ *et* $\|(T_n - T)T_n\| \to 0$*. Ainsi* $T_n \overset{\nu}{\to} T$

(d) *Par (c) ci dessus, on a* $T_n \overset{\nu}{\to} T$ *et donc par (b) (i) ci dessus,* $\hat{T}_n \overset{\nu}{\to} T$*. Si* $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T$*, alors* $\hat{T}_n \overset{n}{\nrightarrow} T$ *Puisque* $\|T_n - T\| = \left\|\hat{T}_n - \mathcal{U}_n - T\right\| \leq \left\|\hat{T}_n - T\right\| + \|\mathcal{U}_n\|$*.*
Finalement, on montre que si $\hat{T}_n \overset{cc}{\to} T$*, alors* $\mathcal{U}_n \overset{cc}{\to} O$*. Il est clair que* $\mathcal{U}_n \overset{p}{\to} O$*. Par ailleurs, pour chaque entier* n_0 *l'ensemble* $F := \bigcup_{n \geq n_0} \{\mathcal{U}_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ *est un sous-ensemble de* $\hat{E} - E$*, où* $\hat{E}$ *est un fermé de l'ensemble* $\bigcup_{n \geq n_0} \{\hat{T}_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ *et* E *est un fermé de l'ensemble* $\bigcup_{n \geq n_0} \{T_n x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$*.Puisque,* $T_n \overset{cc}{\to} T$ *et* T *est compact, l'ensemble* E *est compact pour certains* n_0*. Si* $\hat{T}_n \overset{cc}{\to} T$*, l'ensemble* $\hat{E}$ *est aussi compact.*

■

Donnons quelques remarques découlant du lemme précédent :

Remarques 3.2.1. • *La Convergence en norme entraine la* ν*-convergence d'après le point* (a)*. Les deux modes sont équivalents si* $0 \notin \sigma(T)$*. En général à s'intrésse aux cas où* T *est compact.*

- *Convergence collectivement compacte vers un opérateur compact entraine ν-convergence, point (c). D'autre part, si $X = \ell^2$,$T = O$, $T_n x := x_{n+1}e_n$ pour $n = 1, 2, \dots$ et $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell^2$; alors $T_n \xrightarrow{p} T$, $T_n \xrightarrow{\nu} T$, mais $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T, T_n \overset{cc}{\nrightarrow} T$, dans cet exemple on suppose que le rang de T_n est fini.*
- $T_n \xrightarrow{\nu} T \Leftrightarrow T_n \xrightarrow{n} T$ *si* $0 \notin \sigma(T)$
- *La ν-convergence est stable sous les perturbations en norme (les opérateurs U sont sipposés normaux).*
- *La ν-convergence peut être vérifiée même en l'absence de la convergence des normes et la convergence collectivement compacte*

Notons que si $T_n \xrightarrow{n} T$, ou $T_n \xrightarrow{cc} T$ et si chaque T_n est compact alors T est nécessairement compact. Par contre, cette implication est fausse sous la ν convergence ([2], p75).

Lemme 3.2.2. **(i)** *[[3], Exercice 2.12]Si $T_n \xrightarrow{\nu} T$ et $T_n \xrightarrow{\nu} U$ alors $\sigma(T) = \sigma(U)$.*

(ii) *Si $T_n \longrightarrow T$ alors $T_n \xrightarrow{\nu} T$. Inversement, Si $0 \in \rho(T)$ et $T_n \xrightarrow{\nu} T$, alors $T_n \longrightarrow T$*

(iii) *Si $T_n \xrightarrow{\nu} T$ et $U_n \longrightarrow U$. Alors $T_n + U_n \xrightarrow{\nu} T + U$ si et seulement si, $(T_n - T)U \longrightarrow 0$*

Rappelons la ***propriété U***
Avant de passer à l'étude de la ν-convergence, signalons son importance par rapport aux autres modes de convergence existants. D'abord la ν convergence assure une grande partie dans la théorie des approximations des opérateurs, les conditions sont aisément vérifiables. Cependant, les opérations élémentaires de somme et du produit dans $\mathcal{BH}$ ne sont pas stables sous ce mode. Donnons l'identité de la résolvante (la deuxieme qui servira à démontrer des propriétés spectrales de quelques opérateurs sous la ν convergence Si $T_n \xrightarrow{p} T$, alors $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$, mais $\lambda \notin \sigma(T)$

Proposition 3.2.1. *Soient T et $\widetilde{T}$ dans $\mathcal{L}(X)$*

(a) ***Deuxième Identité de la résolvante*** *: soit $z \in \rho(T) \cap \rho(\widetilde{T})$. Alors*

$$\widetilde{R}(z) - R(z) = \widetilde{R}(z)(T - \widetilde{T})R(z) = R(z)(T - \widetilde{T})\widetilde{R}(z).$$

(b) ***Second développement de Neumann*** *: soit $z \in \rho(T)$ tel que $\varrho((T - \widetilde{T})R(z)) < 1$. Alors $z \in \rho(\widetilde{T})$ et*

$$\widetilde{R}(z) = R(z) \sum_{k=0}^{\infty} [(T - \widetilde{T})R(z)]^k.$$

Si de plus $\|(T-\widetilde{T})R(z)\| < 1$, *alors*

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|}{1-\|(T-\widetilde{T})R(z)\|},$$

et

$$\|\widetilde{R}(z)-R(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|\|(T-\widetilde{T})R(z)\|}{1-\|(T-\widetilde{T})R(z)\|}$$

On a Aussi, si $\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\| < 1$, *alors*

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|(1+\|(T-\widetilde{T})R(z)\|)}{1-\|[T-\widetilde{T}R(z)]^2\|},$$

$$\|\widetilde{R}(z)-R(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|\|(T-\widetilde{T})R(z)\|(1+\|(T-\widetilde{T})R(z)\|)}{1-\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|}.$$

Preuve.

(a) *Pour* $z \in \rho(T) \cap \rho(\widetilde{T})$, *on a*
$\widetilde{R}(z)(T-\widetilde{T})R(z) = \widetilde{R}(z)[(T-zI)-(\widetilde{T}-zI)]R(z) = \widetilde{R}(z)-R(z)$. *Échangeant* T *et* $\widetilde{T}$, *nous obtenons l'autre égalité.*

(b) *Pour* $z \in \rho(T)$, *considérons l'indentité*

$$\widetilde{T}-zI = T-zI-(T-\widetilde{T}) = [I-(T-\widetilde{T})R(z)](T-zI).$$

Puisque $\varrho((T-\widetilde{T})R(z)) < 1$, *l'opérateur* $I-(T-\widetilde{T})R(z)$ *est inversible.*
l'indentité $z \in \rho(\widetilde{T})$,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(z) &= (T-zI)^{-1}[I-(T-\widetilde{T})R(z)]^{-1} \\ &= R(z)\sum_{k=0}^{\infty}[(T-\widetilde{T})R(z)]^k.\end{aligned}$$

Soit $\|(T-\widetilde{T})R(z)\| < 1$. *Alors* $\varrho((T-\widetilde{T})R(z)) \leq \|(T-\widetilde{T})R(z)\| < 1$ *et on a*

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \|R(z)\|\sum_{k=0}^{\infty}\|(T-\widetilde{T})R(z)\|^k = \frac{\|R(z)\|}{1-\|(T-\widetilde{T})R(z)\|}.$$

Soit $\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\| < 1$. *Alors*

$$r((T-\widetilde{T})R(z)) \leq \|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|^{\frac{1}{2}} < 1,$$

donc $z \in \rho(\widetilde{T})$ *et on a*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(z) &= R(z)(\sum_{j=0}^{\infty}[(T-\widetilde{T})R(z)]^{2j}+\sum_{j=0}^{\infty}[(T-\widetilde{T})R(z)]^{2j+1}) \\ &= R(z)[I+(T-\widetilde{T})R(z)]\sum_{j=0}^{\infty}[((T-\widetilde{T})R(z))^2]^j.\end{aligned}$$

Donc

$$\|\widetilde{R}(z)\| \leq \frac{\|R(z)\|(1+\|(T-\widetilde{T})R(z)\|)}{1-\|[(T-\widetilde{T})R(z)]^2\|}$$

Aussi, par (a) au dessus,

$$\|\widetilde{R}(z)-R(z)\| \leq \|\widetilde{R}(z)\|\|(T-\widetilde{T})R(z)\|.$$

$\blacksquare$

Chapitre 4

Propriétés spectrales de quelques opérateurs sous la ν convergence

Intreduction

Le but de ce chapitre est de discuter les propriétés spectrales de quelques opérateurs sous la ν-convergence précisement au semi continuité du spectre. Aux en dernière section, on montre que le problème de valeur propre pour un opérateur borné on réduisant à un problème de valeur propre de matrice de manière canonique et on concentrons sur la relation entre le ν- continuité des matrices d'opérateurs de blocs 2×2 et la ν-continuité de ses composants.

Théorème 4.0.1. *soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et E sous-ensemble de $\rho(T)$ fermé et non vide,alors*

$$\alpha_1(E) := \sup\{\|R(z)\| : z \in E\} < \infty.$$

Si $T_n \xrightarrow{\nu} T$, alors il existe un entier positive n_0 tel que $E \subset \rho(T_n)$ pour chaque $n \geq n_0$ et

$$\alpha_2(E) := \sup\{\|R_n(z)\| : z \in E, n \geq n_0\} < \infty.$$

Corollaire 4.0.1. *La propriété U est vérifiée sous la ν-convergence, c-à-d, si $T_n \xrightarrow{\nu} T$, $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$, alors $\lambda \in \sigma(T)$*

Preuve. *Supposons pour $\lambda \in \rho(T)$. Puisque l'ensemble $\rho(T)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$, soit $r > 0$ tel que $E := \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq r\} \subset \rho(T)$. Par théorème 4.0.1, $E \subset \rho(T_n)$ pour chaque n. Puisque $\lambda_n \to \lambda$, on se voit $\lambda_n \in E \subset \rho(T_n)$ pour chaque n, contradiction avec l'hypothèse.*

Donc $\lambda \in \sigma(T)$. ∎

On note que ce corollaire ne subsiste plus si, dans la définition de la ν*-convergence on omet l'une des deux conditions* $\|(T_n - T)T\| \to 0, \|(T_n - T)T_n\| \to 0$ *est omis où si ces deux conditions sont remplacées par le condition* $\|(T_n - T)^2\| \to 0$. *Par exemple : Soit* $X := \mathbb{C}^{2\times 1}$ *et soient* $\omega, z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\omega \neq 0, z \neq 0$. *On note* $\mathcal{A} := \begin{bmatrix} z & \omega z \\ 1 & \omega \end{bmatrix}$ *et* $\mathcal{B} := \begin{bmatrix} z & \omega z \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$ *Soit* $\mathcal{A}_n := \mathcal{B}$ *pour chaque* n . *Alors* $(\|A_n\|)$ *est borné,* $\|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})^2\| = 0, \lambda_n := z \in \sigma(\mathcal{A}_n)$ *pour chaque* n , $\lambda_n \to \lambda := z$, *mais* $z \notin \sigma(\mathcal{A})$.

Prppriété L

Certaines valeurs spectrales de T *peuvent ne pas être approximées par des valeurs spectrales de*T_n, *même si* $T_n \xrightarrow{n} T$. *En effet :*

Exemple 4.0.1. *Soit* $x = \ell^2(\mathbb{Z})$, *pour* $x \in X$: *Posons,*

$$(Tx)_k = \begin{cases} x_{k+1} & si\ k \neq -1 \\ 0 & si\ k = -1 \end{cases}$$

Et pour tout entier n *;*

$$(T_n x)_k = \begin{cases} x_{k+1} & si\ k \neq -1 \\ \frac{x_0}{n} & si\ k = -1 \end{cases}$$

Du fait que $\|T_n x - Tx\|_2 = \frac{|x(0)|}{n}$ *pour tout* $x \in X$, *il vient que* $\|T_n - T\| = \frac{1}{n} \to 0$.
Montrons que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. *Si* $|\lambda| < 1$, *considérons* $x \in X$ *défini par :*

$$x_\lambda(k) = \begin{cases} 0 & si\ k \leq -1 \\ 1 & si\ k = 0 \\ \lambda^k & si\ k > 1 \end{cases}$$

Notons que pour $x_\lambda \neq 0$, *on a bien* $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$. *Ainsi chaque* λ *vérifiant* $|\lambda| < 1$ *est une valeur propre donc valeur spectrale de* T. *Puisque* $\sigma(T)$ *est fermé ; il suit que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$.
D'autre part, $\rho(T) = \|A\| = 1$, *on voit que* $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{N} : |\lambda| < 1\}$.
L'idée de montrer ensuite que $\sigma(T_n) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, *et remarquer qu'il n'existe aucune suite* $(\lambda_n) \subset \sigma(T_n)$ *tel que* $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ *avec* $\lambda \in \sigma(T)$.

cet exemple a permis de voir que des perturbations légères en norme peuvent mettre en défaut la propriété L. Cependant cela est remédiable si on impose une petite condition sur le spectre. En effet :

Corollaire 4.0.2. *Soit λ un point isolé de $\sigma(T)$. Supposons que :*

$$(i)\ T_n \stackrel{n}{\to} T \quad ou \quad (ii)\ \lambda \neq 0 \quad et \quad T_n \stackrel{\nu}{\to} T$$

Pour tout $\epsilon < dist(\lambda, \sigma(T)\backslash\{\lambda\})$, soit

$$\Lambda_n := \{\lambda_n \in \sigma(T_n) : |\lambda_n - \lambda| < \epsilon\}$$

Alors pour n, trés grand, $\Lambda_n \neq \emptyset$ et si $\lambda_n \in \Lambda_n$, la suite (λ_n) converge vers λ .
Si la multiplicité algébrique de λ est finie, alors pour n trés grand λ_n dans Λ_n est une valeur propre de T_n de multiplicité algébrique finie. De plus, la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres de T_n dans Λ_n est égale à la multiplicité algébrique de λ .

Ce résultat peut être interprété comme suit : Sous la convergence en norme, la propriété L est vérifiée en tout point isolé du spectre, et sous la ν convergence, la propriété L est vérifiée en tout point isolé non nul du spectre. Il reste cependant intéressant d'examiner si la propriété L reste vérifiée même si le point isolé du spectre est nul.

4.1 Continuité spectrale

Théorème 4.1.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ and T_n est une suite dans $\mathcal{L}(X)$ tel que $T_n \stackrel{\nu}{\to} T$, alors* $\limsup \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$.

La véracité de la conclusion du théorème 4.1.1 pour le spectre de points approximatif est une question ouverte. nous allons introduire quelques conditions supplémentaires (voir le théorème 4.1.2). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit avoir la propriété d'extension à valeur unique (SVEP pour abréger) à $\lambda \in \mathbb{C}$, si pour tout voisinage ouvert U_λ de λ, la seule fonction analytique $f : U_\lambda \longrightarrow X$ qui satisfait l'équation $(\mu - T)f(\mu) = 0$ pour tout$\mu \in U_\lambda$ est la fonction $f \equiv 0$. De [3, corollaire 3.19] on sait que si T^* a SVEP à λ et $\lambda - T \in \Phi_\pm(X)$ alors $i(\lambda - T) \geq 0$.

Théorème 4.1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que T^* ait SVEP à tout $\beta \notin \sigma(T)$. Si T_n est une suite dans $\mathcal{L}(X)$ tel que $T_n \stackrel{\nu}{\to} T$, alors* $\limsup \sigma_{ap}(T_n) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Preuve. *Soit* $\lambda \in \limsup \sigma_{ap}(T_n)$. *Puisque* $\sigma_{ap}(T_n) \subset \sigma(T_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\lambda \in \limsup \sigma(T_n)$ *et donc par le théorème 4.1.1,* $\lambda \in \sigma(T)$. *Si* $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ *alors* $\lambda - T$ *est injective et* $R(\lambda - T)$ *a une rang fermée. Ce implique que* $\lambda - T \in \Phi_{\pm}(X)$ *et* $i(\lambda - T) \leq 0$, *donc* $\lambda \notin \sigma(T)$ *et donc* T^* *a SVEP à* λ. *Par conséquent,* $i(\lambda - T) = 0$, *c'est-à-dire* $0 - \beta(\lambda - T) = i(\lambda - T) = 0$. *Donc* $\lambda - T$ *est inversible, une contradiction.* ■

Proposition 4.1.1. *Soit* $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(X)$ *un opérateur de Riesz. Si* $(T_n)_n$ *suite dans* $\mathcal{L}(X)$ *tel que* $T_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{R}$, *alors* $\sigma(T_n) \longrightarrow \sigma(\mathcal{R})$.

La classe des opérateurs nilpotents, quasinilpotents et compacts satisfait à la conclusion de la proposition 4.1.1. Il est bien connu que si $T_n \xrightarrow{n} T$ *et chaque* T_n *est un opérateur compact, alors* T *est nécessairement compact, cependant si* $T_n \xrightarrow{\nu} T$ *et chaque* T_n *est un opérateur compact (ou même un opérateur de rang fini), alors l'opérateur* T *ne pas être compact obligatoirement.*

Exemple 4.1.1. *Soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une base orthonormale pour* $\ell^2(\mathbb{N})$ *et soit* T *l'opérateur défini sur* $\ell^2(\mathbb{N})$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, \ldots).$$

Cet opérateur n'est pas compact, car pour la suite borné $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\ell^2(\mathbb{N})$, *la suite* $(Te_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de sous-suite convergente. D'autre part,* $T^2 = 0$, *donc* T *est nilpotent et donc* T *est un opérateur de Riesz. Maintenant, pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *définir*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, \ldots, x_{2n}, 0, 0 \ldots).$$

Clairement rang $(T_n) = n, \|T_n\| = 1$ *et* $(T_n - T)T = 0 = (T_n - T)T_n$, *donc* $T_n \xrightarrow{\nu} T$. *Alors par la proposition 4.1.1,* $\sigma(T_n) \longrightarrow \sigma(T)$. *Dans cet exemple, il est possible d'approcher le spectre d'un opérateur non-compact à travers le spectre des opérateurs de rang fini.*

4.1.1 Continuité spectrale et perturbations

Dans cette partie, nous étudions la stabilité de points de continuité spectrale et comme suit : étant donné une suite $(K_n)_n$ *d'opérateurs compacts et un opérateur Riesz* $\mathcal{R}$ *pour lequel* $K_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{R}$, *alors* $\sigma(K_n + S)$ *converge vers* $\sigma(\mathcal{R} + S)$, *quand* $S \in \mathcal{L}(X)$ *satisfait de certaines conditions*

Théorème 4.1.3. *Soit* K_n *une suite d'opérateurs compacts,* $\mathcal{R}$ *un opérateur Riesz et* S *être un pas Weyl opérateur. Si*

(i) $K_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{R}$, $K_nS \xrightarrow{n} \mathcal{R}S$, *et*

(ii) $\mathcal{R}S = S\mathcal{R}$, *alors*

$$\sigma(K_n + S) \longrightarrow \sigma(\mathcal{R} + S)$$

Preuve. *Premièrement, notons que les conditions de (i) impliquent* $K_n + S \overset{\nu}{\to} \mathcal{R} + S$*, ainsi*

$$\pi_0(\mathcal{R} + S)\backslash\{0\} \subseteq \liminf \sigma(K_n + S).$$

Or, puisque $\mathcal{R}$ *est un opérateur de Riesz et* $\mathcal{R}S = S\mathcal{R}$*, il s'ensuit que* $\sigma_w(S) = \sigma_w(\mathcal{R} + S)$*, donc* $0 \in \sigma(\mathcal{R} + S)$*, de plus, puisque* S *satisfait au théorème de Browder [9], alors* $\mathcal{R} + S$ *satisfait aussi le théorème de Browder, donc* $\sigma(\mathcal{R} + S)\backslash\sigma_w(\mathcal{R} + S) = \pi_0(\mathcal{R} + s)\backslash\{0\}$*. Donc* $\sigma(\mathcal{R} + S)\backslash\sigma_w(\mathcal{R} + S) \subseteq \liminf \sigma(K_n + S)$*. D'autre part,*

$$\begin{aligned} \sigma_w(\mathcal{R} + S) &= \sigma_w(S) \\ &= \bigcup_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(S + K) \\ &\subseteq \liminf \sigma(K_n + S). \end{aligned}$$

Maintenant, à partir du théorème 4.1.1, $\liminf \sigma(K_n + S) \subseteq \sigma(\mathcal{R} + S)$*. Donc* $\lim \sigma(K_n + S) = \sigma(\mathcal{R} + S)$*.*

■

Exemple 4.1.2. *Soient* R, S *et* F_n *des opérateurs définis sur* $\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$
$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n}(I - UU^*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *où* U *est le décalage unilatéral sur* $\ell^2(\mathbb{N})$*. Alors* $\mathcal{R}$ *est un opérateur de Riesz,* $F_n, n \in \mathbb{N}$*, sont des opérateurs unidimensionnels et* $F_n+S \overset{\nu}{\to} \mathcal{R}+S$*, mais* $\sigma(F_n+S) \nrightarrow \sigma(\mathcal{R}+S)$*. En effet, chaque* F_n+S *est similaire à* F_1+S *et* F_1+S *est un opérateur unitaire, donc pour tout* $n, \sigma(F_n+S) = \sigma(F_1+S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$*, et* $\sigma(\mathcal{R} + S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$*. La suite* $(F_n)_n$ *dans l'exemple ci-dessus vérifie* $F_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{R}$*, mais* $\sigma(F_n + S) \nrightarrow \sigma(\mathcal{R} + S)$*. Cette même suite satisfait également* $F_n \overset{\nu}{\to} F_1$ *et* $F_1 \notin \mathcal{R}$*, mais dans ce cas* $\sigma(F_n + S) \longrightarrow (F_1 + S)$*. Une question naturelle est sous quelles conditions il vraie que* $\sigma(T_n + S) \longrightarrow \sigma(T + S)$ *quand* $T_n \overset{\nu}{\to} T$ *.*

4.2 Semi continuité du spectre

Nous avons introduit les opérateurs de Fredholm et d'autres classes qui leurs sont associés dans un chapitre précédent, on exposera dans la suite une étude d'invariance du spectre essentiel d'un *opérateur fermé a domaine dense, une attention particulière sera donnée aux spectre de Weyl et de Wolf. Le théorème suivant a été développé par A. Lebow et M. Schechter dans [[12], Lemme 4.5] pour l'approximation des opérateurs fermés par des Fredholm.*

Théorème 4.2.1. *Soit* $\mathcal{U} \in \Phi^b(X)$ *et* $\mathcal{V} \in \mathcal{L}(X)$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $\|\mathcal{U} - \mathcal{V}\| < \eta$ *alors* $\mathcal{V} \in \Phi^b(X)$ *et* $i(\mathcal{U}) = i(\mathcal{V})$.

Définition 4.1. *Soit* (G_n) *une suite de sous-ensembles compacts de* $\mathbb{C}$*. On définit la limite supérieure et la limite inférieure de* (G_n)*, notés respectivement par*
$\limsup G_n$ *et* $\liminf G_n$*, comme suit :*
$\limsup G_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall\varepsilon > 0, \exists\ I \subseteq \mathbb{N} \text{ tel que } B(\lambda, \varepsilon) \cap G_n \neq \emptyset \forall n \in I\}$*, et*
$\liminf G_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } B(\lambda, \varepsilon) \cap G_n \neq \emptyset \forall n \geq n_0\}$.
Si $\limsup G_n = \liminf G_n$*, alors* $\lim G_n$ *existe et est égale à la limite commune.*

Par la définition 4.1 , on définit la limite inférieure de (G_n) *par*

$$\liminf G_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda_n \in G_n \text{ avec } \lambda_n \to \lambda\},$$

et la limite supérieure par

$$\limsup G_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda_{nj} \in G_{nj} \text{ avec } \lambda_{nj} \to \lambda\}.$$

Définition 4.2. *Une suite* $(\mathcal{U}_n)_n$ *d'opérateurs linéaires bornés de* X *dans* X *est dite fortement convergente vers* $\mathcal{U}$*, noté par* $\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}$*, si* $\|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\| \to 0$*. Une fonction* τ*, défini sur* $\mathcal{L}(X)$*, dont les valeurs sont des sous-ensembles compacts non vides de* $\mathbb{C}$ *est dit supérieur (resp. inférieur) semi-continu à* $\mathcal{U}$*, si* $\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}$ *implique* $\limsup \tau(\mathcal{U}_n) \subset \tau(\mathcal{U})$ *(resp .*$\tau(\mathcal{U}) \subset \liminf \tau(\mathcal{U}_n)$*). On sait que si* τ *est borné sur des suites convergentes, alors* τ *est continue pour la "mesure de Haussdorf" si et seulement si,* τ *est à la fois supérieure et inférieure semi-continue à* $\mathcal{U}$.

On rappelle ce définition suivant :

Définition 4.3. *Soit* (E, d) *un espace métrique. On commence par définir, pour* ≥ 0*,* $\varepsilon > 0$ *la mesure extérieure* $\mathcal{H}^s_\varepsilon$*; associée au recouvrement* $\mathcal{C} = \{A \subset E, diamA \leq \varepsilon\}$ *et à la fonction* $C : A \longrightarrow (diamA)^s$*. On appelle* ε*-recouvrement d'un ensemble* $A \subset E$ *un recouvrement de* A *par des parties* $X \subset E$ *telles que* $diamX \leq \varepsilon$*. On note* $\mathrm{R}_\varepsilon(A)$ *l'ensemble des* ε*-recouvrements dénombrables de* A*. On définit alors*

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathrm{R}_\varepsilon(\mathcal{A})} \sum_{X \in \mathcal{D}} (diamX)^s$$

pour tout $A \subset E$. Alors

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$$

4.3 Propriétés des Spectres essentiels sous la ν convergence

Le but de cette section est de caractériser les spectres essentiels de Wolf et Weyl d'un suite d'opérateurs linéaires ν-convergents dans un espace de Banach X.

Notons que si $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X)$, $\{\mathcal{U}_n\} \subseteq \mathcal{L}(X), 0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{U}_n \overset{\nu}{\nrightarrow} \mathcal{U}$ alors il n'est pas nécessaire que $\sigma_f(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma_f(\mathcal{U})$. En effet, on considère l'exemple suivant :
Soit $R : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ l'opérateur de décalage à droite défini par :

$$R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{U}_n = (1 - \frac{1}{n})R$ et $\mathcal{U} = R$. Alors

$$\mathcal{U},\ \mathcal{U}_n \in \mathcal{L}(X),\ 0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}\ et\, \mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{U},$$

mais $\sigma_f(\mathcal{U}_n) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \frac{n-1}{n}\}$ et $\sigma_f(\mathcal{U}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.
Alors $\sigma_f(\mathcal{U}_n) \nsubseteq \sigma_f(\mathcal{U})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Cependant, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.3.1. *Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X)$ et $(\mathcal{U}_n)_n$ suite dans $\mathcal{L}(X)$ telle que $0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$ .Si $\mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{U}$ on a $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le 0, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$*

$$\sigma_i(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma_i(\mathcal{U}) + \mathcal{O},\ pour\ i = f, w.$$

Preuve. *Pour $i = w$, supposons que l'assertion est fausse, puis en passant à une sous suite, on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \sigma_w(\mathcal{U}_n)$ telle que $\lambda_n \notin \sigma_w(\mathcal{U}) + O$. Puisque (λ_n) est bornée, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ ce qui implique que $\lambda \notin \sigma_w(\mathcal{U}) + O$. on utilise $0 \in \mathcal{O}$, on a $\lambda \notin \sigma_w(\mathcal{U})$ et donc $\lambda - \mathcal{U} \in \Phi^b(X)$ et $i(\lambda - \mathcal{U}) = 0$. Soit*

$$\mathcal{V}_n = (\lambda_n - \lambda)\mathcal{U} + (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n)\mathcal{U} \tag{4.1}$$

Il vient de l'équation 4.1, que l'opérateur $(\lambda_n - \mathcal{U}_n)\mathcal{U}$, peut être exprimé sous forme :

$$(\lambda_n - \mathcal{U}_n)\mathcal{U} = (\lambda - \mathcal{U})\mathcal{U} + \mathcal{V}_n.$$

Du fait que $\mathcal{V}_n \to 0$ *et* $(\lambda - \mathcal{U})\mathcal{U} \in \Phi^b(X)$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a*

$$(\lambda_n - \lambda)\mathcal{U} \in \Phi^b(X) \text{ et } i((\lambda_n - \lambda)\mathcal{U}) = i((\lambda - \mathcal{U})\mathcal{U}).$$

De plus $\beta(\mathcal{U}) < \infty$, *alors* $(\lambda_n - \mathcal{U}_n) \in \Phi^b(X)$ *avec* $i((\lambda_n - \mathcal{U}_n) = i(\lambda - \mathcal{U})$.
On obtient $(\lambda_n - \mathcal{U}_n) \in \Phi^b(X)$ *et* $i((\lambda_n - \mathcal{U}_n) = i(\lambda - \mathcal{U}) = 0$. *Donc* $\lambda_n \notin \sigma_w(\mathcal{U}_n)$, *d'où la contradiction.* ■

Comme conséquence directe, on a :

Corollaire 4.3.1. *Soit* $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X)$ *et* $(U_n)_n$ *une suite d'opérateurs linéaires dans* $\mathcal{L}(X)$ *tel que* $0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$ *et* $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{U}$. *Si* $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$ *est un ensemble ouvert avec* $0 \in \mathcal{O}, \mathcal{V} \in \mathcal{L}(X)$ *et* $\mathcal{V}\mathcal{U} \in \mathcal{F}^b(X)$ *(où* $\mathcal{U}\mathcal{V} \in \mathcal{F}^b(X)$*), alors il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $n \geq n_0, \sigma_i(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}) \subseteq \sigma_i(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{O}$ *pour* $i = f, w$.

Preuve. *En appliquant le théorème 4.3.1, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sigma_i(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma_i(\mathcal{U}) + \mathcal{O}$, *pour* $i = f, w$. *Maintenant, on montrons que* $\sigma_i(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}) = \sigma_i(\mathcal{U}_n)$ *pour* $i = f, w$. *Puisque* $\mathcal{U}$ *est un opérateur de Fredholm, alors il existe* $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $\mathcal{U}\mathcal{U}_0 = I - K$ *où* $K \in \mathcal{K}(X)$. *Le fait que* $\mathcal{V}\mathcal{U}\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}(I - K) = \mathcal{V} - \mathcal{V}K \in \mathcal{F}^b(X)$ *et* $\mathcal{V}K \in \mathcal{F}^b(X)$, *on voit que* $\mathcal{V} \in \mathcal{F}^b(X)$. *Donc* $\sigma_i(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}) = \sigma_i(\mathcal{U}_n)$, *pour* $i = f, w$. *Pour* $\mathcal{U}\mathcal{V} \in \mathcal{F}^b(X)$, *la preuve est vérifiée de la même manière.* ■
Le but du théorème suivant est d'étendre le théorème 4.3.1 à une suite d'opérateurs linéaires fermés.

Théorème 4.3.2. *Soient* $\mathcal{V}$ *opérateur linéaire fermé et* $(\mathcal{V}_n)$ *une suite d'opérateurs linéaires fermés dans* X *et* $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert contenant* 0. *Si, pour certain* $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{V}_n) \cap \rho(\mathcal{V})$ *on a* $(\lambda_0 - \mathcal{V}_n)^{-1} \xrightarrow{\nu} (\lambda_0 - \mathcal{V})^{-1}$, *alors il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$

$$\sigma_i(\mathcal{V}_n) \subseteq \sigma_i(\mathcal{V}) + \mathcal{O}, \text{ pour } i = f, w.$$

Preuve.
On donnera une brève démonstration pour le spectre de Weyl, la preuve pour le spectre de Wolf se démontre de façon similaire.
On pose $\gamma_n \in \sigma_w(V_n)$ *tel que* $\gamma_n \notin \sigma_w(\mathcal{V}) + \mathcal{O}$. σ *étant* $\nu -$ *semi continue supérieurement en*

$(\mathcal{V}-\lambda_0)^{-1}$, *(voir la définition 4.4), il existe une constante* $k > 0$ *tel que* $k^{-1} \leq |\gamma_n - \lambda_0|^{-1}$, *donc* (γ_n) *est borné .*

Supposons que $\gamma_n \to \gamma$. *Alors* $\gamma \notin \sigma_w(\mathcal{V})+O$ *et* $\gamma \notin \sigma_w(\mathcal{V})$. *Ceci implique que* $\gamma-\lambda_0 \notin \sigma_w(\mathcal{V}-\lambda_0)$ *et donc* $(\gamma-\lambda_0)^{-1} \notin \sigma_w((\mathcal{V}-\lambda_0))^{-1}$. *Posons* $\lambda_n = (\gamma_n-\lambda_0)^{-1}$, $\lambda = (\gamma-\lambda_0)^{-1}$, $\mathcal{U}_n = (\mathcal{V}_n-\lambda_0)^{-1}$*et* $\mathcal{U} = (\mathcal{V}-\lambda_0)^{-1}$, *alors par la preuve du théorème 4.3.1 , il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$, $\lambda_n \notin \sigma_w(\mathcal{U}_n)$, *c'est à dire* $((\gamma_n-\lambda_0)^{-1} \notin \sigma_w(\mathcal{V}_n-\lambda_0)^{-1})$ *ce qui implique* $\gamma_n - \lambda_0 \notin \sigma_w(\mathcal{V}_n-\lambda_0)$ *et donc* $\gamma_n \notin \sigma_w((\mathcal{V}_n)$, *ce qui constitue une contradiction.* ■

Donnons une application directe de ce théorème.

Exemple 4.3.1. *Soit* $(\mathcal{V}_n)_n$ *une suite d'opérateurs linéaires dans* $l_2(\mathbb{N})$, *définie par*

$$\begin{cases} \mathcal{V}_n : D(\mathcal{V}_n) \subset l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N}) \\ D(\mathcal{V}_n) = \left\{ (x_j)_{j\geq 1} : \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} j^2 \left|x_j\right|^2 < \infty \right\}, \\ \mathcal{V}_n e_j = \begin{cases} je_j, j \neq n, \\ -ne_j, j = n. \end{cases} \end{cases}$$

En utilisant [[14], Remarque 1.5], on a $\|(i-\mathcal{V}_n)^{-1} - (i-\mathcal{V}_0)^{-1}\| = |\frac{1}{i+n} - \frac{1}{i-n}| = \frac{2n}{1+n^2} \to 0$ *(où* $i = \sqrt{-1}$*). Clairement* $(i-\mathcal{V}_n)^{-1} \xrightarrow{\nu} (i-\mathcal{V}_0)^{-1}$. *D'après le théorème 4.3.2, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sigma_i(\mathcal{V}_n) \subseteq \sigma_i(\mathcal{V}_0) + O$ *pour* $i = f, w$ *et pour tout* $n \geq n_0$.

Remarque 4.3.1. *Le théorème précédent donne un résultat important mais un peu grossier, rappelons le* $\sigma_i(\mathcal{V}_n) \subseteq \sigma_i(\mathcal{V}) + \mathcal{O}$, *pour* $i = f, w$. *mais ne peut être vrai si on enlève l'ouvert* $\mathcal{O}$ *de cette inclusion. Considérons l'opérateur de décalage à droite* $R : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ *défini par* $R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $\mathcal{U}_n = (1-\frac{1}{n})R$, $\mathcal{U} = R$ *et* $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$ *un ensemble ouvert avec* $0 \in \mathcal{O}$.

Clairement $2 \in \rho(\mathcal{U}_n) \cap \rho(\mathcal{U})$. *Alors* $(\mathcal{U}_n - 2)^{-1} \xrightarrow{\nu} (\mathcal{U} - 2)^{-1}$. *En vertu du théorème 4.3.1, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour chaque* $n \geq n_0, \sigma_f((\mathcal{U}_n-2)^{-1}) \subseteq \sigma_f((\mathcal{U}-2)^{-1}) + \mathcal{O}$.

Cependant, $\sigma_f((\mathcal{U}_n-2)^{-1}) \nsubseteq \sigma_f((\mathcal{U}-2)^{-1})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En effet,* $\sigma_f((\mathcal{U}_n - 2) = \lambda - 2 : \lambda \in \sigma_f(\mathcal{U}_n) = \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - (-2)| = \frac{n-1}{n}$, *aussi* $\sigma_f((\mathcal{U}-2) = \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda-(-2)| = 1$. *De* $g(z) = z^{-1}$ *est analytique sur un voisinage de* $\sigma_f((\mathcal{U}_n-2)^{-1})$ *et* $\sigma_f((\mathcal{U}-2)^{-1})$, *alors* $\sigma_f((\mathcal{U}_n-2)^{-1}) = \beta^{-1} : \beta \in \sigma_f(\mathcal{U}_n - 2)$ *et* $\sigma_f((\mathcal{U}-2)^{-1}) = \beta^{-1} : \beta \in \sigma_f(\mathcal{U}-2)$.*Supposons qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0, \sigma_f((\mathcal{U}_n-2)^{-1}) \subseteq \sigma_f((\mathcal{U}-2)^{-1})$. *Prenez* $\lambda_n \in \sigma_f((\mathcal{U}_n-2)^{-1})$ *alors il existe aussi* $\beta_n \in \sigma_f(\mathcal{U}_n - 2)$ *tel que* $\lambda_n = \beta_n^{-1}$. *Donc* $\beta_n^{-1} = \beta^{-1}$ *et* $\beta_n = \beta$ *ce qui implique que* $\sigma_f(\mathcal{U}_n-2) \cap \sigma_f(\mathcal{U}-2) \neq \emptyset$ *qui est une contradiction.*

4.3.1 ν- continuité des spectres essentiel de Wolf et Weyl

Inspiré par la notion de ν-convergence, nous examinons la définition suivante.

Définition 4.4. *Une application τ sur $\mathcal{L}(X)$ dont les valeurs sont des sous ensembles compacts de $\mathbb{C}$ est dite ν-semi continue supérieurement en $\mathcal{U}$ quand*

$$\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{U} \Rightarrow \limsup \tau(\mathcal{U}_n) \subset \tau(\mathcal{U}),$$

et elle est dite ν-semi continue inférieurement en $\mathcal{U}$ quand

$$\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{U} \Rightarrow \tau(\mathcal{U}) \subset \liminf \tau(\mathcal{U}_n).$$

Si τ est à la fois ν-supérieurement et ν-inférieurement semi continue, on dit qu'il est ν-continu.

Remarques 4.3.1. (i) *Si τ est ν-semi continu inférieurement en $\mathcal{U}$, alors τ est semi continu inférieurement en $\mathcal{U}$.*

(ii) *Si τ est ν-semi continu supérieurement en $\mathcal{U}$, alors il est semi continu supérieurement en $\mathcal{U}$.*

(iii) *Si $0 \in \sigma(U)$, les implications réciproques des assertions précédentes sont vraies.*

Théorème 4.3.3. *Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X)$ tel que $0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$, alors σ_i est ν-semi continu supérieurement en $\mathcal{U}$ pour $i = f, w$. De plus, σ_w est ν-continue à $\mathcal{U}$ dans chacun des cas suivants :*

(a) *σ_f est ν-continu en $\mathcal{U}$.*

(b) *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\sigma_f(\mathcal{U}) \subset \sigma_w(\mathcal{U}_n)$.*

Preuve. *Soit $\lambda \in \limsup(\sigma_i(\mathcal{U}_n))$ pour $i = f, w$. Alors on peut supposer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ tel que $\lambda_n \in \sigma_i(\mathcal{U}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_n \to \lambda$. D'après le théorème 4.3.1, pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, il existe $n_p \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma_i(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma_i(U) + \mathcal{B}(0, \frac{1}{p})$ pour $i = f, w$ et pour tout $n \geq n_p$. Cela implique que pour tout $p \geq 1$, il existe $\beta_p \in \sigma_i(U)$ et $\gamma \in \mathcal{B}(0, \frac{1}{p})$ tel que $\lambda_{np} = \beta_p + \gamma_p$. Ainsi, $\lim \beta_p = \lim \lambda_{np} - \lim \gamma_p = \lambda$. Puisque $\sigma_i(\mathcal{U})$ est un ensemble fermé, il suit que $\lambda \in \sigma_i(\mathcal{U})$ pour $i = f, w$. Ce qui donne :*

$$\limsup(\sigma_i(\mathcal{U}_n)) \subseteq \sigma_i(\mathcal{U}) \quad \textit{pour } i = f, w$$

(a) *Prouvons que $\sigma_w(\mathcal{U}) \subseteq \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$. Supposons que $\lambda \notin \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$ alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de λ qui ne se croisent pas avec une infinité de $\sigma_w(\mathcal{U}_n)$. Puisque $\sigma_f(\mathcal{U}_n) \subset$*

$\sigma_w(\mathcal{U}_n)$, alors $\mathcal{V}$ ne se croise pas infiniment avec $\sigma_f(\mathcal{U}_n)$. Par conséquent, $\lambda \notin \liminf(\sigma_f(\mathcal{U}_n))$. En utilisant que σ_f est ν-continue en U. Alors $\liminf(\sigma_f(\mathcal{U}_n)) = \sigma_f(\mathcal{U})$. Cela implique que $\lambda \notin \sigma_f(\mathcal{U})$. et donc

$$\lambda - \mathcal{U} \in \Phi^b(X) \tag{4.2}$$

Montrons à présent que $i(\lambda - \mathcal{U}) = 0$. Comme $\lambda \notin \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$ il existe un suite croissante de nombres naturels $n_1 < n_2 < \ldots$ tels que $\lambda \notin \sigma_w(\mathcal{U}_{n_j})$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors $\lambda - \mathcal{U}_{n_j} \in \Phi^b(X)$ et $i(\lambda - \mathcal{U}_{n_j}) = 0$. De [15, théorème 3.4] il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $i(\lambda - \mathcal{U}_{n_j}) = i(\lambda - \mathcal{U})$ pour tout $j \geq j_0$. Donc

$$i(\lambda - \mathcal{U}) = 0. \tag{4.3}$$

Il résulte des équations 4.2, 4.3 et de la proposition 2.4.1, que $\lambda \notin \sigma_w(\mathcal{U})$. Nous obtenons donc :

$$\sigma_w(\mathcal{U}) \subset \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$$

.

(b) *Supposons que l'assertion n'est pas vérifiée. Alors il existe $\lambda \in \sigma_w(\mathcal{U})$ tel que $\lambda \notin \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$. Nous distinguons deux cas*

- *1^{er} cas. Si $\lambda \in \sigma_w(\mathcal{U}) \backslash \sigma_f(\mathcal{U})$ alors en utilisant un raisonnement similaire que dans (i) nous obtenons $i(\lambda - \mathcal{U}) = 0$ qui est une contradiction.*
- *2^{eme} cas. Si $\lambda \in \sigma_f(\mathcal{U})$, puisque $\lambda \notin \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$. faisons un argument comme précédemment, il existe une suite croissante de nombres naturels $n_1 < n_2 < \ldots$, et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\mathcal{B}(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma_w(\mathcal{U}_{n_j}) = \emptyset$. Alors $\mathcal{B}(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma_f(\mathcal{U}) = \emptyset$ qui est aussi une contradiction.*

■

Remarque 4.3.2. *Dans [15], Oberai montre que $\sigma_w(\mathcal{U})$ est semi continue supérieurement. De plus, si $0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$ alors en utilisant Théorème 4.3.3, nous avons $\sigma_w(\mathcal{U})$ est ν- semi continue supérieurement en $\mathcal{U}$.*

Comme conséquence immédiate du théorème 4.3.3, nous avons le corollaire suivant qui sera la clôture de cette section

Corollaire 4.3.2. *Soit* $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$, *et* $\mathcal{U}_n \overset{\nu}{\nrightarrow} \mathcal{U}$. *Si* $\Phi^b_{\mathcal{U}_n}$ *est connexe alors* $\lim \sigma_f(\mathcal{U}_n) = \sigma_f$ *si et seulement si,* $\lim \sigma_w(\mathcal{U}_n) = \sigma_w(\mathcal{U})$.

Preuve. *Notons d'abord que, d'après le théorème 4.3.3,*

$$\lim \sigma_f(\mathcal{U}_n) = \sigma_f(\mathcal{U}) \textit{ implique } \lim \sigma_f(\mathcal{U}_n) = \sigma_f(\mathcal{U})$$

Inversement, en utilisant le théorème 4.3.3, σ_f *est* ν*-semi continu supérieurement en* $\mathcal{U}$ *. Il est suffisant alors de montrer que* σ_f *est* ν*-semi continu inférieurement en* $\mathcal{U}$*. Supposons que* $\lambda \notin \liminf(\sigma_f(\mathcal{U}_n))$ *de sorte qu'il y ait un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* λ *qui ne se croise pas en nombre infini avec* $\sigma_f(\mathcal{U}_n)$*. Du fait que* $\Phi^b_{\mathcal{U}^n}$ *est connexe, et en utilisant [[9], théorème 7.3.1], on obtient* $\sigma_f(\mathcal{U}_n) = \sigma_f(\mathcal{U}_n)$*. Par conséquent* $\mathcal{V}$ *ne se croise pas infiniment avec beaucoup de* $\sigma_w(\mathcal{U}_n)$*. D'où* $\lambda \notin \liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n))$*. En utilisant Maintenant que* σ_w *est* ν*-continu en* $\mathcal{U}$*. Ceci implique* $\liminf(\sigma_w(\mathcal{U}_n)) = \sigma_w(\mathcal{U})$*, et donc* $\lambda \notin \sigma_w(\mathcal{U})$*. D'où* $\lambda \notin \sigma_f(\mathcal{U})$*. Donc,* $\sigma_f(\mathcal{U}) \subset \liminf(\sigma_f(\mathcal{U}_n))$*.*
■

4.4 Applications aux matrixes d'opérateurs $n \times n$

Dans cette section, nous avons vu comment approcher un opérateur borné T *sur un espace Banach* X *par une suite* (T_n) *d'opérateurs bornés de rang fini sur* X *ainsi que la façon de trouver une solution approximative de problème de valeur propre pour* T *en résolvant le problème de valeur propre pour* T_n*.*

Proposition 4.4.1. *une application* $\widetilde{T} : X \longrightarrow X$ *est un opérateur borné de rang fini si et seulement si sont* $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ *dans* X *et* $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n$ *dans* X^* *tel que*

$$\widetilde{T}x = \sum_{j=1}^{n} < x, \widetilde{f}_j > \widetilde{x}_j = \underline{\widetilde{x}} < x, \underline{\widetilde{f}} >, \qquad x \in X,$$

où $\underline{\widetilde{x}} := [\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n] \in X^{1\times n}$ *et* $\underline{\widetilde{f}} := [\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n] \in (X^*)^{1\times n}$*.*

Preuve. *Il est clair que si* $\widetilde{T}$ *défini comme ci-dessus, est un opérateur borné puisque* $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n$ *sont des fonctionnelles linéaires conjuguées continues sur* X*, et le rang de* $\widetilde{T}$ *est fini puisque* $R(\widetilde{T}) \subset span\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n\}$*. Inversement, le rang de* $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(X)$ *est fini. Ensuite, il y a un ensemble fini* $\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n\}$ *dans* X *tel que* $R(\widetilde{T}) \subset span\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n\}$*. Renuméroter* $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$*, si nécessaire, on peut supposer que l'ensemble* $\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m\}$ *est linéairement indépendant et*

$R(\widetilde{T}) \subset span\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m\}$ pour certains $m \leq n$. Ensuite, il existe des nombres complexes uniques $c_1(x), \ldots, c_m(x)$ tel que

$$\widetilde{T}x = c_1(x)\widetilde{x}_1, \ldots, c_m(x)\widetilde{x}_m.$$

Pour $j = 1, \ldots, m$ définit $\widetilde{f}_j : X \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\widetilde{f}_j(x) = \overline{c_j(x)}, x \in X$. Il facile de voir que $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_m$ sont des fonctionnelles linéaires conjuguées sur X et

$$\widetilde{T}x = \sum_{j=1}^{n} < x, \widetilde{f}_j > \widetilde{x}_j, \qquad x \in X.$$

Pour voir que chaque $\widetilde{f}_j$ est continu, soit

$$\delta_j := dist\{\widetilde{x}_j, span\{\widetilde{x}_i : i = 1, \ldots, m, i \neq j\}\}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Puisque $\widetilde{x}_j$ n'appartient pas au sous-ensemble fermé $span\{\widetilde{x}_i : i = 1, \ldots, m, i \neq j\}$ nous avons

$$| < x, \widetilde{f}_j > |\delta_j \leq \| < x, \widetilde{f}_1 > \widetilde{x}_1 + \ldots + < x, \widetilde{f}_m > \widetilde{x}_m\| = \|\widetilde{T}x\| \leq \|\widetilde{T}\|\|x\|.$$

Donc $|\widetilde{f}_j(x)| \leq (\frac{\|\widetilde{T}\|}{\delta_j})\|x\|$ pour tout $x \in X$, de sorte que $\widetilde{f}_j$ est continu pour $j = 1, \ldots, m$. Soit $\widetilde{f}_j := 0$ si $m < j \leq n$. Alors $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n \in X^*$ et

$$\widetilde{T}x = \sum_{j=1}^{n} < x, \widetilde{f}_j > \widetilde{x}_j, \qquad x \in X$$

■

Rappeler que $\mathbb{C}^{n\times 1} := \{u := [u(1), \ldots, u(n)]^\top : u(j) \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, n\}$ désigne l'espace linéaire de toutes les matrices $n \times 1$ avec des entrées complexes.

Exemple 4.4.1. *Définir $\widetilde{K} : X \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times 1}$ par*

$$\widetilde{K}x := [< x, \widetilde{f}_1 >, \ldots, < x, \widetilde{f}_n >]^\top =< x, \underline{\widetilde{f}} >, \qquad x \in X,$$

et $\widetilde{L} : \mathbb{C}^{n\times 1} \longrightarrow X$ par

$$\widetilde{L}u = \sum_{j=1}^{n} u(j)\widetilde{x}_j = \underline{\widetilde{x}}u, \qquad u := [u(1), \ldots, u(n)]^\top \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Clairement, $\widetilde{K}$ *et* $\widetilde{L}$ *sont des applications linéaires et*

$$\widetilde{T} = \widetilde{L}\widetilde{K}.$$

On définit un opérateur $\widetilde{A} : \mathbb{C}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times 1}$ *par*

$$\widetilde{A} := \widetilde{K}\widetilde{L}.$$

Pour tout $u \in \mathbb{C}^{n\times 1}$*, on a*

$$\widetilde{A}u = \widetilde{K}(\widetilde{L}u) =< \widetilde{L}u, \underline{\widetilde{f}} >=< \underline{\widetilde{x}}u, \underline{\widetilde{f}} >=< \widetilde{x}, \underline{\widetilde{f}} > u.$$

D'où la $n \times n$ *matrice de Gram* $\widetilde{A} :=< \underline{\widetilde{x}}, \underline{\widetilde{f}} >$ *représenter l'opérateur* $\widetilde{A}$ *par rapport à la base canonique pour* $\mathbb{C}^{n\times 1}$*. En outre, si l'ensemble des éléments* $\underline{\widetilde{x}}$ *sont linéairement indépendants dans* X *et couvrent un sous-espace* X_n*, alors la matrice* $\widetilde{A}$ *représente l'opérateur* $\widetilde{T}_{|X_n,X_n}$ *par rapport à l'ordre base* $\underline{\widetilde{x}}$ *de* X_n*.*

Nous allons maintenant prouver un résultat crucial qui permettra de trouver des bases pour les espaces propres et pour les sous-espaces spectraux de $\widetilde{T}$*.*

Lemme 4.4.1. *Soit* p *un entier positif,* $Z \in \mathbb{C}^{p\times p}$ *tel que* $0 \notin \sigma(Z), \underline{y} \in X^{1\times p}$*, et* $\underline{v} := \underline{\widetilde{K}y} \in \mathbb{C}^{n\times p}$*. Alors pour* $\underline{x} \in X^{1\times p}$ *et* $\underline{u} \in \mathbb{C}^{n\times p}$*. la prises suivantes :* $\underline{\widetilde{T}x} = \underline{x}Z + \underline{y}$ *et* $\underline{\widetilde{K}x} = \underline{u}$ *si et seulement si* $\underline{\widetilde{A}u} = \underline{u}Z + \underline{v}$ *et* $\underline{\widetilde{L}u} = \underline{x}Z + \underline{y}$*. En particulier, soit* $\underline{y} := \underline{0}$ *(de sorte que* $\underline{v} = \underline{0}$ *aussi) ; et que nous satisfaisons aux conditions précédentes. Alors l'ensemble des éléments* p *dans* $\underline{x}$ *est la linéairement independent dans* X *si et seulement si l'ensemble des vecteurs* p *dans* $\underline{u}$ *est linéairement independent dans* $\mathbb{C}^{n\times 1}$*.*

Preuve. *Suppose que* $\underline{\widetilde{T}x} = \underline{x}Z + \underline{y}$ *et* $\underline{\widetilde{K}x} = \underline{u}$*. Alors* $\underline{\widetilde{L}u} = \underline{\widetilde{L}\widetilde{K}x} = \underline{\widetilde{T}x} = \underline{x}Z + \underline{y}$*. Aussi,* $\underline{\widetilde{A}u} = \underline{\widetilde{A}}\widetilde{K}\underline{x} = \underline{\widetilde{K}\widetilde{T}x} = \underline{\widetilde{K}}(\underline{x}Z + \underline{y}) = \underline{u}Z + \underline{v}$*. Inversement, supposons que* $\underline{\widetilde{A}u} = \underline{u}Z + \underline{v}$ *et* $\underline{\widetilde{L}u} = \underline{x}Z + \underline{y}$*. Alors* $\underline{\widetilde{K}x}Z = \underline{\widetilde{K}}(\underline{\widetilde{L}u} - \underline{y}) = \underline{\widetilde{A}u} - \underline{\widetilde{K}y} = \underline{\widetilde{A}u} - \underline{v} = \underline{u}Z$*. Puisque* Z *est non singulier, il s'ensuit que* $\underline{\widetilde{K}x} = \underline{u}$*. Aussi* $\underline{\widetilde{T}x} = \underline{\widetilde{L}\widetilde{K}x} = \underline{\widetilde{L}u} = \underline{x}Z + \underline{y}$*. Maintenant considery* $\underline{y} = 0$*, pour que* $\underline{v} = \underline{\widetilde{K}y} = 0$ *et* $\underline{\widetilde{K}x} = \underline{u}, \underline{\widetilde{L}u} = \underline{x}Z$*. Soit l'ensemble des vecteurs* p *dans* $\underline{u}$ *doit être linéairement indépendants dans* $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *et* $c \in \mathbb{C}^{p\times 1}$ *est tel que* $\underline{x}c = 0$*. Alors* $\underline{u}c = (\underline{\widetilde{K}x})c = \underline{\widetilde{K}}(\underline{x}c) = \underline{\widetilde{K}}(0) = 0$*. L'indépendance linéaire de l'ensemble des vecteurs* p *dans* $\underline{u}$ *implique que* $c = 0$*, comme voulu. Soit l'ensemble des éléments* p *dans* $\underline{x}$ *être linéairement indépendant dans* X*, et* $c \in \mathbb{C}^{p\times 1}$ *être tel que* $\underline{u}c = 0$*. Alors* $\underline{x}(Zc) = (\underline{x}Z)c = (\underline{\widetilde{L}u})c = \underline{\widetilde{L}}(\underline{u}c) = \underline{\widetilde{L}}(0) = 0$*. L'indépendance linéaire de l'ensemble des éléments* p *dans* $\underline{x}$ *implique que* $Zc = 0$ *et que* Z *est non singulier,* $c = 0$*, comme désiré.* ∎

Proposition 4.4.2.
$$\sigma(\widetilde{T})\backslash\{0\} = \sigma(\widetilde{A})\backslash\{0\}.$$
En particulier, $\sigma(\widetilde{T})$ est un ensemble fini. Soit $\widetilde{\Lambda} \subset \sigma(\widetilde{T})\backslash\{0\}, \widetilde{P} := P(\widetilde{T}, \widetilde{\Lambda})$ et $\widetilde{p} := P(\widetilde{A}, \widetilde{\Lambda})$. alors
$$\widetilde{K}\widetilde{P} = \widetilde{p}\widetilde{K}.$$
De même, $\widetilde{K}$ mappe $R(\widetilde{P})$ en $\widetilde{R}(\widetilde{P})$ une manière individuelle, et donc $\widetilde{\Lambda}$ est un ensemble spectral de type fin pour $\widetilde{T}$.

Théorème 4.4.1. **(a)** *Soit $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Alors $\widetilde{\lambda}$ est une valeur propre de l'opérateur $\widetilde{T}$ si et seulement si $\widetilde{\lambda}$ est une valeur propre de la matrice $\widetilde{A}$. Dans ce cas, soit $\underline{\widetilde{u}} \in \mathbb{C}^{n\times g}$ formons une base ordonnée pour l'espace de $\widetilde{A}$ correspondant à $\widetilde{\lambda}$. Alors $\underline{\widetilde{\varphi}} := \underline{\widetilde{L}u}\backslash\widetilde{\lambda}$ forme une base ordonnée. pour l'espace propre de $\widetilde{T}$ correspondant à $\widetilde{\lambda}$ et satisfait $\underline{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \underline{\widetilde{u}}$. En particulier, la multiplicité géométrique de $\widetilde{\lambda}$ comme valeur propre de $\widetilde{T}$ est la même que sa multiplicité géométrique de $\widetilde{\lambda}$ comme valeur propre de $\widetilde{A}$.*

(b) *Soit $\widetilde{\Lambda} \subset \sigma(\widetilde{A})\backslash\{0\}$ et considère une base ordonnée $\underline{\widetilde{u}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ pour le sous-espace spectral $M(\widetilde{A}, \widetilde{\Lambda})$. Ensuite il y a une matrice non singulière $\widetilde{\Theta} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tel que $\widetilde{A}\underline{\widetilde{u}} = \underline{\widetilde{u}}\widetilde{\Theta}$. De plus, $\underline{\widetilde{\varphi}} = (\underline{\widetilde{L}\widetilde{u}})\widetilde{\Theta}^{-1}$ formes une base ordonnée pour le sous-espace spectral $M(\widetilde{A}, \widetilde{\Lambda})$ et satisfai $\underline{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \underline{\widetilde{u}}$. En particulier, si $\widetilde{\lambda} \subset \sigma(\widetilde{A})\backslash\{0\}$, alors la multiplicité algébrique de $\widetilde{\lambda}$ comme valeur propre de $\widetilde{T}$ est la même que la multiplicité algébrique de $\widetilde{\lambda}$ comme valeur propre de $\widetilde{A}$.*

Preuve. Rappelons que $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ représente l'opérateur $\widetilde{A}$ par rapport à la norme base pour $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

(a) *Soit $p := 1, Z := [\widetilde{\lambda}]$ et $y := 0$ dans lemme4.4.1, on voit que $\widetilde{\lambda}$ est une valeur propre de $\widetilde{T}$ si et seulement si $\widetilde{\lambda}$ est une valeur propre de $\widetilde{A}$. Dans ce cas, soit $p := g$ et $Z := \widetilde{\lambda}|_g$ dans lemme4.4.1, on note que si $\varphi = \underline{\widetilde{L}\widetilde{u}}/\widetilde{\lambda}$, alors $\underline{\widetilde{T}\widetilde{\varphi}} = \underline{\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}}, \underline{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \underline{\widetilde{u}}$ et l'ensemble $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_g\}$ d'éléments dans $\underline{\widetilde{\varphi}}$ est un sous-ensemble linéairement indépendant de l'espace propre de $\widetilde{T}$ correspondant à $\widetilde{\lambda}$. Que $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_g\}$ couvre également cet espace propre peut être vu comme suit. Soit $\widetilde{\varphi}_{g+1} \notin span\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_g\}$ être tel que $\widetilde{T}\widetilde{\varphi}_{g+1} = \widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}_{g+1}$. Si $\underline{\widetilde{\psi}} = [\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{g+1}]$, alors $\widetilde{T}\widetilde{\psi} = \widetilde{\lambda}\widetilde{\psi}$; et encore par Lemme4.4.1, $\{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{K}\widetilde{\varphi}_{g+1}\}$ serait un sous-ensemble linéairement indépendant du l'espace propre de $\widetilde{A}$ correspondant à $\widetilde{\lambda}$, contrairement à notre hypothèse que cet espace propre est de dimension g.*

(b) *Puisque $\underline{\widetilde{u}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ forme une base ordonnée pour $M(\widetilde{A}, \widetilde{\Lambda}), \underline{\widetilde{A}\widetilde{u}} = \underline{\widetilde{u}}\widetilde{\Theta}$ pour certains $\widetilde{\Theta} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tel que $\sigma(\widetilde{\Theta}) = \widetilde{\Lambda}$. Comme $0 \notin \widetilde{\Lambda}, \widetilde{\Theta}$ est invertible. Soit $p := m, Z := \widetilde{\theta}$ et $\underline{y} := 0$ dans* *lemme reflemm5,on sevoit que* $\underline{\widetilde{T}\widetilde{\varphi}} = \underline{\widetilde{\varphi}\widetilde{\Theta}}, \underline{\widetilde{K}\widetilde{\imath}} = \underline{\widetilde{u}}$ *et l'ensemble des éléments* m *dans* $\widetilde{\varphi}$ *est linéairement indépendant dans* X*. Considérons le sous-espace fermé* $\widetilde{Y}$ *de* X *engendré par les éléments de* $\widetilde{\varphi}$*. Puisque la matrice représente l'opérateur* Θ *représente l'opérateur* $\widetilde{T}|_{\widetilde{Y},\widetilde{Y}}$ *par rapport à* $\widetilde{\varphi}$*, on a* $\sigma(\widetilde{T}|_{\widetilde{Y},\widetilde{Y}}) = \sigma(\widetilde{\Theta}) = \widetilde{\Lambda}$*. D'où* $\widetilde{Y} \subset M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$ *par proposition 4.4.2, donc* $m \leq \dim M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$*. Mais comme nous l'avons vu dans la proposition 4.4.2,* $\widetilde{K}$ *fait correspondre* $M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$ *à* $M(\widetilde{A},\widetilde{\Lambda})$ *de manière individuelle, de sorte que* $\dim M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda}) \leq \dim M(\widetilde{A},\widetilde{\Lambda}) \leq m$*. Ainsi* $\widetilde{Y} = M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$*. En particulier, le cas :* $\widetilde{\Lambda} := \{\widetilde{\lambda}\}$ *montre que si* $\widetilde{\lambda} \in \sigma(\widetilde{A})\backslash\{0\}$*, alors la multiplicité algébrique de* $\widetilde{\lambda}$ *comme une valeur propre de* $\widetilde{T}$ *est la même que la multiplicité algébrique de* $\widetilde{\lambda}$ *comme valeur propre de* $\widetilde{A}$*.*

■

Nous concluons que le problème du sous-espace spéctral pour un opérateur de rang fini $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(X)$ *peut être solvaté de la manière suivante : Obtenir un représentation de* $\widetilde{T}$

$$Tx := \underline{\widetilde{x}} < x, \underline{\widetilde{f}} >, \qquad x \in X,$$

avec $\underline{\widetilde{x}} \in X^{1\times n}$ *et* $\underline{\widetilde{f}} \in (X^*)^{1\times n}$*. Former la matrice Gram* $n \times n$ *donné par*

$$\widetilde{A}(i,j) := \langle \widetilde{x}_j, \widetilde{f}_i \rangle, \qquad x \in X$$

Trouver un ensemble spectral $\widetilde{\Lambda}$ *pour* $\widetilde{T}$ *tel que* $0 \notin \widetilde{\Lambda}$ *et obtenir une base pour le sous-espace spectral associé* $M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$*, nous pouvons chercher un ensemble spectral* $\widetilde{\Lambda}$ *pour la matrice* $\widetilde{A}$ *tel que* $0 \notin \widetilde{\Lambda}$ *et trouve une base* $\underline{\widetilde{u}}$ *pour le spectre sous-espace* $M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$*. Alors* $\widetilde{A}\underline{\widetilde{u}} = \underline{\widetilde{u}}\widetilde{\Theta}$*, où la matrice non singulière est* $\widetilde{\Theta}$ *donné par*

$$\widetilde{\Theta} = (\underline{\widetilde{u}}^* \underline{\widetilde{u}})^{-1} \underline{\widetilde{u}}^* \underline{\widetilde{A}\widetilde{u}}.$$

Soit

$$\underline{\widetilde{\varphi}} := (\underline{\widetilde{L}\widetilde{u}})\widetilde{\Theta}^{-1} = \underline{\widetilde{x}\widetilde{u}}\widetilde{\Theta}^{-1}.$$

Alors $\underline{\widetilde{\varphi}}$ *forme une base ordonnée pour* $M(\widetilde{T},\widetilde{\Lambda})$ *. En outre, le produit Gram* $\langle \underline{\widetilde{\varphi}}, \underline{\widetilde{f}} \rangle$ *de* $\underline{\widetilde{\varphi}}$ *avec* $\underline{\widetilde{f}}$ *est égal à* $\underline{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \underline{\widetilde{u}}$*. Dans le cas particulier* $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\lambda}\}$*, où* $\widetilde{\lambda}$ *est une valeur propre non nulle de* $\widetilde{T}$ *de multiplicité géométrique* g *et nous sommes intéressés seulement à trouver une base* $\underline{\widetilde{\varphi}}$ *pour l'espace propre correspondant, nous pouvons trouver une base* $u \in \mathbb{C}^{n\times g}$ *du espace propre de* $\widetilde{A}$ *correspondant à* $\widetilde{\lambda}$*, donc on a* $\widetilde{\Theta} = \widetilde{\lambda}|_g$ *; puis laissez*

$$\underline{\widetilde{\varphi}} := \frac{\widetilde{L}\underline{u}}{\widetilde{\lambda}} = \frac{\underline{\widetilde{x}u}}{\widetilde{\lambda}}.$$

Souvent, $\widetilde{T}$ est un membre d'une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang finit sur X donné par

$$T_n x := \sum_{j=1}^{r(n)} \langle x, f_{n,j}\rangle = \underline{x_n}\langle x, \underline{f_n}\rangle, \qquad x \in X,$$

où $\underline{x}_n := [x_{n,1}, \ldots, x_{n,r(n)}] \in X^{1\times r(n)}$ *et* $\underline{f}_n := [f_{n,1}, \ldots, f_{n,r(n)}] \in X^{1\times r(n)}$.

4.5 Applications aux matrices d'opérateurs 2 ×2

Dans cette section, nous appliquerons les résultats de la section précédente à 2×2 matrices d'opérateurs de blocs. En particulier, nous concentrons sur la relation entre le ν- continuité des matrices d'opérateurs de blocs 2×2 et la ν-continuité de ses composants.

Théorème 4.5.1. *Soit X un espace de Banach. Dans l'espace produit $X \otimes X$, nous considérons une suite d'opérateurs formellement définie par une matrice* $\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{B}_n \end{pmatrix}$ *et soit* $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ *et* $\mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C} \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ *quand* $\mathcal{A}, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}, \mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n \in \mathcal{L}(X)$.

(a) *Si* $\mathcal{A}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{A}, \mathcal{B}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{B}, \mathcal{C}_n \to 0$ *et* $D_n \to 0$, *alors* $\mathcal{M}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{M}$. *De plus, si* $0 \in \Phi^b_{\mathcal{A}} \cap \Phi^b_{\mathcal{B}}$ *et O est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ avec $0 \in O$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$*

$$\sigma_i(\mathcal{M}_n) \subseteq [\sigma_i(\mathcal{A}) \cup \sigma_i(\mathcal{B})] + O, \ \textit{pour } i = f, w.$$

(b) *Si* $\mathcal{A}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{A}, \mathcal{B}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{B}, \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}, D_n \to 0$ *et* $\mathcal{A}_n\mathcal{C} \to \mathcal{A}\mathcal{C}$, *alors* $\mathcal{M}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{M}_C$. *De plus, si* $0 \in \Phi^b_{\mathcal{A}} \cap \Phi^b_{\mathcal{B}}$ *et O est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ avec $0 \in O$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$*

$$\sigma_i(\mathcal{M}_n) \subseteq [\sigma_i(A) \cup \sigma_i(\mathcal{B})] + O, \ \textit{pour } i = f, w.$$

Preuve.

(a) *Soit* $\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_n \end{pmatrix}, \mathcal{V}_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathcal{W}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{D}_n & 0 \end{pmatrix}$. *D'abord, on prouver que* $\mathcal{U}_n \overset{\nu}{\to} \mathcal{M}$. *Effectivement* $\|\mathcal{U}_n\| = \max \|\mathcal{A}_n\|, \|\mathcal{B}_n\|$ *alors* $(\|\mathcal{U}_n\|)$ *est borné,*

$$\|(\mathcal{U}_n - \mathcal{M})\mathcal{M}\| = \max \|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})\mathcal{A}\|, \|(\mathcal{B}_n - \mathcal{B})\mathcal{B}\| \to 0, \ \textit{et}$$
$$\|(\mathcal{U}_n - \mathcal{M})\mathcal{U}_n\| = \max \|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})\mathcal{A}_n\|, \|(\mathcal{B}_n - \mathcal{B})\mathcal{B}_n\| \to 0.$$

Maintenant, en représentant $\mathcal{M}_n$ comme $\mathcal{M}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n + \mathcal{W}_n$. Il résulte immédiatement du fait que $\mathcal{U}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}, \mathcal{V}_n \to 0, \mathcal{W}_n \to 0$ et lemme 3.2.2 que

$$\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n + \mathcal{W}_n \xrightarrow{\nu} 0 + 0 + \mathcal{M}.$$

Alors $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}$. Maintenant, si nous supposons que $0 \in \Phi^b_{\mathcal{A}} \cap \Phi^b_{\mathcal{B}}$ alors $0 \in \Phi^b_{\mathcal{M}}$. Selon au théorème 4.3.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, \sigma_i(\mathcal{M}_n) \subseteq [\sigma_i(\mathcal{A}) \cup \sigma_i(\mathcal{B})] + O$ pour $i = f, w$.

(b) *En utilisant (a) nous avons*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n - \mathcal{C} \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}.$$

Puiseque

$$\left[\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}_n\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\left[\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\left[\left(\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \to \left[\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Maintenant, en utilisant le lemme 3.2.2, nous avons

$$\left[\left(\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\nu} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Donc, $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_c$. Maintenant, si nous supposons que $0 \in \Phi^b_{\mathcal{A}} \cap \Phi^b_{\mathcal{B}}$ alors $0 \in \Phi^b_{\mathcal{M}}$. En appliquant le théorème 4.3.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, \sigma_i(\mathcal{M}_n) \subseteq [\sigma_i(\mathcal{A}) \cup \sigma_i(\mathcal{B})] + O$, pour $i = f, w$.

∎

Remarque 4.5.1. **(a)** *Si $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_c$ et $\mathcal{A}_n\mathcal{C} \xrightarrow{\nu} \mathcal{A}\mathcal{C}, \mathcal{D}_n \to 0$ et $\mathcal{C}_n \to \mathcal{C}$, alors $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{B}$. En fait, soit $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_c$ et*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C}_n \\ -\mathcal{D}_n & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; et$$

$$(\mathcal{M}_n - \mathcal{M}_c)\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})\mathcal{C} \\ 0 & -\mathcal{D}_n\mathcal{C} \end{pmatrix} \rightarrow 0.$$

Donc, en utilisant le lemme 3.2.2 (iii), nous avons $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} \overset{\nu}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$.

Par conséquent $\mathcal{A}_n \overset{\nu}{\rightarrow} \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}_n \overset{\nu}{\rightarrow} \mathcal{B}$.

(b) *Soit* $\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_n & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_n \end{pmatrix}$ *et* $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & \mathcal{U} \end{pmatrix}$, *où* $\mathcal{U}_n$ *et* $\mathcal{U}$*sont définis dans la remarque 4.3.1. alors* $\mathcal{M}_n \overset{\nu}{\rightarrow} \mathcal{M}, 0 \in \Phi^b_{\mathcal{U}}$ *et* $\sigma_f(\mathcal{M}_n) = \sigma_f(\mathcal{U}_n) \subsetneqq \sigma_f(\mathcal{U}) = \sigma_f(\mathcal{M})$.

Corollaire 4.5.1. *Soit X un espace de Banach. Dans l'espace produit $X \otimes X$, nous considérons une suite d'opérateur formellement définie par une matrice* $\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ 0 & \mathcal{B}_n \end{pmatrix}$. *Soient $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}$ sont deux opérateurs fermés agissant sur l'espace X de Banach et ayant le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}_n)$ et $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ respectivement. $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}$ agissant sur l'espace de Banach X et ayant le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{B}_n)$, et $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ respectivement et soit $\mathcal{C}_n \in \mathcal{L}(X)$ et* $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ *et soit $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B}) \cap \rho(\mathcal{A}_n) \cap \rho(\mathcal{B}_n)$. Si $(\lambda - \mathcal{A}_n)^{-1} \overset{\nu}{\rightarrow} (\lambda - \mathcal{A})^{-1}, (\lambda - \mathcal{B}_n)^{-1} \overset{\nu}{\rightarrow} (\lambda - \mathcal{B})^{-1}$ et $\mathcal{C}_n \rightarrow 0$, puis pour chaque ensemble ouvert $O \subseteq \mathbb{C}$ avec $0 \in O$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n \geq n_0$*

$$\sigma_i(\mathcal{M}_n) \subseteq [\sigma_i(\mathcal{A}) \cup \sigma_i(\mathcal{B})] + O, \;\; pour \; i = f, w.$$

Preuve. *Il est facile de vérifier cela,*

$$(\lambda - \mathcal{M}_n)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - \mathcal{A}_n)^{-1} & -(\lambda - \mathcal{A}_n)^{-1}\mathcal{C}_n(\lambda - \mathcal{B}_n)^{-1} \\ 0 & (\lambda - \mathcal{B}_n)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Puisque $(\lambda - \mathcal{A}_n)^{-1}\mathcal{C}_n(\lambda - \mathcal{B}_n)^{-1} \rightarrow 0$, alors en utilisant le théorème 4.5.1, on obtient $\lambda - \mathcal{M}_n)^{-1} \overset{\nu}{\rightarrow} \lambda - \mathcal{M})^{-1}$. Maintenant, l'utilisation du théorème 4.3.2 termine la démonstration. ∎

Théorème 4.5.2. *Soit X un espace de Banach. Dans l'espace produit $X \otimes X$, on considére une suite d'opérateurs formellement définie par une matrice* $\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{C}_n \\ 0 & \mathcal{B}_n \end{pmatrix}$ *et* $\mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C} \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ *tel que $\mathcal{A}, \mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(X), \mathcal{B}, \mathcal{B}_n \in \mathcal{L}(X), \mathcal{C}, \mathcal{C}_n \in \mathcal{L}(X), \mathcal{A}_n\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{AC}$ et $\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}$. Si*

$0 \in \Phi^b_{\mathcal{A}} \cap \Phi^b_{\mathcal{B}}$ *et* $\sigma_i(\mathcal{A}) \cap \sigma_i(\mathcal{B}) = \emptyset$,*pour* $i = f, w$. *Alors si est* ν*-continue en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *si et seulement si,* σ_i *est* ν*-continue en* $\mathcal{M}_C$.

Preuve. *Puisque si* $\sigma_i(\mathcal{A}) \cap \sigma_i(\mathcal{B})$, *pour* $i = f, w$, *alors de la* ν*-semi supérieure continuité de* σ_i *en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$, *pour* $i = f, w$ *(voir théorème 4.3.3), et en utilisant un raisonnement similaire à [7, Théorème 2.1], pour chaque suite* $(\mathcal{A}_n)$ *dans* $\mathcal{L}(X)$ *et chaque* $(\mathcal{B}_n)$ *dans* $\mathcal{L}(X)$ *tel que* $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{B}$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a*

$$\sigma_i(\mathcal{M}_n) = \sigma_i(\mathcal{A}_n) \cup \sigma_i(\mathcal{B}_n), \ pouri = f, w. \tag{4.4}$$

" $\Longrightarrow$ " *Supposons que* σ_i *est* ν*-continue en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *et on montre que* σ_i *est* ν*-continue à* $\mathcal{M}_C$ *pour* $i = f, w$. *Soit* $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_C$. *D'abord en utilisant le théorème 4.3.3,* σ_i *est* ν*-semi continuité supérieur à* $\mathcal{M}_C$, *pour* $i = f, w$. *Il est suffisant de montrer que* σ_i *est* ν*-semi continue inférieure à* $\mathcal{M}_C$ *pour* $i = f, w$. *On suppose* $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_C$, *alors en utilisant Remarque 4.5.1, on a* $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{B}$ *Puisque si est* ν*-semi continuité inférieur en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *on a* $\sigma_i(\mathcal{A}) \subset \liminf \sigma_i(\mathcal{A}_n)$ *et* $\sigma_i(\mathcal{B}) \subset \liminf \sigma_i(\mathcal{B}_n)$ *pour* $i = f, w$. *Alors*

$$[\sigma_i(\mathcal{A}) \cup \sigma_i(\mathcal{B})] \subset [(\liminf \sigma_i(\mathcal{A}_n)) \cup (\liminf \sigma_i(\mathcal{B}_n))], \ pouri = f, w.$$

Donc $(\sigma_i(\mathcal{A}) \cup \sigma_i(\mathcal{B})) \subset \liminf \sigma_i(\mathcal{A}_n)) \cup \sigma_i(\mathcal{B}_n))]$, *pour* $i = f, w$. *Cela implique que,* $\sigma_i(\mathcal{M}_C) \subset \liminf \sigma_i(\mathcal{M}_n))$ *pour* $i = f, w$.

" $\Longleftarrow$ " *Supposons que* σ_i *est* ν*-continue à* $\mathcal{M}_C$. *On montre que* σ_i *est* ν*-continue en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$, *pour* $i = f, w$. *Soit* $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{B}$. *En utilisant le théorème 4.3.3,* σ_i *est* ν*-semi continuité supérieur en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *pour* $i = f, w$. *Alors,*

$$\limsup \sigma_i(\mathcal{A}_n) \subset \sigma_i(\mathcal{A}) \quad \ pour \ \ i = f, w \ et$$

$$\limsup \sigma_i(\mathcal{B}_n) \subset \sigma_i(\mathcal{B}) \ pour \ i = f, w. \tag{4.5}$$

Maintenant, on prouve que σ_i *est* ν*-semi-continuité inférieure à* A *pour* $i = f, w$. *Soit* $\lambda \in \sigma_i(\mathcal{A})$ *pour* $i = f, w$. *Puisque* $\sigma_i(\mathcal{A}) \subset \sigma_i(\mathcal{M}_C)$, *alors* $\lambda \in \sigma_i(\mathcal{M}_C)$ *pour* $i = f, w$. *En utilisant théorème 4.5.1 on a* $\mathcal{M}_n \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}_C$. *Il résulte de* ν*-semi continuité inférieure de* σ_i *à* $\mathcal{M}_C$

$$\lambda \in \liminf(\sigma_i)(\mathcal{M}_n) \ pour \ i = f, w.$$

Alors il existe une suite $(\lambda_n)_n$ *tel que* $\lambda_n \in \sigma_i(\mathcal{M}_n)$ *et* $\lambda_n \to \lambda$ *pour* $i = f, w$.
D'autre part, par équation 4.4, il existe $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\lambda_n \in \sigma_i(\mathcal{M}_n) = \sigma_i(\mathcal{A}_n) \cup \sigma_i(\mathcal{B}_n)$ *pour tout* $n \geq N$ *et* $i = f, w$. *Nous discutons de deux cas.*

- 1^{ere} *cas Si* $\lambda_n \in \sigma_i(\mathcal{A}_n)$ *pour tout* $n \geq N$ *et* $i = f, w$ *donc* $\lambda \in \liminf \sigma_i(\mathcal{A}_n)$ *et donc* σ_i *est* ν*-continue à* $\mathcal{A}$ *pour* $i = f, w$.
- 2^{emme} *cas S'il existe une sous-suite* (λ_{n_j}) *de* λ_n *tel que* $(\lambda_{n_j}) \in \sigma_i(\mathcal{B}_{n_j})$, *alors on a* $\lambda \in \limsup \sigma_i(\mathcal{B}_n)$ *pour* $i = f, w$. *Donc, en utilise équation 4.5 on a* $\lambda \in \sigma_i(\mathcal{B})$ *pour* $i = f, w$. *Ceci montre que* $\lambda \in \sigma_i(\mathcal{B}) \cap \sigma_i(\mathcal{A})$ *pour* $i = f, w$. *C'est une contradiction.*

  En suivant le même raisonnement, non démontre que σ_i *est* ν*-semi continuité inférieure à* $\mathcal{B}$ *pour* $i = f, w$.

$\blacksquare$

Conclusion

L'objet essentiel de notre travail est d'étudier un nouveau mode de convergence qui est assez fort pour donner les résultats spectraux souhaités et assez général pour être applicable dans un certain nombre de situations. Sous ce mode de convergence, les propriétés similaires à la semi-continuité supérieure et à la semi-continuité inférieure du spectre sont prouvées. Ce mémoire constitue pour nous, un nouvel axe de recherche et de connaissance approfondies en théorie des opérateurs. On s'est basé sur des travaux de recherche récents, ce qui nous laisse croire que ce travail peut avoir une suite relativement à la continuité du S-spectre essentiel sous la ν *convergence.*

Bibliographie

[1] P. Aiena, Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. xiv+444 pp. ISBN : 1-4020- 1830-4.

[2] M. Ahues, A class of strongly stable operator approximations, /. Aust. Math. Soc. Ser B 28 (1987), 435-442.

[3] M. Ahues, A. Largillier and B.V. Limaye, Spectral computations for bounded operators, Applied Mathematics (Boca Raton), 18. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. xviii+382 pp. ISBN : 1-58488-196-.

[4] A. Ammar and A. Jeribi, The Weyl essential spectrum of a sequence of linear

[5] P.M.Anselon, Collectively Compact Operator Approximation Theory (Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, New Jersey, 1971).

[6] R. Bouldin, Operator approximations with stable eigenvalues. J. Austral Math Soc Ser A. 1990

[7] Diestel J. (1984) : Sequences and Series in Banach Sp ac es, Springer-V erlag, New York.

[8] S. V. Djordjevi. Spectral continuity for operator matrices, Glasg. Math. J. 43 (2001), 487-490.

[9] A. Jeribi, Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices. Springer-Verlag, New-York (2015). operators in Banach spaces, Indag. Math. 27 (2016), 282-295.

[10] A. Jeribi, Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices. Springer-Verlag, New-York (2015).

[11] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer (1980), 2nd Edition.

[12] A. Lebow and M. Schechter, Semigroups of operators and measures of noncompactness, J. Funct. Anal. 7, (1971)1-26.

[13] *Nair, M.T. (1992) : On strongly stable approximations, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 52, 251-260.*

[14] *L. I. Nicolaescu, On the space of Fredholm operators, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. 53 (2007), 209-227.*

[15] *K. K. Oberai, On the Weyl spectrum, Illinois J. Math. 18 (1974), 208-212.*

[16] *M. Reed, B. Simon : Methods of modern mathematical physics : Analysis of operators. vol.4 Academic Press (1978).*

[17] *W. Rudin : Functional Analysis. 1991 (Second Edition). Real and Complex Analysis 1974. McGraw-Hill.*

[18] *J. Weidmann : Linear Operators in Hilbert Space. Springer. Vol 1. 1980.*