



N° Attribué par la bibliothèque

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|



Année univ. : 2017/2018

## Contrôle optimal et stabilisation d'une navette spatiale

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

**Hichem Tabti**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Pr G. Djellouli**

Soutenu le 21/06/2018 devant le jury composé de

|                        |                                       |           |
|------------------------|---------------------------------------|-----------|
| <b>Dr O. Bennihi</b>   | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Président |
| <b>Pr G. Djellouli</b> | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Encadreur |
| <b>Dr K. Djerfi</b>    | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Examineur |
| <b>Maa B. Saadli</b>   | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Examineur |

---

1. e-mail : tabti.hichem20@gmail.com

## Remerciements

*En premier lieu, je tiens à remercier notre "Dieu" qui nous à donner le courage et la volonté pour réaliser ce travail.*

*Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur, "GHAOUTI DJELLOULI", Maitre de conférence -A- à l'université de Saïda, pour avoir accepté d'encadrer ce mémoire. je teint à lui témoigner ma gratitude et ma reconnaissance car ce travail n'aurait jamais vu le jour sans son aide considérable, je voudrais également lui exprimer ma sincère remerciements, malgré toutes ses occupations, était toujours à l'écoute de mes préoccupations et de mes questions, et qui m'a aide à progresser.*

*Je remercie d'avance Monsieur "O : Bennehi", Maitre de conférence-A- à l'université de Saïda, pour sa présence à ma soutenance de master et, pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.*

*Je suis également très reconnaissant à Monsieur "K : Djerfi", Maitre assistant -A- à l'université de Saïda, pour toute l'aide qu'il m'a accordée durant du travail, en acceptant d'être examinateur de ce travail.*

*Je remercie profondément Monsieur "B : Saadli" , Maitre assistant -A- à l'université de Saïda, pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail en acceptant de le juger.*

*Je remercie aussi Mlle "Abbes Hafida", Maitre assistant -A- à l'université de Saïda, pour sa présence.*

*Encore quelque lignes, sans doute trop courtes, pour exprimer tout mon amour et ma gratitude à mes chers parents, à mes sœurs et mes frères pour leur soutien, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste projet.*

Merci à tous

## Dédicace

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est  
tous simplement que : Je dédie ce mémoire de master à :*

*A Ma tendre Mère Aicha : Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de  
dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour  
que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.*

*A Mon très cher Père Abdelkadeur : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime,  
le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts  
fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail et le fruit de tes sacrifices  
que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années.*

*A mon cher frère : Adel.*

*A ma sœur : Siham.*

*A mes très chère amis : Hadj ,Salah , Chouki ,Med ,azziz ,Ghezzel,Yassin,Amin,..*

*A tous les étudiants Promo 2<sup>eme</sup> année Master Math*

*Géométrie ,Analyse et Probabilité.*

*A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.*

*A tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.*

*TABTI HICHEM*

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Introduction . . . . .  | 3         |
| <b>1 Contrôle optimal géométrique et applications au problème de réentrée atmosphérique</b> | <b>5</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .  | 5         |
| 1.2 Problème de la rentrée atmosphérique . . . . .  | 5         |
| 1.2.1 Le modèle pour les forces . . . . .   | 6         |
| 1.3 Réduction du problème et modèles simplifiés et contrôle optimal géométrique . . . . .   | 9         |
| 1.3.1 Réduction du problème et modèles simplifiés . . . . .                                 | 9         |
| 1.4 Contrôle optimal géométrique . . . . .  | 11        |
| 1.4.1 Principe du maximum de Pontryagin . . . . .   | 11        |
| 1.4.2 Classification des extrémales au voisinage de $\Sigma$ . . . . .                      | 15        |
| 1.4.3 Quelques propriétés des extrémales singulières . . . . .                              | 17        |
| 1.4.4 Principe du Minimum avec contraintes sur l'état . . . . .                             | 21        |
| 1.4.5 Problème du temps minimal . . . . .   | 23        |
| 1.4.6 Calcul des contrôles extrémaux . . . . .  | 24        |
| 1.4.7 Extrémales Frontières . . . . .   | 25        |
| <b>2 Contrôle optimal sur le modèle simplifié <math>I</math></b>                            | <b>29</b> |
| 2.1 Analyse des extrémales du sous-système $I$ sans contrainte . . . . .                    | 29        |
| 2.1.1 Existence de trajectoires singulières. . . . .  | 30        |
| 2.1.2 Analyse des extrémales. . . . .   | 33        |
| 2.1.3 Classification des extrémales au voisinage de $\Sigma$ . . . . .                      | 35        |
| 2.2 Modèle avec contraintes sur l'état . . . . .  | 37        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2.1    | Concept d'ordre et l'évaluation de l'ensembles des états accessibles du système contraint . . . . . | 37        |
| 2.3      | Synthèse locale temps-minimale pour le sous-système $I$ avec contraintes sur l'état                 | 42        |
| 2.3.1    | Forme normale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié $I$ . .                        | 42        |
| 2.4      | Résultats numériques . . . . .  | 46        |
| <b>3</b> | <b>Contrôle optimal sur le modèle simplifié <math>II</math></b>                                     | <b>52</b> |
| 3.1      | Analyse des extrémales du sous-système $II$ sans contrainte . . . . .                               | 53        |
| 3.1.1    | Existence de trajectoires singulières. . . . .  | 53        |
| 3.1.2    | Analyse des extrémales singulières.. . . .  | 55        |
| 3.1.3    | Classification des trajectoires au voisinage de $\Sigma$ . . . . .                                  | 56        |
| 3.2      | Modèle avec contraintes sur l'état . . . . .  | 57        |
| 3.2.1    | Calcul de l'ordre des contraintes sur l'état. . . . .   | 57        |
| 3.2.2    | Calcul de $u_b$ , $\eta$ et de $\nu$ . . . . .  | 58        |
| 3.3      | Synthèse temps minimal au voisinage de la contrainte . . . . .                                      | 59        |
| 3.3.1    | Forme normale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié $II$ .                         | 59        |
| 3.3.2    | Synthèse locale temps minimal . . . . .   | 61        |
| 3.4      | Résultats numériques . . . . .  | 67        |
| <b>4</b> | <b>Contrôle optimal du problème complet</b>   | <b>72</b> |
| 4.1      | Extrémales du problème non contraint . . . . .  | 72        |
| 4.1.1    | Calcul des extrémales régulières. . . . .   | 73        |
| 4.1.2    | Analyse des extrémales singulières. . . . .   | 73        |
| 4.2      | Le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état . . . . .                               | 75        |
| 4.2.1    | Calcul des contrôles frontières. . . . .  | 76        |
| 4.2.2    | Construction d'une trajectoire optimale. . . . .  | 81        |
| 4.3      | Stabilisation de la navette autour de la trajectoire nominale . . . . .                             | 82        |
| 4.3.1    | Trajectoire équilibrée . . . . .  | 82        |
| 4.3.2    | Stabilisation . . . . .   | 83        |

# Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte, et le coût est le **flux thermique total** (facteur d'usure de la navette). Le moteur est par ailleurs soumis à des contraintes d'état sur le **flux thermique**, l'**accélération normale** et la **pression dynamique**.

Le problème précis à l'étude est le suivant. Nous appelons phase atmosphérique la période de temps où l'altitude du moteur se situe entre 20 et 120 kilomètres. C'est en effet dans cette phase que, en l'absence de **poussée motrice**, les forces aérodynamiques (frottement avec l'atmosphère) peuvent être utilisées pour piloter adéquatement la navette spatiale afin de la diriger vers un point final souhaité et de satisfaire les contraintes d'état. En particulier sur le **flux thermique**. Ainsi, durant cette phase, la navette peut être considérée comme un planeur, soumis uniquement à la force de gravité et aux forces aérodynamiques.

Le contrôle est l'angle de gîte cinématique qui représente l'angle entre les ailes et un plan perpendiculaire à la vitesse, alors les forces aérodynamiques sont contrôlées par l'attitude du navette. Pour un navette de rentrée, le mouvement est contrôlé par les **forces de traînée et de portance**. L'**angle d'attaque** module l'amplitude de la force tandis que l'angle d'inclinaison n'agit que dans la direction de l'élévation.

L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée. Une trajectoire optimale étant ainsi déterminée, il faut ensuite *stabiliser* la navette autour de cette trajectoire, de façon à prendre en compte de possibles perturbations en tenant compte du fait que l'engin est de plus soumis à des contraintes sur l'état. Nous nous intéressons au problème de transfert en temps minimal. Ce problème a été défini et résolu dans une série d'articles [J.B.C], [J.B.N], [J.M.C.L1] et [J.M.C.L2] en tenant compte des conditions limites du cahier des charges du CNES.

Cet mémoire est composé de quatre chapitre :

Dans premier chapitre nous citons brièvement le modèle de la navette spatiale et les principales techniques de la théorie du contrôle optimal, y compris le principe maximal de Pontryagin, les conditions d'optimalité de premier ordre et nous présentons un bref aperçu du contrôle géométrique optimal, y compris l'utilisation du crochet de Lie avec des conditions d'optimalité d'ordre supérieur.

L'objectif de chapitre deux est d'analyser les trajectoires extrémales pour le système avec et

sans contrainte. La structure des équations permet de distinguer un sous-système  $I$ , en dimension 3, qui représente le mouvement longitudinal de la navette c'est à dire qui correspond au problème de contrôle sans conditions limites sur la latitude et l'azimut .

Dans le chapitre trois le sous-système  $II$  qui représente le mouvement latéral fait l'objet de la même étude que le sous système  $I$ .

Enfin dans le quatrième chapitre nous traitons le modèle complet de la navette. On calcule les extrémals singulières et les extrémals régulière pour le problème où le domaine de contrôle est convexe. Nous résolvons numériquement ce problème de contrôle optimal, on détermine ainsi une trajectoire nominale (trajectoire de référence) pour la navette ainsi nous étudions la stabilité de la navette autour de la trajectoire nominale déterminée.

# Chapitre 1

## Contrôle optimal géométrique et applications au problème de réentrée atmosphérique

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de fixer la terminologie pour étudier notre problème et présenter le principe du maximum.

Nous nous concentrons sur le problème de la rentrée atmosphérique d'une navette spatiale contrôlée par son angle d'inclinaison, et où le coût de minimisation est le **flux thermique** total (Ici le moteur est soumis à des contraintes d'état sur le **flux thermique**, l'**accélération normale** et la **pression dynamique**) [J.E.M].

### 1.2 Problème de la rentrée atmosphérique

Le problème précis à l'étude est le suivant. Nous appelons phase atmosphérique la période de temps où l'altitude du moteur se situe entre 20 et 120 kilomètres. C'est en effet dans cette phase que, en l'absence de poussée motrice, les forces aérodynamiques (frottement avec l'atmosphère) peuvent être employées pour contrôler adéquatement la navette spatiale afin de la diriger vers un point final souhaité et de satisfaire les contraintes d'état particulier sur le **flux thermique**. Le contrôle est l'angle d'inclinaison et le critère de minimisation considéré est le **flux thermique**

total. Le modèle du système de contrôle est standard (voir par exemple [AM][CNES]) et s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma & (1.1) \\
\frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2} \rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\
&\quad + \Omega^2 \frac{r}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\
\frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\
\frac{dl}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
\frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi \\
&\quad + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{r \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma}
\end{aligned}$$

où

- $r$  désigne la distance du centre de gravité de la navette au centre de la Terre.
- $v$  est le module de sa vitesse relative.
- $\gamma$  est l'angle de vol (ou l'inclinaison du trajet, c'est-à-dire l'angle du vecteur par rapport à un plan horizontal).
- $L$  est la latitude.
- $l$  est la longitude
- $\chi$  est l'azimut (angle entre la projection du vecteur de vitesse sur le plan horizontal local mesuré par rapport à l'axe Sud-Nord de la planète).

### 1.2.1 Le modèle pour les forces

Pour l'arc atmosphérique on fait les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1 :** la navette est un planeur, c'est-à-dire que la poussée de la navette est nulle.

**Hypothèse 2 :** on suppose que la vitesse de l'atmosphère est la vitesse de la Terre. La vitesse relative de la navette par rapport à la Terre est donc la vitesse relative  $v$ .

Les forces agissant sur la navette sont de deux types :

- **force de gravité :** La force gravitationnelle apparaît avec un modèle habituel  $g = \frac{g_0}{r_2}$ , où  $g_0$  est la constante gravitationnelle.

- **force aérodynamique** : La force fluide due à l'atmosphère est décomposé en :

- une composante dite de **traînée** dont le module est  $D = (\frac{1}{2}\rho SC_D v^2)$  est opposé au vecteur de vitesse,

- et de la **force de portance**, dont le module est  $L = \frac{1}{2}\rho SC_L v^2$  qui est perpendiculaire au vecteur vitesse  $v$ . Ils sont dessinés sur la (*Fig.1*).

Ici,  $\rho = \rho(r) = \rho_0 e^{-\beta r}$  est la **densité de l'atmosphère**,  $S$  est un coefficient positif (zone de référence) représentant le moteur, et  $C_D, C_L$  sont respectivement les **coefficients de traînée et de portance**; ils dépendent de l'angle d'attaque et du nombre de Mach de la navette.

Le contrôle est l'**angle de la banque**  $\mu$ ; il agit sur l'orientation de la **force de portance** et donc son effet peut être de faire tourner la navette à gauche ou à droite mais aussi d'agir sur l'altitude. C'est un contrôle scalaire supposé prendre des valeurs dans  $[0, \pi]$ . Notons que la masse  $m$  du moteur est constante le long de cette phase atmosphérique car on suppose qu'il n'y a pas de poussée.

Enfin,  $\Omega$  est la vitesse de rotation angulaire de la planète. Dans le modèle ci-dessus les termes linéaires en  $\Omega$  représentent la **force de Coriolis**, et les termes proportionnels à  $\Omega^2$  sont dus à la **force centripète**.

Le problème de contrôle optimal à l'étude est de conduire le véhicule des conditions initiales aux conditions finales indiquées dans le tableau 1, en temps final libre, et de plus, le système est soumis à trois contraintes d'état où  $\mu \in [-\pi, \pi]$  et  $q_1$  vérifie les contraintes d'état :

- Contrainte sur le **flux thermique** :

$$\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max} \quad (1.2)$$

- Contrainte sur l'**accélération normale** :

$$\gamma_n = \gamma_{n_0}(\alpha) \rho v^2 \leq \gamma_n^{\max} \quad (1.3)$$

- Contrainte sur la **pression dynamique** :

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{\max} \quad (1.4)$$

où  $C_q, \varphi_{\max}, \gamma_{n_0}, \gamma_n^{\max}$  et  $P^{\max}$  sont des constantes positives. Dans le domaine du vol, en

termes de traînée  $d = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m} \rho v^2$  et de  $v$ .

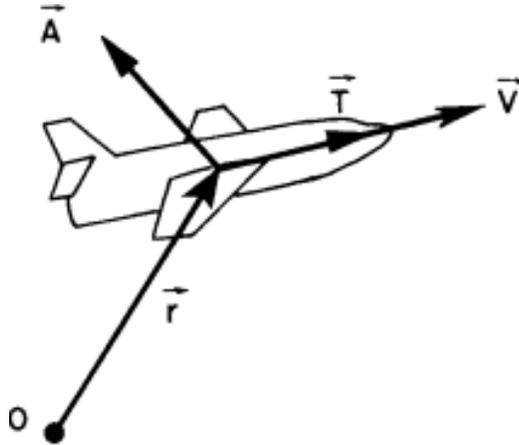


Fig1 : Variables d'état et de contrôle.

Le critère de minimisation est le flux thermique total long du vol.

$$J(\mu) = \int_0^T C_q \sqrt{\rho} v^3 dt \quad (1.5)$$

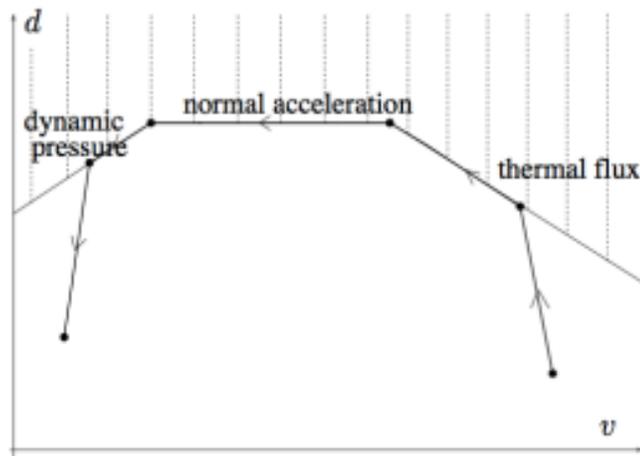


Fig.2 : Contraintes et stratégie Harpold-Graves

Notons que, si nous approximations  $\dot{v} \simeq -d$ , alors  $J(\mu) = K \int_{v_0}^{v_f} \frac{v^2}{\sqrt{d}} dv$  (avec  $K > 0$ ), et donc pour ce critère approché la stratégie optimale est de maximiser la traînée  $d$  tout le long du vol.

Cette stratégie, décrite dans [J.C] et habituellement utilisée, réduit le problème au problème de trouver une trajectoire traçant la limite du domaine autorisé dans l'ordre suivant : **flux thermique - accélération normale - pression dynamique**, comme indiqué sur la (*Fig.2*). L'avantage de cette méthode est que, le long des arcs de limite, le contrôle peut être facilement exprimé en boucle fermée (feedback), ce qui est très pratique pour les problèmes de stabilisation et pour la mise en œuvre embarquée en temps réel. Quoi qu'il en soit, cette stratégie n'est pas optimale pour le critère de minimisation (1.5), et c'était le but de [B.B2], [B.B4], [B.B3] et [E.T] de résoudre ce problème de contrôle optimal avec des considérations géométriques.

## 1.3 Réduction du problème et modèles simplifiés et contrôle optimal géométrique

### 1.3.1 Réduction du problème et modèles simplifiés

Le système (1.1) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q), \quad (1.6)$$

avec  $u_1 = \cos \mu$ ,  $u_2 = \sin \mu$  et  $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$ . Posons  $q_1 = (r, v, \gamma)$  et  $q_2 = (L, l, \chi)$ .

Pour le contrôle optimal de l'arc atmosphérique, le problème majeur au cours du vol est de respecter les contraintes. De plus ces dernières ne dépendent que de  $q_1$  et ceci requiert une analyse fine du mouvement longitudinal de l'engin. D'autres part les conditions limites ne portent que sur une partie des variables. Ces remarques nous amènent à construire un modèle simplifié en dimension trois du problème de rentrée atmosphérique. En effet en négligeant la vitesse de rotation  $\Omega$  de la planète et le terme de Coriolis en  $\Omega$ , le système (1.1) se décompose en :

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1) + O(\Omega), \quad \dot{q}_2 = f_2(q, u_2) + O(\Omega).$$

Plus précisément, dans les coordonnées  $q_1 = (r, v, \gamma)$  ce modèle simplifié s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k \rho v^2 \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v \cos \mu\end{aligned}\tag{1.7}$$

où  $\mu \in [-\pi, \pi]$  et  $q_1$  vérifie les contraintes d'état (1.2). Une seule des contraintes (1.3), (1.4) est à prendre en compte car  $C_D, C_L$  sont constants.

Deux cas se présente :

- Si  $u = u_1 = \cos \mu$  comme contrôle de la pente  $\gamma$ , ce qui donne le nouveau sous-système appelé modèle simplifié *I* (en dimension trois) qui représente le mouvement longitudinal de la navette, s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k \rho v^2 \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v u\end{aligned}\tag{1.8}$$

- Si on prend la dérivée de l'angle de gîte comme contrôle (noté  $u_2$ ) de la l'azimut  $\chi$ , ce qui ajoute en plus une autre équation dans le modèle simplifié, ce nouveau sous-système sera appelé modèle simplifié *II* (en dimension quatre) qui représente le mouvement latéral :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k \rho v^2 \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v \cos \mu \\ \frac{d\mu}{dt} &= u\end{aligned}\tag{1.9}$$

où le contrôle  $u$  vérifie la contrainte  $|u| \leq M$ , avec  $M$  représentant la vitesse maximale de rotation de la navette et  $k = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}$ ,  $k' = \frac{1}{2} \frac{SC_L}{m}$ .

**Remarque 1.1** *Le contrôle est soit  $\mu$  soit  $\dot{\mu}$ . Dans le premier cas on peut imposer les bornes  $\mu \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ou  $\mu \in [-\pi, \pi]$ .*

- Le contrôle  $u_1$  peut être négatives, i.e.  $u_1 \in [-1, +1]$
- Le signe de  $u_2$  autorise le planeur à tourner à droite ou à gauche.

**Remarque 1.2** Dans le modèle simplifié II, en contrôlant la dérivée  $\dot{\mu}$ , on exige la continuité et la dérivabilité de l'angle de gîte  $\mu$  par rapport au temps.

**Remarque 1.3** L'introduction du modèle simplifié II est justifiée par deux raisons :

1. **Raison théorique** : Durant le vol de la navette, dans le modèle simplifié I, on trouve des trajectoires bang-bang et des trajectoires sur le bord. Les contraintes sont d'ordre deux. Par ailleurs dans le système II, on ajoute en plus des trajectoires, qui consistent à incliner la navette sur son bord. Les contraintes sont d'ordre trois plus élevé.

2. **Raison numérique** : Dans le modèle simplifié I, on utilise la méthode de continuation [J.E.M] sur la borne maximale de la contrainte en partant de la solution pour le problème sans contrainte. Par ailleurs, dans le modèle simplifié II, on utilise en plus la continuation sur la borne maximale du contrôle, partant d'un  $M$  plus petit pour atteindre un  $M$  assez grand.

## 1.4 Contrôle optimal géométrique

### 1.4.1 Principe du maximum de Pontryagin

Nous présentons dans cette section, le Principe du Maximum de Pontryagin. Ce principe nous donne une condition nécessaire du premier ordre, d'optimalité locale, que doit vérifier toute solution potentielle d'un problème de contrôle optimal. Considérons tout d'abord un système de contrôle autonome s'écrivant en coordonnées locales :

$$\dot{q}(t) = X(q(t)) + u(t)Y(q(t)) = f(q(t), u(t)) \quad (1.10)$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ . Les contrôles  $u(\cdot)$  sont des fonctions mesurables bornées, à valeur dans un domaine quelconque  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous variétés différentiables de  $\mathbb{R}^n$  définissant les conditions aux deux bouts. Enfin on définit le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, T]$  par :

$$C(T, u) = \int_0^T f_0(q_u(t), u(t)) dt + g(T, q_u(T))$$

où  $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  toutes deux  $C^1$ , et  $q_u(\cdot)$  la trajectoire solution de (1.10) associée au contrôle  $u(\cdot)$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant le coût. Le temps final  $T$  peut être fixé ou non.

**Théorème 1.4** (*principe du maximum de Pontryagin*) [B.B2] *Si le contrôle  $u \in \mathcal{U}$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue et une constante  $p_0 \leq 0$  avec  $(p(\cdot), p_0) \neq (0, 0)$ , telles que pour presque tout  $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} \dot{q}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(q^*(t), p^*(t), p_0, u^*(t)), \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial v}(q^*(t), p^*(t), p_0, u^*(t)) \end{aligned} \quad (1.11)$$

presque partout sur  $[0, T]$ , où  $H(q, p, p_0, u) = \langle p, f(q, u) \rangle + p_0 f_0(q, u)$  est le pseudo-Hamiltonien du système.

$$H(q^*(t), p^*(t), p_0, u^*(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(q(t), p(t), p_0, v) \quad (1.12)$$

presque partout sur  $[0, T]$ . Si le temps final pour joindre la cible  $M_1$  est libre et si  $u$  est continu en  $T$ , on a la condition au temps final  $T$

$$\max_{v \in \mathcal{U}} H(T, q(T), p(T), p_0, v) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, q(T)). \quad (1.13)$$

Enfin le vecteur adjoint  $p$  peut être choisi d'après les conditions de transversalité aux extrémités suivantes.

$$p(0) \perp T_{q(0)} M_0, \quad p(T) - p_0 \frac{\partial g}{\partial q}(T, q(T)) \perp T_{q(T)} M_1, \quad (1.14)$$

Puisque le problème de contrôle est autonome, i.e.f et  $f_0$  ne dépendent pas de  $t$ , le pseudo-Hamiltonien  $H$  ne dépend pas de  $t$  et on a

$$\forall t \in [0, T], \quad H(x(t), p(t), p_0, u(t)) = C^{ste}, \quad p.p$$

**Définition 1.5** *Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet  $(x(\cdot), p(\cdot), p_0, u(\cdot))$  solution des équations (1.12).*

**Remarque 1.6** *Si  $p_0 < 0$  alors l'extremal est dit normal. Si  $p_0 = 0$  alors l'extremal est dit anormal. On peut également noter qu'en l'absence de contraintes de contrôle, les extrêmes anormaux*

projettent exactement sur des trajectoires singulières

Définissons le système augmenté

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t)), \quad \dot{q}_0(t) = f_0(x(t), u(t))$$

et notons  $\tilde{x} := (q_0, q)$  l'état et  $\tilde{f} := (f_0, f)$  le système, augmentés. Supposons  $g \equiv 0$ , le problème de contrôle optimal revient alors à trouver une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant  $q_0(T)$  avec  $q_0(0) = 0$ . Le PMP est fondé sur la remarque géométrique que nécessairement  $\tilde{q}(T) \in \partial \tilde{A}(\tilde{q}_0, T)$ , où  $\tilde{A}(\tilde{q}_0, T) = \{\tilde{q}(t, \tilde{q}_0, u), u \text{ admissible sur } [0, t]\}$  est l'ensemble accessible depuis  $\tilde{q}_0$ , en temps  $t$ , par les contrôles admissibles sur  $[0, t]$ .

On peut de plus définir un véritable système hamiltonien ainsi que son gradient symplectique (ou champ de vecteurs hamiltonien) sous certaines conditions, d'après le corollaire suivant.

**Corollaire 1.7** *Si  $H(q, p) := \max_{u \in \mathcal{U}} H(x, p, p_0, u)$  est défini et lisse sur un voisinage de l'extrémale  $z := (q, p) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , alors pour presque tout  $t \in [0, T]$*

$$\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t)) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}(z(t)), -\frac{\partial H}{\partial q}(z(t)) \right)$$

et  $H(q, p)$  est le Hamiltonien vrai (il ne dépend plus de  $u$ ).

**Définition 1.8** *Une extrémale  $(q(\cdot), p(\cdot), p_0, u(\cdot))$  solution de (1.12) est dite anormale si  $p_0 = 0$  et normale dans le cas contraire. Une extrémale est dite singulière si  $\partial_u H = 0$ . Dans ce cas, la condition définie ci-après est nécessaire pour que l'extrémale soit optimale sur  $[0, T]$ .*

**Proposition 1.9** *Si la trajectoire  $q(\cdot)$  associée au contrôle  $u(\cdot)$ , non contraint, est optimale sur  $[0, T]$  pour la topologie  $L^\infty$ , alors la condition de Legendre est vérifiée le long de l'extrémale  $(x(\cdot), p(\cdot), p_0, u(\cdot))$ , c'est à dire  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(q(t), p_0, p(t), u(t)) \cdot (v, v) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [0, T]$ .*

**Définition 1.10** *On appelle système de contrôle affine tout système de la forme*

$$\dot{q}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(q(t)).$$

Le champ de vecteurs  $F_0$  est appelé dérive et  $D = \{F_1, \dots, F_m\}$  est appelée la distribution contrôlée.

La proposition précédente n'est pas significative dans le cas affine, où l'on a  $\partial_{uu}H \equiv 0$ . On introduit donc la définition suivante.

**Définition 1.11** Une extrémale  $(x(\cdot), p(\cdot), p_0, u(\cdot))$  est dite totalement singulière si

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(q(t), p_0, p(t), u(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.15)$$

On dit que l'on se trouve dans un cas régulier si l'équation (1.15) est stricte le long de l'extrémale.

Dans le cas totalement singulier, pour un système affine par exemple, on a alors la condition nécessaire d'optimalité suivante.

**Proposition 1.12** Si la trajectoire  $q(\cdot)$  associée au contrôle  $u(\cdot)$ , non contraint, est optimale sur  $[0, T]$  pour la topologie  $L^\infty$ , et si l'extrémale associée est totalement singulière, alors la condition de Goh est vérifiée le long de l'extrémale, c'est à dire

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial u_i}, \frac{\partial H}{\partial u_j} \right\} = 0 \quad (1.16)$$

le long de l'extrémale, où  $\{.,.\}$  est le crochet de Poisson sur  $T^*X$ , défini ci-après. De plus, la condition de Legendre généralisée est vérifiée le long de l'extrémale, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial H}{\partial u}(q(t), p_0, p(t), u(t)).(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \forall t \in [0, T]. \quad (1.17)$$

**Définition 1.13** On dit que  $s \in [0, T]$  est un temps de commutation si  $s$  appartient à la fermeture de l'ensemble des  $t$  où  $v$  n'est pas  $C^1$ . Alors  $q(s)$  est appelée un point de commutation.

**Définition 1.14** Si  $(q, p, u)$  est un relèvement extrémal défini sur  $[0, T]$ , la fonction

$$\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = \langle p(t), Y(q(t)) \rangle \quad (1.18)$$

s'appelle la fonction de commutation ; alors le contrôle extrémal  $u$  est dit bang si  $u(t) = \pm 1$ , et il est dit bang- bang si  $u$  est constante par morceaux sur  $[0, T]$  et à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  ; enfin ce contrôle extrémal  $u$  est dit régulier si  $u(t) = \text{signe}(\varphi(t))$  presque partout ( $\varphi(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$ ), et il est dit (totalement) singulier si  $\forall t \in [0, T], \varphi(t) = 0$ .

**Définition 1.15** On note  $\gamma_+$  (resp  $\gamma_-$ ) un arc correspondant à  $u \equiv +1$  (resp.  $u \equiv -1$ ) et  $\gamma_s$  un arc correspondant à un contrôle singulier. On note  $\gamma_+\gamma_-$  un arc  $\gamma_+$  suivi par un arc  $\gamma_-$ ,  $\gamma_+\gamma_s$  un arc  $\gamma_+$  suivi par un arc  $\gamma_s$  et ainsi de suite pour toute concaténation d'arcs  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  ou  $\gamma_s$ , certains de ces arcs pouvant être vides. Le relèvement extrémal  $(q, p, u)$  est dit exceptionnel si  $H|_{(q,p,u)} = 0$  presque partout.

Soit  $(q, u)$  un extrémale définie sur  $[T, 0]$ ,  $T < 0$ .

**Définition 1.16** Le cut point le long de  $q$  est le premier point où  $q$  cesse d'être optimale c'est-à-dire le point  $q(t)$  où  $t$  est le temps de  $[T, 0]$  tel que  $q$  soit optimale sur  $]t, 0]$  et n'est pas optimale sur  $[t', 0]$ ,  $\forall t' < t$ .

## 1.4.2 Classification des extrémales au voisinage de $\Sigma$ .

Dans cette partie on va présenter brièvement les résultats de Kupka concernant la classification des relèvements extrémaux [I.K]. Soit  $z = (q, p)$ , on pose

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(q, p) : \langle p, Y(q) \rangle = 0\}, \quad \Sigma' = \{(q, p) ; \langle p, Y(q) \rangle = \langle p, [X, Y](q) \rangle = 0\} \\ \mathcal{S} &= \{(q, p) \in \Sigma' ; \langle p, [Y, [X, Y]](q) \rangle = 0\}\end{aligned}$$

où le crochet de Lie est calculé avec la convention  $[Z_1, Z_2] = \frac{\partial Z_2}{\partial v} Z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial v} Z_2$ . Soit  $(z, u)$  un relèvement extrémal défini sur  $[0, T]$ , supposé lisse. En dérivant la fonction de commutation

$$\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = \langle p(t), Y(q(t)) \rangle$$

il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \langle p(t), [X, Y](q(t)) \rangle \text{ et} \\ \ddot{\varphi}(t) &= \langle p(t), [X, [X, Y]](q(t)) - u(t) [Y, [X, Y]](q(t)) \rangle.\end{aligned}$$

### Points de commutations normaux

**Définition 1.17** 1. **Point ordinaire** : Soit  $z_0 \in \Sigma$ , supposons  $\Sigma$  et de codimension 1 en  $z_0$  alors si  $\langle p(t), [X, Y](q(t)) \rangle \neq 0$  en  $z_0$  on dit que  $z_0$  est un point de commutation ordinaire et chaque courbe extrimale dans un voisinage de  $z_0$  est de la forme  $\gamma_+\gamma_-$  ou  $\gamma_-\gamma_+$

2. **Point normal** : Soit  $z_0 \in \Sigma$  et supposons que  $Y(q_0) \neq 0$  et  $z_0 \in \Sigma \setminus \Sigma'$ . Le point  $z_0$  est dit normal.

Le comportement des bitrajectoires extrémales  $z = (q, p)$  au voisinage de  $z_0$  est donné par le lemme suivant :

**Lemme 1.18** Notons  $z^+$  (resp.  $z^-$ ) la bitrajectoire extrême correspondant à  $u \equiv +1$  (resp.  $-1$ ). Si l'on note  $\varphi^+$  (resp.  $\varphi^-$ ) la fonction de commutation évaluée le long de  $z^+$  (resp.  $z^-$ ) et  $t_0$  le temps de commutation avec  $z^+(t_0) = z^-(t_0) = z_0 = (q_0, p_0)$  on a :

$$\dot{\varphi}^+(t_0) = \dot{\varphi}^-(t_0) = \langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle$$

(loi de réflexion). De plus si  $z = (q, p)$  est une bitrajectoire extrême passant par  $z_0$  on a :

- (i) si  $\langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle < 0$  alors  $q = \gamma_+ \gamma_-$
- (ii) si  $\langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle > 0$  alors  $q = \gamma_- \gamma_+$

### Le cas du pli

**Définition 1.19** Soit  $z_0 = (q_0, p_0) \in \Sigma'$  et supposons que  $Y(q_0)$  est non nul et que  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  sont non nuls où  $\lambda^+$  (resp.  $\lambda^-$ )

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \langle p_0, [X, [X, Y]] q_0 - [Y, [X, Y]] q_0 \rangle \\ \lambda^- &= \langle p_0, [X, [X, Y]] q_0 + [Y, [X, Y]] q_0 \rangle \end{aligned}$$

Un tel point s'appelle un pli.

**Remarque 1.20** Le comportement des bitrajectoires extrémales régulières  $z = (q, p)$  au voisinage de  $z_0$  est donné par les trois allures indiquées en (Fig1) (le rôle de  $z^+$  et  $z^-$  est permutable en (ii) ), qui correspondent à :

- (i) cas hyperbolique :  $\lambda^+ > 0$  et  $\lambda^- < 0$ ,
- (ii) cas parabolique :  $\lambda^+ \lambda^- > 0$ ,
- (iii) cas elliptique :  $\lambda^+ < 0$  et  $\lambda^- > 0$ .

En particulier toutes les extrémales régulières sont bang-bang bien que le nombre de commutations ne soit pas uniformément borné dans le cas elliptique.

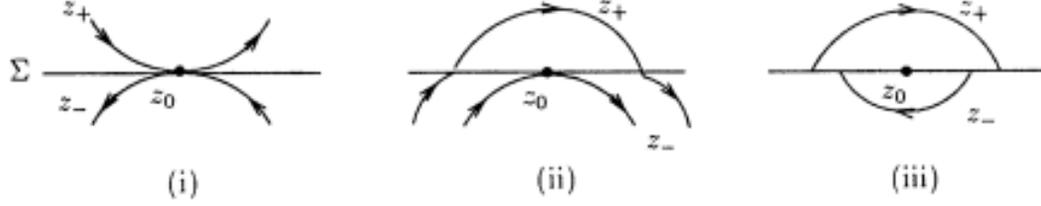


Fig.3 : Comportement des bitrajectoires extrémales régulières

Dans ces figures  $\Sigma'$  se projette en  $z_0$ .

### 1.4.3 Quelques propriétés des extrémales singulières

L'objet de ce paragraphe est de montrer que les extrémales singulières sont, au moins génériquement, solutions d'une équation différentielle analytique sur  $\Sigma'$  et de rappeler leur statut d'optimalité pour le problème point-point, c'est-à-dire lorsque la variété terminale est réduite à un point, ceci sous des conditions de codimension zéro ou un pour le système  $(X, Y)$ .

**Définition 1.21** Les relèvements extrémaux singuliers vérifient  $\varphi(t) = 0, \forall t \in [0, T]$  c'est-à-dire que les bitrajectoires extrémales singulières  $z(t) = (q(t), p(t))$  sont contenues dans  $\Sigma$ .

**Lemme 1.22** Les relèvements extrémaux singuliers  $(q, p, u)$  sont tels que  $(q, p)$  est contenu dans  $\Sigma'$  et ceux qui sont tels que  $(q, p)$  est contenu dans  $\Sigma' \setminus S$  sont les solutions de l'équation différentielle hamiltonienne sur  $\Sigma' \setminus S$  où le contrôle singulier est donné pour  $(q(t), p(t)) \in \Sigma' \setminus S$  par  $u(t) = \hat{u}(q(t), p(t))$  avec :

$$\hat{u}(q, p) = \frac{\langle p, [X, [X, Y]](q) \rangle}{\langle p, [Y, [X, Y]](q) \rangle} \quad (1.19)$$

et  $\hat{H}(q, p) = \langle p, X(q) + \hat{u}(q, p)Y(q) \rangle$

**Preuve.** En dérivant l'équation de contrainte  $\langle p, Y(q) \rangle \equiv 0$  le long de  $(q(t), p(t), u(t))$  il vient :

$$\langle p, [X, Y](q) \rangle = \langle p, [X, [X, Y]](q) - u [Y, [X, Y]](q) \rangle \equiv 0$$

et le contrôle singulier est bien  $\hat{u}$ . Par ailleurs

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \text{ et } \frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.20)$$

sur  $\varphi \equiv 0$ , d'où l'assertion. ■

On peut observer que (1.20) définit bien un champ de vecteurs hamiltonien sur  $\Sigma' \setminus S$  pour la structure induite par la structure symplectique canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

### Définitions et notations

Soit  $(q, p, u)$  un relèvement singulier défini sur  $[0, T]$  et tel que  $(q, p)$  est contenu dans  $\Sigma' \setminus S$ .

**Définition 1.23** *On dit que  $u$  est admissible si  $\forall t \in [0, T]$ ,  $u(t) = \hat{u}(q(t), p(t)) \in [-1, +1]$ . Un tel contrôle est dit saturant si  $u(0)$  ou  $u(T) = \pm 1$ .*

Supposons que application  $t \mapsto q(t)$  soit injective. On peut alors en utilisant un difféomorphisme local identifier à  $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$ . Par ailleurs en utilisant un feedback, on peut identifier (en changeant  $X$  en  $\hat{X} = X + \hat{u}Y$ ) le contrôle singulier au contrôle nul. Avec ces normalisations introduisons alors l'ensemble

$$K(t) = \{ad^k \hat{X}(Y)(q(t)); k = 0, \dots, +\infty\}_{ev}.$$

s'appelle le *premier cône de Pontriaguine*.

**Définition 1.24** [*H.H*] *On dit que  $(q, u)$  est une extrémale singulière ssi  $\forall t \in ]0, T]$ ,  $K(t)$  est de codimension au moins égale à  $n$ .*

Faisons les hypothèses suivantes :

**(H3)**  $\forall t \in ]0, T]$ ,  $K(t)$  est de codimension 1 et de plus pour tout  $t \in [0, T]$  les  $(n - 1)$  vecteurs  $\{ad^k \hat{X}(Y)(q(t)); k = 0, \dots, n - 2\}$  sont indépendants.

**(H4)**  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\hat{X}(v(t)) \notin \{ad^k \hat{X}(Y)(v(t)); k = 0, \dots, n - 3\}_{ev}$ .

si  $n \geq 3$  et si  $n = 2$ ,  $\hat{X}(q(t))$  et  $Y(q(t))$  sont indépendants.

En dérivant  $\varphi(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$  on en déduit que  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \{p(t), ad^k \hat{X}(Y)(q(t))\} = 0$  et le vecteur adjoint est donc orthogonal à  $K(t)$  en tout instant  $t$ ; par ailleurs si  $h$  est la valeur

du hamiltonien  $\hat{H} = \langle p, X(q) \rangle$  le long du relèvement extrémal,  $p$  est orienté selon la convention  $h \geq 0$  (voir (1.4) condition (1.13)) et est défini de façon unique à un facteur près sous les hypothèses **(H3)** et **(H4)**.

**Définition 1.25** *On dira que le relèvement extrémal singulier est exceptionnel si  $h = 0$  et hyperbolique (resp. elliptique) si  $h > 0$  et  $\forall t \in [0, T], \langle p(t), [Y, [\hat{X}, Y]](q(t)) \rangle < 0$  ( $> 0$ ).*

**Proposition 1.26** *Soit  $(q, u)$  une extrémale singulière admissible définie sur  $[0, T]$  et vérifiant **(H3)** et **(H4)**. Alors si  $T$  est assez petit, la trajectoire  $q$  est temps minimale (resp. maximale) pour le problème point-point ssi on est dans le cas hyperbolique ou exceptionnel (resp. elliptique).*

**Preuve.** Ces résultats proviennent de [B.B1]. ■

Des résultats (1.4.2) et (1.4.3) on déduit les propriétés suivantes.

### Propriétés

Soit  $(q, u)$  une extrémale singulière définie sur  $[0, T]$  vérifiant **(H3)** et **(H4)**. Alors dans le cas hyperbolique ou elliptique  $u \in ]-1, 1]$ , et  $(q, u)$  admet un seul relèvement extrémal  $(q, p, u)$  où  $p \in \mathbb{P}^{n-1}$  (espace projectif).

Le point  $z_0 = (q(0), p(0))$  est un pli et les relèvements extrémaux sont donnés par la (Fig.3)

(i) si  $(q, p, u)$  est hyperbolique et (iii) si  $(q, p, u)$  est elliptique. Dans le cas exceptionnel,  $u \in ]-1, 1]$  et  $(q, u)$  admet deux relèvements extrémaux  $(q, p, u)$  avec  $p \in S^{n-1}$ , l'un tel que  $z_0 = (q(0), p(0))$  soit un point pli hyperbolique (Fig.3(i)) et l'autre tel que  $z_0 = (q(0), -p(0))$  soit un point pli elliptique (Fig.3(iii)). Le cas parabolique correspond à la situation où  $u \notin [-1, 1]$ , *i.e.* n'est pas admissible.

### Le cas $n = 2$

**Lemme 1.27** *Les relèvements extrémaux singuliers  $(q, p, u)$  sont tels que les trajectoires  $q$  sont contenues dans le lieu des points où  $Y$  et  $[X, Y]$  sont colinéaires. Si  $[Y, [X, Y]](q)$  n'est jamais colinéaire à  $Y(q)$ , le contrôle singulier est donné par (1.19) et  $\hat{u}$  ne dépend pas de  $p$  si  $Y(q)$  ne s'annule pas.*

**Preuve.** On a  $\langle p, Y(q) \rangle = \langle p, [X, Y](q) \rangle \equiv 0$ , dans le cas singulier et donc, puisque  $p \neq 0$  en tout instant,  $Y(q)$  et  $[X, Y](q)$  sont colinéaires. Le contrôle singulier est défini par (1.19) et  $p$  peut être éliminé en utilisant  $\langle p, Y(q) \rangle \equiv 0$ . ■

**Proposition 1.28** *Soit  $v_0$  tel que  $X, Y$  sont indépendants en  $q_0$  ainsi que  $Y, [X, Y]$ . Alors dans un voisinage de  $q_0$  toute trajectoire optimale est régulière avec au plus une commutation. Soit  $q_0$  tel que  $X, Y$  sont indépendants en  $q_0$  et  $Y, [X, Y]$  sont colinéaires en  $q_0$ . Alors dans le cas hyperbolique, une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_{\pm}\gamma_s\gamma_{\pm}$ , dans le cas parabolique, de la forme  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-$ . Dans le cas elliptique toute trajectoire optimale est bang-bang avec au plus une commutation.*

**Preuve.** Tous ces résultats viennent de la classification des extrémales excepté dans le cas elliptique étudié en [H.J.S]. ■

**Le cas  $n = 3$**

**Lemme 1.29** *Notons*

$$D_1 = \det(Y, [X, Y], [Y, [X, Y]]) \quad (1.21)$$

$$D_2 = \det(Y, [X, Y], [X, [X, Y]])$$

$$D_3 = \det(Y, [X, Y], X)$$

*Les extrémales singulières dont les trajectoires  $q$  sont contenues dans  $\mathbb{R}^3 \setminus (D_1 = 0)$  sont les solutions de*

$$\dot{q} = \hat{X}(q) = X(q) + \hat{u}(q)Y(q) \text{ et } \hat{u}(q) = -D_2(q)/D_1(q) \quad (1.22)$$

*Alors dans le cas hyperbolique (resp. elliptique, exceptionnel), ces extrémales sont les solutions non réduites à 1 point ou non périodiques de (1.22) contenues dans  $D_3D_1 > 0$ , (resp.  $D_3D_1 < 0, D_3 = 0$ ) telles que  $\hat{u} \in ]-1, +1[$*

**Preuve.** Les relèvements singuliers  $(q, p, u)$  vérifient

$$\langle p, Y(q) \rangle = \langle p, [X, Y](q) \rangle = \langle p, [X, [X, Y]](q) + u[Y, [X, Y]](q) \rangle \equiv 0$$

En dehors de  $D_1 = 0$ , le contrôle singulier est donc donné par le feedback  $\hat{u}$ . On vérifie que ensemble  $D_3 = 0$  est un ensemble invariant pour (1.22) dont les solutions sont les extrémales exceptionnelles. Lorsque  $\hat{u} \in ]-1, +1[$ , cet ensemble représente la séparation entre la zone hyperbolique  $D_3D_1 > 0$  et la zone elliptique  $D_3D_1 < 0$ . ■

**Proposition 1.30** *La synthèse temps minimale pour le problème point- point au voisinage de  $q_0 \in \mathbb{R}^3$  est la suivante.*

· Si  $q_0 \in D_2 D_1 > 0$ ,  $\hat{X}(q_0) \neq 0$  et  $\hat{u}(q_0) \in ]-1, +1[$  (cas hyperbolique), une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_{\pm} \gamma_s \gamma_{\pm}$ .

· Si  $q_0 \in D_3 D_1 < 0$ ,  $\hat{X}(q_0) \neq 0$  et  $\hat{u}(q_0) \in ]-1, +1[$  (cas elliptique), toute trajectoire optimale est bang-bang avec au plus deux commutations.

· Si  $q_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{D_1 = 0 \text{ où } \hat{X} = 0\}$  et  $\hat{u}(q_0) \notin [-1, +1]$  (cas parabolique) toute trajectoire optimale est bang-bang, avec au plus deux commutations.

**Preuve.** Ces résultats proviennent de [H.S]. ■

#### 1.4.4 Principe du Minimum avec contraintes sur l'état

Le problème que l'on étudie est de minimiser  $J(q(T))$  donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{|u(t)| \leq M} J(u) \\ \dot{q} = X(q) + uY(q), \quad |u| \leq 1 \\ C(q) \leq 0 \\ q(0) = q_0, \quad \Psi(q(T)) = 0. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

où  $J(u) = \Phi(q(T))$  et  $q$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $C$  sont supposés des applications lisses et le temps final  $T$  est fixé voir [H.M].

**Notation 1.31** *On note respectivement  $[X, Y](q)$  et  $Y \cdot C(q)$ , le crochet et la dérivée de Lie calculés avec la convention :  $Y \cdot C(q) = \frac{\partial C}{\partial q}(q)Y(q)$ .*

Avec ces notations, on peut définir l'ordre de la contrainte par :

**Définition 1.32** *L'ordre absolu (ou générique) de la contrainte est l'entier  $m$  tel que :*

$$Y \cdot C = Y(X \cdot C) = \dots = Y(X^{m-2} \cdot C) = 0 \text{ et } Y(X^{m-1} \cdot C) \neq 0 \quad (1.24)$$

où les champs de vecteurs  $X$ ,  $Y$  agissent sur  $C$  par dérivée de Lie. Autrement dit l'ordre  $m$  de la contrainte pour le système est le plus petit entier non nul tel que, pour tout  $k = 0, \dots, m-1$ ,  $C^{(k)}(q(t), u(t))$  ne dépend pas explicitement de  $u$ .

**Définition 1.33** On appelle arc frontière un arc  $t \mapsto \gamma_b(t)$  tel que  $C(\gamma_b(t)) = 0$  et on note  $u_b$  le contrôle frontière associé. Si l'ordre absolu de la contrainte est  $m$ , un arc frontière est donc contenu dans :

$$\frac{\partial^k}{\partial^k q} C(q) = C^{(k)} = X^k \cdot C + uY (X^{k-1} \cdot C) = 0, \quad 0 \leq k \leq m-1 \quad (1.25)$$

On note :

$$u_b = -\frac{X^m \cdot C}{Y (X^{m-1} \cdot C)} \quad (1.26)$$

le feedback associé à un arc frontière.

**Remarque 1.34** Le long d'un arc frontière d'ordre  $m$ , la condition générique suivante est vérifiée :  $\frac{\partial}{\partial u} (C^{(m)}) (\gamma_b(t)) \neq 0, \forall t \in [0, T]$

**Hypothèses C.** Soit  $t \mapsto \gamma_b(t)$ , un arc frontière. On introduit les hypothèses suivantes :

(C<sub>1</sub>) le long de  $\gamma_b$ ,  $Y (X^{m-1} \cdot C) \neq 0$  où  $m$  est l'ordre de la contrainte.

(C<sub>2</sub>)  $|u_b(t)| \leq M$  pour  $t \in ]0, T[$ , c'est-à-dire que le contrôle frontière est admissible.

(C<sub>3</sub>)  $|u_b(t)| < M$  pour  $t \in [0, T]$ , c'est-à-dire que le contrôle frontière est non saturant.

### Conditions nécessaires d'optimalité

Soit  $t \mapsto \gamma_b(t)$ ,  $t \in [0, T]$  un arc frontière. On suppose que les hypothèses (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) (1.4.4) sont satisfaites.

**Proposition 1.35** Soit  $t \mapsto q(t)$ ,  $t \in [0, T]$  une trajectoire optimale, lisse par morceaux. On introduit le Hamiltonien :

$$H(q, p, u, \eta) = \langle p, X + uY \rangle + \eta C$$

où  $p \neq 0$  est le vecteur adjoint, et  $\eta$  est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte. Sous les hypothèses (C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>), satisfaites le long des arcs frontières, alors les conditions nécessaires de Maurer [H.M] sont les suivantes :

1. Il existe  $\eta(t) \geq 0$  et des réels  $\eta_0 \geq 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  tels que le vecteur adjoint vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p\left(\frac{\partial X}{\partial q} + u\frac{\partial Y}{\partial q}\right) - \eta\frac{\partial C}{\partial q} & p.p. \\ p(T) &= \eta_0\frac{\partial \Phi}{\partial q}(q(T)) + \sigma\frac{\partial \Psi}{\partial q}(q(T)) \end{aligned} \quad (1.27)$$

2. La fonction  $t \rightarrow \eta(t)$  est continue à l'intérieur de l'arc frontière et vérifie  $\eta(t)C(q(t)) = 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$

3. La condition de saut en un temps  $t_i$  de contact ou de jonction avec la frontière est :

$$H(t_i^+) = H(t_i^-), \quad \text{et} \quad p(t_i^+) = p(t_i^-) - \nu_i\frac{\partial C}{\partial q}(q(t_i)), \quad \nu_i \geq 0. \quad (1.28)$$

4. Le contrôle optimal  $u(t)$  minimise presque partout le Hamiltonien :

$$H(q(t), p(t), u(t), \eta(t)) = \min_{|v| \leq M} H(q(t), p(t), v, \eta(t)) \quad (1.29)$$

### 1.4.5 Problème du temps minimal

Le temps de transfert est ici non fixé. On reparamétrise les trajectoires sur  $[0, 1]$  on posant  $s = \frac{t}{T}$  et  $z = T$ . Le problème est alors

$$\begin{cases} \min J(u) \\ \frac{dq}{ds} = (X + uY)z, \quad \frac{dt}{ds} = z, \quad \frac{dz}{ds} = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

où  $J(u) = t(1)$  et le Hamiltonien s'écrit

$$H = \langle p, (X(q) + uY(q))z \rangle + p_t z(t) + \eta C(q). \quad (1.31)$$

Le système adjoint se décompose en :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p\left(\frac{\partial X}{\partial q} + u\frac{\partial Y}{\partial q}\right)z - \eta\frac{\partial C}{\partial q}, \\ \frac{dp_t}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dp_z}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -p(X + uY) - p_t \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les conditions de transversalité impliquent  $p_t(1) \geq 0$ ,  $p_z(0) = 0$  et en utilisant de plus

[A.B.Y.C.H] on a  $M = \max_{|v| \leq M} H = 0$  et donc  $p_z = 0$ .

En paramétrant par  $t$  et en remplaçant  $\eta$  par  $\frac{\eta}{z}$  et  $h$  en  $\frac{h}{z}$  on obtient les conditions suivantes.

### Conditions nécessaires pour le problème du temps minimal

#### Proposition 1.36

$$\dot{q} = (X + uY)z \quad p.p. \quad (1.33)$$

$$\dot{p} = -p\left(\frac{\partial X}{\partial q} + u\frac{\partial Y}{\partial q}\right)z - \eta\frac{\partial C}{\partial q} \quad p.p.$$

$$\langle p, X + uY \rangle + p_t = \min_{|v| \leq M} \langle p, X + uY \rangle + p_t = 0, \quad (p, p_t) \neq (0, 0) \quad (1.34)$$

Lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière, la condition de saut est :

$$p(t_i^+) = p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial q}(q(t_i)), \quad \nu_i \geq 0 \quad (1.35)$$

De plus  $p_t \geq 0$ ,  $\eta(t) \geq 0$  avec  $\eta = 0$  si  $C < 0$ , et  $t \mapsto \eta(t)$  est continue le long de la frontière  $C = 0$ .

**Définition 1.37** Pour le problème du temps minimal, on appelle extrémale  $(q, p, \eta, \nu_i)$  une solution des équations précédentes.

### 1.4.6 Calcul des contrôles extrémaux

**Définition 1.38** Une extrémale singulière sur  $I$  est dite d'ordre minimal si

$$\langle p(t), [Y, [X, Y]](q(t)) \rangle \neq 0, \quad \forall t \in I \quad (1.36)$$

**Proposition 1.39** Si  $(q, p, u)$  est une extrémale singulière d'ordre minimal définie sur  $I$ , alors :

$$\forall t \in I, \quad u_s(t) = -\frac{\langle p(t), [X, [X, Y]](q(t)) \rangle}{\langle p(t), [Y, [X, Y]](q(t)) \rangle}. \quad (1.37)$$

Pour tester l'optimalité d'une extrémale singulière, on utilise la condition nécessaire de Legendre-Clebsch, qui s'écrit :

$$\langle p(t), X(q) \rangle \langle p(t), [Y, [X, Y]](q) \rangle \geq 0, \quad (1.38)$$

avec  $\langle p(t), Y(q) \rangle = \langle p(t), [X, Y](q) \rangle = 0$ .

### 1.4.7 Extrémales Frontières

Sous les hypothèses  $(\mathbf{C}_1)$  et  $(\mathbf{C}_2)$  une extrémale frontière vérifie les conditions nécessaires précédentes, et inclue dans l'ensemble  $C(q(t)) = 0$ , en plus le contrôle est donné par :

$$u_b = -\frac{X^m \cdot C}{Y(X^{m-1} \cdot C)}. \quad (1.39)$$

Elle vérifie également :  $\langle p, Y \rangle = 0$ .

#### Calcul des paramètres $(\eta, \nu_i)$

On va présenter ces calculs sous forme des formules de nature géométrique en utilisant les crochets de Lie itérés de  $X, Y$  agissant sur les contraintes.

**Calcul de  $\eta(t)$  :** Soit  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  la suite de champs de vecteurs définie par :

$$\begin{cases} \psi_0 = Y \\ \psi_{i+1} = [X, \psi_i] + u[Y, \psi_i], \quad \forall i > 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

On peut vérifier par récurrence que  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  et la contrainte  $C$  (d'ordre  $m$ ) vérifient :

$$\psi_k \cdot \left( \frac{\partial^{i-(k+1)}}{\partial t^{i-(k+1)}} C(q(t)) \right) = (-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^i}{\partial t^i} C(q(t)) \right), \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{0, i-1} \quad (1.41)$$

D'où :

**Lemme 1.40** *La suite  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  vérifie :*

$$\psi_i \cdot C = \begin{cases} 0 & \forall i < m-1 \\ (-1)^{m-1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} C(q(t)) \right) = (-1)^{m-1} Y \cdot (X^{m-1} \cdot C) & \text{si } i = m-1. \end{cases} \quad (1.42)$$

**Corollaire 1.41** *Le long d'un arc frontière définie sur  $[t_1, t_2]$ , on a :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t) = \langle p(t), \psi_i \rangle = 0 \quad \forall i \leq m-1, \\ \frac{\partial^m}{\partial t^m} \Phi(t) = \langle p(t), \psi_m \rangle - (-1)^{m-1} \eta(t) Y \cdot (X^{m-1} \cdot C) = 0. \end{cases} \quad (1.43)$$

De plus on a :

$$\eta(t) = (-1)^{m-1} \frac{\langle p(t), \psi_m \rangle}{Y.(X^{m-1} \cdot C)} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-] \quad (1.44)$$

**Lemme 1.42** Si  $C$  est une contrainte d'ordre  $m \geq 2$ , alors on a :

$$(*) \quad (ad^i X(Y)) \cdot C = 0 \quad \forall i = 0, \dots, m-2 \quad (1.45)$$

$$(**) \quad (ad^{m-1} X(Y)) \cdot C = (-1)^{m-1} Y.(X^{m-1} \cdot C)$$

**Remarque 1.43** On peut remarquer que le lemme précédent est valable aussi pour  $m = 1$ .

d'après le lemme et le Corollaire précédents, on obtient donc :

**Corollaire 1.44** Durant un arc frontière définie sur  $[t_1, t_2]$ , on a :

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), \psi_m \rangle}{ad^{m-1} X(Y) \cdot C} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-] \quad (1.46)$$

$$u_b(t) = (-1)^m \frac{X^m \cdot C}{(ad^{m-1} X(Y)) \cdot C} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-] \quad (1.47)$$

où  $C$  est une contrainte d'ordre  $m$ .

**Calcul de  $\nu$  :** Soit  $t_1$  un point de jonction ou de contact. D'après les lemmes ( 1.40) et (1.42) on obtient donc :

**Corollaire 1.45** Si  $t_1$  est un point de jonction ou de contact, alors le saut  $\nu$  vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t_1^+) &= \langle p(t_1^-), \psi_i(t_1^+) \rangle \quad \forall i < m-1, \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \Phi(t_1^+) &= \langle p(t_1^-), \psi_{m-1}(t_1^+) \rangle - \nu(ad^{m-1} X(Y)) \cdot C \end{aligned} \quad (1.48)$$

En particulier si  $t_1$  est un point de jonction, le saut  $\nu$  vérifie :

$$\langle p(t_1^-), \psi_i(t_1^+) \rangle = 0 \quad \forall i < m-1, \quad (1.49)$$

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), \psi_{m-1}(t_1^+) \rangle}{(\alpha d^{m-1} X(Y)) \cdot C}. \quad (1.50)$$

Maintenant on calcule  $\eta(t)$  et  $\nu$  pour  $m = 1$ ,  $m = 2$  et  $m = 3$  :

**Le cas  $m = 1$**  d'après les calculs précédents on a :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= Y, \quad \psi_1 = [X, Y], \quad u_b = -\frac{X \cdot C}{Y \cdot C}, \\ \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, Y] \rangle}{Y \cdot C} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-], \\ \nu &= \frac{\Phi(t_1^-) - \Phi(t_1^+)}{Y \cdot C}.\end{aligned}\tag{1.51}$$

• Si  $t_1$  est un point de jonction entre un *arc* singulier et un *arc* frontière, on a :

$$\Phi(t_1^-) = \Phi(t_1^+) = 0, \text{ d'où } \nu = 0.$$

• Aussi on a :

**Lemme 1.46** *Supposons que le contrôle est discontinu lors du contact ou de la jonction d'un arc bang-bang avec la frontière, alors  $\nu = 0$ .*

**Le cas  $m = 2$**  d'après les calculs précédents on a :

$$\psi_0 = Y, \quad \psi_1 = [X, Y], \quad \psi_2 = [X, [X, Y]] + u[Y, [X, Y]].$$

**Lemme 1.47** 1. *Le long de l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned}u_b &= \frac{X^2 \cdot C}{[X, Y] \cdot C}, \quad \langle p(t), Y(q(t)) \rangle = 0 \text{ et } \langle p(t), [X, Y](q(t)) \rangle = 0, \\ \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_b \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, Y] \cdot C}\end{aligned}\tag{1.52}$$

2. *En un point de contact ou de jonction :*

$$\Phi(t_1^-) = \Phi(t_1^+), \quad \nu = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle - \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle}{[X, Y] \cdot C}\tag{1.53}$$

Donc d'après le lemme précédent :

• Si  $t_1$  est un point de jonction entre un *arc* singulier et un *arc* frontière, on a :

$$\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle = \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle = 0, \text{ d'où } \nu = 0.$$

• Si  $t_1$  est un point de jonction entre un *arc* bang-bang et un *arc* frontière, on a :

$$\langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle = 0, \text{ d'où}$$

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle}{[X, Y] \cdot C}.\tag{1.54}$$

**Le cas  $m = 3$**  d'après les calculs précédents on a :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= Y, \quad \psi_1 = [X, Y], \quad \psi_2 = [X, [X, Y]] + u[Y, [X, Y]], \\ \psi_3 &= [X, [X, [X, Y]]] + u^2[Y, [Y, [X, Y]]] + 2u[Y, [X, [X, Y]]] + ((X.u) + u(Y.u))[Y, [X, Y]].\end{aligned}$$

**Lemme 1.48** 1. *Le long de l'arc frontière, on a :*

$$\begin{aligned}u_b &= -\frac{X^3 \cdot C}{[X, [X, Y]] \cdot C}, \quad \eta(t) = \frac{\langle p(t), \psi_3 \rangle_{u=u_b}}{([X, [X, Y]] \cdot C)}. \\ \langle p(t), Y \rangle &= \langle p(t), [X, Y] \rangle = \langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_b \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle = 0,\end{aligned}\tag{1.55}$$

2. *En un point de contact ou de jonction :*

$$\begin{aligned}\Phi(t_1^-) &= \Phi(t_1^+) \\ \langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle &= \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle \\ \nu &= \frac{\langle p(t_1^-), \psi_2(t_1^+) \rangle - \langle p(t_1^+), \psi_2(t_1^+) \rangle}{[X, [X, Y]] \cdot C}\end{aligned}\tag{1.56}$$

Donc d'après le lemme précédent :

- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un arc bang-bang et l'arc frontière, alors  $\langle p(t_1^+), \psi_2(t_1^+) \rangle = 0$ , d'où :

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), \psi_2(t_1^+) \rangle}{[X, [X, Y]] \cdot C} = \frac{\langle p(t_1^-), [X, [X, Y]] \rangle + u_b(t_1^+) \langle p(t_1^-), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, [X, Y]] \cdot C}.\tag{1.57}$$

- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un *arc* singulier ( d'ordre minimal) et l'arc frontière, or on sait que  $u_s$  vérifie :

$$\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_s \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle = 0,\tag{1.58}$$

d'où

$$\nu = \frac{(u_b(t_1^+) - u_s(t_1^-)) \langle p(t_1^-), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, [X, Y]] \cdot C}.\tag{1.59}$$

# Chapitre 2

## Contrôle optimal sur le modèle simplifié $I$

Dans cette section on résout théoriquement, puis numériquement le problème du contrôle optimal pour le système simplifié  $I$ . Pour appliquer la méthode de continuation sur la borne maximale de la contrainte, tout d'abord en ne tenant pas compte des contraintes sur l'état, puis en les prenant en compte voir [M.J].

### 2.1 Analyse des extrémales du sous-système $I$ sans contrainte

Le système (1.8) peut s'écrire comme un système de contrôle affine mono-entrée :

$$\dot{q} = X(q) + uY(q), \quad |u| \leq 1, \quad \text{où } q = (r, v, \gamma) \quad (2.1)$$

$$X = v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad Y = k' \rho v \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

et un coût à minimiser de la forme :

$$J(u) = \int_0^T \varphi(q) dt \quad \text{avec } \varphi(q) = C_q \sqrt{\rho} v^3. \quad (2.2)$$

Supposons  $\varphi(q) > 0$  dans le domaine d'état. On introduit l'équation :

$$\dot{q}_0 = \varphi(q), \quad q_0(0) = 0 \quad (2.3)$$

et  $\tilde{q} = (q, q_0)$  l'espace d'états élargi. Les équations (2.1) et (2.3) définissent donc le système élargi  $\dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(q) + u\tilde{Y}(q)$

On introduit le Hamiltonien  $H(p, q, u) = \langle p, X + uY \rangle + p_0\varphi(q)$ , où  $p = (p_r, p_v, p_\gamma)$  est le vecteur adjoint, et  $p_0$  est une constante telle que :  $(p, p_0) \neq (0, 0)$ . On applique un nouveau paramétrage aux équations en posant  $ds = \varphi(q(t))dt$  le système (2.1) devient alors :

$$\dot{q} = \bar{X}(q) + u\bar{Y}(q), \quad |u| \leq 1$$

où  $\bar{X} = \psi X$ ,  $\bar{Y} = \psi Y$  et  $\psi = \frac{1}{\varphi}$ . Le problème de contrôle optimal est équivalent alors à un problème de temps minimal.

### 2.1.1 Existence de trajectoires singulières.

**Proposition 2.1** *Dans le domaine de vol où  $\cos \gamma \neq 0$ , il n'y a pas d'arc singulier exceptionnel pour le système  $(X, Y)$ .*

**Preuve.** Les extrémals singulières sont contenues dans  $\langle p, Y(q) \rangle = 0$ . En dérivant deux fois par rapport à  $t$  il vient :

$$\begin{aligned} \langle p, [X, Y](q) \rangle &= 0 \\ \langle p, [X, [X, Y]](q) \rangle + u \langle p, [Y, [X, Y]](q) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Calculons les crochets de Lie  $[X, Y]$ . Le concept de trajectoire singulière est invariant par feedback et dans nos calculs on peut donc remplacer  $X, Y$  par :

$$X = v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial \gamma}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[ v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\ &= \left[ v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] - \left[ (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} [v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \gamma}] &= v \sin \gamma [\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \gamma}] + v \sin \gamma (\frac{\partial}{\partial r}(1)) \frac{\partial}{\partial \gamma} - 1 (\frac{\partial}{\partial \gamma} v \sin \gamma) \frac{\partial}{\partial r} \\ &= -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} \\ [(g \sin \gamma + k \rho v^2) \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \gamma}] &= (g \sin \gamma + k \rho v^2) [\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \gamma}] + (g \sin \gamma + k \rho v^2) \frac{\partial}{\partial v} (1) - (\frac{\partial}{\partial \gamma} (g \sin \gamma + k \rho v^2)) \frac{\partial}{\partial v} \\ &= -g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

par suite

$$[X, Y] = [v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \gamma}] - [(g \sin \gamma + k \rho v^2) \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \gamma}]$$

alors

$$[X, Y] = -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v}$$

Calculons maintenant

$$[Y, [X, Y]] = [\frac{\partial}{\partial \gamma}, -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r}] + [\frac{\partial}{\partial \gamma}, g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v}]$$

or

$$\begin{aligned} [\frac{\partial}{\partial \gamma}, -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r}] &= -v \cos \gamma [\frac{\partial}{\partial \gamma}, \frac{\partial}{\partial r}] + \frac{\partial}{\partial \gamma} (-v \cos \gamma) \frac{\partial}{\partial r} + v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} (1) \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ &= v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\frac{\partial}{\partial \gamma}, g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v}] &= g \cos \gamma [\frac{\partial}{\partial \gamma}, \frac{\partial}{\partial v}] + \frac{\partial}{\partial \gamma} (g \cos \gamma) \frac{\partial}{\partial v} + v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v} (1) \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ &= -g \sin \gamma \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

donc

$$[Y, [X, Y]] = v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - g \sin \gamma \frac{\partial}{\partial v}$$

donc  $[X, Y]$  et  $[Y, [X, Y]]$  sont colinéaires. De plus :

$$\begin{aligned} [X, [X, Y]] &= \left[ v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v}, -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v} \right] \\ &= k\rho v^2 \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + (-k\rho v^3 \cos \gamma + 2k\rho g v \cos \gamma) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Les extrémals singulières sont situées sur  $\Sigma' : \langle p, Y \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$ , c'est-à-dire :  $p_\gamma = p_v g - p_r v = 0$ . ■

**Lemme 2.2** *Si  $\cos \gamma \neq 0$  alors :*

1.  $X, Y, [X, Y]$  sont indépendants et forment un repère.
2.  $[Y, [X, Y]] \in \text{Vect}\{Y, [X, Y]\}$ .

**Preuve.** On introduit :

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(Y, [X, Y], [Y, [X, Y]]), \\ D_2 &= \det(Y, [X, Y], [X, [X, Y]]), \\ D_3 &= \det(Y, [X, Y], X). \end{aligned}$$

Il résulte de nos calculs que les arcs singuliers sont situés sur :  $D_1 = D_2 = 0$ , et de plus s'ils sont exceptionnels on doit avoir  $D_3 = 0$ . Or :

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(Y, [X, Y], [Y, [X, Y]]) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -v \cos \gamma & v \sin \gamma \\ 0 & g \cos \gamma & -g \sin \gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + v \cos \gamma (g \sin \gamma) + v \sin \gamma (-g \cos \gamma) \\ &= gv \cos \gamma \sin \gamma - gv \sin \gamma \cos \gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \det(Y, [X, Y], [X, [X, Y]]) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -v \cos \gamma & k\rho v^2 \cos \gamma & k\rho v^2 \cos \gamma \\ 0 & g \cos \gamma & (-k\rho v^3 \cos \gamma + 2k\rho g v \cos \gamma) & \\ 1 & 0 & 0 & \end{vmatrix} \\
&= 0 + v \cos \gamma (k\rho v^3 \cos \gamma - 2k\rho g v \cos \gamma) + k\rho v^2 \cos \gamma (-g \cos \gamma) \\
&= k\rho v^4 \cos^2 \gamma - 2k\rho g v^2 \cos^2 \gamma - k\rho g v^2 \cos \gamma \\
&= k\rho v^4 \cos^2 \gamma - 3k\rho g v^2 \cos^2 \gamma \\
&= k v^2 \cos^2 \gamma (\rho' v^2 - 3\rho g) \\
&= \frac{S\rho v^2 \cos^2 \gamma}{r^2 m h_S} \left( \frac{1}{2} v^2 r^2 h_S \frac{\partial C_D}{\partial r} - \frac{1}{2} v^2 r^2 C_D - \frac{1}{2} g_0 h_S v \frac{\partial C_D}{\partial v} - \frac{3}{2} g_0 h_S C_D \right),
\end{aligned}$$

$$D_3 = \det(Y, [X, Y], X).$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & -v \cos \gamma & v \sin \gamma \\ 0 & g \cos \gamma & -(g \sin \gamma + k\rho v^2) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + v \cos \gamma (g \sin \gamma + k\rho v^2) + v \sin \gamma (-g \cos \gamma) \\
&= 0 + v g \cos \gamma \sin \gamma + k\rho v^3 \cos \gamma - v g \sin \gamma \cos \gamma \\
&= k\rho v^3 \cos \gamma
\end{aligned}$$

Puisque  $\cos \gamma \neq 0$ , la proposition est prouvée. ■

On a donc montré que le système (1.8) n'admet pas d'extrémales anormales, c'est-à-dire indépendantes du coût ( $p_0 = 0$ ).

## 2.1.2 Analyse des extrémales.

Considérons le problème de temps minimal pour le système  $\dot{q} = \bar{X}(q) + u\bar{Y}(q)$  avec  $|u| \leq 1$ . On va étudier l'existence d'extrémales singulières et classifier localement les extrémales.

**Lemme 2.3** *Posons*

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \psi \left( v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \\
\bar{Y} &= \psi k' \rho v \frac{\partial}{\partial \gamma}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

avec  $\psi = \frac{1}{\varphi}$ . Alors on a :

1.  $[\bar{X}, \bar{Y}] = \psi^2[X, Y] + \psi(X.\psi)Y$ .
2. L'ensemble  $\Sigma' : \langle p, \bar{Y} \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$  coincide avec :  $\langle p, Y \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$
3.  $[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = \psi^3[Y, [X, Y]] \bmod Vect\{Y, [X, Y]\}$ , et donc  $[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \in Vect\{Y, [X, Y]\}$

**Preuve.** 1. Calculons les crochets de Lie associés à  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  en utilisant la formule suivante

$$[f_1X, f_2Y] = f_1f_2[X, Y] + f_1(X.f_2)Y - f_2(Y.f_1)X \quad (2.5)$$

où  $f_1, f_2$  sont des fonctions lisses et  $Z.f = \frac{\partial f}{\partial q}Z(q)$  est la dérivée de Lie, on posons  $f_1 = f_2 = \psi$  dans (2.5) il vient :

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = [\psi X, \psi Y] = \psi^2[X, Y] + \psi(X.\psi)Y - \psi(Y.\psi)X.$$

Puisque  $Y = k'\rho v \frac{\partial}{\partial \gamma}$  et  $\psi$  ne dépend que de  $\rho$  et  $v$ , on a  $Y.\psi = 0$ . Donc  $[\bar{X}, \bar{Y}] = \psi^2[X, Y] + \psi(X.\psi)Y$ .

2. est claire

3.

$$\begin{aligned} [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] &= [\bar{Y}, \psi^2[X, Y] + \psi(X.\psi)Y] = [\bar{Y}, \psi^2[X, Y]] + [\bar{Y}, \psi(X.\psi)Y] \\ &= [\psi Y, \psi^2[X, Y]] + [\psi Y, \psi(X.\psi)Y] \\ &= \psi^3[Y, [X, Y]] + \psi(\psi.Y)[X, Y] - \psi^2([X, Y](\psi))Y + \psi^2(X.\psi)[X, Y] \\ &\quad + \psi Y(\psi(X.\psi))Y - \psi(X.\psi)Y(\psi)Y \end{aligned}$$

De même  $\psi$  ne dépend que de  $\rho$  et  $v$  on a  $Y.\psi = 0$  donc

$$[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = \psi^3[Y, [X, Y]] = \psi^3[Y, [X, Y]] \bmod Vect\{Y, [X, Y]\}$$

et donc  $[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \in Vect\{Y, [X, Y]\}$ . ■

On obtient donc :

**Lemme 2.4**

$$\begin{aligned}
D_4 &= \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]]) = 0 \\
D_5 &= \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]]) = \frac{kk'^2 \rho \cos \gamma}{C_q^4 v^7} \\
D_6 &= \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{X}) = -\frac{\beta kk'^3 \rho \cos^2 \gamma}{2 C_q^6 v^{11}} \neq 0
\end{aligned}$$

**Preuve.** 1. Puisque  $D = 0$  alors  $D_4 = \det(\bar{Y}, [X, Y], [\bar{Y}, [X, Y]]) = 0$

2. Calculons  $D_5 = \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]])$ , alors

$$\begin{aligned}
D_5 &= \begin{vmatrix} 0 & -\psi^2 k' \rho v^2 \cos \gamma & \psi v \sin \gamma \\ 0 & \psi^2 g k' \rho v \cos \gamma & -\psi(g \sin \gamma + k \rho v^2) \\ \psi k' \rho v & 0 & \psi \cos \gamma \left( \frac{-g}{v} + \frac{v}{r} \right) \end{vmatrix} \\
&= 0 + \psi^2 k' \rho v^2 \cos \gamma (\psi k' \rho v) (\psi(g \sin \gamma + k \rho v^2)) + \psi v \sin \gamma (-(\psi k' \rho v) (\psi^2 g k' \rho v \cos \gamma)) \\
&= (\psi^2 k' \rho v^2 \cos \gamma) (\psi k' \rho v) (k \rho v^2) \\
&= (\psi^4 k k'^2 \rho^3 v^5 \cos \gamma) = \frac{kk'^2 \rho^3 v^5 \cos \gamma}{C_q^4 \sqrt{\rho^4} v^{12}} = \frac{kk'^2 \rho \cos \gamma}{C_q^4 v^7}
\end{aligned}$$

3. De même on peut montrer que  $D_6 = -\frac{\beta kk'^3 \rho \cos^2 \gamma}{2 C_q^6 v^{11}} \neq 0$  ■

D'où :

**Remarque 2.5** Si  $\cos \gamma \neq 0$  alors :

1. Les vecteurs  $\bar{X}, \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]$  sont indépendants et forment un repère.
2.  $[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \in \text{Vect}\{\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]\}$ . Donc il existe des fonctions  $a, b, C$  telles que :

$$[\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = a\bar{X} + b\bar{Y} + c[\bar{X}, \bar{Y}]. \text{ avec } a = \frac{\det(\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}])}{\det(\bar{X}, \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}])} = -\frac{\beta k' \sqrt{\rho}}{2 C_q^2 v^4} \cos \gamma < 0$$

**Corollaire 2.6** Si  $\cos \gamma \neq 0$ , il n'existe pas de trajectoires singulières.

### 2.1.3 Classification des extrémales au voisinage de $\Sigma$ .

En utilisant cette analyse et le principe de minimum (1.4.2) on peut résoudre le problème de synthèse optimale, résumé par le théorème suivant :

**Théorème 2.7** Si  $\cos \gamma \neq 0$ , chaque trajectoire temps minimal est localement de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$ .

**Preuve.** D'après le principe du minimum un *arc* optimal est extrémal et doit vérifier

$$H = \langle p, \bar{X}(q) + u\bar{Y}(q) \rangle + p_0 = 0, \quad p_0 \geq 0.$$

Donc en  $z_0 \in \Sigma'$ , le vecteur adjoint est orienté avec la convention :  $\langle p, \bar{X}(q) \rangle = -p_0 \leq 0$  car  $(\langle p, \bar{Y} \rangle = 0)$ . Or d'après la remarque (2.5), on a :

$$[\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = a\bar{X} + b\bar{Y} + c[\bar{X}, \bar{Y}] \quad \text{avec} \quad a < 0.$$

Donc seule une trajectoire extrémale de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  peut être optimale, (voir Fig.4). L'assertion est prouvée.

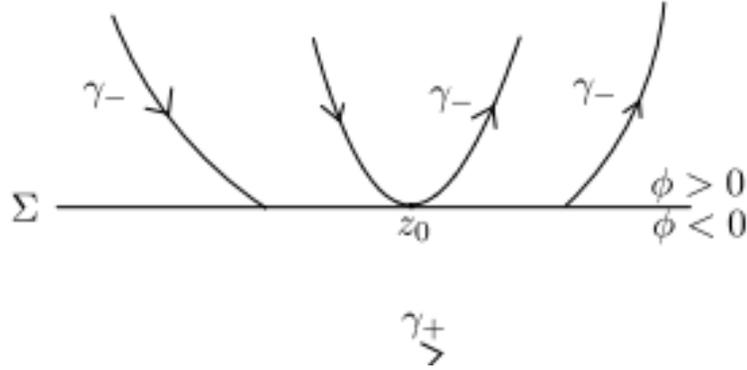


Fig.4 : Solutions extrémales ( $a < 0$ )

■

En changeant le problème de temps minimal en temps maximal, on en déduit :

**Corollaire 2.8** Si  $\cos \gamma \neq 0$ , chaque trajectoire temps maximal est localement de la forme  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$ .

Par ailleurs chaque trajectoire optimale pour le sous-système  $I$  est bang-bang. De plus, il existe une borne uniforme  $N$  sur le nombre de commutations des trajectoires optimales dans le domaine de vol.

## 2.2 Modèle avec contraintes sur l'état

L'objectif de cette section est d'initialiser l'analyse du problème de contrôle optimal en prenant en compte les contraintes sur l'état. Notre contribution essentielle est de faire une évaluation de l'ensemble des états accessibles en temps petit, en prenant en compte les contraintes du problème, et en se limitant au sous-système  $I$ . Ce travail utilise l'évaluation de l'ensemble des états accessibles dans le cas non contraint, et on construit une forme normale du système contraint. Le concept fondamental est le concept d'ordre de la contrainte. On obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de l'arc frontière, sous des conditions génériques adaptées à notre étude, et la loi optimale au voisinage d'un point frontière est calculée en boucle fermée (synthèse optimale) voir [M.J].

### 2.2.1 Concept d'ordre et l'évaluation de l'ensembles des états accessibles du système contraint

Dans cette section en utilisant le principe du minimum de Maurer (*voir (1.4.4) du chap 1*) on se propose de calculer un contrôle  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  scalaire et continu par morceaux qui minimise le problème (1.23)

#### Calcul de l'ordre des contraintes sur l'état

**Lemme 2.9** *Pour le modèle simplifié  $I$ , dans le domaine de vol où  $\cos \gamma \neq 0$ , les contraintes sur le **flux thermique** et l'**accélération normale** sont d'ordre deux, et l'hypothèse  $(C_1)$  est vérifiée le long d'un arc frontière.*

**Preuve.** 1. La contrainte le **flux thermique** est :

$$C_1 = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}, \text{ où } \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{r_T - r}{h_S}\right).$$

On obtient :

$$\dot{C}_1 = X \cdot C_1 + uY \cdot C_1 = 0$$

or  $Y \cdot C_1 = 0$  donc  $\dot{C}_1 = X \cdot C_1 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$\begin{aligned} X \cdot C_1 &= -\frac{1}{2} \frac{C_q v^4 \sqrt{\rho} \sin \gamma}{h_S} + 3C_q \sqrt{\rho} v^2 \left( -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{SC_D \rho v^2}{m} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{3C_q \sqrt{\rho} v^2 SC_D \rho v^2}{m} + \left( -\frac{1}{2} \frac{C_q v^4 \sqrt{\rho}}{h_S} - 3C_q \sqrt{\rho} v^2 \frac{g_0}{r^2} \right) \sin \gamma \end{aligned}$$

donc  $\dot{C}_1$  s'écrit sous la forme

$$\dot{C}_1 = \varphi_1(r; v) + \varphi_2(r; v) \sin \gamma = 0$$

De plus :

$$\ddot{C}_1 = X \cdot (X \cdot C_1) + uY \cdot (X \cdot C_1) = 0$$

où

$$\begin{aligned} X \cdot (X \cdot C_1) &= -\frac{1}{4} \frac{C_q v \sqrt{\rho} h_S}{h_S^2 r^4 m^2} (2h_S m^2 v^4 r^3 (\cos \gamma)^2 \\ &\quad - v^4 r^4 m^2 (\sin \gamma)^2 - 14v^2 r^2 m^2 h_S g_0 \\ &\quad + 12h_S m^2 v^2 r^2 g_0 (\cos \gamma)^2 \\ &\quad - 13v^4 r^4 m \rho h_S SC_D \sin \gamma - 24v^2 r m^2 h_S^2 g_0 \\ &\quad + 36h_S^2 m^2 g_0 v^2 r (\cos \gamma)^2 + 6v^4 r^4 m \rho h_S^2 S \frac{\partial C_D}{\partial r} \sin \gamma \\ &\quad - 24h_S^2 g_0^2 m^2 + 12h_S^2 m^2 g_0^2 (\cos \gamma)^2 \\ &\quad - 36\rho h_S^2 g_0 m SC_D v^2 r^2 \sin \gamma - 12\rho^2 h_S^2 S^2 C_D^2 v^4 r^4 \\ &\quad - 6\rho h_S^2 v^3 S r^2 g_0 m \frac{\partial C_D}{\partial v} \sin \gamma - 3\rho^2 h_S^2 v^5 S^2 r^4 C_D \frac{\partial C_D}{\partial v}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$Y \cdot (X \cdot C_1) = -\frac{1}{4} \frac{C_q v^3 \rho^{\frac{3}{2}} SC_L (v^2 r^2 + 6g_0 h_S) \cos \gamma}{h_S m r^2} \quad (2.7)$$

Alors

$$\ddot{C}_1 = \varphi_3(r; v; \gamma) + u\varphi_4(r; v) \cos \gamma$$

avec

$$\varphi_4 = -\frac{1}{4} \frac{C_q v^3 \rho^{\frac{3}{2}} SC_L (v^2 r^2 + 6g_0 h_S)}{h_S m r^2} = -k' C_q \rho^{3/2} (3gv^3 + \frac{\beta}{2} v^5) \neq 0$$

Enfin, on conclut que  $\cos \gamma \neq 0$  est une condition nécessaire et suffisante pour que la contrainte sur le **flux thermique** soit d'ordre deux.

2. La contrainte sur l'**accélération normale** est :

$$C_2 = C_r \rho v^2 \leq \gamma_n^{\max}, \text{ où } C_r = \frac{S}{2m} C_D \sqrt{1 + \left(\frac{C_L}{C_D}\right)^2}.$$

On obtient :

$$\dot{C}_2 = X \cdot C_2 + uY \cdot C_2 = 0,$$

or  $Y \cdot C_2 = 0$  donc  $\dot{C}_2 = X \cdot C_2 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$X \cdot C_2 = \rho v^3 \sin \gamma \left( \frac{\partial C_r}{\partial r} - \frac{C_r}{h_S} \right) + \rho v \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2C_r \right) \left( -\frac{g_0 \sin(\gamma)}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{S C_D \rho v^2}{m} \right)$$

Donc on pose

$$\begin{aligned} \dot{C}_2 &= -\rho v \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2C_r \right) \frac{1}{2} \frac{S C_D \rho v^2}{m} + \left[ \rho v^3 \left( \frac{\partial C_r}{\partial r} - \frac{C_r}{h_S} \right) - \frac{g_0}{r^2} \rho v \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2C_r \right) \right] \sin(\gamma) \\ &= \varphi_5(r; v) + \varphi_6(r; v) \sin \gamma = 0 \end{aligned}$$

est une contrainte secondaire. De plus :

$$\ddot{C}_2 = X \cdot (X \cdot C_2) + uY \cdot (X \cdot C_2) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} X \cdot (X \cdot C_2) &= -\frac{1}{4} \frac{\rho}{h_S^2 r^4 m^2} (-8C_r g_0^2 m^2 h_S^2 + 12h_S^2 m^2 g_0^2 v \frac{\partial C_r}{\partial v} (\cos \gamma)^2) \\ &\quad -4v^4 r^4 m^2 C_r (\sin \gamma)^2 - 4h_S^2 m^2 v^4 r^3 \frac{\partial C_r}{\partial r} (\cos \gamma)^2 + 4m^2 v^4 r^3 C_r h_S (\cos \gamma)^2 \\ &\quad -6h_S^2 C_r S^2 C_D^2 \rho^2 v^4 r^4 - 6h_S^2 v^5 S^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \frac{\partial C_r}{\partial v} - 8v^3 r^2 m^2 h_S g_0 \frac{\partial C_r}{\partial v} (\sin \gamma)^2 \\ &\quad -8v^3 r m^2 g_0 h_S^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} - 16v g_0^2 m^2 h_S^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2v^5 r^4 m S \rho h_S^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} \frac{\partial C_r}{\partial v} \sin \gamma \\ &\quad -20v^2 r^2 m^2 h_S C_r g_0 - 4\rho v^3 S h_S^2 r^2 C_r g_0 m \frac{\partial C_D}{\partial v} \sin \gamma - \rho^2 v^6 S^2 h_S^2 r^4 C_D \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& -20v^3g_0mh_S^2SC_D\rho r^2\frac{\partial C_r}{\partial v}\sin\gamma - 6v^5r^4mh_SSC_D\rho\frac{\partial C_r}{\partial v}\sin\gamma \\
& -16C_rg_0mh_S^2SC_D\rho v^2r^2\sin\gamma - 14v^4r^4mh_S\rho C_rC_D\sin\gamma \\
& -2\rho v^4Sh_S^2r^2g_0m\frac{\partial C_r}{\partial v}\frac{\partial C_D}{\partial v}\sin\gamma + 4v^4r^4mC_rS\rho h_S^2\frac{\partial C_D}{\partial r}\sin\gamma \\
& -2\rho^2v^5S^2h_S^2r^4C_rC_D\frac{\partial C_D}{\partial v} + 8v^3r^2m^2h_S^2g_0\frac{\partial^2 C_r}{\partial r\partial v}(\sin\gamma)^2 \\
& +24h_S^2m^2g_0C_rv^2r(\cos\gamma)^2 + 12h_S^2m^2g_0v^3r\frac{\partial C_r}{\partial v}(\cos\gamma)^2 \\
& +24h_S^2m^2g_0C_rv^2r(\cos\gamma)^2 + 12h_S^2m^2g_0v^3r\frac{\partial C_r}{\partial v}(\cos\gamma)^2 \\
& +24h_S^2m^2g_0C_rv^2r(\cos\gamma)^2 + 12h_S^2m^2g_0v^3r\frac{\partial C_r}{\partial v}(\cos\gamma)^2 \\
& -16h_S^2m^2v^2r^2g_0\frac{\partial C_r}{\partial r}(\cos\gamma)^2 + 8v^4r^4m^2h_S\frac{\partial C_r}{\partial r}(\sin\gamma)^2 \\
& -16v^2rm^2C_rg_0h_S^2 + 20v^2r^2m^2h_S^2g_0\frac{\partial C_r}{\partial r} - 4h_S^2v^4g_0mSC_D\rho r^2\frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2}\sin\gamma \\
& +4v^5r^4mh_S^2SC_D\rho\frac{\partial^2 C_r}{\partial r\partial v}\sin\gamma - 4v^4r^4m^2h_S^2\frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2}(\sin\gamma)^2 \\
& -h_S^2v^6S^2C_D^2\rho^2r^4\frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} - 4h_S^2v^2g_0m^2\frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2}(\sin\gamma)^2 \\
& +10v^4r^4mh_S^2SC_D\rho\frac{\partial C_r}{\partial r}\sin\gamma + 16h_Sm^2v^2r^2C_rg_0(\cos\gamma)^2
\end{aligned}$$

et

$$Y \cdot (X \cdot C_2) = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 S C_L (v^2 r^2 C_r - v^2 r^2 h_S \frac{\partial C_r}{\partial r} + h_S g_0 v \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2 h_S g_0 C_r) \cos \gamma}{h_S m r^2} = \varphi_7(r; v; \gamma) + u \varphi_8(r; v) \cos \gamma$$

avec

$$\varphi_8(r; v) = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 S C_L (v^2 r^2 C_r - v^2 r^2 h_S \frac{\partial C_r}{\partial r} + h_S g_0 v \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2 h_S g_0 C_r)}{h_S m r^2} = -k' C_r \rho^2 (\beta v^4 + 2 g v^2) \neq 0 \quad (2.9)$$

De même, on conclut que  $\cos \gamma \neq 0$  est une condition nécessaire et suffisante pour que la contrainte sur l'**accélération normale** soit d'ordre deux. ■

Dans la suite on suppose que  $\cos \gamma \neq 0$ .

## Calcul des paramètres $u_b$ , $\eta$ et $v$

On calcule maintenant les paramètres  $u_b$ ,  $\eta$  et  $v$ . On rappelle alors le (1.47 du Chap 1), qui traite le cas d'une contrainte d'ordre deux.

L'application du lemme donne les résultats suivants :

**Flux thermique.** • Le long de l'arc frontière on a :

$$u_b = \frac{X^2 \cdot C_1}{[X, Y] \cdot C_1} = \frac{X \cdot (X \cdot C_1)}{-Y \cdot (X \cdot C_1)} \quad (2.10)$$

où  $X \cdot (X \cdot C_1)$  et  $Y \cdot (X \cdot C_1)$  sont donnés respectivement par les formules (2.6) et (2.7).

$$\langle p, Y \rangle = 0 \implies p_\gamma = 0$$

$$\langle p, [X, Y] \rangle = -\frac{1}{2} \frac{v S C_L \rho \cos \gamma}{r^2 m} (v r^2 p_r - g_0 p_v) = 0 \implies v r^2 p_r - g_0 p_v = 0 \quad (2.11)$$

• Le multiplicateur associé à la contrainte sur le **flux thermique** est donné par :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y] \cdot C_1} = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{-Y \cdot (X \cdot C_1)} \\ &= -\frac{S p_r \sqrt{\rho} r^2}{m g_0 C_q (v^2 r^2 + 6 g_0 h_S)} \left( -3 g_0 h_S C_D + v^2 r^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} h_S - v^2 r^2 C_D - v g_0 h_S \frac{\partial C_D}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le saut à l'instant de jonction  $t_1$  (point d'entrée à la frontière) est donné par :

$$\nu_1 = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle}{[X, Y] \cdot C_1} = -\frac{2(v r^2 p_r(t_1^-) - g_0 p_v(t_1^-)) h_S}{v^2 \sqrt{\rho} C_q (v^2 r^2 + 6 g_0 h_S)} \quad (2.13)$$

**Remarque 2.10** De la même manière, on calcule le saut  $\nu_2$  à l'instant de jonction  $t_2$  (point de sortie), en remplaçant  $t_1^-$  par  $t_2^+$  dans la formule (2.13).

**Accélération normale.** • Le long de l'arc frontière on a :

$$u_b = \frac{X^2 \cdot C_2}{[X, Y] \cdot C_2} = \frac{X \cdot (X \cdot C_2)}{-Y \cdot (X \cdot C_2)} \quad (2.14)$$

où  $X.(X \cdot C_2)$  et  $Y.(X \cdot C_2)$  sont donnés respectivement par les formules (2.8) et (2.9).

$$\langle p, Y \rangle = 0 \implies p_\gamma = 0$$

$$\langle p, [X, Y] \rangle = -\frac{1}{2} \frac{v S C_L \rho \cos \gamma}{r^2 m} (v r^2 p_r - g_0 p_v) = 0 \implies v r^2 p_r - g_0 p_v = 0$$

• Le multiplicateur associé à la contrainte sur l'**accélération normale** est donné par :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y] \cdot C_2} = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{-Y.(X \cdot C_2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v S p_r (3g_0 h_S C_D - v^2 r^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} h_S + v^2 r^2 C_D + v g_0 h_S \frac{\partial C_D}{\partial v}) r^2}{m g_0 (v^2 r^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} h_S - v^2 r^2 C_r - g_0 h_S \frac{\partial C_r}{\partial v} v - 2g_0 h_S C_r)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le saut à l'instant de jonction  $t_3$  (point d'entrée à la frontière) est donné par :

$$\nu_3 = -\frac{(v r^2 p_r(t_3^-) - g_0 p_v(t_3^-)) h_S}{(-v^2 r^2 h_S \frac{\partial C_r}{\partial r} + v^2 r^2 C_r + g_0 h_S v \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2g_0 h_S C_r) p_v} \quad (2.16)$$

**Remarque 2.11** De la même manière, on calcule le saut  $\nu_4$  à l'instant de jonction  $t_4$  (point de sortie), en remplaçant  $t_3^-$  par  $t_4^+$  dans la formule (2.16).

## 2.3 Synthèse locale temps-minimale pour le sous-système $I$ avec contraintes sur l'état

On va construire la synthèse optimale locale pour le problème de la navette. La première étape est de construire une forme normale.

### 2.3.1 Forme normale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié $I$ .

Les champs  $X, Y$  et  $[X, Y]$  sont indépendants, et  $[Y, [X, Y]] \in Vect\{Y, [X, Y]\}$ . La contrainte est d'ordre deux. On suppose que les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_3)$  sont satisfaites le long de l'arc frontière  $\gamma_b$ , c'est-à-dire que  $Y \cdot (X \cdot C) \neq 0$  et que le contrôle  $u_b$  est admissible et non saturant. L'étude est localisée en  $q_0 = 0$ . On note  $q = (x, y, z)$ .

**Normalisation 1.** Puisque  $Y(0) \neq 0$ , on identifie localement  $Y$  à  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Les difféomorphismes locaux  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  préservant 0 et  $Y$  vérifient alors :  $\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0$  et  $\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = 1$ . Puisque la contrainte est d'ordre deux, on a  $Y \cdot C = 0$  au voisinage de 0 et donc  $Y$  est tangent à toutes les surfaces  $C = a$ ,  $a$  petit. En particulier :  $\frac{\partial C}{\partial z} = 0$ .

**Normalisation 2.** Puisque  $C$  ne dépend pas de  $z$ , en utilisant un difféomorphisme local préservant 0 et  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ , on peut identifier la contrainte à  $C = x$ . Le système contraint (2.1) s'écrit alors :

$$\dot{x} = X_1(q), \quad \dot{y} = X_2(q), \quad \dot{z} = X_3(q) + u, \quad (2.17)$$

et  $x \leq 0$ . On suppose que l'arc frontière est un arc  $\sigma$  dans  $x = \dot{x} = 0$  passant par 0. En gardant une approximation affine, suffisante pour notre analyse, on obtient le modèle local suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_2y + a_3z, \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z, \\ \dot{z} &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + u \end{aligned} \quad (2.18)$$

où l'approximation de  $\sigma$  est la droite :  $x = 0$ ,  $a_2y + a_3z = 0$ .

**Normalisation 3.** On se restreint au plan  $x = 0$ . En utilisant une transformation de la forme  $Z = \beta y + z$ , on peut normaliser l'arc frontière à :  $x = z = 0$ . En changeant  $y$  en  $\lambda y$ , l'arc frontière peut être identifié à  $t \mapsto (0, t, 0)$ . En changeant si nécessaire  $z$  en  $-z$  et  $u$  en  $-u$ , ce qui a pour effet de permuter les arcs  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ . On peut de plus supposer  $a_3 > 0$ . On a donc montré :

**Lemme 2.12** *Sous nos hypothèses, le modèle local dans le cas parabolique est :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_3z, \\ \dot{y} &= 1 + b_1x + b_3z, \\ \dot{z} &= (c_0 + u) + c_1x + c_2y + c_3z, \quad |u| \leq 1, \end{aligned}$$

où  $a_3 > 0$  et la contrainte est  $x \leq 0$ . L'arc frontière  $\partial$  est identifié à  $\sigma : t \mapsto (0, t, 0)$ . On

obtient de plus

$$\begin{aligned} [X, Y] &= a_3 \frac{\partial}{\partial x} + b_3 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z} \\ [Y, [X, Y]] &= 0, \\ [X, [X, Y]] &= (a_1 a_3 + a_3 c_3) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_3 b_1 + b_3 c_3) \frac{\partial}{\partial y} + (\alpha_3 c_1 + b_3 c_2 + c_3^2) \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{et } [X, [X, Y]] &= aX \text{ mod}\{Y, [X, Y]\}, \end{aligned}$$

avec  $a = a_3 b_1 - a_1 b_3 \neq 0$ . Puisque l'arc frontière est admissible et non saturant en 0, on a  $|c| < 1$ . De plus  $a_3 = -[X, Y] \cdot C$ .

Cette forme normale est utile pour calculer la synthèse optimale locale.

**Théorème 2.13** *Considérons le problème de temps minimal pour le système  $\dot{q} = X(q) + uY(q)$ ,  $q \in \mathbb{R}^3$ , avec la contrainte  $C(q) \leq 0$ . Soit  $q_0 \in \{C = 0\}$ . Faisons les hypothèses suivantes :*

1. *au voisinage de  $q_0 : [Y, [X, Y]] \in \text{Vect}\{Y, [X, Y]\}$ ,*
2.  *$X, Y, [X, Y]$  sont linéairement indépendants en  $q_0$ , et  $[X, [X, Y]](q_0) = aX(q_0) + bY(q_0) + c[X, Y](q_0)$ ,*
3. *La contrainte est d'ordre deux et les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_3)$  sont satisfaites en  $q_0$ .*

*Alors l'arc frontière passant par  $q_0$  est localement temps minimal si et seulement si l'arc  $\gamma_-$  passant par  $q_0$  est contenu dans le domaine non admissible  $C > 0$ . Dans ce cas la synthèse temps minimal locale est de la forme  $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_b \gamma_+^T \gamma_-$ , où  $\gamma_+^T$  sont des arcs associés à  $u = 1$ , tangents à la frontière.*

**Preuve.** D'après le (2.7), pour le problème non contraint, tout point accessible à partir de  $q_0$  en temps petit l'est par un arc  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  et un arc  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$ , et pour le problème non contraint une politique  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  est temps-minimale et une politique  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  est temps-maximale. ■

Considérons le modèle normalisé construit précédemment au lemme (2.12) où  $q_0 = 0$  et l'arc frontière  $\gamma_b$  est identifié à  $t \mapsto (0, t, 0)$ . Soit  $B = \gamma_b(t)$ ,  $t > 0$  petit. Pour une trajectoire issue de  $(0, y_0, 0)$ ,  $y_0 > 0$  et associée a  $u = +1$  ou  $-1$ , on a les

approximations :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_3}{2}(c_0 + y_0 + u)t^2 + o(t^2) \\ z(t) &= (c_0 + y_0 + u)t + o(t). \end{aligned}$$

et les projections dans le plan  $(x, z)$  des arcs  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  et  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  joignant 0 à  $B$  sont des boucles notées  $\tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_-$  et  $\tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+$ . Puisque  $a_3 > 0$ , les boucles  $\tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_-$  et  $\tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+$  sont respectivement contenues dans  $x \leq 0$  et  $x \geq 0$ , (voir Fig.5).

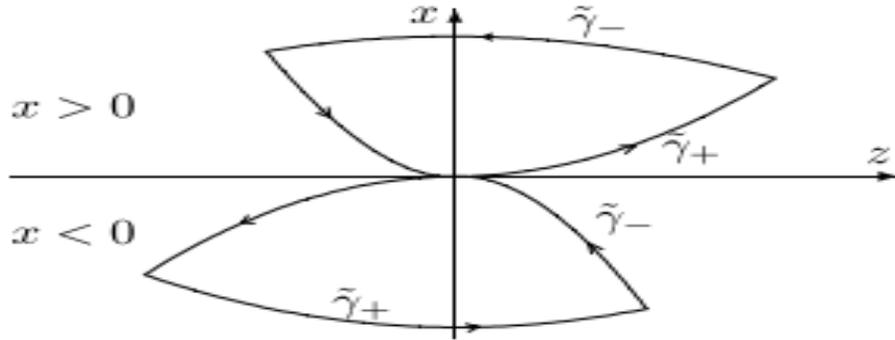


Fig.5 : projections dans le plan  $(x, z)$  des arcs joignant 0 à  $B$

Dans les coordonnées initiales, si l'arc  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  joignant 0 à  $B$  est contenu dans  $C \leq 0$ , alors il est temps-minimal et l'arc frontière n'est pas optimal. S'il est contenu dans  $C \geq 0$ , on peut joindre 0 à  $B$  par un arc  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  contenu dans  $C \leq 0$ , temps-maximal. Dans ce cas clairement l'arc frontière  $\gamma_b$  est temps-minimal.

La synthèse optimale est alors la suivante. On peut utiliser le modèle local.

Soient  $B_1 = (0, y_1, 0) < 0 < B_2 = (0, y_2, 0)$  deux points de la frontière. Considérons les arcs  $\gamma_- \gamma_+$  arrivant en  $B_1$  et les arcs  $\gamma_+ \gamma_-$  partant de  $B_2$ , (voir Fig.6). En faisant varier  $B_1$  et  $B_2$  on décrit entièrement l'ensemble des trajectoires optimales.

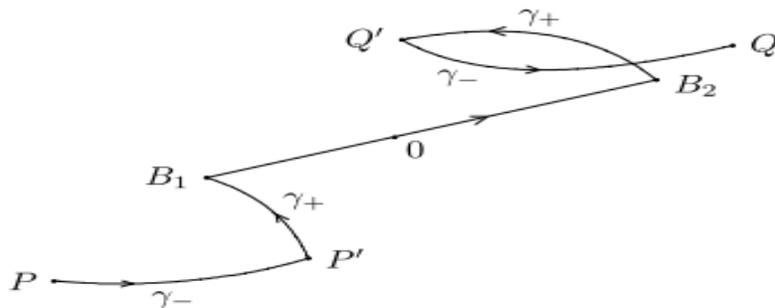


Fig. 6 : Synthèse optimale

**Remarque 2.14** On peut aisément calculer la politique optimale joignant  $P$  à  $Q$  en utilisant le modèle :  $\dot{x} = a_3z$ ,  $\dot{y} = 1 + b_1x$ ,  $\dot{z} = c_0 + u + c_2y$ .

**Lien avec le principe du minimum.** D'après le calcul de  $\eta$  dans la section précédente, on a :

$$\eta = \frac{\langle p, [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y]C}$$

et  $[X, [X, Y]] = aX + bY + c[X, Y]$ , avec  $\langle p, Y \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$ , le long de la frontière.

Donc  $\eta = \frac{a\langle p, X \rangle}{[X, Y] \cdot C}$ . D'après le principe du minimum on a :  $\langle p, X \rangle < 0$  et dans le modèle normalisé :  $[X, Y] \cdot C = -a_3 < 0$ . La condition nécessaire  $\eta \geq 0$  impose  $a \geq 0$ . Dans ce cas  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  est la politique optimale du problème non contraint, et les boucles correspondantes de la (Fig.5) sont contenues dans le domaine  $x \leq 0$ . La condition nécessaire d'optimalité  $\eta \geq 0$  imposé par le principe de minimum, est violée si et seulement si  $a < 0$  et c'est le cas où l'arc frontière est non optimal.

Considérons la politique optimale pour joindre  $P$  à  $Q$ , représentée sur la (Fig.6). Les sauts  $\nu_1$  et  $\nu_2$  du vecteur adjoint au point d'entrée  $B_1$  et au point de sortie  $B_2$  avec la frontière sont donnés par les arcs extrémaux du problème non contraint joignant respectivement  $P$  à  $B_1$  et  $B_2$  à  $Q$ . Sur ces arcs le vecteur adjoint est entièrement déterminé par la condition de commutation en  $B_1$ ,  $P'$  et  $B_2$ ,  $Q'$  (voir Fig.6).

En un point de contact avec la frontière, l'arc  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  est une solution optimale du problème non contraint et vérifie le principe du minimum avec  $\nu_1 = 0$ , mais aussi pour une famille a un paramètre  $\nu_1 \in [0; \bar{\nu}]$ , [L.C].

Enfin pour le modèle simplifié  $I$ , en utilisant le modèle normalisé mentionné dans la remarque (2.14), on a :  $a = a_3b_1$ , où  $a_3$  et  $b_1$  sont positifs, ce qui donne  $a \geq 0$  donc l'arc frontière est optimal.

## 2.4 Résultats numériques

Dans cette section on simule les extrémales solutions du principe du minimum de Maurer [H.M] pour le modèle simplifié  $I$ .

### Système d'état adjoint

$$\begin{aligned}
\frac{dp_r}{dt} &= -p_v \left( 2 \frac{g_0 \sin \gamma}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{S \rho v^2 \frac{\partial C_D}{\partial r}}{m} + \frac{1}{2} \frac{S \rho v^2 C_D}{m h_S} \right) - p_\gamma \cos \gamma \left( 2 \frac{g_0}{r^3 v} - \frac{v}{r^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{S \rho v \frac{\partial C_L}{\partial r}}{m} u + \frac{1}{2} p_\gamma \frac{S \rho v C_L}{m h_S} u + \frac{1}{2} p_0 \frac{C_q v^3 \sqrt{\rho}}{h_S} - \eta \frac{\partial C_i}{\partial r}; \\
\frac{dp_v}{dt} &= -p_r \sin \gamma - p_v \left( -\frac{1}{2} \frac{S \rho v^2 \frac{\partial C_D}{\partial v}}{m} - \frac{S \rho v C_D}{m} \right) - p_\gamma \cos \gamma \left( \frac{g_0}{r^2 v^2} + \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{S \rho v \frac{\partial C_L}{\partial v}}{m} u - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{S \rho C_L}{m} u - 3 p_0 C_q \sqrt{\rho} v^2 - \eta \frac{\partial C_i}{\partial v}; \\
\frac{dp_\gamma}{dt} &= -p_r v \cos \gamma + p_v \frac{g_0 \cos \gamma}{r^2} + p_\gamma \sin \gamma \left( -\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right);
\end{aligned}$$

où  $C_i$  représente respectivement pour  $i = 1$  et  $2$  la contrainte sur le **flux thermique** et sur l'**accélération normale**. La fonction  $\eta$  définit le multiplicateur associé aux contraintes et est nulle sur le domaine intérieur, donnée respectivement sur le **flux thermique** et sur l'**accélération normale** par les formules (1.23) et (1.24).  $p_0$  représente le multiplicateur associé au coût, pour normaliser le système on a choisi  $p_0 = 1$  dans nos calculs numériques, de plus d'après l'analyse géométrique traitée précédemment on déduit :

**Proposition 2.15** *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions finales requises, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+ \gamma_-$ . C'est-à-dire qu'elle est constituée de sept arcs consécutifs : un arc régulier associé à  $u = -1$ , un arc régulier associé à  $u = 1$ , un arc frontière associé à  $u = \frac{X \cdot (X \cdot C_1)}{[X, Y] \cdot C_1}$  correspondant au **flux thermique**, un arc régulier associé à  $u = 1$ , un arc frontière associé à  $u = \frac{X \cdot (X \cdot C_2)}{[X, Y] \cdot C_2}$  correspondant à l'**accélération normale**, un arc régulier associé à  $u = 1$ , puis un arc régulier associé à  $u = -1$ , voir (fig. 7).*

De plus aux points de jonctions  $t_2, t_3, t_4$  et  $t_5$ , les conditions de saut suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
p(t_2^+) &= p(t_2^-) - v_1 \frac{\partial C_1}{\partial q} & p(t_3^+) &= p(t_3^-) + v_2 \frac{\partial C_1}{\partial q} \\
p(t_4^+) &= p(t_4^-) - v_3 \frac{\partial C_2}{\partial q} & p(t_5^+) &= p(t_5^-) + v_4 \frac{\partial C_2}{\partial q}
\end{aligned}$$

où les  $v_i$  sont données par les formules (2.13) et (2.16).

Pour les conditions limites, on a choisi les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 r(0) &= 6497960 & r(T) &= 6,4115489e + 006 \\
 v(0) &= 7404,95 & v(T) &= 1,80834e + 003 \\
 \gamma(0) &= -0,032 \text{ rad} & \gamma(T) &= -1,478e - 001 \text{ rad} \\
 \varphi^{\max} &= 1208e + 003 & \gamma_n^{\max} &= 29,34 \text{ et } P^{\max} = 25000
 \end{aligned}$$

de plus l'application du principe du minimum impose les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 C_1(t_2) &= \varphi^{\max} & C_2(t_4) &= \gamma_n^{\max} & p_\gamma(t_1) &= 0 & p_\gamma(t_4) &= 0 \\
 (X \cdot C_1)(t_2) &= 0 & (X \cdot C_2)(t_4) &= 0 & p_\gamma(t_2) &= 0 & p_\gamma(t_6) &= 0
 \end{aligned}$$

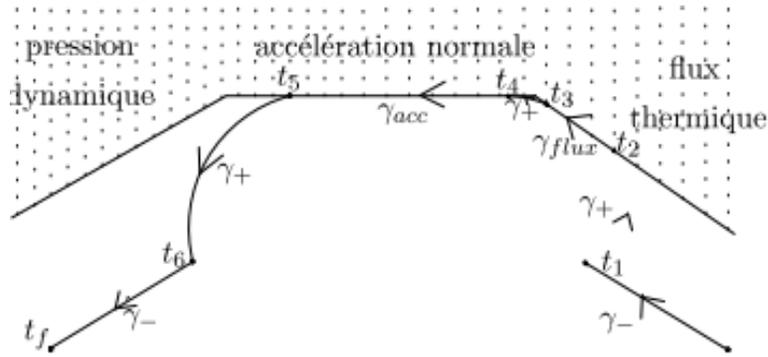


Fig.7 : Trajectoire optimale du modèle Simplifié I

Les extrémales du système sont donc paramétrées par le vecteur adjoint initial

$p(0) = (p_r(0), p_v(0), p_\gamma(0))$ , par les temps de commutation du contrôle  $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$  et  $T)$  et par les sauts aux points de sorties des deux contraintes  $(\nu_2$  et  $\nu_4)$ .

L'algorithme suivant permet d'obtenir ces paramètres pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites, les conditions imposées par le principe du minimum et la condition sur le Hamiltonien puisque le temps final est libre.

**Résultats numériques.** On utilisant l'algorithme de tir multiple directement, on cherche à trouver une bonne estimation pour les inconnus  $p_r(0), p_v(0), p_\gamma(0), t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, T, \nu_2$  et  $\nu_4$ , qui produise une solution qui vérifie les conditions terminales et les conditions imposées par le principe du minimum.

**Algorithme :** En effet, notre algorithme consiste alors à résoudre le système état/état

adjoint en deux étapes :

**Étape 1 :** Déterminations les instants de commutation du contrôle i.e trouver  $Z = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, T)$  qui vérifie la fonction de tir  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{pmatrix} C_1(t_2) - \varphi^{\max} \\ (X \cdot C_1)(t_2) \\ C_2(t_4) - \gamma_n^{\max} \\ (X \cdot C_2)(t_4) \\ r(T) - 6,4115489e + 006 \\ v(T) - 1,80834e + 003 \\ \gamma(T) + 1,478e - 001 \end{pmatrix}$$

Les résultats sont tracés sur les figures (Fig.8).

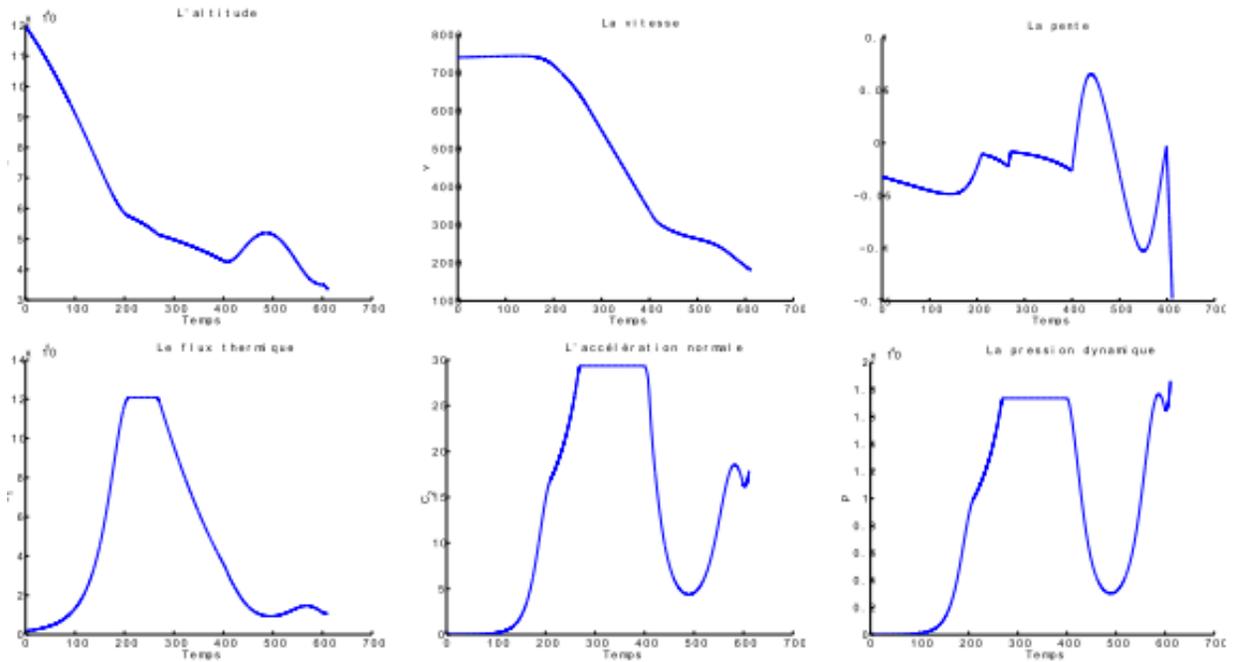


Fig.8 : Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour le modèle simplifié I

**Étape 2 :** On cherche  $Z = (p_r(0), p_v(0), p_\gamma(0), \nu_2, \nu_4)$ , qui vérifie la fonction de tir  $F(Z) = 0$ ,

où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} p_\gamma(t_1) \\ p_\gamma(t_2) \\ \langle p(t), X(q(t_2)) + uY(q(t_2)) \rangle + 1 \\ p_\gamma(t_4) \\ p_\gamma(t_6) \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus sont tracés sur les figures (Fig.9) et (Fig.10). Le  $Z$  et  $F(Z)$  trouvés sont

$$Z = \begin{bmatrix} 1, 852548586224013e + 002 \\ 1, 250976523316097e + 005 \\ 8, 251019847212254e + 007 \\ 1, 303082249555811e + 002 \\ 1, 342809020295197e + 007 \end{bmatrix}, F(Z) = \begin{bmatrix} 8, 789356797933579e - 009 \\ -1, 406297087669373e - 007 \\ 1, 110223024625157e - 016 \\ 1, 452281139791012e - 008 \\ 1, 281499862670898e - 006 \end{bmatrix}$$

ainsi les sauts aux points d'entrés sont donnés par :

$$v_1 = 4, 209164006513169e + 001, v_3 = 1, 506974540319433e + 006.$$

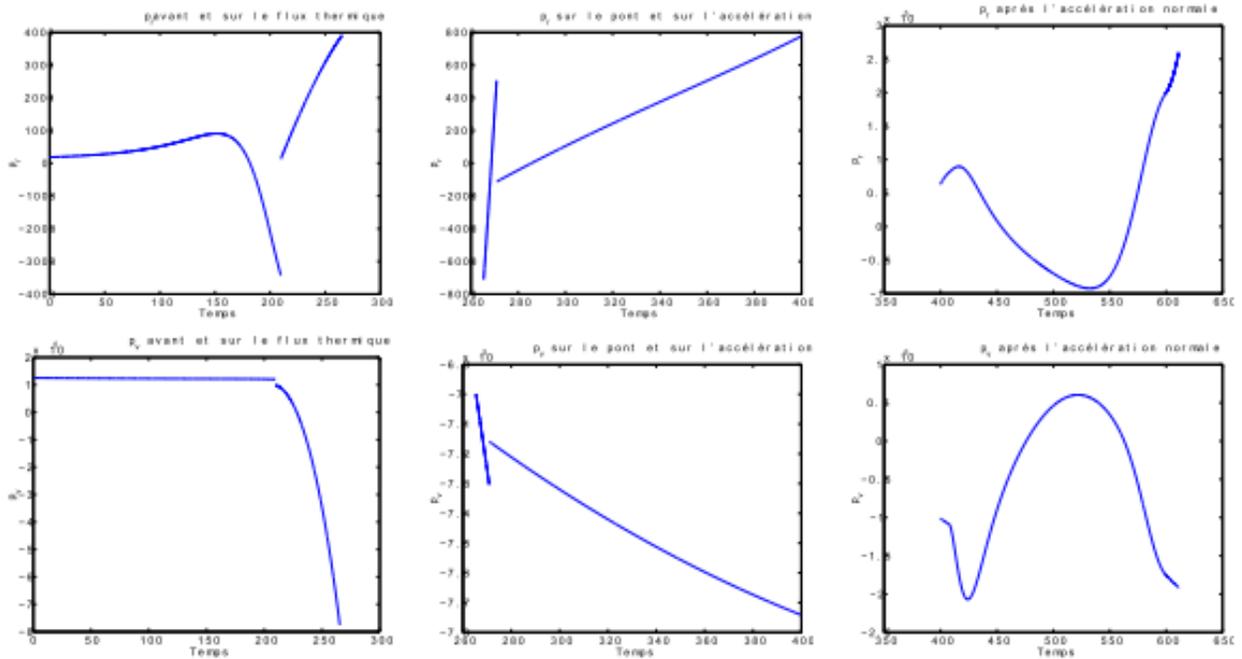


Fig.9 :  $p_r$  et  $p_v$  sur différentes phases du domaine du vol

## Commentaire

Les vecteurs adjoints  $p_r$  et  $p_v$  sont discontinus aux points d'entrée (ou de sortie) dans les deux contraintes (actives) sur l'état. Par contre, comme les contraintes sur l'état ne dépendent pas de  $\gamma$ , le vecteur adjoint  $p_\gamma$  reste continu. Le multiplicateur  $\eta$  est positif sur les contraintes sur l'état. De plus le vecteur adjoint  $p_\gamma$ , qui a le même signe que la fonction de commutation, est positif (resp. négatif) sur une extrémale bang  $\gamma_-$  (resp.  $\gamma_+$ ) et est nul sur la frontière. Ces résultats confirment les conditions nécessaires d'optimalité de Maurer.

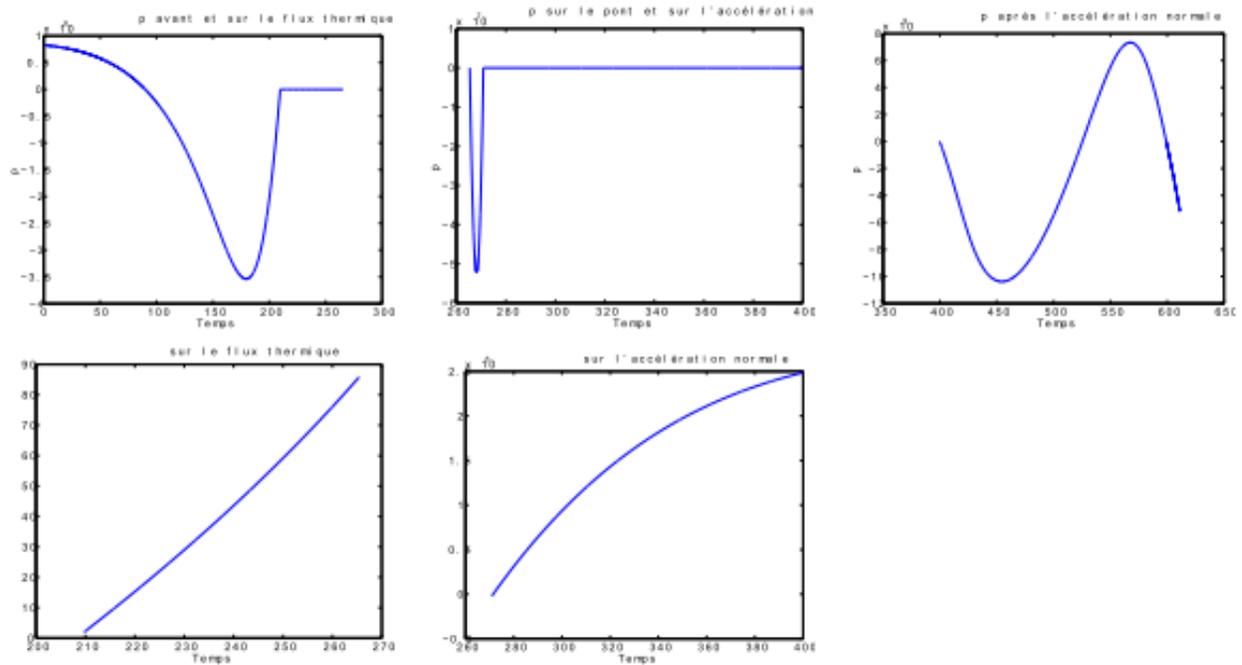


Fig.10 :  $p_\gamma$  et  $\eta$  Sur différentes phases du domaine du vol

# Chapitre 3

## Contrôle optimal sur le modèle simplifié II

Dans ce chapitre on donne le lien entre les champs de vecteurs (en dimension quatre) associés au modèle simplifié II et ceux (en dimension trois) associés au modèle simplifié I, afin d'appliquer les résultats obtenus dans la chapitre précédent pour résoudre ensuite théoriquement puis numériquement le problème du contrôle optimal pour le système simplifié II. Enfin pour appliquer la méthode de continuation sur la borne maximale de la contrainte, tout d'abord en ne tenant pas compte des contraintes sur l'état, puis en les prenant en compte voir [M.J], [B.B3]

Le modèle simplifié II, défini par le système (1.9), peut s'écrire comme un système de contrôle optimal affine mono-entrée en dimension quatre

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}), \quad |u| \leq M,$$

où  $\tilde{q} = (q, \mu)$  est l'état augmenté en dimension quatre de l'état  $q = (r, v, \gamma)$ ,  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont les champs de vecteurs donnés par :

$$\tilde{X} = X + \cos \mu Y, \quad \tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial \mu},$$

avec  $X$  et  $Y$  sont les champs de vecteurs associés au modèle simplifié I . Le coût à minimiser est :

$$J(u) = \int_0^T \tilde{\varphi}(\tilde{q}) dt, \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi}(\tilde{q}) = \varphi(q) = C_q \sqrt{\rho} v^3.$$

ainsi  $\tilde{q}$  vérifie les contraintes d'états (1.2) et(1.3) et les conditions limites :  $q(0)$  et  $q(T)$  sont données,  $\mu(0)$  et  $\mu(T)$  sont libres dans  $[-\pi, \pi]$ .

### 3.1 Analyse des extrémales du sous-système II sans contrainte

#### 3.1.1 Existence de trajectoires singulières.

On introduit l'équation  $\dot{q}_0 = \varphi(q)$  et  $q_0(0) = 0$  avec  $\bar{q} = (\tilde{q}, q_0) = (q, \mu, q_0)$  donc le système élargi est donnée par :

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}), \quad \dot{q}_0 = \varphi(q). \quad (3.1)$$

On introduit le Hamiltonien :

$$H(\tilde{q}, \tilde{p}, u) = \langle \tilde{p}, \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle + p_0\varphi(q) = \langle p, X(q) + \cos \mu Y(q) \rangle + p_\mu u + p_0\varphi(q),$$

où  $\tilde{p} = (p, p_\mu) = (p_r, p_v, p_\gamma, p_\mu)$  est le vecteur adjoint, et  $p_0$  est une constante positive telle que :  $(\tilde{p}, p_0) \neq (0, 0)$ .

**Définition 3.1** On appelle extrémale un triplet  $(\tilde{q}, \tilde{p}, u)$  solution du principe du minimum :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}), \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} = -p\left(\frac{\partial X}{\partial q} + \cos(\mu)\frac{\partial Y}{\partial q}\right) - p_0\frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}, \\ \dot{p}_\mu = \sin(\mu)\langle p, Y(q) \rangle, \\ H(\tilde{q}, \tilde{p}, u) = \min_{w \in [-M, M]} H(\tilde{q}, \tilde{p}, w), \end{array} \right. \quad (3.2)$$

en particulier :

$$u(t) = \begin{cases} M & \text{si } p_\mu(t) < 0 \\ -M & \text{si } p_\mu(t) > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On calcule les crochets de Lie associés aux champs de vecteurs  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  (en dimension quatre)

en fonction de ceux associés à  $X, Y$  (en dimension trois) :

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \begin{pmatrix} \sin(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, & [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] &= \begin{pmatrix} \cos(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, \\ [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] &= \begin{pmatrix} \sin(\mu)[X, Y] \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les extrémals singulières du système  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  sont contenues dans  $\Sigma : \phi(t) = \langle \tilde{p}, \tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle = 0$ , i.e.  $p_\mu = 0$ . En dérivant par rapport à  $t$ , il vient :

$$\dot{\phi}(t) = \langle \tilde{p}, [\tilde{X}, \tilde{Y}](\tilde{q}) \rangle = 0 \Rightarrow \sin \mu \langle p, Y \rangle = 0.$$

**Proposition 3.2** *Dans le domaine de vol où  $\cos(\gamma) \neq 0$ , les extrémals singulières du système  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  sont données par  $u = 0$ ,  $\sin \mu = 0$  et  $\langle p, Y \rangle \neq 0$ .*

**Preuve.** Une extrémale singulière doit vérifier  $\phi = p_\mu = 0$  et  $\dot{\phi} = \sin(\mu) \langle p, Y \rangle = 0$ , ce qui donne 3 cas à distinguer :

1.  $\sin \mu = 0$  et  $\langle p, Y \rangle = 0$ .

Dans ce cas,  $\mu$  est constante et  $p_\mu$  est nul, or  $\langle p, Y \rangle$  est la fonction de commutation du système  $(X, Y)$ , d'où ce dernier accepte  $u = \cos(\mu) = +1$  ou  $-1$  comme extrémale singulière, ce qui est incompatible avec la proposition (2.1).

2.  $\sin \mu \neq 0$  et  $\langle p, Y \rangle = 0$ .

En dérivant  $\phi(t) = \langle \tilde{p}, \tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle$  deux fois, il vient :

$$\ddot{\phi}(t) = \sin(\mu) \langle p, [X, Y] \rangle + u \cos(\mu) \langle p, Y \rangle = 0,$$

ce qui implique  $\langle p, [X, Y] \rangle = 0$ , d'où  $\langle p, [Y, [X, Y]] \rangle = 0$ . De plus :

$$\ddot{\phi} = u \cos \mu \langle p, [X, Y] \rangle - \sin \mu \langle p, [X, [X, Y]] \rangle + \cos \mu \sin \mu \langle p, [Y, [X, Y]] \rangle = 0,$$

donc  $\langle p, [X, [X, Y]] \rangle = 0$ . Ce qui implique d'après le lemme (2.2) que  $\langle p, X \rangle = 0$ . Or  $X, Y, [X, Y]$  sont indépendants et forment un repère, donc  $\tilde{p} = 0$ , ce qui est impossible.

Enfin on conclut que le cas possible est, celui qui, durant une extrémale singulière, vérifie

$\sin(\mu) = 0$ ,  $\langle p, Y \rangle \neq 0$  et  $u = 0$ . ■

### 3.1.2 Analyse des extrémales singulières..

On applique un nouveau paramétrage aux équations en posant  $ds = \varphi(q(t))dt$ . Le système (3.1) devient  $\tilde{q} = \overline{X}(\tilde{q}) + u\overline{Y}(\tilde{q})$ ,  $|u| \leq M$  où  $\overline{X} = \psi\tilde{X}$ ,  $\overline{Y} = \psi\tilde{Y}$  et  $\psi = \frac{1}{\varphi}$ . Le problème de contrôle optimal est équivalent alors à un problème de temps minimal. On utilisant le même calcul que lemme (1.47) on montre que  $[\overline{X}, \overline{Y}] = \psi^2[\tilde{X}, \tilde{Y}] + \psi(\tilde{X}.\psi)\tilde{Y}$ . et puisque  $[\tilde{X}, \tilde{Y}].\psi = 0$ , on obtient :

**Lemme 3.3** *On a les propriétés suivantes :*

1. *L'ensemble  $\Sigma' : \langle \tilde{p}, \overline{Y} \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$  coïncide avec :  $\langle \tilde{p}, \tilde{Y} \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$ ,*
2.  *$[\overline{Y}, [\overline{X}, \overline{Y}]] = \psi^3[\tilde{Y}, [[\tilde{X}, \tilde{Y}]] \bmod\{\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\}$ ,*
3.  *$[\overline{X}, [\overline{X}, \overline{Y}]] = \psi^3[X, [X, Y]] + \psi^2([\tilde{X}, \tilde{Y}].\psi)\tilde{X} = \psi^3[X, [X, Y]] \bmod\{\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\}$ .*

Pour tester l'optimalité d'une extrémale singulière pour le problème de temps minimal, on utilise la condition nécessaire de Legendre Clebsch, qui s'écrit :

$$\langle \tilde{p}, \overline{X} \rangle \langle \tilde{p}, [\overline{Y}, [\overline{X}, \overline{Y}]] \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle \tilde{p}, \overline{Y} \rangle = \langle \tilde{p}, [\overline{X}, \overline{Y}] \rangle = 0 \quad (3.4)$$

Or d'après le principe du minimum on a  $\langle \tilde{p}, \overline{X} \rangle < 0$ , d'où  $\langle \tilde{p}, [\overline{Y}, [\overline{X}, \overline{Y}]] \rangle \leq 0$ , donc d'après le lemme précédent, on trouve :

**Proposition 3.4** *Durant une extrémale singulière solution du  $(\overline{X}, \overline{Y})$  on a :  $\cos(\mu) = -\text{signe}(\langle p, Y \rangle)$  i.e.*

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \langle p, Y \rangle < 0 \\ \pm\pi & \text{si } \langle p, Y \rangle > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

**Remarque 3.5** *Puisque  $\cos(\mu)$  est une fonction paire, alors  $\mu$  et  $-\mu$  donnent la même trajectoire pour  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . Il suffit donc de prendre  $\mu \in [0, \pi]$  et alors on obtient deux genres de trajectoires singulières  $\mu = 0$  et  $\mu = \pi$ .*

On utilise les résultats de la définition (1.17) et (1.20) du chapitre 1 pour classifier les extrémales au voisinage d'un point

$z_0 = z(t_0) = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$  de la surface de commutation.

### 3.1.3 Classification des trajectoires au voisinage de $\Sigma$ .

**1. Points ordinaires :** Soit  $z_0 \in \Sigma$ . Supposons  $\Sigma$  lisse et de codimension 1 en  $z_0$ . Alors  $z_0$  est un point de commutation ordinaire et alors chaque courbe extrémale dans un voisinage de  $z_0$  est de la forme  $\gamma_+ \gamma_-$  ou  $\gamma_- \gamma_+$ . (voir Fig.11)

**2. Points plis :** Soit  $z_0$  appartenant à  $\Sigma' : \langle \tilde{p}, \bar{Y} \rangle = \langle \tilde{p}, [\bar{X}, \bar{Y}] \rangle = 0$  i.e.  $(p_\mu(t_0) = 0, \sin(\mu_0) = 0)$

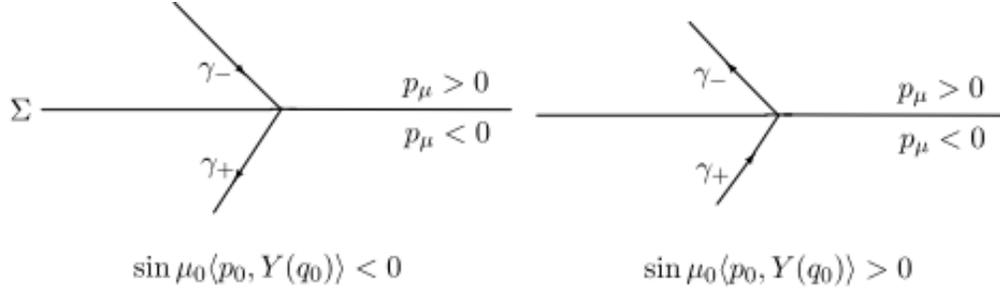


Fig.11 : Point de commutation ordinaire

Supposons  $\Sigma, \Sigma'$  lisses et de codimensions respectives 1 et 2 en  $z_0$ . Dans ce cas on dit que  $z_0$  est un point de commutation pli. Or

$$\ddot{\phi}(t_0) = \langle \tilde{p}, [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \rangle + u \langle \tilde{p}, [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \rangle = \psi^3 \sin(\mu_0) \langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle + u \psi^3 \cos(\mu_0) \langle p_0, Y(q_0) \rangle$$

d'après le lemme (3.3). Soient :

$$\lambda_{\pm}^+ = \psi^3 \sin(\mu_0) \langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle \pm M \psi^3 \cos(\mu_0) \langle p_0, Y(q_0) \rangle$$

et puisque :

$$\sin(\mu_0) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(\mu_0) = -\text{signe} \langle p_0, Y(q_0) \rangle$$

d'après la proposition (3.4), donc  $\lambda^+ < 0$  et  $\lambda^- > 0$ . En utilisant la classification de [9, 28 chap1] le point  $z_0$  est un point hyperbolique, et chaque courbe extrémale dans un voisinage de  $z_0$  est

de la forme :  $\gamma_- \gamma_0 \gamma_+$  ou  $\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-$ , (voir Fig.12).

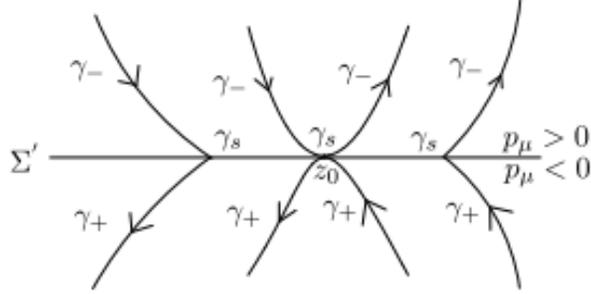


Fig.12 : Points hyperboliques

## 3.2 Modèle avec contraintes sur l'état

On tient maintenant compte des contraintes sur l'état. Pour calculer l'ordre des contraintes et les indéterminés  $u_b$ ,  $\eta$  et  $\nu$  on commence par le calcul des crochets et des dérivées de Lie associés à  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  en dimension quatre, en fonction de ceux associés à  $X$  et  $Y$  en dimension trois.

### 3.2.1 Calcul de l'ordre des contraintes sur l'état.

D'après les calculs précédents, on a :

$$\begin{aligned}
 [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \begin{pmatrix} \sin(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \begin{pmatrix} \cos(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] &= \begin{pmatrix} \sin(\mu)[X, Y] \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc si on note par  $C$  (qui ne dépend que de  $r$  et de  $v$ ) la contrainte sur le **flux thermique** ou sur l'**accélération normale**, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{X} \cdot C &= X \cdot C + \cos \mu Y \cdot C & (3.7) \\
[\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot C &= \sin \mu Y \cdot C \\
[X, [X, Y]] \cdot C &= \sin \mu [X, Y] \cdot C \\
[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \cdot C &= \cos \mu Y \cdot C = 0
\end{aligned}$$

De plus, si on impose l'hypothèse suivante : Supposons que le long de l'arc frontière  $\sin \mu \neq 0$ . Alors on a le résultat suivant :

**Lemme 3.6** *Pour le modèle simplifié II, dans le domaine de vol où  $\cos \gamma \neq 0$ , les contraintes sur le **flux thermique** et l'**accélération normale** sont d'ordre trois, et l'hypothèse  $(C_1)$  est vérifiée le long d'un arc frontière.*

### 3.2.2 Calcul de $u_b$ , $\eta$ et de $\nu$ .

On note par  $C$  la contrainte sur le **flux thermique** ou l'**accélération normale**. L'application du (1.48 du chap1) qui traite le cas d'une contrainte d'ordre trois au système  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  donne.

**Lemme 3.7** 1. *Le long de l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} \cdot C &= [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot C = 0, & (3.8) \\
u_b &= -\frac{\tilde{X}^3 \cdot C}{[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \cdot C}, \\
\langle \tilde{p}(t), \tilde{Y} \rangle &= \langle \tilde{p}(t), [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle = \langle \tilde{p}(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_b \langle \tilde{p}(t), [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \rangle = 0, \\
\eta(t) &= \frac{\langle \tilde{p}(t), \psi_3 \rangle_{u=u_b}}{([\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \cdot C)}.
\end{aligned}$$

2. *En un point de contact ou de jonction on a :*

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{p}(t_1^-), \tilde{Y} \rangle &= \langle \tilde{p}(t_1^+), \tilde{Y} \rangle, & (3.9) \\
\langle \tilde{p}(t_1^-), [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle &= \langle \tilde{p}(t_1^+), [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle, \\
v &= \frac{\langle \tilde{p}(t_1^-), \psi_2(t_1^+) \rangle - \langle \tilde{p}(t_1^+), \psi_2(t_1^+) \rangle}{[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \cdot C}
\end{aligned}$$

On en déduit les résultats suivants :

**Corollaire 3.8** *Le long de l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned}
X \cdot C &= 0, \\
\cos \mu &= \frac{X^2 \cdot C}{[X, Y]} C' \\
u_b &= -\frac{X^3 \cdot C - \cos \mu [X, [X, Y]] \cdot C}{\sin \mu [X, Y] \cdot C} \\
p_\mu(t) &= \langle p(t), Y \rangle = \langle p(t), [X, Y] \rangle = 0 \\
\eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y] \cdot C}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

**Remarque 3.9** *On sait que durant l'arc frontière on a  $\sin \mu \neq 0$ . On a supposé que  $\mu(t)$  est continue, ainsi on arrive et on quitte l'arc frontière par un régulier  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$ . Puisque l'arc frontière est optimal, on ne rencontre que des points de jonction avec les frontières.*

**Corollaire 3.10** *En un point de jonction  $t_1$  entre un bang-bang et l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned}
p_\mu(t_1^-) &= p_\mu(t_1^+) \\
\langle p(t_1^-), Y \rangle &= \langle p(t_1^+), Y \rangle \\
v &= \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y](q(t_1)) \rangle}{([X, Y] \cdot C)(q(t_1))}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

### 3.3 Synthèse temps minimal au voisinage de la contrainte

On considère un système affine, mono-entrée  $\dot{q} = X(q) + uY(q)$ ,  $|u| \leq M$  et  $C(q) \leq 0$  où  $q \in \mathbb{R}^4$  et  $C$  est une contrainte d'ordre trois.

Notre objectif est de présenter par calcul direct la synthèse temps minimal, au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié II. La première étape est de construire une forme normale.

#### 3.3.1 Forme normale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié II

**Lemme 3.11** *Au voisinage de la frontière on a :  $\tilde{X}, \tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]$  sont indépendants et  $[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \in \text{Vect}\{\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\}$*

**Normalisation.** Puisque le modèle simplifié  $II$  n'est qu'une extension du modèle simplifié  $I$ , en ajoutant l'équation  $\dot{\mu} = u$ , qui est déjà normalisée, donc pour normaliser le système simplifié  $II$ , on peut prendre le modèle normal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha z \\ \dot{y} &= 1 + bx \\ \dot{z} &= c + \cos \mu\end{aligned}$$

déjà construit pour le modèle simplifié  $I$ , en ajoutant l'équation  $\dot{\mu} = u$ , de plus on identifie la contrainte à  $C = x$  et on localise notre étude au point  $q_0 = (0, 0, 0, \mu_0)$ , ce qui donne le modèle local suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha z, \\ \dot{y} = 1 + bx \\ \dot{z} = c + \cos \mu \\ \dot{\mu} = u, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

et puisque la contrainte est d'ordre trois donc :

- $\ddot{x} = 0$ , ce qui implique  $c + \cos \mu = 0$ , donc sur la frontière  $c = -\cos \mu$ ,
- $\dot{x} = 0$ , or  $\sin \mu \neq 0$ , donc  $u_b = 0$ , ce qui implique  $\mu = \mu_0$  sur la frontière.

On conclut alors :

**Lemme 3.12** *Sous nos hypothèses, le modèle local est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha z \\ \dot{y} = 1 + bx \\ \dot{z} = \cos \mu - \cos \mu_0 \quad |u| \leq M \\ \dot{\mu} = u, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

où :  $a = -\frac{[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \cdot C}{\sin \mu} = -[X, Y] \cdot C > 0$ , la contrainte est  $x \leq 0$ . L'arc frontière est identifié à  $\gamma : t \mapsto (0, t, 0, \mu_0)$ .

Cette forme normale est utile pour calculer la synthèse optimale locale.

**Remarque 3.13** *Dans la normalisation précédente, on a utilisé le changement de variable de  $y$  par  $\lambda y$ ,  $z$  par  $-z$ ,  $\mu$  par  $\pi - \mu$  et  $u$  par  $-u$ .*

### 3.3.2 Synthèse locale temps minimal

**Comparaison de  $\gamma_b$  avec les autres arcs possibles pour rejoindre deux points voisins de la frontière.**

On note  $T(\gamma)$  le temps nécessaire pour rejoindre deux points voisins  $A = (0, 0, 0, \mu_0)$  et  $B = (0, t, 0, \mu_0)$  de la frontière par un *arc*  $\gamma$ , en prenant le modèle local du lemme précédent.

On intègre le modèle normalisé, on trouve alors le résultat suivant :

**Lemme 3.14** *On a 2 cas :*

1) *si  $ab > 0$  alors :*

i) *si  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  on a :  $T(\gamma_- \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-)$  et  $T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-)$*

ii) *si  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  on a :  $T(\gamma_+ \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_+)$  et  $T(\gamma_+ \gamma_0 \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_{-\pi} \gamma_+)$*

2) *si  $ab < 0$  alors :*

i) *si  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  on a :  $T(\gamma_+ \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_+)$  et  $T(\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+)$*

ii) *si  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  on a :  $T(\gamma_- \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-)$  et  $T(\gamma_- \gamma_{-\pi} \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_0 \gamma_-)$*

**Synthèse locale temps minimal :**

D'après le lemme précédent, la synthèse locale optimale dépend de  $a$  et  $b$ , et on peut distinguer les cas suivants :

**1<sup>er</sup> cas :**  $a > 0, b > 0$  :

1.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  :

**Avant  $A$  :**  $\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

si  $\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow$  on rejoint  $A$  par  $\gamma_-$ , ou bien  $\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow$  non accessible.

**Après  $A$  :**  $\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

si  $\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow$  on quitte  $A$  par  $\gamma_+$ , ou bien  $\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow$  non accessible.

Donc pour rejoindre  $A$  et  $B$ , l'arc  $\gamma_- \gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_- \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-)$  et  $T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_- \gamma_b \gamma_+$ , (voir Fig.13)

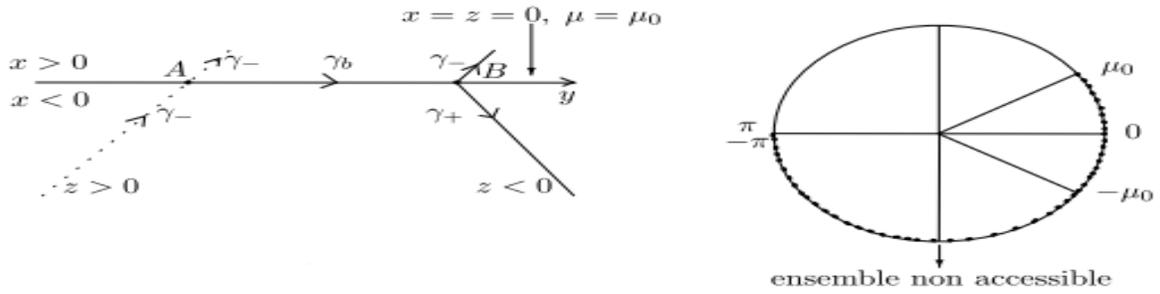


Fig.13 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_- \gamma_b \gamma_+$

1.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  :

**Avant A** :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, \mu_0]$ .  
 si  $\mu \in [-\pi, \mu_0]$   $\rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_+$ , ou bien  $\mu \in [-\mu_0, \pi] \rightarrow$  non accessible.

**Après A** :  $\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .  
 si  $\mu \in [-\pi, \mu_0]$   $\rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_-$ , ou bien  $\mu \in [-\mu_0, \pi] \rightarrow$  non accessible.

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+ \gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_+ \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_+)$  et  $T(\gamma_+ \gamma_0 \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_{-\pi} \gamma_+)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+ \gamma_b \gamma_-$ , (voir Fig.14)

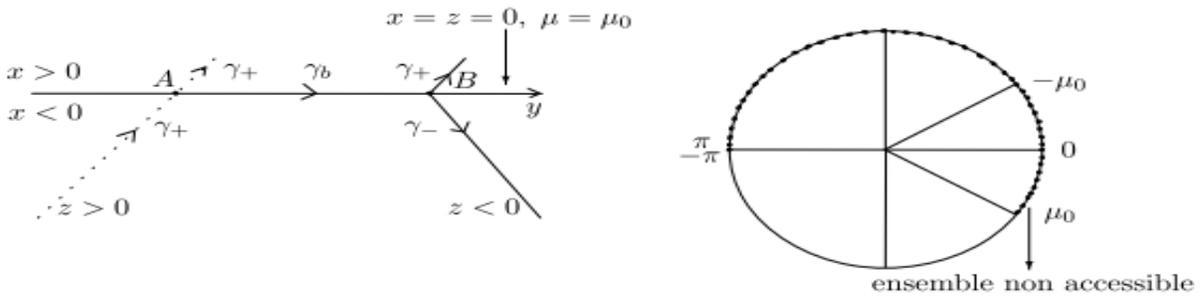


Fig.14 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+ \gamma_b \gamma_-$

2<sup>ème</sup> cas :  $a > 0, b < 0$  :

2.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$ :

**Avant A** :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

si  $\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow$  on rejoint  $A$  par  $\gamma_-$ , ou bien  $\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow$  non accessible.

**Après  $A$**  :  $\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

si  $\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow$  on quitte  $A$  par  $\gamma_+$ , ou bien  $\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow$  non accessible.

Donc pour rejoindre  $A$  et  $B$ ,  $\gamma_- \gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_+ \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_+)$  et  $T(\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  ou  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_\pi \gamma_- \gamma_+$ , (voir Fig.15)

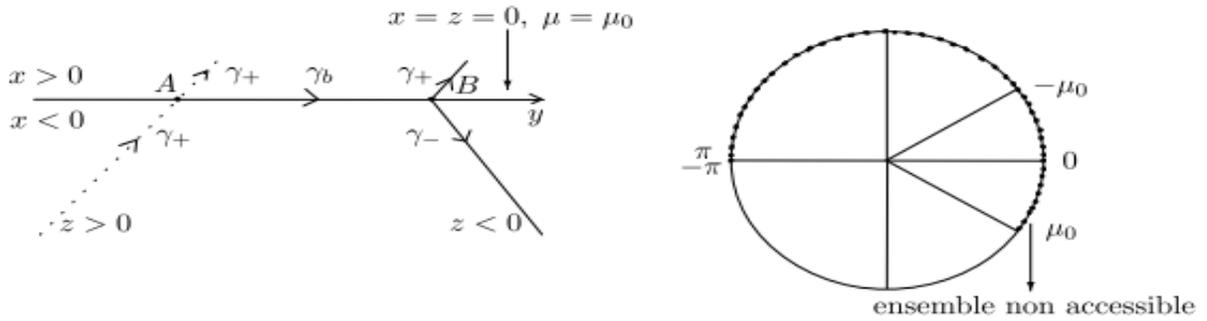


Fig.15 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  ou  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_\pi \gamma_- \gamma_+$

2.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$ :

**Avant  $A$**  :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, \mu_0]$ .

si  $\mu \in [-\pi, \mu_0] \rightarrow$  on rejoint  $A$  par  $\gamma_+$  ou bien  $\mu \in [-\mu_0, \pi] \rightarrow$  non accessible.

**Après  $A$**

$\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

si  $\mu \in [-\pi, \mu_0] \rightarrow$  on quitte  $A$  par  $\gamma_-$ , ou bien  $\mu \in [-\mu_0, \pi] \rightarrow$  non accessible.

Donc pour rejoindre  $A$  et  $B$ ,  $\gamma_+ \gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_- \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-)$  et  $T(\gamma_- \gamma_- \pi \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_0 \gamma_-)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  ou  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_- \pi \gamma_+ \gamma_-$ , (voir Fig.16).

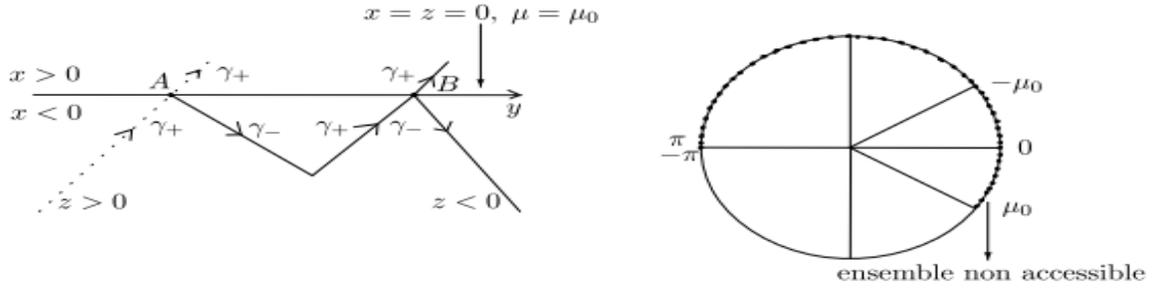


Fig.16 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+\gamma_-$  ou  $\gamma_+\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+\gamma_-$ .

3<sup>ème</sup> cas :  $a < 0, b > 0$  :

3.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$ :

Avant A :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_+$ .

Après A :  $\dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_-$ .

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+\gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_+\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+)$  et  $T(\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_0\gamma_+)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_b\gamma_-$ , (voir Fig.17).

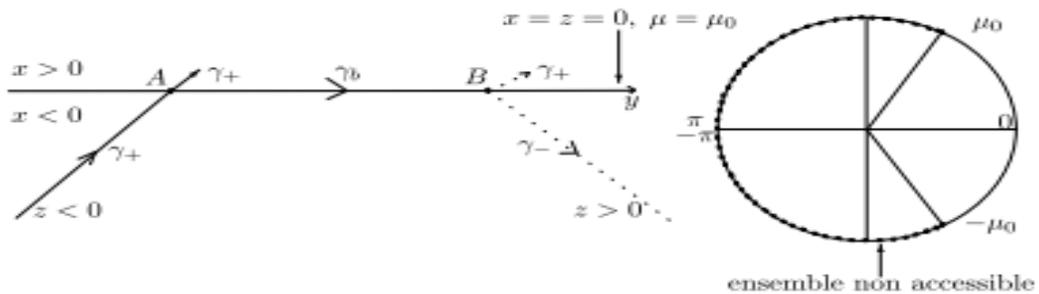


Fig.17 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_b\gamma_-$

3.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$ :

Avant A :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_-$ .

Après A :  $\dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_+$ .

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_- \gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_- \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-)$  et  $T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_0 \gamma_-)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_- \gamma_b \gamma_+$ , (voir Fig.18).

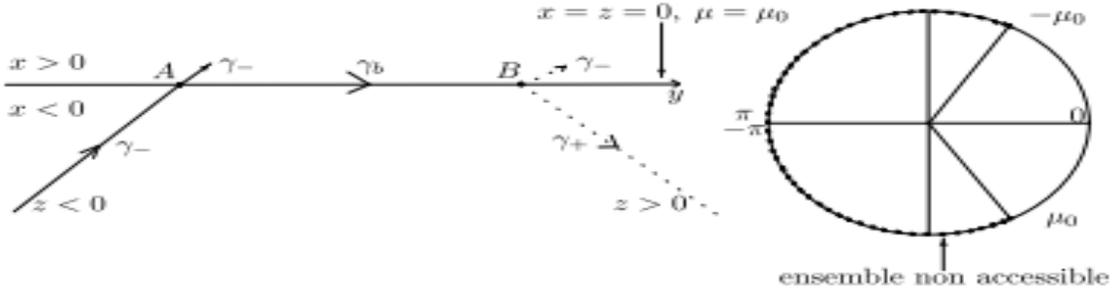


Fig.18 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_- \gamma_b \gamma_+$

4<sup>ème</sup> cas :  $a < 0, b < 0$  :

4.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$ :

Avant A :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_+$ .

Après A :  $\dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_-$ .

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+ \gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_- \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-)$  et  $T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  ou  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_-$ , (voir Fig.19).

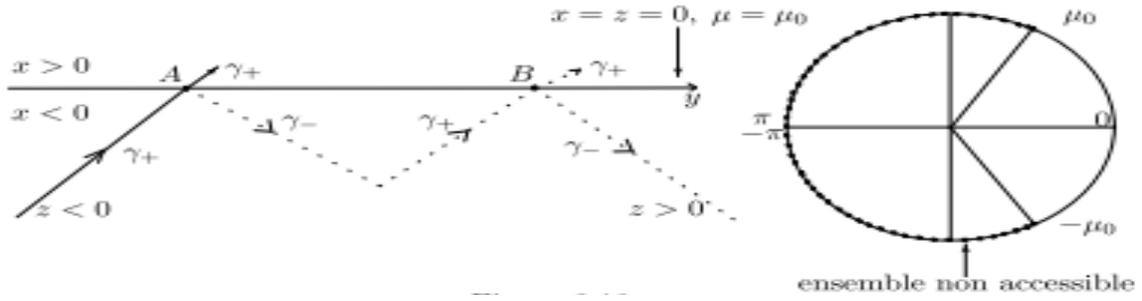


Fig.19 :

Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+\gamma_-$  ou  $\gamma_+\gamma_-\gamma_0\gamma_+\gamma_-$ .

4. ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  :

Avant A :  $\dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_-$ .

Après A :  $\dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_+$ .

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_-\gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :  $T(\gamma_+\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+)$  et  $T(\gamma_+\gamma_0\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+)$ . Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou  $\gamma_-\gamma_+\gamma_0\gamma_-\gamma_+$ , (voir Fig.20).

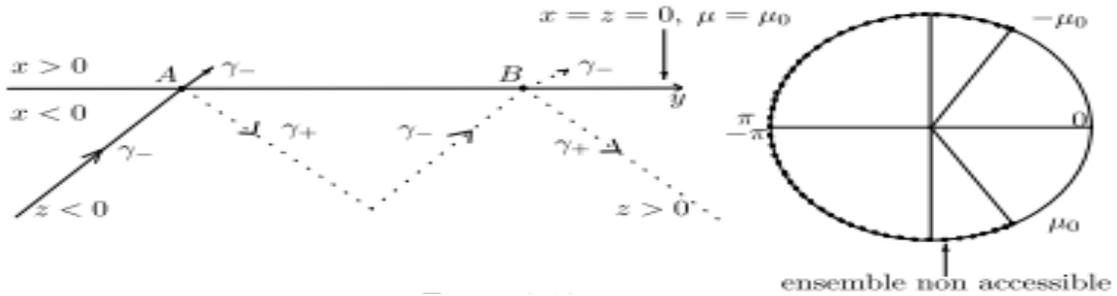


Fig.20 : Synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou

$\gamma_-\gamma_+\gamma_0\gamma_-\gamma_+$

Conclusion Sur le modèle local on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha z, \\ \dot{y} = 1 + bx, \quad x \leq 0 \\ \dot{z} = \cos(\mu) - \cos(\mu_0) \quad |u| \leq M \\ \dot{\mu} = u \end{cases}$$

la condition  $b < 0$  viole l'optimalité de l'arc frontière.

**Lien avec le principe de minimum.** Pour le modèle simplifié  $II$ , d'après le corollaire (3.8), on a :

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{([X, Y] \cdot C)_3} \quad (3.12)$$

De plus sur le modèle normalisé, sur la frontière on a

$$([X, Y] \cdot C)_3 = -a \quad \text{et} \quad [X, [X, Y]] = \begin{pmatrix} 0 \\ ab \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle = p_2 ab \quad (3.13)$$

avec  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , donc  $\eta(t) = -p_2 b$ . Par ailleurs  $\langle p(t), Y \rangle = \langle p(t), [X, Y] \rangle = 0$ , d'où  $p_1 = p_3 = 0$ . Or d'après le principe du minimum  $\langle p(t), X \rangle < 0$ , ce qui implique  $p_2 < 0$ . Donc si  $b < 0$ , on obtient  $\eta(t) < 0$ . On conclut que  $b < 0$  viole les conditions nécessaires du principe du minimum [H.M] pour l'optimalité de l'arc frontière. Enfin pour le modèle simplifié  $II$ , le calcul donne  $b$  positif, ce qui implique que l'arc frontière est optimal.

### 3.4 Résultats numériques

Dans cette section on va s'intéresser à simuler le système d'état pour le système simplifié  $II$ , surtout pour différentes valeurs de la borne maximale  $M$  et en particulier pour un  $M$  assez grand. D'après l'analyse géométrique traitée précédemment, on déduit le problème aux valeurs limites définit de la manière suivante :

**Proposition 3.15** La trajectoire optimale satisfaisant les conditions finales requises est de la forme  $\gamma_\pi \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_\pi$ . C'est-à-dire qu'elle est constituée de treize arcs consécutifs :

- un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = \pi$ , un arc régulier associé à  $u = -M$ ,
- un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = 0$ , un arc régulier associé à  $u = M$ ,
- un arc frontière associé à  $u = -\frac{X^3 \cdot C_1 - \cos \mu[X, [X, Y]] \cdot C_1}{\sin \mu[X, Y] \cdot C_1}$  correspondant au **flux**

**thermique**

- un arc régulier associé à  $u = -M$ ,
- un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = 0$ ,
- un arc régulier associé à  $u = M$ ,
- un arc frontière associé à  $u = -\frac{X^3 \cdot C_2 - \cos \mu[X, [X, Y]] \cdot C_2}{\sin \mu[X, Y] \cdot C_2}$  correspondant à l'**accélération**

**normale,**

- un arc régulier associé à  $u = -M$ ,
- un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = 0$ ,
- un arc régulier associé à  $u = M$ , puis un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = \pi$ , voir

Figure 3.20.

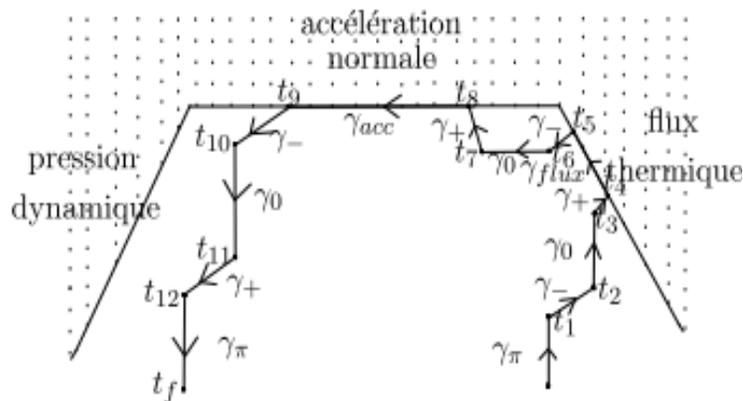


Fig.21

: Trajectoire optimale du modèle Simplifié II

Pour les conditions limites, on a choisi les même valeurs que pour le système simplifié I. De plus l'application du principe du minimum impose les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
C_1(t_4) = \varphi^{\max} \quad \cos(\mu(t_4)) = \frac{X^2 \cdot C_1}{[X, Y] \cdot C_1} \quad C_2(t_8) = \gamma_n^{\max} \quad \cos(\mu(t_8)) = \frac{X^2 \cdot C_2}{[X, Y] \cdot C} \quad \mu(t_{10}) = 0 \\
(X \cdot C_1)(t_4) = 0 \quad \mu(t_2) = 0 \quad (X \cdot C_2)(t_8) = 0 \quad \mu(t_6) = 0 \quad \mu(t_{12}) = \pi
\end{aligned}$$

Puisque  $\mu(t)$  est donnée par une fonction affine sur les extrémales régulières ( $u = \pm M$ ), on a alors le résultat suivant :

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{M} \quad t_6 = t_5 + \frac{\mu(t_5)}{M} \quad t_{10} = t_9 + \frac{\mu(t_9)}{M} \quad t_{12} = t_{11} + \frac{\pi}{M}$$

Les extrémales du système sont donc paramétrées par les temps de commutation du contrôle  $t_1, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_9, t_{11}$  et le temps final  $T$ . L'algorithme suivant permet d'obtenir ces paramètres pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites et les conditions imposées par le principe du minimum.

**Remarque 3.16** Dans la trajectoire optimale du modèle simplifié II, en fonction de  $M$  on peut trouver des arcs vides et on va constater numériquement qu'il existe un  $\tilde{M}$  tel que le pont entre les deux frontières se réduit à  $\gamma_- \gamma_+$  pour tout  $M$  inférieur à  $\tilde{M}$  et en particulier pour  $M = \frac{\pi}{30}(\text{rad}/S)$ .

### Algorithme

**Étape 1** : Résoudre le modèle simplifié II avec  $M = \frac{\pi}{30}(\text{rad}/S)$  et à déterminer les instants de commutation du contrôle i.e trouver  $Z = (t_1, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_9, t_{11}, T)$  qui vérifie la fonction de tir  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} C_1(t_4) - \varphi^{\max} \\ (X \cdot C_1)(t_4) \\ \cos(\mu(t_4)) - \frac{X^2 \cdot C_1}{[X, Y] \cdot C_1 \cdot \gamma_n^{\max}} \\ C_2(t_8) - \gamma_n^{\max} \\ (X \cdot C_2)(t_8) \\ \cos(\mu(t_8)) - \frac{X^2 \cdot C_2}{[X, Y] \cdot C_2} \\ r(T) - 6,41155489e + 006 \\ v(T) - 1,80834e + 003 \\ \gamma(T) + 1.478e - 001 \end{bmatrix}$$

(voir Fig.22,23)

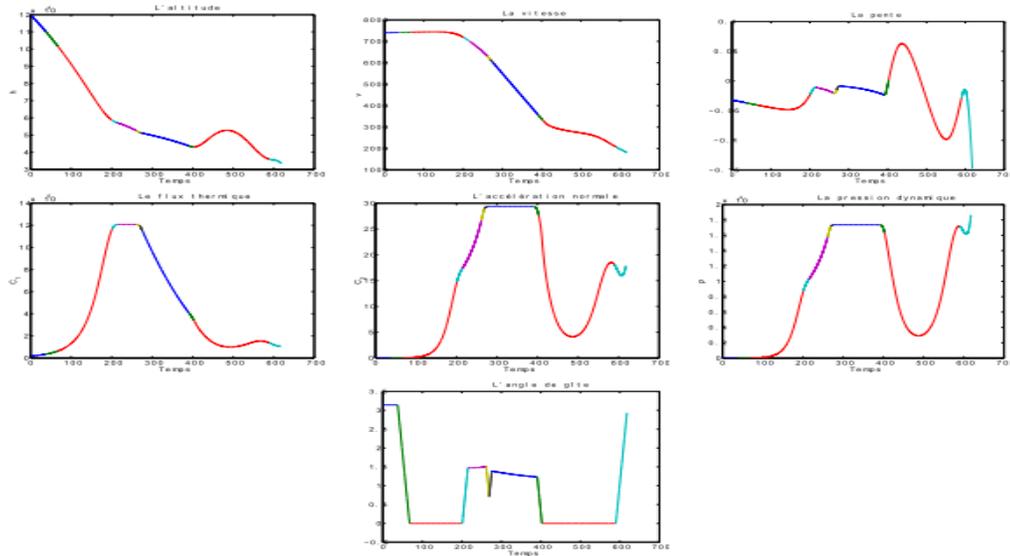


Fig.22 :Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour  $M = \frac{\pi}{30}$ (rad/S)

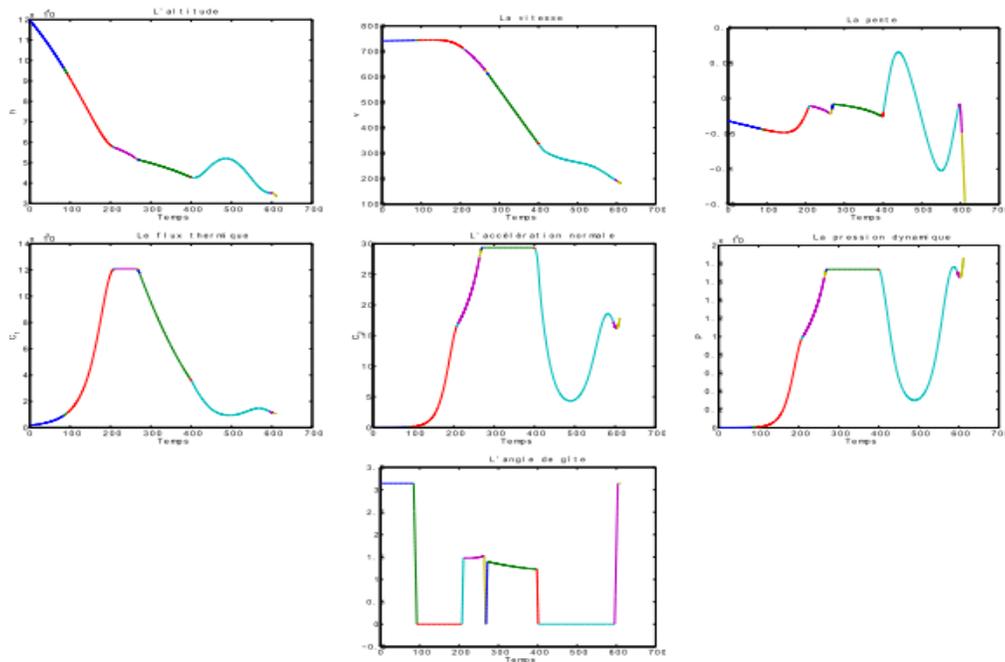


Fig.23 : Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour  $M = \frac{\pi}{8}$ (rad/S)

Les coût obtenus pour chaque modèle sont donnés dans le tableau TAB. 2.

| Modèle                      | Coût associé               |
|-----------------------------|----------------------------|
| Modèle simplifié $I$        | $2,696725223086439e + 008$ |
| $M = \frac{\pi}{30}(rad/S)$ | $2,708435475756367e + 008$ |
| $M = -(\pi/30)(rad/S)$      | $2,697682207536621e + 008$ |
| $M \simeq 15(rad/S)$        | $2,696723098307244e + 008$ |

TAB.2 – Coûts obtenus

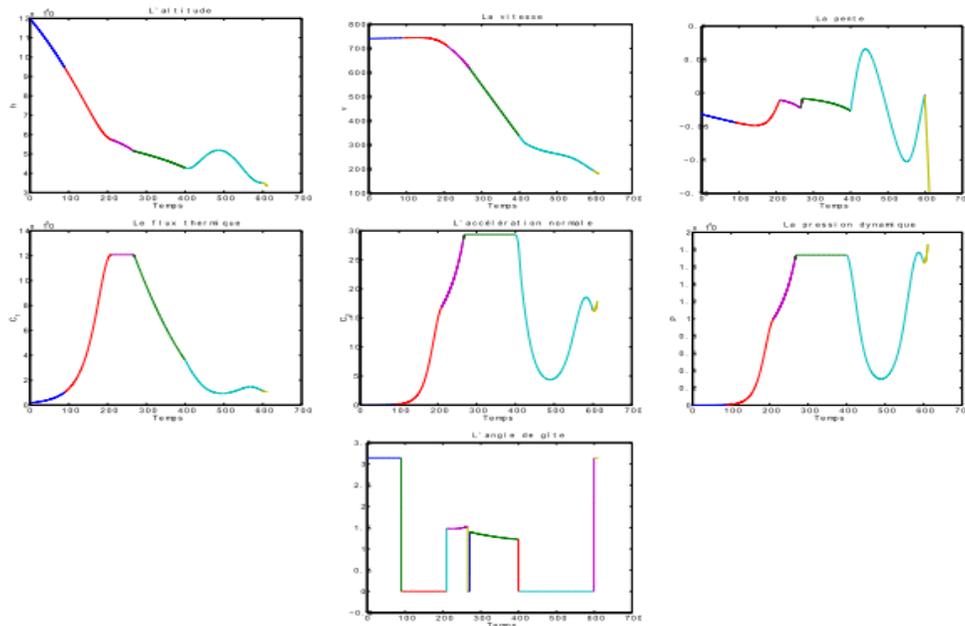


Fig.24 : Coordonnes d'état et contraintes sur l'état pour  $M \simeq 15(rad/S)$

### Commentaire

Pour  $M = \frac{\pi}{30}(rad/S)$ , le pont entre les deux contraintes se décompose seulement en  $\gamma_-$  et en  $\gamma_+$ ; dans ce cas, on ne suit pas l'extrémale singulière  $\gamma_0$ . Par ailleurs, pour  $M = \frac{\pi}{8}(rad/S)$ , on commence à toucher  $\gamma_0$  et on le suit brièvement pour  $M \simeq 15(rad/S)$ . On constate que, pour une petite dérivée de l'angle de gîte ( $\simeq \frac{\pi}{30}(rad/S)$ ), on perd l'opti-malité du coût par rapport au modèle simplifié  $I$ . Par contre, pour une grande dérivée de l'angle de gîte ( $\simeq 15(rad/S)$ ), on remarque que le coût se rapproche de celui obtenu dans le modèle simplifié  $I$ .

# Chapitre 4

## Contrôle optimal du problème complet

Dans ce chapitre on effectue le contrôle optimal de l'arc atmosphérique du système complet (1.1), en dimension six, soumis aux trois contraintes sur l'état (1.2), (1.3) et (1.4), et vérifie les conditions limites.

### 4.1 Extrémales du problème non contraint

Remarquons que le système (1.1) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q) \quad (4.1)$$

avec  $u_1 = \cos \mu$ ,  $u_2 = \sin \mu$  et  $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$ . On introduit le Hamiltonien

$$H(q, p, u) = \langle p, X(q) \rangle + u_1 \langle p, Y_1(q) \rangle + u_2 \langle p, Y_2(q) \rangle + p_0 \varphi$$

où  $u = (u_1, u_2)$  et  $p = (p_r, p_v, p_\gamma, p_L, p_l, p_\chi)$  est le vecteur adjoint.

En paramétrisant les trajectoires par  $ds = \varphi(q)dt$ , on se ramène à un problème de temps minimal, les contrôles vérifiant la contrainte non convexe  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

**Définition 4.1** *On appelle problème optimal convexifié le problème où la contrainte  $u_1^2 + u_2^2 = 1$  est remplacée par la contrainte convexe  $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ .*

### 4.1.1 Calcul des extrémals régulières.

d'après le principe du minimum, les contrôles extrémaux sont donnés, en dehors de la surface  $\Sigma$  (*i.e*  $\langle p, Y_1 \rangle = \langle p, Y_2 \rangle \neq 0$ ), par :

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \mu = -\frac{\langle p, Y_1 \rangle}{\sqrt{\langle p, Y_1 \rangle^2 + \langle p, Y_2 \rangle^2}} = -\frac{\cos \gamma p_\gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma p_\gamma^2 + p_\chi^2}}, \\ u_2 &= \sin \mu = -\frac{\langle p, Y_2 \rangle}{\sqrt{\langle p, Y_1 \rangle^2 + \langle p, Y_2 \rangle^2}} = -\frac{p_\chi}{\sqrt{\cos^2 \gamma p_\gamma^2 + p_\chi^2}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les extrémals correspondantes sont dites régulières, et celles qui sont contenues dans la surfaces  $\Sigma$  sont dites singulières.

### 4.1.2 Analyse des extrémals singulières.

On utilise les résultats des calculs effectués dans [B.B3]. Les extrémals singulières sont celles du système  $\dot{q} = \bar{X}(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q)$  avec  $\bar{X} = \psi X$ ,  $\psi = \frac{1}{\varphi}$ . Elles sont par définition contenues dans la surface  $\Sigma$  de commutation (*i.e*  $\langle p, Y_1 \rangle = \langle p, Y_2 \rangle = 0$ ), soit :  $p_\gamma = p_\chi = 0$ .

En dérivant par rapport à  $t$  on obtient , avec  $[Y_1, Y_2] = 0$  les contraintes :  $\langle p, [X, Y_1] \rangle = \langle p, [X, Y_2] \rangle = 0$ , qui définissent la surface  $\Sigma'$ . Or :

$$\begin{aligned} [X, Y_1] &= -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v} + \frac{v}{r} \sin \gamma \cos \chi \frac{\partial}{\partial L}, \\ [X, Y_2] &= \frac{v}{r} \cos \gamma \sin \chi \frac{\partial}{\partial L} \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à définir  $\Sigma'$  par les équations :

$$\begin{cases} -v \cos \gamma p_r + g \cos \gamma p_v + \frac{v}{r} \sin \gamma \cos \chi p_L = 0 \\ p_L \frac{v}{r} \cos \gamma \sin \chi = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

d'où on obtien :

(a) si  $p_L = 0$  et  $\chi \neq k\pi$

(b) si  $p_L \neq 0$  et  $\chi = k\pi$

D'où le lemme suivant :

**Lemme 4.2** *Les trajectoires singulières du système  $\dot{q} = \bar{X}(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q)$  vérifient  $\chi = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Les simulations numériques montrent que cette situation n'arrive jamais. En fait on verra que  $\chi(t) \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  dans le domaine de vol.

Soit le système extrémal suivant.

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - \frac{1}{2} \rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\
&\quad + \Omega^2 \frac{v}{r} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\
\frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\
\frac{dl}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
\frac{d\chi}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu \\
&\quad + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{v \sin L \cos L \sin \chi}{r \cos \gamma} \\
\frac{dp_r}{dt} &= -Pv \left(2 \frac{g_0 \sin \gamma}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{S\rho v^2}{m} \left(\frac{C_D}{h_S} - \frac{\partial C_D}{\partial r}\right) + \Omega^2 \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi)\right) \\
&\quad - p_\gamma \left(\cos \gamma \left(2 \frac{g_0}{r^3 v} - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{\Omega^2 \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)}{v}\right) + p_L \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r^2} \\
&\quad + p_l \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r^2 \cos L} - p_\chi \left(-\frac{v \cos \gamma \tan L \sin \chi}{r^2} + \frac{\Omega^2 \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} p_\gamma \frac{\rho v S}{m} \left(\frac{C_L}{h_S} - \frac{\partial C_L}{\partial r}\right) \cos \mu + \frac{1}{2} p_\chi \frac{\rho v S}{m \cos \gamma} \left(\frac{C_L}{h_S} - \frac{\partial C_L}{\partial r}\right) \sin \mu + \frac{1}{2} p_0 \frac{C_q v^3 \sqrt{\rho}}{h_S}; \\
\frac{dp_v}{dt} &= -p_r \sin \gamma - p_v \left(-\frac{1}{2} \frac{S\rho v^2 \frac{\partial C_D}{\partial v}}{m} - \frac{S\rho v C_D}{m}\right) - p_\gamma \left(\cos \gamma \left(\frac{g_0}{r^2 v^2} + \frac{1}{r}\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{\Omega^2 r \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)}{v^2}\right) - p_L \frac{\cos \gamma \cos \chi}{r} - p_l \frac{\cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
&\quad - p_\chi \left(\frac{\cos \gamma \tan L \sin \chi}{r} - \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \sin \chi}{v^2 \cos \gamma}\right) - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{\rho v S}{m} \left(\frac{C_L}{v} + \frac{\partial C_L}{\partial v}\right) \cos \mu \\
&\quad - \frac{1}{2} p_\chi \frac{\rho v S}{m \cos \gamma} \left(\frac{C_L}{v} + \frac{\partial C_L}{\partial v}\right) \sin \mu - 3p_0 C_q \sqrt{\rho} v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_\gamma}{dt} &= -p_r v \cos \gamma - p_v \left( -\frac{g_0 \cos \gamma}{r^2} + \Omega^2 r \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \right) - p_\gamma \left( -\sin \gamma \left( -\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Omega^2 r \cos L (-\sin \gamma \cos L + \cos \gamma \sin L \cos \chi)}{v} \right) + p_L \frac{v \sin \gamma \cos \chi}{r} + p_l \frac{v \sin \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
&\quad - \frac{1}{2} p_\chi \frac{S \rho v \sin \gamma C_L}{m (\cos \gamma)^2} \sin(\mu) - p_\chi \left( -\frac{v \sin \gamma \tan L \sin \chi}{r} - 2\Omega (1 + (\tan \gamma)^2) \cos L \cos \chi \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \sin \chi \sin \gamma}{v (\cos \gamma)^2} \right); \\
\frac{dp_L}{dt} &= -p_v (-2\Omega^2 r \sin L \sin \gamma \cos L - \Omega^2 r \cos 2L \cos \gamma \cos \chi) - p_\gamma (-2\Omega \sin L \sin \chi \\
&\quad - \frac{2\Omega^2 r \sin L \cos \gamma \cos L - \Omega^2 r \cos 2L \sin \gamma \cos \chi}{v}) - p_l \frac{v \cos \gamma \sin \chi \sin L}{r (\cos L)^2} \\
&\quad - p_\chi \left( \frac{v \cos \gamma (1 + (\tan L)^2) \sin \chi}{r} + 2\Omega (\cos L + \tan \gamma \sin L \cos \chi) + \frac{\Omega^2 r \cos 2L \sin \chi}{v \cos \gamma} \right) \\
\frac{dp_l}{dt} &= 0 \\
\frac{dp_\chi}{dt} &= -p_v \Omega^2 r \cos L \cos \gamma \sin L \sin \chi - p_\gamma \left( 2\Omega \cos L \cos \chi - \frac{\Omega^2 r \cos L \sin \gamma \sin L \sin \chi}{v} \right) \\
&\quad + p_L \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r} - p_l \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r \cos L} - p_\chi \left( \frac{v \cos \gamma \tan L \cos \chi}{r} + 2\Omega \tan \gamma \cos L \sin \chi \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \cos \chi}{v \cos \gamma} \right)
\end{aligned}$$

**Remarque 4.3** *Les remarques préliminaires citées dans [B.B3] montrent qu'au cours du vol, on peut considérer, avec une bonne approximation, que la trajectoire se projette sur la trajectoire optimale du système simplifié I en dimension trois, étudié précédemment.*

On est alors amené à choisir  $\sin \mu = 0$  en dehors des arcs frontières. Dans la suite on note respectivement par  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$ , un arc associé à  $\cos \mu = -1$  et un arc associé à  $\cos \mu = 1$ .

## 4.2 Le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état

On prend maintenant en compte les contraintes sur l'état. Les simulations numériques et la stratégie de Harpold/Graves montrent que si la trajectoire contient des arcs frontières, cela doit être dans l'ordre suivant : **flux thermique, accélération normale, pression dynamique**. On vérifie numériquement que les deux contraintes sur le **flux thermique** et sur l'**accélération**

**normale** sont actives, mais si on cherche à saturer la contrainte sur la **pression dynamique** alors le point final désiré n'est plus accessible. Ainsi, les conditions aux limites impliquent que la contrainte sur la **pression dynamique** n'est pas active au cours du vol et alors on ne tiendra pas compte de cette contrainte dans la suite de cette section [E.T], [B.B2] et [M.J]

#### 4.2.1 Calcul des contrôles frontières.

##### Flux thermique.

La contrainte est :

$$C_1 = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}, \text{ où } \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{r_T - r}{h_S}\right).$$

On obtient :

$$\dot{C}_1 = X \cdot C_1 + \cos \mu (Y_1 \cdot C_1) + \sin \mu (Y_2 \cdot C_1) = 0 \quad (4.4)$$

or  $Y_1 \cdot C_1 = 0$  et  $Y_2 \cdot C_1 = 0$  donc  $\dot{C}_1 = X \cdot C_1 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$X \cdot C_1 = -\frac{1}{2} \frac{C_q v^4 \sqrt{\rho} \sin \gamma}{h_S} + 3C_q \sqrt{\rho} v^2 \left( -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{SC_D \rho v^2}{m} + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right) \quad (4.5)$$

De plus :

$$\ddot{C}_1 = X \cdot (X \cdot C_1) + \cos \mu (Y_1 \cdot (X \cdot C_1)) + \sin \mu (Y_2 \cdot (X \cdot C_1)) = 0$$

où

$$Y_1 \cdot (X \cdot C_1) = \frac{1}{4} \frac{C_q v^3 SC_L \rho^{\frac{3}{2}}}{h_S r^2 m} (-v^2 \cos \gamma r^2 - 6h_S g_0 \cos \gamma + 6h_S \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \cos \gamma + 6h_S \Omega^2 r^3 \cos L \sin \gamma \sin L \cos \chi) \quad (4.6)$$

$$Y_2 \cdot (X \cdot C_1) = \frac{3}{2} \frac{C_q \rho^{\frac{3}{2}} SC_L v^3 \Omega^2 r \cos L \sin L \sin \chi}{m} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{aligned}
X.(X \cdot C_1) = & -\frac{1}{4} \frac{C_q v \sqrt{\rho}}{h_S^2 r^4 m^2} (-v^4 r^4 m^2 - 24 h_S^2 g_0^2 m^2 - 12 \Omega^2 r^4 h_S^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2) \\
& -24 \Omega^3 r^5 \sin \chi h_S^2 m^2 \cos L v \cos \gamma + 48 h_S^2 g_0 m^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
& -12 \Omega^4 r^6 h_S^2 m^2 (\cos L)^4 - 12 v^2 r^4 m^2 h_S^2 \Omega^2 (\cos L)^2 + 14 v^2 r^5 m^2 h_S \Omega^2 (\cos L)^2 \\
& -12 h_S^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^2 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 + 12 h_S^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
& -12 \Omega^4 r^6 h_S^2 m^2 (\cos L)^2 - 24 v^2 r m^2 h_S^2 g_0 - 14 v^2 r^2 m^2 h_S g_0 - 12 \rho^2 h_S^2 S^2 C_D^2 v^4 r^4 \\
& -3 \rho^2 h_S^2 v^5 S^2 r^4 \frac{\partial C_D}{\partial v} C_D + v^4 r^4 m^2 (\cos \gamma)^2 + 12 h_S^2 m^2 g_0^2 (\cos \gamma)^2 - 13 v^4 \sin \gamma r^4 m \rho h_S S C_D \\
& + 36 \rho h_S^2 S C_D v^2 r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma + 24 h_S^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^3 m^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& -6 \rho h_S^2 v^3 S r^2 \frac{\partial C_D}{\partial v} g_0 \sin \gamma m + 6 \rho h_S^2 v^3 S r^5 \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma \\
& -6 \rho h_S^2 v^3 S r^5 \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 m \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi - 12 v^2 \sin \gamma r^5 m^2 h_S \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& + 6 v^4 \sin \gamma r^4 m \rho h_S^2 S \frac{\partial C_D}{\partial r} + 24 h_S^2 m^2 g_0 \cos \gamma \Omega \cos L \sin \chi r^2 v \\
& -24 h_S^2 m^2 g_0 (\cos \gamma)^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 + 12 h_S m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^2 g_0 \\
& + 24 v^2 \sin \gamma r^4 m^2 h_S^2 \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi - 36 \rho h_S^2 g_0 \sin \gamma m S C_D v^2 r^2 \\
& -24 h_S^2 g_0 \sin \gamma m^2 \Omega^2 r^3 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& + 12 h_S^2 m^2 \Omega^2 r^4 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 v^2 - 36 \rho h_S^2 S C_D v^2 r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& + 12 v^2 \Omega^2 r^4 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 h_S^2 m^2 (\cos L)^2 + 4 h_S m^2 v^3 \cos \gamma r^4 \Omega \cos L \sin \chi \\
& -12 h_S m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 + 2 h_S m^2 v^4 (\cos \gamma)^2 r^3 + 36 h_S^2 m^2 g_0 (\cos \gamma)^2 v^2 r \\
& + 12 h_S^2 m^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 (\cos \gamma)^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ces calculs impliquent le résultat suivant :

**Lemme 4.4** *La contrainte sur le **flux thermique** est d'ordre deux et durant l'arc frontière on a :*

$$\mu = \arcsin \frac{-Y_2.(X \cdot C_1)}{\sqrt{(Y_1(XC_1))^2 + (Y_2(XC_1))^2}} \pm \arccos \frac{-X.(X \cdot C_1)}{\sqrt{(Y_1(XC_1))^2 + (Y_2(XC_1))^2}} (2\pi) \tag{4.9}$$

**Accélération normale.**

La contrainte est :

$$C_2 = C_r \rho v^2 \leq \gamma_n^{\max}, \text{ où } C_r = \frac{S}{2m} C_D \sqrt{1 + \left(\frac{C_L}{C_D}\right)^2}$$

On obtient :

$$\dot{C}_2 = X \cdot C_2 + \cos \mu (Y_1 \cdot C_2) + \sin \mu (Y_2 \cdot C_2) = 0,$$

or  $Y_1 \cdot C_2 = 0$  et  $Y_2 \cdot C_2 = 0$  donc  $\dot{C}_2 = X \cdot C_2 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$\begin{aligned} X \cdot C_2 &= \rho v^3 \sin \gamma \left( \frac{\partial C_r}{\partial r} - \frac{C_r}{h_S} \right) + \rho v \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2C_r \right) \\ &\left( -\frac{g_0 \sin(\gamma)}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{S C_D \rho v^2}{m} + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

De plus :

$$\ddot{C}_2 = X \cdot (X \cdot C_2) + \cos \mu (Y_1 \cdot (X \cdot C_2)) + \sin \mu (Y_2 \cdot (X \cdot C_2)) = 0 \quad (4.11)$$

où

$$\begin{aligned} X \cdot (X \cdot C_2) &= \frac{1}{4} \frac{\rho}{h_S^2 r^4 m^2} (8C_r g_0^2 m^2 h_S^2 + 8h_S^2 m^2 v^3 \cos \gamma r^4 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega \cos L \sin \chi \\ &- 24 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 (\cos L)^3 r^6 m^2 h_S^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &+ 2\rho v^4 S h_S^2 r^5 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &+ 24 h_S^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 (\cos \gamma)^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 - 12 h_S^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 (\cos \gamma)^2 \\ &- 4\rho v^3 S h_S^2 r^5 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma - 16 h_S^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^5 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega^2 (\cos L)^2 \\ &- 8 h_S^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^2 g_0 \cos \gamma \Omega \cos L \sin \chi r^2 - 16 h_S^2 m^2 C_r g_0 \cos \gamma \Omega \cos L \sin \chi r^2 v \\ &- 8 h_S m^2 v^3 \cos \gamma r^4 C_r \Omega \cos L \sin \chi + 16 h_S m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^5 C_r \Omega^2 (\cos L)^2 \\ &- 4 h_S^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 \Omega^2 r^4 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 - 8 h_S^2 m^2 C_r \Omega^2 r^4 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 v^2 \\ &+ 14 v^4 \sin \gamma r^4 m h_S C_r S C_D \rho + 16 v^2 \sin \gamma r^5 m^2 h_S C_r \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &- 16 v^2 \sin \gamma r^4 m^2 C_r \Omega^2 \cos L h_S^2 \cos \gamma \sin L \cos \chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -16v^2 \sin \gamma r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& -2v^5 \sin \gamma r^4 m \frac{\partial C_r}{\partial v} s \frac{\partial C_D}{\partial r} \rho h_s^2 - 8v^3 \sin \gamma r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 \cos L h_s^2 \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& +24 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 \sin \gamma m^2 h_s^2 \Omega^2 r^3 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& +8v^3 \sin \gamma r^5 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& -8v^2 \Omega^2 r^4 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 h_s^2 m^2 C_r (\cos L)^2 + 2\rho v^4 s h_s^2 r^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} g_0 \sin \gamma m \\
& -4v^4 \sin \gamma r^4 m C_r s \frac{\partial C_D}{\partial r} \rho h_s^2 + 4\rho v^3 s h_s^2 r^2 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} g_0 \sin \gamma m \\
& -8v^3 r^5 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 + 20 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 g_0 \sin \gamma m h_s^2 s C_D \rho r^2 \\
& -16h_s m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^2 C_r g_0 - 12h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0^2 (\cos \gamma)^2 \\
& +16h_s^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} g_0 - 24h_s^2 m^2 C_r g_0 (\cos \gamma)^2 v^2 r \\
& +8\Omega^2 r^4 h_s^2 m^2 C_r v^2 (\cos \gamma)^2 - 12h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 g_0 (\cos \gamma)^2 r \\
& -8v^4 r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} h_s + 8v^3 r^2 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} g_0 + 4\Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v (\cos L)^2 \\
& +16v^2 r m^2 C_r g_0 h_s^2 - 20v^2 r^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} g_0 + 8v^3 r m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} g_0 h_s^2 \\
& -32 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 m^2 h_s^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 + 12 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 (\cos L)^2 r^6 m^2 h_s^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
& -20v^2 r^5 m^2 h_s C_r \Omega^2 (\cos L)^2 - 4v^4 r^4 m^2 C_r (\cos \gamma)^2 + 8v^4 r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} h_s (\cos \gamma)^2 \\
& +16 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0^2 m^2 h_s^2 + 20v^2 r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega^2 (\cos L)^2 - 8v^3 r^2 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} g_0 (\cos \gamma)^2 \\
& +20v^2 r^2 m^2 h_s C_r g_0 - 12 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 (\cos L)^4 r^6 m^2 h_s^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
& +4v^3 r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 h_s^2 - 16C_r g_0 m^2 h_s^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
& +8v^3 r^5 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 + 12\Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v (\cos L)^4 \\
& +4\Omega^2 r^4 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 (\cos \gamma)^2 + 20h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 s C_D \rho r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& +16h_s^2 C_r s C_D \rho v^2 r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& +4\rho v^3 s h_s^2 r^5 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi + 16\Omega^3 r^5 \sin \chi h_s^2 m^2 C_r \cos L v \cos \gamma \\
& +8\Omega^3 r^5 \sin \chi h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^2 \cos L \cos \gamma + 8v^2 r^4 m^2 C_r \Omega^2 (\cos L)^2 h_s^2 \\
& -2\rho v^4 s h_s^2 r^5 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma - 16h_s^2 C_r s C_D \rho v^2 r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -20h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 s C_D \rho r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma + 6h_s^2 C_r s^2 C_D^2 \rho^2 v^4 r^4 \\
& + 6v^5 \sin \gamma r^4 m h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} s C_D \rho + 2\rho^2 v^5 s^2 h_s^2 r^4 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} C_D \\
& - 4v^3 \Omega^2 r^4 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} (\cos L)^2 - 10v^4 \sin \gamma r^4 m h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} s C_D \rho \\
& + 16C_r g_0 \sin \gamma m h_s^2 s C_D \rho v^2 r^2 + 4v^4 r^4 m^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} h_s^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^4 g_0 \sin \gamma m s C_D \rho r^2 \\
& - 8h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^3 m^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& + 8h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 m^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 m^2 \\
& - 8v^3 r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^4 s C_D \rho r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
& - 8v^3 \sin \gamma r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi - 4v^5 \sin \gamma r^4 m h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} s C_D \rho \\
& - 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 \\
& + 8v^3 r^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} g_0 (\cos \gamma)^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^2 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
& - 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^4 s C_D \rho r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma + 8\Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 C_r (\cos L)^2 \\
& + 8v^3 r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 + h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^6 s^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \\
& - 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 (\cos \gamma)^2 - 8v^3 r^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} g_0 - 4v^4 r^4 m^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} h_s^2 (\cos \gamma)^2 \\
& - 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0^2 m^2 (\cos \gamma)^2 - 8h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 m^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
& + 8h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 \sin \gamma m^2 \Omega^2 r^3 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi + 6h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^5 s^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \\
& + 4h_s^2 m^2 v^4 (\cos \gamma)^2 r^3 \frac{\partial C_r}{\partial r} + \rho^2 v^6 s^2 h_s^2 r^4 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} C_D - 4h_s m^2 v^4 (\cos \gamma)^2 r^3 C_r \\
& + 4v^4 r^4 m^2 C_r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1. (X \cdot C_2) &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 S C_L}{h_s r^2 m} (v^2 \cos \gamma r^2 (\frac{\partial C_r}{\partial r} h_s - C_r) - h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 \cos \gamma + h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \cos \gamma \\
& + h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^2 r^3 \cos L \sin \gamma \sin L \cos \chi - 2h_s C_r g_0 \cos \gamma + 2h_s C_r \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \cos \gamma \\
& + 2h_s C_r \Omega^2 r^3 \cos L \sin \gamma \sin L \cos \chi)
\end{aligned}$$

et

$$Y_2 \cdot (X \cdot C_2) = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 S C_L (\frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2C_r) \Omega^2 r \cos L \sin L \sin \chi}{m}$$

De même on a le résultat suivant :

**Lemme 4.5** *La contrainte sur l'accélération normale est d'ordre deux et durant l'arc frontière on a :*

$$\mu = \arcsin \frac{-Y_2 \cdot (X \cdot C_2)}{\sqrt{(Y_1(XC_2))^2 + (Y_2(XC_2))^2}} \pm \arccos \frac{-X \cdot (X \cdot C_2)}{\sqrt{(Y_1(XC_2))^2 + (Y_2(XC_2))^2}} (2\pi)$$

## 4.2.2 Construction d'une trajectoire optimale.

La remarque (4.3) et la synthèse locale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié  $I$  conduisent au résultat suivant :

**Lemme 4.6** *La synthèse locale pour le modèle complet avec contraintes sur l'état, en approximation, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+ \gamma_-$ , où  $\gamma_-$ ,  $\gamma_+$  sont des arcs réguliers et  $\gamma_{flux}$ ,  $\gamma_{acc}$  sont des arcs frontières.*

À ce point de l'étude, il faut distinguer deux problèmes selon la longitude, car dans les conditions aux limites la longitude initiale peut être fixée ou non.

**Problème 4.7** *longitude initiale libre. Dans ce cas  $p_l = 0$  durant le vol, la longitude  $l$  n'apparaissant pas dans le système, on se ramène à un système de dimension cinq. L'angle final  $\gamma(T)$  étant libre, on en déduit  $p_\gamma(T) = 0$ , et la politique optimale dans ce cas, en approximation, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+$ , où  $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ) est un arc associé au contrôle  $\cos \mu = 1$  (resp.  $\cos \mu = -1$ ), et  $\gamma_{flux}$  (resp.  $\gamma_{acc}$ ) est un arc frontière pour la contrainte sur le **flux thermique** (resp. pour l'**accélération normale**).*

**Problème 4.8** *longitude initiale fixée. Numériquement on constate, dans ce cas, que la contrainte sur l'accélération normale n'est plus active. On en déduit que la politique optimale est donnée, en approximation, par  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_-$ .*

## 4.3 Stabilisation de la navette autour de la trajectoire nominale

### 4.3.1 Trajectoire équilibrée

C'est un concept important dans la littérature spatiale que l'on peut traduire ainsi. Considérons l'équation d'évolution de la pente, où le terme en  $\Omega$  est négligé,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \cos\gamma\left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) + \frac{1}{2}\rho\frac{SC_L}{m}v\cos\mu.$$

Le domaine de vol équilibré est l'ensemble des conditions initiales tel que  $0 \in [\dot{\gamma}_{u_1=-1}, \dot{\gamma}_{u_1=+1}]$  avec  $u_1 = \cos\mu$ . Avec  $\cos\gamma \sim 1$  et en négligeant le terme en  $\frac{v}{r}$  on obtient la condition (voir Fig.25).

$$\frac{1}{2}\rho\frac{SC_L}{m} > \frac{g}{v^2}$$

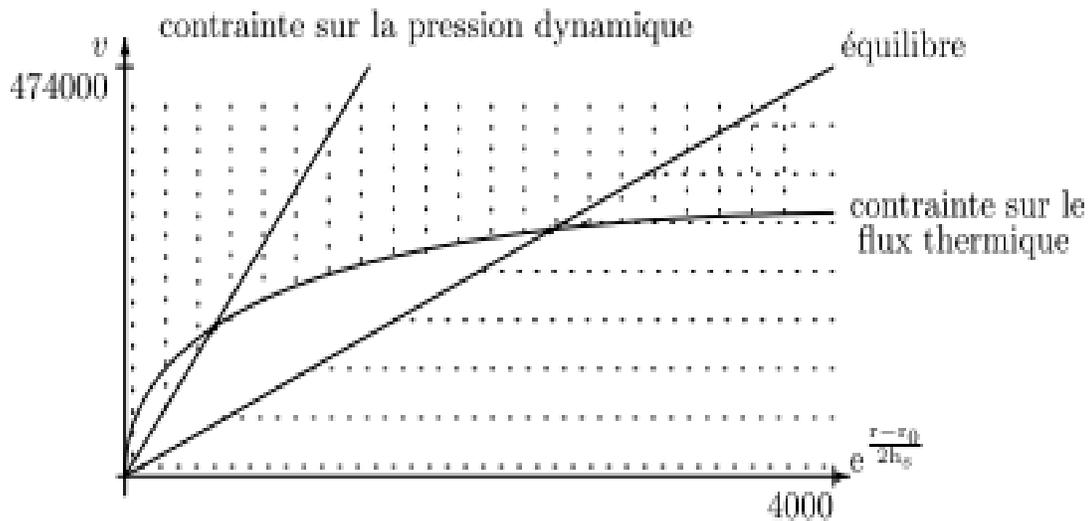


Fig.25 : Domaine de vol équilibré est l'ensemble des conditions initiales.

Cette condition n'est pas toujours réalisée, en particulier en début de trajectoire, car il faut que la vitesse soit assez petite pour que la trajectoire soit elliptique :  $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{g}{r_0} < 0$ . Par ailleurs le domaine de vol équilibré dépend de la densité de l'atmosphère (faible en début de trajectoire) et inversement proportionnelle à la masse. C'est une condition de contrôlabilité cruciale qui signifie que la portance peut équilibrer le terme de gravité.

On peut observer que pour  $\mu = k\pi$  la portance est contenue dans le plan de l'ellipse osculatrice et le mouvement est plan.

### 4.3.2 Stabilisation

On se propose maintenant de stabiliser le système simplifié  $I$  autour de la trajectoire équilibrée, de façon à prendre en compte d'éventuelles perturbations, dues aux erreurs de modèles, aux perturbations atmosphériques, etc. Pour cela, on utilise la théorie linéaire-quadratique voir [E.T], qui permet d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, au voisinage de la trajectoire nominale, de façon à la rendre stable pour plus de détail voir [B.B3] .

Pour tenir compte de la contrainte sur le contrôle, il faut d'abord modifier la trajectoire nominale  $x_e(\cdot)$  obtenue précédemment de façon à ce qu'elle respecte la nouvelle contrainte sur le contrôle  $|u_e| \leq 1 - \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un petit paramètre. On choisit par exemple  $\varepsilon = 0.05$ . On trouve alors de nouveaux temps de commutation, qui sont  $t_1 = 143.59$ ,  $t_2 = 272.05$ ,  $t_3 = 613.37$ .

Dans le programme suivant, on implimente l'équation de Riccati. Celle-ci est intégrée en temps inverse puisqu'on se donne une condition finale. Il faut donc ensuite rétablir le cours normal du temps en symétrisant la matrice de discrétisation obtenue. Enfin, le contrôle bouclé obtenu est réinjecté dans le système initial. Les simulations sont effectuées en prenant des conditions initiales proches, mais différents (voir programme annexe fonction stabdim 3).

Les simulations sont effectuées en prenant des conditions initiales proches, mais différentes, de celles tableau suivant ;

|                           | Conditions initiales        | Conditions finales |
|---------------------------|-----------------------------|--------------------|
| altitude ( $h$ )          | 119.82 km                   | 15 km              |
| vitesse ( $v$ )           | 7404.95 m/s                 | 445 m/s            |
| angle de vol ( $\gamma$ ) | -1.84 deg                   | libre              |
| latitude ( $L$ )          | 0                           | 10.99 deg          |
| longitude ( $l$ )         | libre ou fixée à 116.59 deg | 166.48 deg         |
| azimut ( $\chi$ )         | libre                       | libre              |

Le choix des poids est important. On obtient des poids adaptés par tâtonnements, et en tenant compte de l'ordre respectif des variables du système. Ici on a pris

$$W = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } U = 10^{10}$$

Bien entendu d'autres choix sont possibles. Ici notre choix de  $Q$  force l'altitude finale à être proche de l'altitude souhaitée. En revanche on laisse plus de liberté à la vitesse finale et à l'angle de vol final.

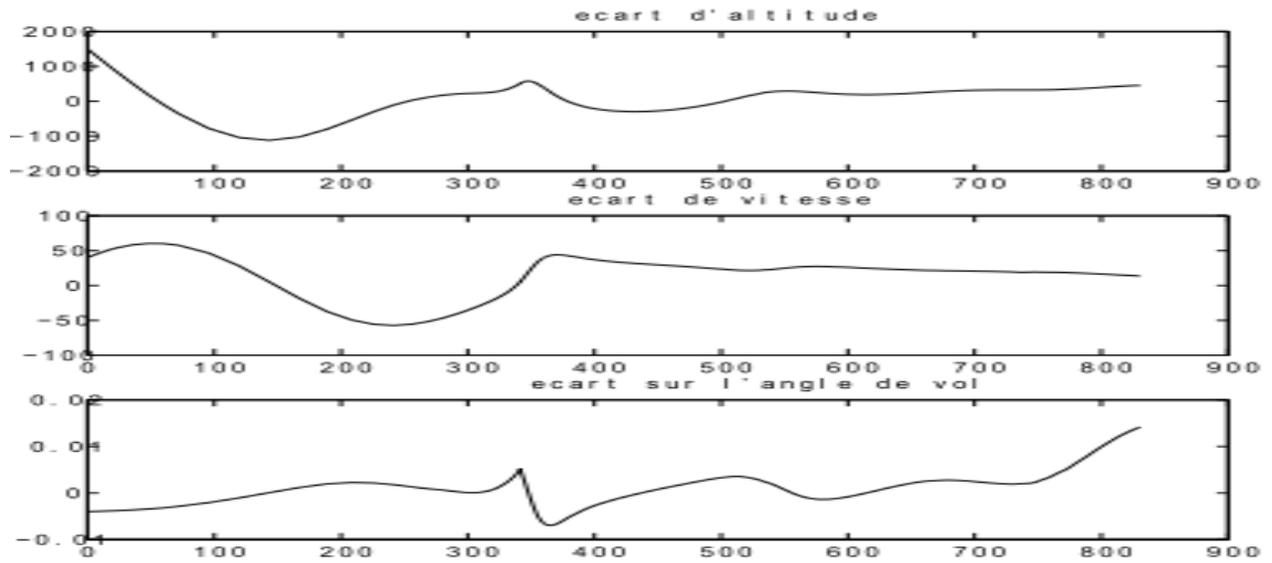
La trajectoire  $x(\cdot)$  part d'un point  $x(0)$  différent de  $x_e(0)$ . On a pris les données numériques suivantes :

- écart sur l'altitude initiale : 1500 m,
- écart sur la vitesse initiale : 40m/S,
- écart sur l'angle de vol initial : 0.004 rad, soit 0.2292 deg.

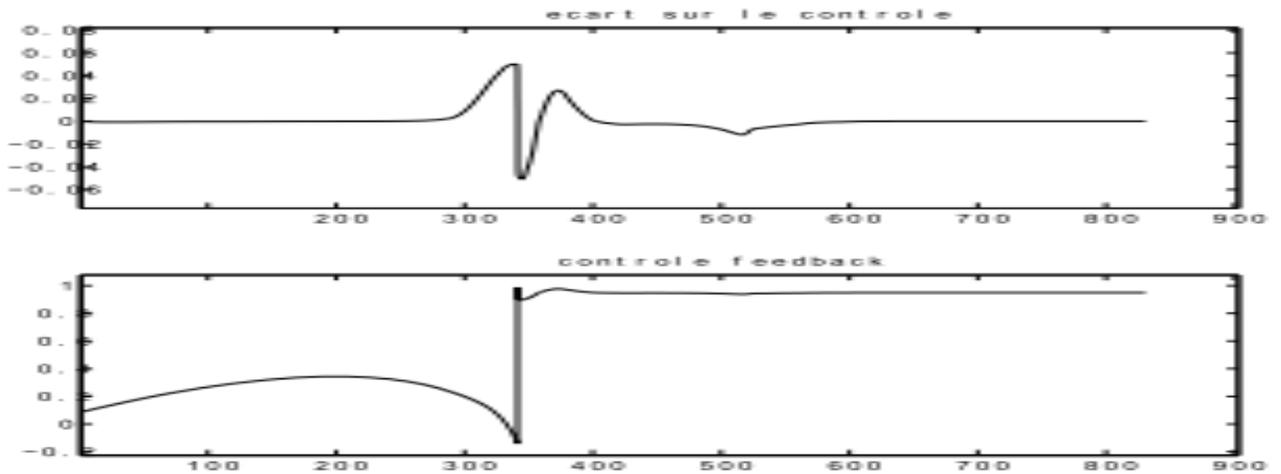
Les résultats numériques obtenus sont assez satisfaisants : l'altitude finale obtenue est 15359km, et la vitesse finale est 458m/S. L'écart par rapport aux données souhaitées (altitude 15km, vitesse 440m/S) est donc assez faible.

Notons que l'écart sur l'angle de vol initial que nous avons pris ici est assez important. Cette pente initiale est en effet un paramètre très sensible dans les équations : si à l'entrée de la phase atmosphérique l'angle de vol est trop faible, alors la navette va rebondir sur l'atmosphère (phénomène bien connu, dit de rebond), et si au contraire il est trop important il sera impossible de redresser l'engin, qui va s'écraser au sol.

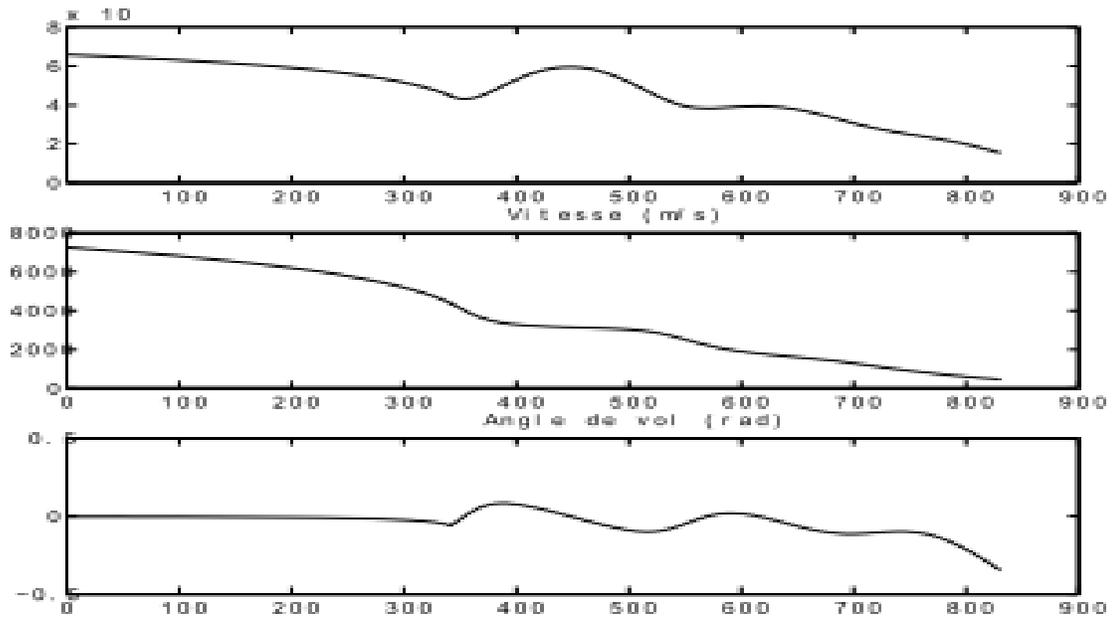
Les figures suivantes sont le résultat des simulations numériques. La (*Fig.26*) représente l'écart entre l'état nominal et l'état réel, et la (*Fig.27*) l'écart entre le contrôle nominal et le contrôle réel (contrôle bouclé, ou contrôle feedback). La (*Fig.28*) représente l'état, et la (*Fig.29*) le **flux thermique**. On constate que la contrainte sur le **flux thermique** est à peu près respectée. On peut conclure que la procédure de stabilisation ainsi réalisée est satisfaisante.



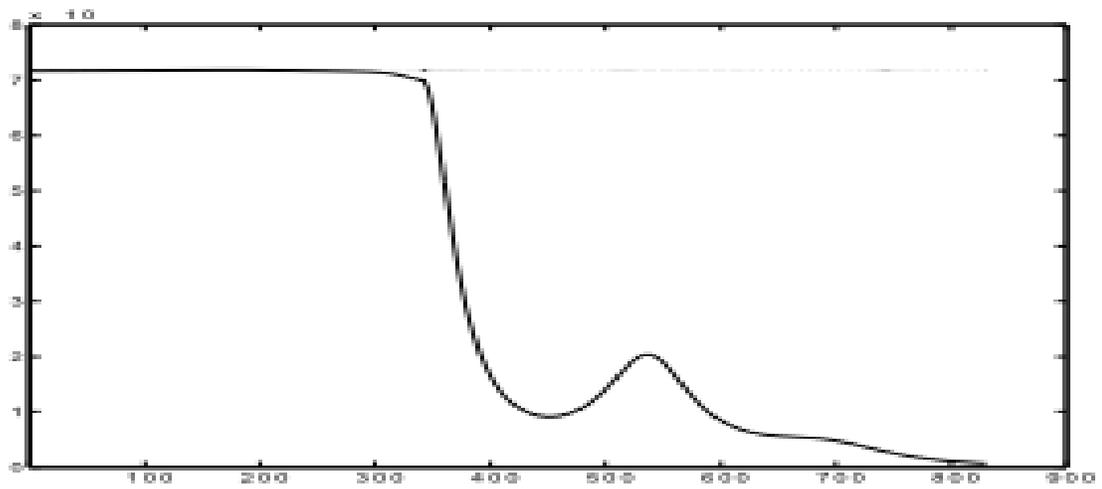
*Fig 26 : Ecart entre l'état nominal et l'état réel*



*Fig.27 : Contrôle bouclé, et correction par rapport au contrôle nominal.*



*Fig.28 : Etat avec le contrôle feedback*



*Fig.29 : Flux thermique avec le contrôle feedback*

# **annexe**

```

%function [t,x]=simudim3
%% Fonction permettant le calcul du temps de commutation tc
%% et le trac\U{e9} de la solution, pour le cas sans contrainte
%% sur l'\U{e9}tat.

clc ;
clear
global g0 hs rt Cq Omega;
Omega =7.292115853608596e-005 ; g0=39800047e7 ; hs=7143 ;
rt=6378139 ; Cq =1.705e-4 ;
range=[0;inf];
% D\U{e9}but de la trajectoire (altitude 120 km) :
r0= 0.64979590000 + 07 ; v0=0.74049501953E+04 ;
gam0=-0.32114058733-01 ; flux0 =0 ;
%% Dichotomie pour trouver le temps de commutation de sorte
%% que vf =445 ( "events") et hf =15000 .
global tc ; tc =-5 ; hf=0 ;
while hf < 10 %15000
global tc ; tc=tc+5
xinit = [r0; v0 ;gam0 ;flux0 ];
options = odeset ('events', @events) ;
[t,x]=ode113(@systdim3, range, xinit, options );
hf = x (length(t),1) - rt ;
end
a=tc-10 ; b=tc ; hfm=hf;
while abs(hfm-15000)>1
global tc ; tc=a ;
xinit =[r0;v0;gam0;flux0];
options = odeset (' events', @events, 'RelTol', 1e-6);
[t, x]= ode113 (@systdim3, range, xinit, options) ;
hfa=x(length (t), 1 ) - rt;
global tc ; tc=b ;

```

```

xinit =[r0;v0;gam0 ; flux0];
options = odeset ('events', @events, 'RelTol', 1e-6);
[t, x]= ode113 (@systdim3,range,xinit,options) ;
hfb =x(length (t), 1)-rt;
global tc ; tc=(a+b)/2 ;
xinit=[r0;v0;gam0;flux0] ;
options = odeset ('events', @events, 'RelTol', 1e-6);
[t, x]=ode113 (@systdim3, range, xinit,options) ;
hfm =x(length (t), 1)-rt ;
if (hfa-15000)*(hfm-15000)<=0
    b=(a+b)/2
else a=(a+b)/2
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%tc pour le probleme sans contrainte: tc=242 %
% (i.e.passage de -1 a 1 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global tc ; tc =242 ;
xinit =[r0;v0;gam0;flux0 ] ;
options = odeset ('events', @events, 'RelTol', 1e-6);
[t,x]=ode113(@systdim3, range, xinit, options) ;
disp(['altitude finale :' num2str(x(length(t),1)- rt) 'm'])
disp ( ['vitesse finale :' num2str(x(length (t),2)) 'm/s'])
disp ( ['gamma final : ' num2str(x( length (t), 3)/pi*180) 'deg'])
disp ([ 'flux total : ' num2str(x( length (t), 4)) ' UI' ] )
for i=1:length(t)
gee =g(x(i,1)) ; densite(i) =rho(x( i, 1)) ;
ck(i)=coef_k(x(i,2)) ;
cd(i)=CDsimple(x(i, 2)) ; cl(i)=CLsimple(x(i, 2)) ;
end

```

```

flux_thermique = Cq.*sqrt(densite(:)).*(x(:, 2)).^3 ;
plot (t,flux_thermique)
hold on; plot ( t,717300, 'red' )
title('Flux thermique')

figure
subplot(311); plot(t,x(:, 1)-rt) ; title('Altitude');
subplot(312); plot(t, x(:, 2)) ; title('Vitesse');
subplot(313) ; plot(t, x(:, 3)) ; title('Angle de vol') ;

%- - - - -
function [value,isterminal,direction]=events(t,x)
global g0 hs Omega rt Cq;
% Arret a vitesse 445 ou altitude 10000 (en cas d'accident. . . ) :
value =(x(2)-445)\abs(x(1)-rt-10000) ;
isterminal =1 ;
direction =0 ;
end
%- - - - -
function dXdt= systdim3(t,X,events)
% Systeme simplifie de la navette en r,v gamo (\dim 3+flux)
global Omega g0 hs rt Cq ;
r=X(1) ; v=X(2) ; gam=X(3) ;
dXdt=[v*sin(gam)
      -g(r)*sin(gam)-coef_k(v)*rho(r)*(v)^2
      cos(gam)*(-g(r)/v+v/r)+2*Omega+coef_kp(v)*rho(r)*v*u(t,r,v,gam)
      Cq*sqrt(rho(r))*v^3];
end
%- - - - -
function controle=u(t,r,v,gam)
% Contr\Uf4}le pour le probl\Ue8}me sans contrainte : -1 puis +1 .

```

```

global tc ;
if t<tc
controle =-1 ;
else controle =1 ;
end
end
%- - - - -
function locdensite = rho(r)

global hs rt ;
locdensite =1.225*exp(-1/hs.* (r-rt)) ;
end
%- - - - -
function ge=g(r)
global g0 ;
ge =g0./r.^2 ;
end
%- - - - -
function k=coef_k(v)
v
k=0.5*15.05*CDsimple(v)/7169.602 ;
end
%- - - - -
function kp=coef_kp (v)
kp=0.5 *15.05*CLsimple(v)/7169.602 ;
end
%- - - - -
function cd=CDsimple(v)
if v>3000
cd=0.585 ;
elseif v>1000

```

```
cd =0.075 + 1.7e-4*v ;
else cd=0.245 ;
end
end
%- - - - -
function cl=CLsimple(v)
if v>3000
    cl=0.55 ;
else cl =0.1732+1.256e-4* v ;
end
end
%- - - - -
```

# Bibliographie

- [A.B.Y.C.H] A. Bryson and Y.C. Ho. Applied Optimal Control. Hemisphere Pub. Corporation, 1975.
- [AM] A. Miele, Recent advances in the optimization and guidance of aeroassisted orbital transfers, Acta Astronautica 38 (1996), no. 10, 747-768
- [B.B1] B. BONNARD et I. KUPKA, Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal, mathematicum, vol. 5, 1993, pp. 111-159.
- [B.B2] B. Bonnard, E. Trélat, Une approche géométrique du contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale.
- [B.B3] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations by multiple-shooting techniques, Math. Models Methods Applied Sci. 15 (2005), no. 1, 109-140.
- [B.B4] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay, E. Trélat, Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem, J. Dynam. Control Systems 9 (2003), no. 2, 155-199.
- [CNES] CNES, Mécanique spatiale, Cepadues Eds (1993).
- [E.T] E. Trélat, Optimal control of a space shuttle and numerical simulations, Discrete Contin. Dyn. Syst. (2003), suppl., 842-851.
- [H.H] H. HERMES, Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets, SIAM J. on Control and Opt., vol. 16, 1978, pp. 715-727.
- [H.J.S] H. J. SUSSMANN, The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the  $C^\infty$  non singular case, SIAM J. on Control and Opt., vol. 25, 1987, pp. 433-465.

- [H.M] H. Maurer, On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly. *SIAM J. Control Optim.* 15 (1977) 345-362.
- [H.S] H. SCHATFLER, The local structure of time-optimal trajectories in dimension 3 under generic conditions, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. 26, 1988, pp. 899-918.
- [I.K] I. KUPKA, Geometric theory of extremals in optimal control problems, I. The fold and Maxwell cases, *TAMS*, vol. 299, 1973, pp. 225-243.
- [J.B.C] J.B. Caillau. Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2000.
- [J.B.N] J.B. Caillau and J. Noailles. Coplanar of satellite around the earth. *ESAIM COCV*, 6 :239–258, 2001.
- [J.C] J. Harpold, C. Graves, Shuttle entry guidance, *J. Astronautical Sciences* 27 (1979), 239–268.
- [J.E.M] Jiamin Zhu, Emmanuel,Trélaty Max Cerfz,Geometric Optimal Control and Applications to Aerospace 22 Jan 2017.
- [J.H] J. Harpold, C. Graves, *Shuttle entry guidance*, *J. Astronautical Sciences* 27 (1979), 239-268.
- [J.M.C.L1] J.M. Coron and L. Praly. Transfert orbital à l'aide des moteurs ioniques. Rapport CNES 1442, 1996.
- [J.M.C.L2] J.M. Coron and L. Praly. Guidage en rentrée atmosphérique. Rapport 415 CNES, Octobre 2000.
- [L.C] L. Cesari. Optimization Theory and Applications. Springer-Verlag, 1983.
- [M.J] Mohamed Jabeur. Méthodes géométriques en mécanique spatiale et aspects numériques. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2005. Français.