République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Harmonicité, biharmonicité sur produit tordu

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Ghezzal **B**ouhaous [1]

Sous la direction de

Pr. Ouakkas Seddik

Soutenue le 20/06/2018 devant le jury composé de

M. Abbas Saïd	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. Ouakkas Seddik	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mlle. Mostefai Fatima Zohra	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
M. Djerfi Kouider	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : ghezzalbouhaous123@gmail.com

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur **Seddik Ouakkas**, qui a accepté sans de diriger ce mémoire.
Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail. Je tiens également à exprimer ma gratitude en vers Monsieur **S. Abbes** accepter d'être le président de ce Jury.
Je remercie aussi monsieur **Djerfi** et madame **F.Z. Mostefai** d'avoir accepter de faire partir de ce jury.

TABLE DES MATIÈRES

INTRUDUCTION

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux tenseurs de courbure Riemannienne, de courbure Riemannienne-Christoffel et de Ricci d'une variété Riemannienne produit, et étudier les applications harmoniques et les applications biharmoniques entre variétés riemanniennes produit muni d'une métrique tordue . Rappelons que le produit tordu $M \times_f N$ de deux variétés Riemannienne (M^m, g) et (N^n, h) est la variété produit $M \times N$ munie de la métrique $g = g + f^2 h$, où f est une fonction positive sur M, appelée fonction de distorsion ([18] et [11]) . Il est bien connu que la notion du produit tordu joue un rôle important dans la géométrie différentielle et celui de la physique [9], par exemple le meilleur modèle relativiste de l'espace temps de Schwarzschild et [9], décrivant l'espace de sortie autour d'une étoile massive ou d'un trou noire est donné comme produit tordu de variétés adaptées [13] . et Rappelons qu'une application $\phi : (M^m, g_m) \longmapsto (N^n, g_n)$ de classe C^∞ est dite **harmonique** si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie $E(\phi)$ définie par :

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 dv_g \tag{1}$$

c'est à dire si elle est solution de l'équation d'Euler Lagrange associée à (1)

$$\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi = 0 \tag{2}$$

où $\tau(\phi)$ est appelé le champ de tension de ϕ Si $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y^\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant n}$ sont des coordonnées locales respectivement sur M et N, l'équation (2) devient :

$$\tau(\phi)^\alpha = \triangle\ v^\alpha + g^{ij}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial\phi^\beta\partial\phi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} = 0 \qquad i \leqslant \alpha \leqslant n \tag{3}$$

oú $\triangle\ \phi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^j})$ est le Laplacien sur (M, g) et $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$sont les symboles de Christoffel de (N, h). L'équation (3) montre en particulier que les applications **harmoniques** sont les solutions d'un système elliptique non linéaire du second ordre. On rencontre les applications **harmonique** aussi bien en géométrie qu'en physique où elles sont utilisées comme modèles pour les cristaux liqudes. Plus généralement, une application $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite **biharmonique** si elle est point critique de la fonctionnelle biénergie $E_2(\phi)$ définie par,

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\phi)|^2 dv_g \tag{4}$$

c'est dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (4)

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^\phi)^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)d\phi = 0, \tag{5}$$

Il est clair que toute application **harmonique** est **biharmonique**. L'équation (5) montre que les applications **biharmoniques** sont solutions d'un système elliptique non linéaire d'ordre quatre.
Le mémoire présenté se compose de trois chapitres.
Dans Le première chapitre nous introduisons la notion d'applications **harmoniques** et applications **biharmoniques** sur les variétés riemannienne avec quelque exemples Le deuxième chapitre d'écrit le cadre général où on définit quelques outils fondamentaux de la variété **produit tordu** , ces outils seront utiles pour la suite de ce travail.
Le troisième chapitre c'est construire quelque type des exemples sur **l'harmonicit** et **biharmonicit** de **produit tordu**

◀ Notation ▶

$M = (M^m, g)$	Une variété riemannienne de dimension m avec métrique g.
$N = (N^n, h)$	Une variété riemannienne de dimension n avec métrique h.
$M \times_f N$	Une produit tordu de deux variétés riemannienne M avec métrique g et N avec métrique h et $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive
$\varphi : M \to N$	Une application de classe C^∞.
G_f	Métrique d'une variété produit tordu $M \times_f N$
$(M \times_f N, G_f)$	Variété Riemannienne produit tordu et f s'appelle la fonction de distorsion du produit tordu
∇^M	Une connexion sur la variété riemanienne M.
∇^N	Une connexion sur la variété riemanienne N.
∇^φ	la connexion de Pull-back sur le fibré tangent inverse $\varphi^{-1}TN$ $$\begin{aligned} \nabla^\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}TN) &\to \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ \nabla^\varphi_X V &= \nabla^N_X \tilde{V}. \end{aligned}$$
$\mathbf{R}^N$	la courbure sur ∇^N qui est la connexion sur la variété riemannienne N, $$R^N(X,Y) = \nabla^N_X \nabla^N_Y - \nabla^N_Y \nabla^N_X - \nabla^N_{[X,Y]}.$$
${}^M\Gamma^k_{ij}, \quad {}^N\Gamma^k_{ij}$	Les symboles de christoffel sur les variétés M respectivement N.
Tr_g	La trace de la métrique g.
grad	L'opérateur gradient not $grad$ est défini par : $$\begin{aligned} grad : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto gradf = \sharp(df) \end{aligned}$$ Où df est la différentielle de la fonction f
div	l'opérateur divergence défini par : $$\begin{aligned} div : \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto trace(\nabla X) \end{aligned}$$

Laplacien Δ	l'opérateur Laplacien sur M est défini par : $$\begin{array}{rcl} \Delta : C^{\infty}(M) & \longrightarrow & C^{\infty}(M) \\ f & \longmapsto & \Delta(f) = div(gradf) \end{array}$$

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS HARMONIQUES ET BIHARMONIQUE

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions d'applications harmoniques et biharmoniques entre variétés riemanniennes.

1.1 Applications harmoniques

Définition 1.1.1. *(L'énergie d'une application [13] et [12]).*
Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement. On appelle densité de φ l'application

$$e(\varphi) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie par

$$e(\varphi)(x) = \frac{1}{2} \mid d_x\varphi \mid^2$$

où $\mid d_x\varphi \mid$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d_x\varphi$ de φ au point x.

Si $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ *est une base orthonormée de* T_xM*, on a*

$$\begin{aligned} \mid d_x\varphi \mid^2 &= tr_g\varphi^*h \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i)) \end{aligned}$$

Si $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ *et* $\{y^\alpha\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *sont les coordonnées locales autour de* $x \in M$ *et* $\varphi(x) \in N$ *respectivement, alors*

$$\mid d_x\varphi \mid^2 = g_x^{ij}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\mid_x \cdot \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\mid_x h_{\alpha\beta}(\varphi(x))$$

L'énergie de l'application φ *sur un domaine compact* D *dans* M *est définie par*

$$E(\varphi, D) = \int_D e(\varphi)\upsilon_g = \frac{1}{2}\int_D \parallel d_x\varphi \parallel^2 \upsilon_g$$

Une variation de l'application φ *est une application de classe* C^∞,

$$\begin{aligned} \phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow N \quad , \quad \epsilon > 0 \\ (x,t) &\longmapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

telle que (φ_t) *est une famille des application de classe* C^∞ *sur* M*, et* $\varphi_0 = \varphi$*. Soit* $\upsilon \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ *définie par*

$$\begin{aligned} \upsilon(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)\mid_{t=0} \\ &= \phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} \in T_{\varphi(x)}N \end{aligned}$$

Définition 1.1.2. *(Application harmonique.)*

Une application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ *de classe* C^∞ *est dit harmonique si*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)\mid_{t=0} = 0$$

pour toute domaine compact D *dans* M *et tout variation* (φ_t) *à support inclu dans* D.

Définition 1.1.3. *(champ de tension d'une application).*
Le champ de tension $\tau(\varphi)$ *d'une application* φ *est défini par :*

$$\tau(\varphi) = Tr_g\nabla d\varphi \tag{1.1}$$

Si $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(y^\alpha)_{1\leqslant \alpha\leqslant n}$ *sont des coordonnées locales respectivement sur* M *et* N*, l'équation (1.1) devient :*

$$\tau(\varphi)^\alpha = \triangle\ \varphi^\alpha + g^{ij}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial\varphi^\beta\partial\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} \qquad i\leqslant \alpha\leqslant n \tag{1.2}$$

oú $\triangle\ \varphi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^j})$ *est le Laplacien sur* (M,g) *et* $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$*sont les symboles de Christoffel de* (N,h)*.*

Proposition 1.1.1. *(Première variation d'énergie).*
Soient $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ *une application différentiable et* (φ_t) *une variation de* φ *à supports inclu dans* D*. Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t,D)\mid_{t=0} = -\int_D h(\upsilon,\tau(\varphi))\upsilon_g.$$

où $\upsilon(x)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)\mid_{t=0}$ *et* $\tau(\varphi)=tr_g\nabla d\varphi$ *est le champ de tension de l'application* φ*.*

Preuve : Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M et $\{\frac{d}{dt}\}$ base sur $(-\epsilon,\epsilon)$, alors $\{(e_i,0),(0,\frac{d}{dt})\}$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $M\times(-\epsilon,\epsilon)$, et on a le crochet de Lie $[(e_i,0),(0,\frac{d}{dt})]=0$, pour tout $i=1,...,m$ on a $d\phi(e_i,0)=d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0,\frac{d}{dt})=\upsilon$.
En effet, remarquons que

$$d\phi(e_i,0): M\times(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow TN$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i,0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x)+d_0\phi_x(0) \quad \text{formule de Leibnis}\\ &= d_x\phi_0(e_i|_x)\\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0,\frac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x)+d_0\phi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0})\\ &= d\phi_x(\frac{d}{dt})|_{t=0}\\ &= \upsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x,0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x,t)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)\mid_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\varphi_t(e_i), \varphi_t(e_i))\upsilon_g \mid_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))\upsilon_g \mid_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_D \frac{d}{dt}h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0)) \mid_{t=0} \upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0)) \mid_{t=0} \upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0)) \mid_{t=0} \upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{N}_{d\varphi(e_i)}\upsilon, d\varphi(e_i))\upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i))\upsilon_g
\end{aligned}$$

soit $\omega(*) = h(\upsilon, d\varphi(*))$, 1-forme sur M, alors

$$\begin{aligned}
div\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\
&= e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= e_i(h(\upsilon, d\varphi(e_i))) - h(\upsilon, d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)) \\
&= h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i)) + h(\upsilon, \tau(\varphi))
\end{aligned}$$

et comme $\int_D div\omega\upsilon_g = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)\mid_{t=0} = -\int_D h(\upsilon, \tau(\varphi))\upsilon_g$$

□

Théorème 1.1.1. *L'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ est harmonique si et seulement si*

$$\tau(\varphi) = 0.$$

L'équation (1.2) montre en particulier que les applications harmoniques sont les solutions d'un système elliptique non linéaire du second ordre, la non linéarité dépend de $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ autrement dit de la courbure de N.

1.2 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 1.2.1. *Tout application constante* $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *est harmonique*

Exemple 1.2.2. *Le seconde forme fondamentale de l'application identité* $\boldsymbol{Id}_M : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ *est nulle, car* $\boldsymbol{Id}_M$ *est totalement géodésique, donc* $\boldsymbol{Id}_M$ *est harmonique.*

Exemple 1.2.3. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne. Pour tout fonction* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned} \tau(f) &= tr_g \nabla df \\ &= \nabla df(e_i, e_i) \\ &= \nabla^f_{e_i} df(e_i) - df(\nabla^M_{e_i} e_i) \\ &= e_i(e_i(f)) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f) \\ &= g(\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\ &= div(gradf) \\ &= \Delta(f). \end{aligned}$$

Ou (e_i) *est une base ortthonormée sur* M

Exemple 1.2.4. *Soit* $M = (a, b)$ *un intervalle sur* $\mathbb{R}$*. Alors le courbe* $\gamma : (a, b) \longrightarrow (N, h)$ *est harmonique si*

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} +^h \Gamma^\alpha_{\beta\delta} \frac{d\gamma^\beta}{dt} \frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0$$

donc, γ *est harmonique si et seulement si c'est une géodésique.*

Exemple 1.2.5. *Soit l'application de Hopf*

$$\begin{aligned} \phi : S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (s, a, d) &\longmapsto (\alpha(s), \psi(a, b)) \end{aligned}$$

où $\psi(a, b) = ka + lb$ *et* $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \pi]$ *telle que* $\alpha(0) = 0$ *et* $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$*.*
Soient,

$$g_{S^3} = ds^2 + \cos^2 s da^2 + \sin^2 s db^2$$

la métrique Riemannienne sur S^3 *et*

$$h_{s^2} = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\psi^2$$

une métrique Riemannienne sur S^2. *On a*

$\{e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_2 = \frac{1}{\cos s}\frac{\partial}{\partial a}, e_3 = \frac{1}{\sin}\frac{\partial}{\partial b}\}$ *est une basee orthonormée sur* S^3.

$\{f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}, f_2 = \frac{1}{\sin \alpha}\frac{\partial}{\partial \psi}\}$ *est une basee orthonormée sur* S^2.

$$d\phi(e_1) = \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

$$d\phi(e_2) = \frac{k}{\cos s}\frac{\partial}{\partial \psi}.$$

$$d\phi(e_3) = \frac{l}{\sin s}\frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Et on a :

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0.$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \tan s \frac{\partial}{\partial s}.$$

$$\nabla_{e_3} e_3 = -\cot s \frac{\partial}{\partial s}.$$

Avec,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0.$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Et,

$$\nabla^{\phi}_{e_1} d\phi(e_1) = \alpha'' \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

$$\nabla^{\phi}_{e_3} d\phi(e_3) = -\frac{k^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 s}\frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

$$\nabla^{\phi}_{e_3} d\phi(e_3) = -\frac{l^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 s}\frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$. *En remplacent dans l'expression*

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{3}\{\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\}$$

on obtient

$$\tau(\phi) = \left(\alpha''(s) + \alpha'(s)(\cot s - \tan s) - \sin\alpha\cos\alpha(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s})\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

Alors ϕ *est une application harmonique si* $\tau(\phi) = 0$ *c-à-d solution d'une équation différentielle du second ordre depend de* α

Exemple 1.2.6. *Soit la application,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

on a,

$$\begin{array}{rcl} \tau(\varphi) & = & (\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}) \\ & = & 0 \end{array}$$

Alors ϕ *est harmonique .Comme exemple on considère l'application suivant,*

$$\begin{array}{rcl} \psi : (\mathbb{R}^n, dx^2 + dy^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, dZ^2) \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$$

on a,

$$\begin{array}{rcl} \tau(\psi) & = & \Delta(\psi) \\ & = & \frac{\partial^2\psi}{dx^2} + \frac{\partial^2\psi}{dy^2} \\ & = & 2 - 2 = 0. \end{array}$$

Alors les deux application φ *et* ψ *sont harmoniques, mais la composée,*

$$\begin{array}{rcl} \psi\circ\varphi : (\mathbb{R}, dx^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, dZ^2) \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas harmonique car $\tau(\psi\circ\varphi) = 2$

1.3 Applications biharmoniques

Soit $M = (M^m, g)$ et $N = (N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes, et soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. La bienergie de l'application φ sur un domaine compact D dans M est définie par

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2}\int_D \mid \tau(\varphi) \mid^2 \upsilon_g$$

où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de l'application φ et υ_g est la forme volume sur M associée à la métrique g.

Définition 1.3.1. *(L'application biharmonique).*
L'application $\varphi : M \longrightarrow N$ est dite biharmonique si

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0}$$

pour tout domaine compact D dans M et pour toute variation (φ_t) à support inclu dans D.

Proposition 1.3.1. *(Première variation de la biénergie).*
Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $\{\varphi_t\}_{t\in I}, I =]-\epsilon, \epsilon[$, une variation de φ á support inclue dans D. Alors

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} = \int_D h(\upsilon, \tau_2(\varphi))\upsilon_g$$

où $\upsilon(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t \mid_{t=0}$ et

$$\tau_2(\varphi) = -Tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) - Tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi$$

est le champ de bitension de l'application φ. Où, $tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) = \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)$ $tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)$ et R^N désigne le tenseur de courbure de la variété N.

Preuve : Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support inclu dans un domaine compact D de M, on a

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t))\upsilon_g$$

et pour tout $(x, t) \in M \times]-\epsilon, \epsilon[$, on a

$$\nabla d\phi big((e_i, 0), (e_i, 0)\big)_{(x,t)} = \tau(\varphi_t)_x$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}h\Big(\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big),\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\mid_{t=0}=$$
$$h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big),\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big) &= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\{\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}d\phi((e_i,0))-d\phi(\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0))\}\\
&= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0)-\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0))\\
&= R((0,\frac{d}{dt}),(e_i,0))d\phi(e_i,0)+\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0)\\
&\quad +\nabla^{\phi}_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]}d\phi(e_i,0)-\nabla^{\phi}_{\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

comme $[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]=0$ et on pose $\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)=(\nabla^{M}_{e_i}e_i,0)$ en $(x,0)$, donc

$$\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))=R((0,\frac{d}{dt}),(e_i,0))d\phi(e_i,0)+\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt})$$

d'où,

$$\begin{aligned}
h\big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)\big) &, \quad \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))\mid_{t=0}\\
&= h\big(R(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)\big)+h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi)\big)\\
&= h\big(R(d\varphi(e_i),\tau(\varphi))v,d\varphi(e_i)\big)+e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi))\big)\\
&- h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi))\\
&= h\big(R(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),v\big)+e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi))\big)\\
&- e_i(h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)))+h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi))
\end{aligned}$$

si on pose $\omega(.)=h(\nabla^{\varphi}_{.}v,\tau(\varphi))$ et $\eta(.)=h(v,\nabla^{\varphi}_{.}\tau(\varphi))$ deux 1-formes sur M, alors

$$\begin{aligned}
div\omega &= e_i(\omega(e_i))=e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi)))\\
div\eta &= e_i(\eta(e_i))=e_i(h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)))
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} &= \frac{1}{2}\int_D \frac{d}{dt}h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t)) \mid_{t=0} \upsilon_g \\ &= \int_D \{h(tr_g R(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi, \upsilon) + h(tr_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi), \upsilon)\}\upsilon_g \\ &= \int_D h(\tau_2(\varphi), \upsilon)\upsilon_g)\end{aligned}$$

□

La première variation de la bi-énergie nous permet de caractériser les applications biharmoniques.

Théorème 1.3.1. *Une application différentiable $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\tau_2(\varphi) = 0$$

Remarque 1.3.1. *Soit l'application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ et $(U, x^i), (V, y^\alpha)$ deux carte locales en p dans M et en $\varphi(p)$ dans N respectivement. Alors :*

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) &= g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x^i\partial x^j} + 2\frac{\partial\tau^\alpha\tau^\beta}{\partial x^j\partial x^j}\overset{N}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{{}^2\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\overset{N}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta\partial\overset{N}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x^i\partial x^j} \\ &\quad + \tau^\alpha\frac{\partial\tau^\beta\partial\tau^\rho}{\partial x^i\partial x^j}\overset{N}{\Gamma}{}^{\upsilon}_{\alpha\beta}\overset{N}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\upsilon\rho} - \overset{M}{\Gamma}{}^{k}_{ij}\,(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^i} + \tau^\alpha\frac{\partial^\beta}{\partial x^K}\overset{N}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\alpha\beta}) - \tau^\upsilon\frac{\partial\varphi^\alpha\partial\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\overset{N}{R}{}^{\sigma}_{\beta\alpha\upsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi,\end{aligned}$$

où

$$\tau^\alpha = \Delta(\varphi^\alpha) + g^{ij}\,\overset{N}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}\,\frac{\partial\varphi^\beta\partial\varphi^\delta}{\partial x^i\partial x^j}$$

2) l'application φ et biharmonique si et seulement si $\tau(\varphi) \in ker J_\varphi$, où

$$\begin{aligned}J_\varphi : \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) &\longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) \\ V &\longmapsto J_\varphi(V) = tr_g(\nabla^\varphi)^2 V + tr_g R^N(V, d\varphi)d\varphi\end{aligned}$$

1.4 Exemples d'applications biharmoniques

Exemple 1.4.1. *Tout application harmonique est biharmonique.*

Exemple 1.4.2. *Considérons l'application différentiable :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (M,g) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ p & \longmapsto & \varphi(p) = (\varphi^1(p), ..., \varphi^n(p)). \end{array}$$

Alors $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1), ..., \tau_2(\varphi^n))$ *donc* φ *biharmonique si et seulement si les applications* $\varphi^i, i = 1, ..., n$ *sont biharmoniques.*

Exemple 1.4.3. *Le simple exemple d'une application biharmonique, les polynômes de degrés 3 et 2 sur* $\mathbb{R}$

Exemple 1.4.4. *Soit l'application :*

$$\varphi : (M,g) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, h)$$

φ *et biharmonique si et seulement si :*

$$tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_h h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = 0$$

En effet, remarque que la sphèe unité $\mathbb{S}^n$ *à courbure constante égale à 1 d'ou d'après la formule :*

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} tr_g R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi & = & tr_g\big(h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi\big) \\ & = & \mid d\varphi \mid^2 \tau(\varphi) - tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \\ & = & 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \end{array}$$

CHAPITRE 2

PRODUIT TORDU DE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion d'une variété Riemannienne produit tordu avec la métrique associée sur produit tordu. En donnant la connexion de Levi-Cevita et la courbure dans set métrique.

2.1 Produit Tordu de Variétés Riemanniennes

Définition 2.1.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement et $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive. La variété produit tordu $M \times_f N$ est définie comme étant la variété $M \times N$ munie de la métrique G_f telle que*

$$G_f = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent les projections canoniques.

Si $X, Y \in \Gamma(TM \times TN)$ on a

$$G_f\Big(X,Y\Big) = g\Big(d\pi(X), d\pi(Y)\Big) + (f\circ\pi)^2 h\Big(d\eta(X), d\eta(Y)\Big)$$

Remarque 2.1.1. *Relativement à des cartes locales $(U, x^i) \in atl(M)$ et $(V, y^i) \in atl(N)$, la matrice associée à G_f est donnée par*

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 \cdot h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} \cdot h^{lk} \end{pmatrix}$$

Le couple $(M \times_f N, G_f)$ s'appelle variété Riemannienne produit tordu et f s'appelle la fonction de distorsion du produit tordu.

Exemple 2.1.1. *(Le tore) Le tore T^2 est la variété produit $S^1 \times S^1$ avec $g_u = \dfrac{4}{(1+u^2)^2}du^2$ une métrique Riemannienne sur la sphére unité S^1 alors,*

$$\tilde{g} = g_u + f^2 g_v,$$

est une métrique Riemannienne tordu sur le tore T^2, où f une fonction de classe C^∞ sur S^1, strictement positive. Le tore T^3 est la variété produit $S^1 \times S^1 \times S^1$ alors, on peut définir deux métriques Riemannienne tordu,

$$\tilde{g}_1 = g_u + f_1^2(g_v + g_w) \text{ et } \tilde{g}_2 = (g_u + g_v) + f_2^2 g_w,$$

où f_1 une fonction de classe C^∞ sur S^1 et f_2 une fonction de classe C^∞ sur $S^1 \times S^1$, strictement positives.

La connexion de levi-civita de $M \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit.

Proposition 2.1.1. *(Connexion de Levi-Civita de la Variété Produit Tordu) Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. Si ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associé à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ associée à la variété produit tordu $(M \times_{f^2} N, G_f)$ est donnée par*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2}X_1(f^2)\Big(0, Y_2\Big) + \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)\Big(0, X_2\Big) - \frac{1}{2}h(X_2, Y_2)\Big(grad(f^2), 0\Big) \tag{2.1}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$, $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$, $X = (X_1, X_2)$ *et* $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :
Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TN)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$ des champs de vecteurs sur $M \times_{f^2} N$. De la formule de Koszule on obtient

$$\begin{aligned}
2G_f(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(G_f(Y,Z)) + Y(G_f(X,Z)) - Z(G_f(X,Y)) \\
&\quad + G_f(Z,[X,Y]) + G_f(Y,[Z,X]) - G_f\Big(X,[Y,Z]) \\
&= X(g(Y_1,Z_1)\circ\pi + f^2\circ\pi.h(Y_2,Z_2)\circ\eta) + \\
&\quad Y(g(X_1,Z_1)\circ\pi + f^2\circ\pi.h(X_2,Z_2)\circ\eta) - \\
&\quad Z(g(X_1,Y_1)\circ\pi + f^2\circ\pi.h(X_2,Y_2)\circ\eta) \\
&\quad + g(Z_1,[X_1,Y_1])\circ\pi + f^2\circ\pi.h(Z_2,[X_2,Y_2])\circ\eta \\
&\quad + g(Y_1,[Z_1,X_1])\circ\pi + f^2\circ\pi.h(Y_2,[Z_2,X_2])\circ\eta \\
&\quad - g(X_1,[Y_1,Z_1])\circ\pi - f^2\circ\pi.h(X_2,[Y_2,Z_2])\circ\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G_f(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2g(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1)\circ\pi + 2f^2\circ\pi.h(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2)\circ\eta \\
&\quad + X_1(f^2)\circ\pi.h(Y_2,Z_2)\circ\eta + Y_1(f^2)\circ\pi.h(X_2,Z_2)\circ\eta \\
&\quad - Z_1(f^2)\circ\pi.h(X_2,Y_2)\circ\eta \\
&= 2G_f\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2), Z\Big) + h(X_1(f^2)\circ\pi.Y_2 \\
&\quad + Y_1(f^2)\circ\pi.X_2, Z_2)\circ\eta - g(h(X_2,Y_2)\circ\eta.grad(f^2), Z_1)\circ\pi \\
&= 2G_f\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2), Z\Big) + G_f(\frac{X_1(f^2)}{f^2}\circ\pi.Y_2 \\
&\quad + \frac{Y_1(f^2)}{f^2}\circ\pi.X_2, Z) - G_f(h(X_2,Y_2)\circ\eta.grad(f^2), Z)
\end{aligned}$$

d'où, pour tout $Z \in \Gamma(TM)$ on déduire que :

$$\begin{aligned}
2G_f(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2G_f\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2) + (\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\circ\pi.Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\circ\pi.X_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(h(X_2,Y_2)\circ\eta.grad(f^2), Z\Big)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.1.2. *(Tenseur de Courbure du Produit Tordu)*
Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes. Si R et $\widetilde{R}$ désignent les tenseurs de courbures de la variété Riemannienne produit $(M\times N, G)$ et de la variété Riemannienne produit $(M\times_{f^2} N, G_f)$ respectivement, alors

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\Big(X,Y\Big)-R\Big(X,Y\Big) = \frac{1}{2f^2}\Bigg\{&\Big(\nabla^M_{Y_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2, 0\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,X_2\Big)\\ &-\Big(\nabla^M_{X_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2, 0\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big)\\ &-\frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$\Big(X\wedge_{G_f} Y\Big)Z = G_f\Big(Z,Y\Big)X - G_f\Big(Z,X\Big)Y$$

pour tout $X_1,Y_1\in H(M)$, $X_2,Y_2\in\Gamma(TN)$, $X=(X_1,X_2)$ et $Y=(Y_1,Y_2)$.

Preuve :
Soient $X_1,Y_1,Z_1\in\Gamma(TM)$ et $X_2,Y_2,Z_2\in\Gamma(TN)$, on pose $X=(X_1,X_2)$, $Y=(Y_1,Y_2)$ et $Z=(Z_1,Z_2)$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\Big(X,Y\Big)Z &= \widetilde{R}\Big((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\Big)Z\\ &= \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)Z+\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z+\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)Z+\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)Z\end{aligned} \tag{2.3}$$

Développant chaque terme de la dernière équation
1) $\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_1}+\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_2}$

$$\begin{aligned} a)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widetilde{Z_1}\\ &= \nabla^M_{X_1}\nabla^M_{Y_1}Z_1-\nabla^M_{Y_1}\nabla^M_{X_1}Z_1-\nabla^M_{[X_1,Y_1]}Z_1\\ &= \Big(R_M(X_1,Y_1)Z_1,0\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} - \frac{[X_1,Y_1](f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} \\
&= \Bigg[\, X_1(Y_1(f^2)/2f^2) + \frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2} - Y_1(X_1(f^2)/2f^2) \\
&\quad -\frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2} - \frac{[X_1,Y_1](f^2)}{2f^2}\,\Bigg]\widehat{Z_2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

de a) et b) on déduit que :

$$
\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)Z = \Big(R_M(X_1,Y_1)Z_1,0\Big) \tag{2.4}
$$

$$
2)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2}
$$

$$
\begin{aligned}
a)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}]}\widetilde{Z_1} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Y_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla^M_{X_1}Z_1} \\
&= X_1(Z_1(f^2)/2f^2)\widehat{Y_2} + \frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2}\widehat{Y_2} - \frac{1}{2f^2}\nabla^M_{X_1}Z_1(f^2)\widehat{Y_2} \\
&= \frac{1}{2f^2}\left[X_1(Z_1(f^2)) - \nabla^M_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1}(f^2) - \frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{2f^2}\right]\widehat{Y_2} \\
&= \frac{1}{2f^2}\left[g\Big(\nabla^M_{X_1}gradf^2,Z_1\Big) - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}g\Big(gradf^2,Z_1\Big)\right]\widehat{Y_2} \\
&= g\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],Z_1\right)\widehat{Y_2} \\
&= G_f\left(\Big(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\Big),\Big(Z_1,0\Big)\right)\Big(0,Y_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}(0,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0) - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} \\
&= \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{X_1}gradf^2 \\
&\quad -\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\left[\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}gradf^2\right] \\
&= -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{X_1}gradf^2 + \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}gradf^2 \\
&= -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right] \\
&= -G_f\Big((0,Y_2),(0,Z_2)\Big)\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\right)
\end{aligned}
$$

de a) et b) on déduit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z &= G_f\left(\Big(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\Big),\Big(Z_1,0\Big)\right)\Big(0,Y_2\Big) \\
&\quad -G_f\left((0,Y_2),(0,Z_2)\right)\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z = -\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\right)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big) \quad (2.5)
$$

3) $\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2}$

a)
$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widetilde{Z_1} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\widehat{Y_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\widehat{X_2} - \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)[X_2,Y_2] \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left[(0,\nabla^N_{X_2}Y_2) - \frac{h(Y_2,X_2))}{2}(gradf^2,0)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left[\Big(0,\nabla^N_{Y_2}X_2\Big) - \frac{h(Y_2,X_2))}{2}\Big(gradf^2,0\Big)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\Big(0,[X_2,Y_2]\Big) \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\Bigg(0,(\nabla^N_{X_2}Y_2) - \nabla^N_{Y_2}X_2) - [X_2,Y_2])\Bigg) \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} \\
&= \Big(0,R_N(X_2,Y_2)Z_2\Big) \\
&\quad -\frac{|gradf^2|^2}{4f^4}\Bigg[G_f\Big((0,Y_2),(0,Z_2)\Big)(0,X_2) - \\
&\quad G_f\Big((0,X_2),(0,Z_2)\Big)(0,Y_2)\Bigg] \\
&= \Big(0,R_N(X_2,Y_2)Z_2\Big) - \frac{1}{4f^4}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\Big((0,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)\Big) \\
&= \Big(0,\nabla^N_{X_2}\nabla^N_{Y_2}Z_2\Big) - \frac{h(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2)}{2}\Big(gradf^2,0\Big) \\
&\quad -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\Big(gradf^2,0\Big) \\
&\quad -\frac{X_2(h(Y_2,Z_2))}{2}\Big(gradf^2,0\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\Big((0,\nabla^N_{X_2}Z_2) - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)\Big)\\
&= \Big(0,\nabla^N_{Y_2}\nabla^N_{X_2}Z_2\Big) - \frac{h(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2)}{2}\Big(gradf^2,0\Big) - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\Big(gradf^2,0\Big)\\
&\quad -\frac{Y_2(h(X_2,Z_2))}{2}\Big(gradf^2,0\Big)
\end{aligned}$$

$$-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} = -\Big(0,\nabla^N_{[X_2,Y_2]}Z_2\Big) + \frac{h([X_2,Y_2],Z_2)}{2}\Big(gradf^2,0\Big)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\Big(gradf^2,0\Big) &= \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2}(0,X_2) = \frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,X_2)\\
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\Big(gradf^2,0\Big) &= \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2}(0,Y_2) = \frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,Y_2)
\end{aligned}$$

$$-h(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - X_2(h(Y_2,Z_2)) + h(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2) + Y_2(h(X_2,Z_2)) + h([X_2,Y_2],Z_2) = 0$$

D'où

$$\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)Z = \Big(0,R_N(X_2,Y_2)Z_2\Big) - \frac{1}{4f^2}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big) \quad (2.6)$$

4) $\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widehat{Z_2}$

$a)$
$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}]}\widetilde{Z_1}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}(\nabla^M_{Y_1}Z_1,0) - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}\\
&= \frac{\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2} - Y_1(\frac{Z_1(f^2)}{2f^2})\widehat{X_2} - \frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}\\
&= \left[\frac{\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)}{2f^2} + \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^4} - \frac{Y_1(Z_1(f^2))}{2f^2} - \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{4f^4}\right]\widehat{X_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2) - Y_1(Z_1(f^2)) + \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^2}\right]\widetilde{X_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[-g\Big(\nabla^M_{Y_1}gradf^2,Z_1\Big) + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}g\Big(gradf^2,Z_1\Big)\right]\widehat{X_2}\\
&= -G_f\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{Y_1}gradf^2 - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],Z_1\right)\Big(0,X_2\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\Big((0,\nabla^N_{X_2}Z_2)-\frac{h(X_2,Z_2)}{2}gradf^2,0)\Big)\\
&= \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\left[\nabla^N_{X_2}Z_2-\frac{h(X_2,Z_2)}{2}gradf^2\right]\\
&\quad -\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\nabla^N_{X_2}Z_2+\frac{h(X_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{Y_2}gradf^2\\
&= \frac{h(X_2,Z_2)}{2}\left[\nabla^M_{Y_2}gradf^2-\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right]\\
&= G_f\Big((0,X_2),(0,Z_2)\Big)\Big(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\Big)
\end{aligned}
$$

De a) et b) on déduit

$$
\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)Z=\frac{1}{2f^2}\Big(\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,X_2\Big) \tag{2.7}
$$

Des formules (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) on obtient

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(X,Y\Big)-R\Big(X,Y\Big) &= \frac{1}{2f^2}\Big\{\Big(\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,X_2\Big)\\
&\quad -\Big(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_f}\Big(0,Y_2\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Proposition 2.1.3. *(courbure de Ricci)*
Soit $M\times_f N$ une variété produit tordu et Ricc sa courbure de Ricci. Pour tout $X_1,Y_1\in\Gamma(TM)$ et $X_2,Y_2\in\Gamma(TN))$ on a

1. $Ricc((X_1,0),\ (Y_1,0))=S^1(X_1,\ Y_1)-\frac{n_2}{f}g_1(\ \nabla_{X_1}gradf,Y_1)$
2. $Ricc((X_1,0),\ (0,\ Y_2))=0$
3. $Ricc((0,\ X_2),\ (0,\ Y_2))=Ricci(X_2,\ Y_2)-g_2(X_2,\ Y_2)(f\triangle(f)+(n_2-1)|gradf|^2)$,

où $\triangle(f)$ est le Laplacien de la fonction f sur N.

CHAPITRE 3

HARMONICITÉ ET BIHARMONICITÉ SUR PRODUIT TORDU

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'harmonicité et la biharmonicité de quelques applications définies sur des variétés muni d'un métrique tordue. Dans un premier lieu, nous allons calculer le champ de tension des ces applications afin de déterminer la condition d'harmonicité.

3.1 Harmonicité et biharmonicité de l'application $\phi : M^m \times_f N^n \to P^p$

Comme premières applications, nous allons traiter le cas où la variété de départ munie d'une métrique tordue[21].

Soit l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_f) \ &\to\ (P^p,\ k)\ , \\ (x,\ y) &\longrightarrow \widetilde{\phi}(x,y) = \phi(x) \end{aligned}$$

ou, $G_f = g + f^2 h$ est la métrique tordu de la variété produit $M \times N$ et

$\phi : (M^m, g) \to (p^p, k)$. Nous étudierons harmonicité et biharmoniqueity de $\widetilde{\phi}$.En calculer le champ de tension de l'application $\widetilde{\phi}$ nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 3.1.1. *[14] Soit l'application $\phi : (M^m, g) \to (P^p, k)$ de classe C^∞.Le champ de tension de l'application $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_f) \to (P^p,\ k)$ défini par :*

$$\tau(\widetilde{\phi}) = \tau(\phi) + nd\phi(grad \ln f) \tag{3.1}$$

Preuve :

Soit $\{e_1, ...e_m)\}$ (resp $\{f_1....f_n\}$) une base locale ortonormale sur M (resp N). On pose

$$h_k = \begin{cases} \widetilde{e_i} = (e_i, 0), & si \quad i = 1, ..., m \\ \frac{1}{f}\widetilde{f_j} = \frac{1}{f}(0, f_j), & si \quad j = 1, ..., n \end{cases}$$

alors $\{(h_1, ..., h_{m+n}\}$ est une base locale ortonormale sur la variété produit tordue $M \times_f N$,on pose $d\widetilde{\phi}(X,\ Y) = (d\phi(X), 0)$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$.Alors par la définition de champ de la tension on à :

$$\begin{aligned}
\tau(\widetilde{\phi}) &= Tr_{G_f} \nabla d\widetilde{\phi} \\
&= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} d\widetilde{\phi}(e_{i,0}) + \frac{1}{f^2} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} d\widetilde{\phi}(0, f_j) \\
&\quad - d\widetilde{\phi}\Big(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i, 0)\Big) - \frac{1}{f^2} d\widetilde{\phi}\Big(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0, f_j)\Big).
\end{aligned}$$

Alors

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} d\widetilde{\phi}(e_i, 0) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i)$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} d\widetilde{\phi}(0, f_j) = 0,$$

D'après la formule (2.1),on à

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i, 0) = (\nabla_{e_i} e_i, 0)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0, f_j) = \Big(0, \nabla_{f_j} f_j\Big) - nf^2(grad \ln f, 0).$$

avec

$$\tau(\widetilde{\phi}) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi\big(\nabla^{M}_{e_i} e_i\big) + nd\phi(grad \ln f),$$

alors on obtient :

$$\tau(\widetilde{\phi}) = \tau(\phi) + nd\phi(grad \ln f).$$

Remarque 3.1.1. *Si $\phi : (M^m, g) \to (P^m, k)(m \geq 3)$ est une application conforme avec la dualité λ. Alors le champ de tension de $\widetilde{\phi}$ est donné par :*

$$\tau(\widetilde{\phi}) = (2-m) d\phi grad \ln \lambda + nd\phi(grad \ln f) = d\phi(gradln(\lambda^{2-m} f^n)).$$

Alors $\widetilde{\phi}$ est harmonique si et seulement si la fonction $\lambda^{2-m} f^n$ est constant.

Comme deuxième résulat et pour déterminé le champ de bitension τ_2 de $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_f) \to (P^p,\ k)$ on va appliqué le théoréme suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit l'application $\phi : (M^m, g) \to (P^p, k)$ de classe C^∞.Alors le champ de bitension de*

$$\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_f) \to (P^p,\ k)\ ,$$
$$(x,\ y) \longrightarrow \widetilde{\phi}(x, y) = \phi(x)$$

est donné par :

$$\begin{aligned} \tau_2(\widetilde{\phi}) = \tau_2(\phi) - n\big(Tr_g \nabla^2 d\phi(grad \ln f) + Tr_g R(d\phi(grad \ln f), d\phi) d\phi\big) \\ - n\nabla_{grad \ln f} \tau(\phi) - n^2 \nabla_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f). \end{aligned} \tag{3.2}$$

preuve

Par la définition du champ de bitension, nous avons

$$\tau_2(\widetilde{\phi}) = -Tr_{G_f} \big(\nabla^{\widetilde{\phi}}\big)^2 \tau(\widetilde{\phi}) - Tr_{G_f} R^P(\tau(\widetilde{\phi}), d\widetilde{\phi}) d\widetilde{\phi} \tag{3.3}$$

Pour le premier terme $Tr_{G_f} \big(\nabla^{\widetilde{\phi}}\big)^2 \tau(\widetilde{\phi})$, Nous avons

$$\begin{aligned} Tr_{G_f} \big(\nabla^{\widetilde{\phi}}\big)^2 \tau(\widetilde{\phi}) = \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \tau(\widetilde{\phi}) + \frac{1}{f^2} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \tau(\widetilde{\phi}) \\ - \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)} \tau(\widetilde{\phi}) - \frac{1}{f^2} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)} \tau(\widetilde{\phi}). \end{aligned}$$

En développant terme à terme cette équation, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \tau(\widetilde{\phi}) &= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \tau(\phi) + n \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} d\phi(grad \ln f) \\ &= \nabla^{\phi}_{e_i} \nabla^{\phi}_{e_i} \tau(\phi) + n \nabla^{\phi}_{e_i} \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(grad \ln f) \end{aligned}$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \tau(\widetilde{\phi}) = 0.$$

En utilisant l'équation (2.1) et de même façon on obtient

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \tau(\widetilde{\phi})) = \nabla^{\phi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \tau(\phi) + n\nabla^{\phi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} d\phi(grad \ln f)$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \tau(\widetilde{\phi}) = -nf^2 \nabla^{\phi}_{grad \ln f} \tau(\phi) - n^2 f^2 \nabla^{\phi}_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f).$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} Tr_{G_f} \big(\nabla^{\widetilde{\phi}}\big)^2 \tau(\widetilde{\phi}) &= Tr_g (\nabla^{\phi})^2 \tau(\phi) + nTr_g (\nabla^{\phi})^2 d\phi(grad \ln f) \\ &\quad + n\nabla^{\phi}_{grad \ln f} \tau(\phi) + n^2 \nabla^{\phi}_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour terminer la preuve, en développant terme à terme cette équation, $Tr_{G_f} R^P(\tau(\widetilde{\phi}),\ d\widetilde{\phi}) d\widetilde{\phi}$, Nous avons

$$\begin{aligned} Tr_{G_f} R^P(\tau(\widetilde{\phi}), d\widetilde{\phi}) d\widetilde{\phi} &= R^P(\tau(\widetilde{\phi}), d\widetilde{\phi}(e_i,0)) d\widetilde{\phi}(e_i,0) \\ &\quad + \frac{1}{f^2} R^P(\tau(\widetilde{\phi}), d\widetilde{\phi}(0,f_i)) d\widetilde{\phi}(0,f_i) \\ &= R^P(\tau(\widetilde{\phi}), d\widetilde{\phi}(e_i,0)) d\widetilde{\phi}(e_i,0) \\ &= R^P(\tau(\phi), d\phi(e_i)) d\phi(e_i) \\ &\quad + nR^P(d\phi(grad \ln f), d\phi(e_i)) d\phi(e_i). \end{aligned}$$

alors

$$Tr_{G_f} R^P(\tau(\widetilde{\phi}), d\widetilde{\phi}) d\widetilde{\phi} = Tr_g R^P(\tau(\phi), d\phi) d\phi + nTr_g R^P(d\phi(grad \ln f), d\phi) d\phi. \tag{3.5}$$

Si nous remplaçons (3.4) et (3.5) dans (3.3), nous obtient

$$\begin{aligned} \tau_2(\widetilde{\phi}) &= \tau_2(\phi) - n(Tr_g \nabla^2 d\phi(grad \ln f) + Tr_g R^{f'}(d\phi(grad \ln f), d\phi) d\phi) \\ &\quad - n\nabla_{grad \ln f} \tau(\phi) - n^2 \nabla_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f). \end{aligned}$$

La preuve du Théorème (3.1.1) est complète

Remarque 3.1.2. *Le théorème (3.1.1) est un résultat particulier du produit tordu généralisé comme une conséquence, si ϕ et harmonique, nous avons*

Corollaire 3.1.1. *[14] Soit l'application harmonique $\phi : (M^m, g) \to (p^p, k)$. Alors,*

$$\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_f) \ \to\ (P^p,\ k)\ , \\ (x,\ y) \longrightarrow \widetilde{\phi}(x,y) = \phi(x).$$

L'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si :

$$Tr_g \nabla^2 d\phi(grad \ln f) + Tr_g R^P(d\phi(grad \ln f), d\phi)d\phi + n\nabla_{gradlnf} d\phi(grad \ln f) = 0.$$

Si on pose $\phi = Id_M$,La première projection :

$$P_1 : (M^m \times_f N^n,\ G_f) \ \to\ (P^p,\ k)\ , \\ (x,\ y) \longrightarrow P_1(x,y) = x$$

P_1 est biharmonique si et seulement si :

$$grad\Delta lnf + \frac{n}{2} grad(|gradlnf|^2) + 2Ricci^M(grad \ln f) = 0$$

.

Dans ce cas devons présenter l'exemple suivant sur application biharmonique non-harmonique

Exemple 3.1.1. *Soit l'application*

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times_f N^n \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \\ (x,y) \ \longmapsto\ \widetilde{\varphi}(x,y) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Nous supposons que $(lnf = \alpha(r))$. Alors par le Théorème(3.1.1), nous déduisons que l'application $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times_f N^n \to \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ est biharmonique si et seulement si la fonction de α satisfait l'équation différentiable suivante

$$n\alpha''' + \frac{n(m-5)}{r}\alpha'' - \frac{3n(3m-7)}{r^2}\alpha' + n^2\alpha'\alpha'' - \frac{2n^2}{r}(\alpha')^2 - \frac{8(m-2)(m-4)}{r^3} = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$, Cette équation devient

$$n\beta'' + \frac{n(m-5)}{r}\beta' - \frac{3n(3m-7)}{r^2}\beta + n^2\beta\beta' - \frac{2n^2}{r}\beta^2 - \frac{8(m-2)(m-4)}{r^3} = 0.$$

En cherchant les solutions particulières de type, $\beta = \frac{a}{r}(a \in \mathbb{R}^*)$, alors $\widetilde{\varphi}$: $\mathbb{R}^m\backslash\{0\} \times_f N^n \to \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ est biharmonique si et seulement si

$$3n^2a^2 + 2n(5m-14)a + 8(m-2)(m-4) = 0.$$

Cette équation admet deux solutions $a = \frac{4-2m}{n}$ et $a = \frac{4(4-m)}{3n}$.

1. pour $a = \frac{4-2m}{n}$, nous obtient $f(r) = Cr^{\frac{4-2m}{n}}$ et dans ce cas $\widetilde{\varphi}$: $\mathbb{R}^m\backslash\{0\} \times_f N^n \to \mathbb{R}^m\backslash\ \{0\}$ est harmonique alors biharmonique.
2. pour $a = \frac{4(4-m)}{3n}$, nous obtient $f(r) = Cr^{\frac{4(4-m)}{3n}}$ et dans ce cas $\widetilde{\varphi}$: $\mathbb{R}^m\backslash\{0\} \times_f N^n \to \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ est biharmonique non-harmonique.

Maintenant nous considérons l'application $\psi : (N^n, g) \to (p^p,\ k)$ Et nous définissez l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} : (M^m \times_f N^n,\ G_f)\ &\to\ (P^p,\ k)\ , \\ (x,\ y) &\longrightarrow \widetilde{\psi}(x,y) = \psi(x). \end{aligned}$$

En étudiant le biharmonicité de l'application $\widetilde{\psi}$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit ψ : $(N^n,\ h) \to (P^p,\ k)$ une application différentiable. Les champs de tension et de bi-tension de l'application*

$$\begin{aligned} \psi : (M^m \times N^n,\ G) \quad &\to \quad (P^p,\ k) \\ (x,\ y) \quad &\longmapsto \quad \psi(y) \end{aligned}$$

sont donnés par

$$\tau(\widetilde{\psi}) = \frac{1}{f^2 \circ \pi}\tau(\psi) \tag{3.6}$$

et

$$\tau_2(\widetilde{\psi}) = \frac{1}{f^4 \circ \pi}\tau_2(\psi) - \frac{2}{f^2 \circ \pi}\big(\big(\Delta lnf + (n-2)|gradlnf|^2\big) \circ \pi\big)\tau(\psi). \tag{3.7}$$

preuve.

Premier-ment, nous calculons le champ de la tension de $\widetilde{\psi}$. Par la définition au champ de la tension, nous avons

$$\begin{aligned}\tau(\widetilde{\psi}) &= Tr_{G_f}\nabla d\widetilde{\psi}\\ &= \nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}d\widetilde{\psi}(e_i,0)+\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}d\widetilde{\psi}(0,f_j)\\ &\quad -d\widetilde{\psi}\big(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)\big)-\frac{1}{f^2\circ\pi}d\widetilde{\psi}\big(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)\big).\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.1), nous obtenais

$$\tau(\widetilde{\psi})=\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\psi}_{f_j}d\psi(f_j)-\frac{1}{f^2\circ\pi}d\psi(\nabla_{f_j}f_j)=\frac{1}{f^2\circ\pi}\tau(\psi),$$

alors

$$\tau(\widetilde{\psi})=\frac{1}{f^2\circ\pi}\tau(\psi).$$

Par cette expression, nous déduisons cela $\widetilde{\psi}$ est harmonique est-il si et seulement si ψ est harmonique. Maintenant, nous calculerons le champ de bitension de $\widetilde{\psi}$. Par la définition, nous avons

$$\tau_2(\widetilde{\psi})=-Tr_{G_f}\big(\nabla^{\widetilde{\psi}}\big)^2\tau(\widetilde{\psi})-Tr_{G_f}R^P(\tau(\widetilde{\psi}),d\widetilde{\psi})d\widetilde{\psi}. \tag{3.8}$$

pour le premier terme $Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\psi}})^2\tau(\widetilde{\psi})$, on à

$$\begin{aligned}Tr_{G_f}\big(\nabla^{\widetilde{\psi}}\big)^2\tau(\widetilde{\psi}) &= \nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\tau(\widetilde{\psi})+\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}_0}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\psi}_0}_{(0,f_j)}\tau(\widetilde{\psi})\\ &\quad -\nabla^{\widetilde{\psi}}_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\tau(\widetilde{\psi})-\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\tau(\widetilde{\psi}).\end{aligned}$$

alors,

$$\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\tau(\widetilde{\psi})=\frac{2}{f^2\circ\pi}\Bigg(\big(2|gradlnf|^2-e_i(e_i(lnf))\big)\circ\pi\Bigg)\tau(\psi)$$

et

$$\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}\tau(\widetilde{\psi})=\frac{1}{f^4\circ\pi}\nabla^{\psi}_{f_j}\nabla^{\psi}_{f_j}\tau(\psi).$$

Finalement avec la formule(2.1), nous obtenais

$$\nabla^{\widetilde{\psi}}_{\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)}(\widetilde{\psi})=\frac{2}{f^2\circ\pi}\Bigg(\nabla_{e_i}e_i((\ln f))\circ\pi\Bigg)\tau(\psi)$$

et

$$\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{\tilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\tau(\widetilde{\psi}) = \frac{1}{f^4\circ\pi}\nabla_{\nabla_{f_j}f_j}\tau(\psi) + \frac{2n}{f^2\circ\pi}\big((|gradlnf|^2)\circ\pi\big)\tau(\psi).$$

Qui nous donnes

$$Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\psi}})^2\tau(\widetilde{\psi}) = \frac{1}{f^4\circ\pi}Tr_h\nabla^2\tau(\psi) - \frac{2}{f^2\circ\pi}\big((\Delta lnf+(n-2)|gradlnf|^2)\circ\pi\big)\tau(\psi) \tag{3.9}$$

Finalement $Tr_{G_f}R^P(\tau(\widetilde{\psi}),\ d\widetilde{\psi})d\widetilde{\psi}$, Il est facile de vérifient

$$Tr_{G_f}R^P(\tau(\widetilde{\psi}), d\widetilde{\psi})d\widetilde{\psi} = \frac{1}{f^4\circ\pi}Tr_hR^P(\tau(\psi), d\psi)d\psi. \tag{3.10}$$

Si nous remplacé (3.9) et (3.10) dans (3.8), nous obtenir

$$\tau_2(\widetilde{\psi}) = \frac{1}{f^4\circ\pi}\tau_2(\psi) - \frac{2}{f^2\circ\pi}((\Delta lnf + (n-2)|gradlnf|^2)\circ\pi)\tau(\psi).$$

La preuve de théorème (3.1.2) est complete. Une conséquence immédiate du Théorème (3.1.2) est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.2. *Soit $\psi : (N^n,\ h) \to (p^p,\ k)$ application biharmonique non-harmonique.l'application $\widetilde{\psi}$: $(M^m \times N^n, G) \to (pt', k)$ défini par $\widetilde{\psi}(x,y) = \psi(y)$ elle et biharmonique si seulement si la fonction f^{n-2} est harmonique.*

Exemple 3.1.2. *Soit l'application,*

$$\begin{aligned} \phi :]0,\ +\infty[\times_f\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\ y) &\longmapsto y^2 \end{aligned}$$

où les variétés $0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ sont munies de la métrique standard. En utilisant la proposition (3.1.1), et remarquons que pour $M =]\,0, +\infty[, N = P = \mathbb{R}$, et $\phi(y) = y^2$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\tau(\phi) = \triangle(\phi) = \frac{d^2\phi}{dy^2} = 2 \quad , \tau_2(\phi) = \frac{d^4\phi}{dy^4} = 0,$$

et,

$$\tau(\phi) = \frac{2}{f^2} \quad , \tau_2(\phi) = \frac{2}{f^2}(\triangle(\frac{1}{f^2}) - \frac{2}{f^2}|grad\ \ \ln\ \ f|^2).$$

Remarquons que $\tau(\phi)$ est strictement positive pour tout fonction f sur $]0,+\infty[$,donc cherchons une fonction f telle que ϕ est bi-harmonique, c'est à dire cherchons une fonction f différentiable sur $]0,+\infty[$ vérifiant :

$$\triangle(\frac{1}{f^2}) - \frac{2}{f^2}|grad\ \ln\ f|^2 = 0.$$

On a,

$$\begin{aligned}\triangle(\frac{1}{f^2}) &= \frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{f^2}) \\ &= -2(\frac{f''}{f^3} - 3\frac{(f')^2}{f^4})\end{aligned}$$

et,

$$grad\ \ln\ f = \frac{f'}{f}\frac{d}{dx} \quad |grad\ \ln\ f|^2 = (\frac{f'}{f})^2,\ o\ f' = \frac{df}{dx},$$

d'où,

$$\begin{aligned}\triangle(\frac{1}{f^2}) - \frac{2}{f^2}|grad\ \ln\ f|^2 =& -2(\frac{f''}{f^3} - 3\frac{(f')^2}{f^4}) - \frac{2}{f^2}(\frac{f'}{f})^2 \\ =& -\frac{2}{f^4}(ff'' - 2(f')^2)\end{aligned}$$

Alors ϕ est bi-harmonique non harmonique si et seulement si la fonction f vérifiant :

$$ff'' - 2(f')^2 = 0, \tag{3.11}$$

la solution générale de l'équation (3.11) est, $f(x) = \frac{-1}{ax+b}$, pour $\alpha = -1$ et $b = 0$, on obtient $f(x) = \frac{1}{x}$, une fonction différentiable strictement positive sur$]0,+\infty[$.

Exemple 3.1.3. *Soit la projection,*

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R} \times_f \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\ y) &\longmapsto x\end{aligned}$$

où la variété $\mathbb{R}$ munie de la métrique standard. En utilisant la proposition 4.2.3on obtient,

$$\begin{aligned}\tau(\pi) &= grad\ \ln\ f \\ &= \frac{f'}{f}\frac{d}{dx}, of' = \frac{df}{dx}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\tau_2(\pi) &= tr_g(\nabla^{\mathbb{R}})^2 grad \ \ln \ f + Ricci^{\mathbb{R}}(grad \ \ln \ f) \\
&\quad + \frac{1}{2} grad(|grad \ \ln \ f|^2) \\
&= \nabla_{\frac{\mathbb{R}d}{dx}} \nabla_{\frac{\mathbb{R}d}{dx}} grad \ \ln \ f + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\frac{f'}{f})^2 \frac{d}{dx} \\
&= \frac{d^2}{dx^2}(\frac{f'}{f})\frac{d}{dx} + (\frac{f'f''}{f^2} - \frac{(f')^3}{f^3})\frac{d}{dx} \\
&= (\frac{f'''}{f} - 3\frac{f'f''}{f^2} + 2\frac{(f')^3}{f^3} + \frac{f'f''}{f^2} - \frac{(f')^3}{f^3})\frac{d}{dx} \\
&= \frac{1}{f^3}(f^2 f''' - 2ff'f'' + (f')^3)\frac{d}{dx},
\end{aligned}$$

donc la projection π est bi-harmonique non harmonique si et seulement si la fonction f est non constant sur $\mathbb{R}$ et vérifiant,

$$f^2 f''' - 2ff'f'' + (f')^3 = 0 \tag{3.12}$$

La solution générale de l'équation (3.12) est,

$$f(x) = c(e^{\frac{\sqrt{2}}{a}(x+b)} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}(x+b)} + 2).$$

En particulier, pour $\alpha = \sqrt{2}, b = 0$ et $c = 1$ on obtient,

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2,$$

3.2 Harmonicité et biharmonicité de l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n \times_f P^p, G_f)$

Soient (M, g), (N, h) et (P, k) trois variétés Riemanniennes Comme deuxième applications, nous allons traiter le cas où la variété d'arrivée est munie d'une métrique tordue généralisée.

Soit ϕ une application définie par

$$\begin{aligned}
\phi : (M, g) &\longrightarrow (N \times_f P, G_f) \\
x &\longmapsto (\varphi(x), \phi(x))
\end{aligned}$$

avec $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ et $\phi:(M,g)\longrightarrow(P,k)$ deux applications régulières et $G_f=h+f^2k$ la métrique définie sur $N\times_f P$ avec $f\in C^\infty(N)$.

Proposition 3.2.1. *Le champ de tension de ϕ est donné par la formule suivante.*

$$\begin{aligned}\tau(\phi)=&\Big(\tau(\varphi),\tau(\phi)\Big)+2\Big(0,d\phi(grad(\ln f\circ\phi))\Big)\\&-e(\phi)\Big(gradf^2\circ\varphi,0)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Preuve :

En calculant en ce point et par définition du champ de tension, nous avons

$$\begin{aligned}\tau(\phi)&=tr_g\nabla d\phi\\&=\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi(e_i)\\&=\widetilde{\nabla}_{(d\varphi(e_i),d\phi(e_i))}(d\varphi(e_i),\ d\phi(e_i))\\&=\widetilde{\nabla}_{(d\varphi(e_i),0)}(d\varphi(e_i),\ 0)+\widetilde{\nabla}_{(d\varphi(e_i),0)}(0,\ d\phi(e_i))\\&+\widetilde{\nabla}_{(0,d\phi(e_i))}(d\varphi(e_i),\ 0)+\widetilde{\nabla}_{(0,d\phi(e_i))}(0,\ d\phi(e_i))\\&=(\tau(\varphi),\ 0)+2d\varphi(e_i)(lnf)(0,\ d\phi(e_i))+(0,\ \tau(\phi))-\frac{1}{2}|d\phi|^2(gradf^2\circ\varphi,\ 0)\\&=\ (\tau(\varphi),\ \tau(\phi))-e(\phi)(gradf^2\circ\varphi,\ 0)+2(0,\ d\phi(grad(lnf\ \circ\varphi))).\end{aligned}$$

□

De la proposition (3.2.1), on déduit la remarque suivante :

Remarque 3.2.1. *Si la fonction de la distorsion est constante, alors le champ de tension de ϕ est donné par :*

$$\tau(\phi)=\Big(\tau(\varphi),\tau(\phi)\Big)$$

donc ϕ est harmonique (resp biharmonique) si et seulement si φ et ϕ sont harmoniques (resp biharmoniques).

Proposition 3.2.2. *Soit ϕ une application définie par*

$$\begin{aligned}\phi:(M,g)\ &\longrightarrow\ (M\times_f M,G_f)\\ x\ &\longmapsto\ (\varphi(x),\phi(x))\end{aligned}$$

avec $\varphi=\phi=Id_M$ et $G_f=g+f^2g$ la métrique définie sur $M\times_f M$ avec $f\in C^\infty(N)$.

Le champ de tension de ϕ est donné par la formule suivante.

$$\tau(\phi) = 2\Big(0, (grad(\ln f))\Big) - nf^2(gradlnf, 0)$$

Preuve :
Appliquant la proposition (3.2.1) pour $\varphi = \phi = Id_M$, on a :

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= \Big(\tau(\varphi), \tau(\phi)\Big) + 2\Big(0, d\phi(grad(\ln f \circ \phi))\Big) \\
&\quad - e(\phi)(gradf^2 \circ \varphi, 0) \\
&= 2\Big(0, (grad(\ln f))\Big) - \frac{n}{2}(f^2 gradlnf, 0) \\
&= 2\Big(0, (grad(\ln f))\Big) - nf^2(gradlnf, 0)
\end{aligned}$$

Dons le cas où ϕ est l'inclusion, nous obtenons les résultats suivants.
Proposition 3.2.3. *Le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{array}{rcl}
\phi : (M, g) & \longrightarrow & (M \times_f N, G_f) \\
x & \longmapsto & (\varphi(x), y_0) \quad \textit{avec } y_0 \textit{ fixe sur } N
\end{array}$$

est donné par :

$$\tau(\phi) = (\tau(\varphi), 0)$$

Donc ϕ est harmonique (resp biharmonique) si et seulement si φ est harmonique (resp biharmonique)
Remarque 3.2.2. *Si l'application ϕ est constante, alors le champ de tension et de bi-tension de l'application ϕ sont donnée par :*

$$\tau(\phi) = (\tau(\varphi),\ 0),$$

$$\tau_2(\phi) \ = \ (\tau_2(\varphi),\ 0).$$

Donc dans ce cas,l'application ϕ est bi-harmonique non harmonique si et seulement si l'application φ est bi-harmonique non harmonique.
Proposition 3.2.4. *Soient $y \in N$ et $G_f = g + f^2 h$ la métrique de la variété produit tordu $M \times_f N$, alors l'application,*

$$\begin{array}{rcl}
i_y : (M,\ g) & \longrightarrow & (M \times_f N,\ G) \\
x & \longmapsto & (x, y)
\end{array}$$

est totalement géodésique, c'est à dire $\nabla di_y = 0$.
En effet

$$\begin{aligned}\nabla i_y(X,\ Y) &= \nabla^{i_y}_X di_y(Y) - di_y(\nabla^M_x Y)\\ &= \widetilde{\nabla}_{(X,0)}(Y,\ 0) - (\nabla^M_X Y,\ 0)\\ &= (\nabla^M_X Y,\ 0) - (\nabla^M_X Y,\ 0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$.

Proposition 3.2.5. *Soient* $x \in M$ *et* $G_f = g + f^2 h$ *la métrique de la variété produit tordu* $M^m \times_f N^n$*,alors les champs de tension et de bi-tension de l'inclusion En effet*

$$\begin{array}{rcl} i_x\ :\ (N, h) & \rightarrow & (M \times_f N,\ G)\\ y & \longmapsto & (x,\ y)\end{array}$$

sont données par :

$$\begin{aligned}\tau(i_x) &= -\frac{n}{2}(gradf^2, 0) \circ i_x\\ \tau_2(i_x) &= \frac{n^2}{8}(grad(|gradf^2|^2, 0)) \circ i_x\end{aligned}$$

Preuve Appliquant la proposition (3.2.1) pour $\varphi = constante = x$ et $\phi = Id_N$, on a $\ln f \circ \varphi = constante$, $grad(\ln f \circ \varphi) = 0$ et $e(\phi) = \frac{n}{2}$, d'ou

$$\begin{aligned}\tau(i_x) &= -\frac{n}{2}(gradf^2 \circ \varphi,\ 0)\\ &= -\frac{n}{2}(gradf^2, 0) \circ i_x.\end{aligned}$$

En remarquant que ϕ et φ sont harmoniques, $grad(lnf \circ \varphi) = 0,\ X = 0$ et $\omega = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\tau_2(i_x) &= \frac{1}{2}(\frac{n}{2})^2(grad(|gradf^2|^2) \circ \varphi,\ 0)\\ &= \frac{n^2}{8}(grad(|gradf^2|^2),\ 0) \circ i_x\end{aligned}$$

Corollaire 3.2.1. *L'inclusion i_x est bi-harmonique non harmonique si et seulement si*

$$grad(|gradf^2|^2)_x = 0$$

et

$$(gradf^2)_x \neq 0$$

□

Remarque 3.2.3. *Si la fonction f est constante sur M, alors pour tout $x \in M$ l'inclusion i_x est harmonique, donc bi-harmonique.*

Exemple 3.2.1. *Soit l'inclusion,*

$$\begin{array}{rcl} i_{t_0} : S^{m-1} & \longrightarrow &]0, \pi[\times_{\sin t} S^{m-1} \\ x & \longmapsto & (t_0, x) \end{array}$$

Soit $f(t) = \sin t$, est une fonction strictement positive sur l'intervalle $]0, \pi[$. On a :

$$(gradf^2)_t = 2 \sin t \cos t \frac{d}{dt}$$

et

$$grad(|gradf^2|^2)_t = 8 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) \frac{d}{dt},$$

d'où

$$\begin{aligned} grad(|gradf^2|^2)_t = 0 &\Leftrightarrow \ \cos t = 0 \ ou \ \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \ t \in \{\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4}\}, \end{aligned}$$

En utilisant le corollaire précédent, on trouve que l'inclusion i_{t_0} est bi-harmonique non harmonique si et seulement si $t_0 \in \{\frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4}\}$.

Exemple 3.2.2. *Soit l'inclusion :*

$$\begin{array}{rcl} i_{t_0} : S^1 & \longrightarrow &]0, 1[\times_x S^1 \\ y & \longmapsto & (t_0, \ y) \end{array}$$

ou $x = x(t)$ une fonction différentiable strictement positive sur l'intervalle $]0, 1[$. On a

$$gradx^2 = 2x\dot{x}\frac{d}{dt}|gradx^2|^2 = 4x^2\dot{x}^2,$$

d'où,

$$grad(|gradx^2|^2) = 8x\dot{x}(\dot{x}^2 + x\ddot{x}),$$

en utilisant le corollaire précédente on trouve que l'inclusion i_{t_0} est bi-harmonique non harmonique si et seulement si

$$\dot{x}^2(t_0) + x(t_0)\ddot{x}(t_0) = 0 et \dot{x}(t_0) \neq 0 \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) admet une solution globale, $x(t) = \alpha\sqrt{t+b}$, de plus $\dot{x}(t) = \frac{a}{2\sqrt{t+b}}$ non nulle pour tout$\alpha \neq 0$,alors pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $t_0 \in]0, 1[$ on a i_{t_0} est bi-harmonique non harmonique.

Généralement on a :

Corollaire 3.2.2. *Soient $N = (N^n,\ h)$ une variété Riemannienne de dimension n et f une fonction strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$, alors l'application*

$$\begin{aligned} i_x : N &\longrightarrow]0,\ +\infty[\times_f N \\ y &\longmapsto (x,\ y) \end{aligned}$$

est bi-harmonique non harmonique si et seulement si il existe $\alpha, b \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) = \sqrt{\alpha x + b}$ pout tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve.

En utilisant la proposition (3.2.3) on obtient,

$$\tau(i_x) = -nff'(\frac{d}{dx}, \quad \text{ou} \quad f' = \frac{df}{dx}$$

et,

$$\tau_2(i_x) = n^2 ff'(ff'' + (f')^2)(\frac{d}{dx},\ 0),$$

Alors l'application i_x est bi-harmonique non harmonique si et seulement si la fonction f est non constant et vérifie l'équation,

$$ff'' + (f')^2 = 0,$$

une solution générale de l'équation précédente est :

$$f(x) = \sqrt{\alpha x + b} \quad ou \quad \alpha, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

□

Exemple 3.2.3. *Soit l'application,*

$$\begin{array}{rcl} i_{t_0,\lambda} : (S^2,\ g) & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times S^2,\ H) \\ x & \longmapsto & (t_0,\ x) \end{array}$$

ou, $t_0 \in \mathbb{R}, \lambda \in C^\infty(S^2)$ strictement positive, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ strictement positive et $H_f = dt^2 + f^2\lambda^2 g$ la métrique tordu sur la variété produit $\mathbb{R} \times S^2$ avec $\mathbb{R}$ munie de la métrique standard dt^2 et la sphère unité' S^2 munie d'une deuxième métrique $\tilde{g} = \lambda^2 g$(g une métrique sur S^2).

Remarquons que l'application,

$$\begin{array}{rcl} (S^2,\ g) & \longrightarrow & (S^2, \tilde{g}) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est conforme de dilatation λ,donc on obtient le champ de tension et de bi-tension de l'application $i_{t_0,\lambda}$ par

$$\begin{array}{rcl} \tau(i_{t_0,\lambda}) & = & -\lambda^2(gradf^2, 0) \\ & = & -2\lambda^2 f\dot{f}(\frac{d}{dt},\ 0)\ ,\ o\ \dot{f} = \frac{df}{dt} \end{array}$$

et,

$$\begin{array}{rcl} \tau_2(i_{t_0,\lambda}) & = & -4\dot{f}^2(0,\ grad\lambda^2) - 2f\dot{f}\triangle(\lambda^2)(\frac{d}{dt},\ 0) \\ & & + \frac{\lambda^4}{2}(8f\dot{f}(\dot{f}^2 + ff)\frac{d}{dt},\ 0), \end{array}$$

d'où, l'application $i_{t_0,\lambda}$ est harmonique si et seulement si $\dot{f} = 0$, c'est à dire la fonction f est constante strictement positive. Et l'application $i_{t_0,\lambda}$ est bi-harmonique si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} -4\dot{f}^2 grad\lambda^2 = 0 \\ -2f\dot{f}\triangle(\lambda^2) + \frac{\lambda^4}{2}\left(8f\dot{f}(\dot{f}^2 + ff)\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{f}^2 grad\lambda = 0 \\ -\dot{f}\triangle(\lambda^2) + 2\lambda^4\dot{f}(\dot{f}^2 + ff) = 0 \end{array} \right.$$

Si la fonction f est non constant, alors l'application $i_{t_0,\lambda}$ est bi-harmonique non harmonique si et seulement si la fonction λ est une constant strictement positive et la fonction f vérifie l'équation,

$$\dot{f}^2 + ff = 0,$$

l'équation précédente admet une solution globale sur B_+ (resp B_-), maintenant, nous considérons l'application harmonique $\phi : (N^n,\ h) \to (N^n, \widetilde{h})$ et nous étudions le biharmonicité de l'application $\widetilde{\phi} : N \to (M \times N,\ G)$ défini par $\phi(y) = (x_0,\ \phi(y))$.

Théorème 3.2.1. *Soit l'application harmonique $\phi : (N^n,\ h) \to (P^p, k)$, alors nous définissez l'application*

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} : N &\longrightarrow (M \times P,\ G) \\ y &\longmapsto \phi(y) = (x_0,\ \phi(y)) \end{aligned}$$

ϕ elle est harmonique si et seulement si :

$$\begin{cases} (e(\phi))^2 grad(|\mathrm{grad}f^2|^2) - 2(\triangle e(\phi)) gradf^2 = 0, \\ d\phi(grad(e(\phi))) = 0. \end{cases}$$

Preuve

On pose $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base orthonormé sur N. Alors le chanp tension de l'application $\widetilde{\phi}$ défini par :

$$\begin{aligned} \tau(\widetilde{\phi}) &= Tr_h \widetilde{\nabla} d\widetilde{\phi} \\ &= \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j} d\widetilde{\phi}(f_j) - d\widetilde{\phi}(\nabla^N_{f_j} f_j) \\ &= \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}(0,\ d\phi(f_j)) - (0,\ d\phi(\nabla^N_{f_j} f_j)) \\ &= (0, \nabla^{\phi}_{f_j} d\phi(f_j)) - 2f^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} - (0, d\phi(\nabla^N_{f_j} f_j)) \\ &= (0,\ \tau(\phi)) - 2f^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}. \end{aligned}$$

Et comme ϕ harmonique, il suit que :

$$\tau(\widetilde{\phi}) = -2f^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.$$

Alors $\widetilde{\phi}$ biharmonique si et seulement si :

$$Tr_h(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} + e(\phi) Tr_h \widetilde{R}^{M \times_f P}((grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi}, d\widetilde{\phi}) d\widetilde{\phi} = 0. \tag{3.15}$$

Pour le premier terme $Tr_h(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2 e(\phi)(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi}$ de (3.15), Nous avons par définition

$$
\begin{aligned}
&Tr_h(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2 e(\phi)(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad = \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j} \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j} e(\phi)(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi} - \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{\nabla^N_{f_j} f_j} e(\phi)(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Calculez le premier $\widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j} \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j} e(\phi)(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi}$ de (3.16). D'après l'équation (2.1), nous obtient

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\qquad = e(\phi) \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} (grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi} + f_j(e(\phi))(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\qquad = e(\phi) |grad \ln f|^2 (0,\ d\phi(f_j)) \circ \widetilde{\phi} + f_j(e(\phi))(grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned}
$$

Ce que donne,

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\qquad = \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} (e(\phi) |grad \ln f|^2 (0,\ d\phi(f_j))) \circ \widetilde{\phi} + \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} (f_j(e(\phi))(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}) \\
&\qquad = e(\phi) |grad \ln f|^2 \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} (0,\ d\phi(f_j)) \circ \widetilde{\phi} + |grad \ln f|^2 f_j(e(\phi))(0,\ d\phi(f_j)) \circ \widetilde{\phi} \\
&\qquad + f_j(e(\phi)) \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} (grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} + f_j(f_j(e(\phi)))(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j} e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} &= |grad \ln f|^2 e(\phi)(0, \nabla^{\phi}_{f_j} d\phi(f_j)) \circ \widetilde{\phi} \\
&- 2 f^2 (e(\phi))^2 |grad \ln f|^2 (grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&+ 2 |grad \ln f|^2 (0,\ d\phi(grad e(\phi))) \circ \widetilde{\phi} \\
&+ f_j(f_j(e(\phi)))(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Toujours on utilisons l'équation (2.1), et avec simple calcul nous donne

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\nabla^N_{f_j} f_j} e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad = e(\phi)\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\nabla^N_{f_j} f_j}(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} + (\nabla^N_{f_j} f_j)(e(\phi))(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad = |grad \ln f|^2 e(\phi)(0, d\phi(\nabla^N_{f_j} f_j)) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad + (\nabla^N_{f_j} f_j)(e(\phi))(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En remplaçant (3.18) et (3.17) dans (3.16) et comme *phi* et harmonique, Alors

$$\begin{aligned}
&Tr_h(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad = -2f^2(e(\phi))^2 |grad \ln f|^2 (grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad + 2|grad \ln f|^2 (0,\ d\phi(grad(e(\phi)))) \circ \widetilde{\phi} + \triangle e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Au composé le résistant il reste à examiner le terme $Tr_h \widetilde{R}^{M\times_f P}((grad \ln f,\ 0)\circ \widetilde{\phi},\ d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
&Tr_h \widetilde{R}^{M\times_f P}((grad \ln f,\ 0) \circ \widetilde{\phi}, d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi} \\
&\quad = \widetilde{R}^{M\times_f P}((grad \ln f, 0), (0, d\phi(f_j)))(0,\ d\phi(f_j)) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned}$$

Grace a la formule (2.1), on obtien,

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^{M\times_f P}((grad \ln f,\ 0),\ (0,\ d\phi(f_j))) = &-\frac{1}{2}(grad(|grad \ln f|^2), 0) \wedge c_f(0,\ d\phi(f_j)) \\
&- |grad \ln f|^2 (grad \ln f, 0) \wedge c_f(0,\ d\phi(f_j)).
\end{aligned}$$

En développant les termes de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}
&((grad(|grad \ln f|^2), 0) \wedge c_f(0,\ d\phi(f_j)))(0,\ d\phi(f_j)) \\
&\qquad = 2f^2 e(\phi)(grad(|grad \ln f|^2), 0)
\end{aligned}$$

et

$$((grad \ln f,\ 0) \wedge c_f(0,\ d\phi(f_j)))(0,\ d\phi(f_j)) = 2f^2 e(\phi)(grad \ln f,\ 0).$$

alors

$$
\begin{aligned}
&Tr_h\widetilde{R}^{M\times_f P}((grad\ln f,\ 0)\circ\widetilde{\phi},\ d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}\\
&\quad = -f^2e(\phi)(grad(|grad\ln f|^2),0)\circ\widetilde{\phi}\\
&\quad - 2f^2|grad\ln f|^2e(\phi)(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}.
\end{aligned}
$$

Finalement, il suit que :

$$
\begin{aligned}
&Tr_h(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2e(\phi)(grad\ln f,\ 0)\circ\widetilde{\phi} + e(\phi)Tr_h\widetilde{R}^{M\times_f P}((grad\ln f,\ 0)\circ\widetilde{\phi}, d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}\\
&\quad = -4f^2(e(\phi))^2|grad\ln f|^2(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi} + \triangle e(\phi)(grad\ln f,\ 0)\circ\widetilde{\phi}\\
&\quad - f^2(e(\phi))^2(grad(|grad\ln f|^2),0)\circ\widetilde{\phi}\\
&\quad + 2|grad\ln f|^2(0,\ d\phi(grad(e(\phi))))\circ\widetilde{\phi}.
\end{aligned}
$$

Nous déduisons que l''application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$
\begin{cases}
f^2(e(\phi))^2(4|\ grad\ln\ f|^2\ grad\ln\ f + grad(|\ grad\ln\ f|^2)),\\
-(\triangle e(\phi))\ grad\ln f = 0,\\
d\phi(grad(e(\phi))) = 0.
\end{cases}
$$

Il est facile de voir cela,

$$
\begin{aligned}
grad(|gradf^2|^2) &= grad(|2f^2grad\ln f|^2)\\
&= 4grad(f^4|grad\ln f|^2)\\
&= 4f^4grad(|grad\ln f|^2) + 16f^4|grad\ln f|^2grad\ln f\\
&= 4f^4(4|grad\ln f|^2grad\ln f + grad(|grad\ln f|^2)),
\end{aligned}
$$

d'où

$$
4|grad\ln f|^2grad\ln f + grad(|grad\ln f|^2) = \frac{1}{4f^4}grad(|gradf^2|^2).
$$

alors l'application $\widetilde{\phi}$ biharmonique si et seulement si

$$
\begin{cases}
(e(\phi))^2grad(|gradf^2|^2) - 2(\triangle e(\phi))gradf^2 = 0,\\
d\phi(grad(e(\phi))) = 0.
\end{cases}
$$

3.3 Harmonicité de l'application $\phi : (M^m \times_\alpha N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times_\beta N^n, G_\beta)$

Soit ϕ une application définie par :

$$\begin{aligned} \phi : (M \times_\alpha N, G_\alpha) &\longrightarrow (M \times_\beta N, G_\beta) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

Comme un premier résultat, nous considérons deux variété Riemannienne $(M^m,\ g)$ et $(N^n,\ h)$ et $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ le biharmonicité de l'application ϕ : $(M^m \times_\alpha N^n,\ G_\alpha) \to (M^m \times_\beta N^n,\ G_\beta)$ défini par $\phi(x,\ y) = (x,\ y)$ Est cédé par le théorème suivant

Théorème 3.3.1. *Soit ϕ une application définie par :*

$$\begin{aligned} \phi : (M \times_\alpha N, G_\alpha) &\longrightarrow (M \times_\beta N, Q_\beta) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

ϕ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} &grad\triangle f + 2Ricci(gradf) - 2(\triangle \ln \alpha + (n-2)|grad \ln \alpha|^2)gradf \\ &\quad + (n-4)(grad\nabla^M_{\mathrm{grad} \ln \alpha} gradf) - 2n\frac{\beta^2}{\alpha^2} df(grad \ln \beta) grad \ln \beta \\ &\quad - n\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\nabla^M_{\mathrm{grad}f} grad \ln \beta) = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

avec $f = \alpha^2 - \beta^2$ et $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ deux fonction positive

preuve

Soit $\{e_1, ...e_m)\}$ (resp $\{f_1....f_n\}$) une base locale ortonormale sur M (resp N). On pose

$$h_k = \begin{cases} \widetilde{e_i} = (e_i, 0), & si \quad i = 1, ..., m \\ \frac{1}{f}\widetilde{f_j} = \frac{1}{f}(0, f_j), & si \quad j = 1, ..., n \end{cases}$$

alors $\{(h_1, ..., h_{m+n}\}$ est une base locale ortonormale sur la variété produit tordue $M \times_f N$,on pose $d\widetilde{\phi}(X,\ Y) = (d\phi(X), 0)$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$.Alors par la définition de champ de la tension on à :

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla} d\phi \\
&= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,\ 0) - d\phi(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,\ 0)) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)} d\phi(0,\ f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\phi(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,\ f_j)),
\end{aligned}$$

D'aprés l'equation (2.2), On à :

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi + (e_i,\ 0) = \widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(e_i,0)}(e_i,\ 0) = (\nabla^M_{e_i} e_i,\ 0),$$

$$d\phi(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,\ 0)) = d\phi(\nabla^M_{e_i} e_i,\ 0) = (\nabla^M_{e_i} e_i,\ 0),$$

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)} d\phi(0,\ f_j) = \widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(0,f_j)}(0,\ f_j) = (0, \nabla^N_{f_j} f_j) - n\beta^2 grad \ln\beta, 0), \text{ et}$$

$$\begin{aligned}
d\phi(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,\ f_j)) &= d\phi((0, \nabla^N_{f_j} f_j) - n\alpha^2(grad \ln\alpha, 0)) \\
&= (0, \nabla^N_{f_j} f_j) - n\alpha^2(grad \ln\alpha, 0),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= n(grad \ln\alpha,\ 0) - n\frac{\beta^2}{\alpha^2}(grad \ln\beta, 0) \\
&= \frac{n}{2\alpha^2}(grad(\alpha^2 - \beta^2),\ 0).
\end{aligned}$$

L'application ϕ est harmonique si et seulement si la fonction $\alpha^2 - \beta^2$ est constant. Par définition, l'application ϕ elle est harmonique si et seulement si

$$Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\tau(\phi) + Tr_{G_\alpha}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}(\tau(\phi),\ d\phi)d\phi = 0.$$

Soit $f = \alpha^2 - \beta^2$, alors ϕ biharmonique si et seulement si

$$Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) + \frac{1}{\alpha^2}Tr_{G_\alpha}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ d\phi)d\phi = 0. \quad (3.21)$$

Soit $Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)$ et d'après L'équation (3.21), on à

$$\begin{aligned}
Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) - \widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}(e_i 0)(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf, 0) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2}\Bigg(\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) \\
&- \widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}}(0, f_j)\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)\Bigg).
\end{aligned} \quad (3.22)$$

En développant les termes de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}(gradf,\ 0) + e_i(\frac{1}{\alpha^2})(gradf,\ 0)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(e_i,0)}(gradf,\ 0) + e_i(\frac{1}{\alpha^2})(gradf,\ 0)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0) - \frac{2}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,\ 0).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\Big(\frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0) - \frac{2}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,\ 0)\Big)\\
&= \widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\Big(\frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0)) - 2\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,\ 0)\Big).
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\Big(\frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0) - \frac{2}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,\ 0)\Big)\\
&= \widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\Big(\frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0)) - 2\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,\ 0)\Big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\big(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,\ 0)\big)\\
&\quad= \frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0) + e_i(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha))(gradf,\ 0)\\
&\quad= \frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0) + (\frac{1}{\alpha^2}e_i(e_i(\ln\alpha)) + e_i(\frac{1}{\alpha^2})e_i(\ln\alpha))(gradf,\ 0)\\
&\quad= \frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0) + \frac{1}{\alpha^2}(e_i(e_i(\ln\alpha)) - 2e_i(\ln\alpha)e_i(\ln\alpha))(gradf,\ 0)\\
&\quad= \frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0) + \frac{1}{\alpha^2}(e_i(e_i(\ln\alpha)) - 2|grad\ln\alpha|^2)(gradf,\ 0).
\end{aligned}$$

Finalement, il suit que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \frac{1}{\alpha^2}\Big((\nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_i}gradf,\ 0) - 4(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0)\Big)\\
&\quad - \frac{2}{\alpha^2}(e_i(e_i(\ln)) - 2|grad\ln\alpha|^2)(gradf,\ 0).
\end{aligned}$$

pour le terme $\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)$ on utilison l'équation (2.3), on obtiens

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)\\ &= \widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)\\ &= \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}(gradf,\ 0)\\ &+(\nabla^M_{e_i}e_i)(\frac{1}{\alpha^2})(gradf,\ 0),\end{aligned}$$

alors

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)=\frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{\nabla^M_{e_i}e_i}gradf,0)-\frac{2}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}e_i)(\ln\alpha)(gradf,\ 0). \tag{3.23}$$

En développant les termes de équations (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)-\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)&\\ =\frac{1}{\alpha^2}(\nabla^M_{\nabla^M_{e_i}e_i}gradf,0)-\frac{2}{\alpha^2}(\nabla^M_{e_i}e_i)(\ln\alpha)(gradf,\ 0)&\\ =\frac{1}{\alpha^2}((Tr_g\nabla^2 gradf,\ 0)-4(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0))&\\ -\frac{2}{\alpha^2}(\triangle\ln\alpha-2|grad\ln\alpha|^2)(gradf,\ 0).&\end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous calculerons le terme $\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)\frac{1}{\alpha^2}}(gradf,\ 0)$, on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}(\frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(0,f_j)}(gradf,\ 0))\\ &= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}(\frac{1}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)(0,\ f_j))\\ &= \frac{1}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(0,f_j)}(0,\ f_j)\\ &= \frac{1}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)((0,\nabla^N_{f_j}f_j)-n\beta^2(grad\ln\beta,0)).\end{aligned}$$

Alors,

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)=\frac{1}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)\Big((0,\nabla^N_{f_j}f_j)-n\beta^2(grad\ln\beta,0)\Big) \tag{3.25}$$

Depuis le terme $\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)$ on à

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)\\
&\quad= \widetilde{\nabla}^{\phi}\frac{1}{\alpha^2}(0,\nabla^N_{f_j}f_j)(gradf,\ 0) - n\alpha^2\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(grad\ln\alpha,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)\\
&\quad= \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}(0,\nabla^N_{f_j}f_j)(gradf,\ 0) - n\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}(grad\ln\alpha,0)(gradf,\ 0)\\
&\qquad - n\alpha^2(grad\ln\alpha)(\frac{1}{\alpha^2})(gradf,\ 0)\\
&\quad= \frac{1}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)(0,\nabla^N_{f_j}f_j) - n(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0) + 2n|grad\ln\alpha|^2(gradf,\ 0),
\end{aligned}
$$

alors on obtient,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) = &\frac{1}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)(0,\nabla^N_{f_j}f_j) - n(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0)\\
&+ 2n|grad\ln\alpha|^2|^2(gradf,\ 0).
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

D'après les Équations (3.25) et (3.26) on obtient

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0)&\\
= n(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0) &- 2n|grad\ln\alpha|^2(gradf,\ 0)\\
&- n\frac{\beta^2}{\alpha^2}df(grad\ln\beta)(grad\ln\beta,\ 0).
\end{aligned}
$$

En remplacer (3.27) et (3.24) dans (3.22) et nous déduisons la formule suivante,

$$
\begin{aligned}
Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) = &\frac{1}{\alpha^2}(Tr_g\nabla^2 gradf,\ 0)\\
&+ \frac{n-4}{\alpha^2}(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,\ 0)\\
&- \frac{2}{\alpha^2}(\triangle\ln\alpha + (n-2)|grad\ln\alpha|^2)(gradf,\ 0)\\
&- n\frac{\beta^2}{\alpha^4}df(grad\ln\beta)(grad\ln\beta,0).
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Finalement,

$$
Tr_g\nabla^2 gradf = grad\triangle f + Ricci(gradf),
$$

en déduire,

$$\begin{aligned}
Tr_{G_\alpha} \widetilde{\nabla}^2 \frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) &= \frac{1}{\alpha^2}(grad\triangle f,\ 0) + \frac{1}{\alpha^2}(Ricci(gradf), 0) \\
&- \frac{2}{\alpha^2}(\triangle \ln\alpha + (n-2)|grad\ln\alpha|^2)(gradf, 0) \\
&+ \frac{n-4}{\alpha^2}(\nabla^M_{grad\ln\alpha} gradf,\ 0) \\
&- n\frac{\beta^2}{\alpha^4} df(grad\ln\beta)(grad\ln\beta, 0).
\end{aligned}$$

Pour completé la preuve de théoréme on développer le terme :

$$Tr_{G_\alpha} \widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ d\phi)d\phi.$$

En effet

$$\begin{aligned}
Tr_{G_\alpha} \widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ d\phi)d\phi &= \widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (e_i,\ 0))(e_i,\ 0) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (0,\ f_j))(0,\ f_j).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (e_i,\ 0)) = R^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (e_i,\ 0)) = (R^M(gradf,\ e_i), 0),$$

alors

$$\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (e_i,\ 0))(e_i,\ 0) = (Ricci(gradf),\ 0). \tag{3.29}$$

Depuis le terme

$$\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (0,\ f_j))(0,\ f_j)$$

et avec l'equation (2.2), on à

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (0,\ f_j)) &= -\,(\nabla_{gradf} grad\ln\beta, 0) \wedge c_f(0,\ f_j) \\
&- df(grad\ln\beta)(grad\ln\beta, 0) \wedge c_f(0,\ f_j).
\end{aligned}$$

Pour cette expression, nous avons

$$\begin{aligned}
((\nabla_{gradf} grad\ln\beta, 0) \wedge c_f(0,\ f_j))(0,\ f_j) &= G_\beta((0,\ f_j),\ (0,\ f_j))(\nabla_{gradf} grad\ln\beta, 0) \\
&- G_\beta((0, f_j), (\nabla_{gradf} grad\ln\beta, 0))(0,\ f_j) \\
&= n\beta^2(\nabla_{gradf} grad\ln\beta, 0)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}((grad \ln \beta, 0) \wedge c_f(0, f_j))(0,\ f_j) &= G_\beta((0,\ f_j),\ (0,\ f_j))(grad \ln \beta, 0)\\ &- G_\beta((0, f_j), (grad \ln \beta, 0))(0,\ f_j)\\ &= n\beta^2 (grad \ln \beta, 0),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ (0,\ f_j))(0,\ f_j) &= -n\beta^2 df(grad \ln \beta)(grad \ln \beta, 0)\\ &- n\beta^2(\nabla^M_{gradf} grad \ln \beta, 0).\end{aligned}$$

Si remplacé (3.30) et (3.30) dans (3.28), on obtiens

$$Tr_{G_\alpha} \widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ d\phi)d\phi$$

$$\begin{aligned}=&(Ricci(gradf), 0) - n\frac{\beta^2}{\alpha^2} df(grad \ln \beta)(grad \ln \beta, 0)\\ &- n\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\nabla^M_{gradf} grad \ln \beta, 0).\end{aligned}$$

Finalement, utilisons les équations (3.30) et (3.28) nous donnent la formule suivante :

$$\begin{aligned}Tr_{G_\alpha} \widetilde{\nabla}^2 \frac{1}{\alpha^2}(gradf,\ 0) + \frac{1}{\alpha^2} Tr_{G_\alpha} \widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,\ 0),\ d\phi)d\phi &\\ = \frac{1}{\alpha^2}(grad\triangle f,\ 0) + \frac{2}{\alpha^2}(Ricci(gradf), 0)&\\ - \frac{2}{\alpha^2}(\triangle \ln \alpha + (n-2)|grad \ln \alpha|^2)(gradf,\ 0)&\\ + \frac{n-4}{\alpha^2}(\nabla^M_{grad \ln \alpha} gradf,\ 0) - n\frac{\beta^2}{\alpha^4}(\nabla^M_{gradf} grad \ln \beta, 0)&\\ - 2n\frac{\beta^2}{\alpha^4} df(grad \ln \beta)(grad \ln \beta,\ 0).&\end{aligned}$$

Alors ϕ is biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}grad\triangle f + 2Ricci(gradf) - 2(\triangle \ln \alpha + (n-2)|grad \ln \alpha|^2) gradf&\\ + (n-4)(\nabla^M_{grad \ln \alpha} gradf) - n\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\nabla^M_{gradf} grad \ln \beta)&\\ - 2n\frac{\beta^2}{\alpha^2} df(grad \ln \beta) grad \ln \beta = 0.&\end{aligned}$$

Corollaire 3.3.1. *Soit l'application*

$$\begin{aligned}\phi : (M \times_\alpha N,\ G_\alpha) \to\ & (M \times N,\ G),\\ & (x,\ y) \longrightarrow \phi(x,\ y) = (x,\ y)\end{aligned}$$

ϕ est biharmonique si et seulement si

$$grad(\triangle \ln \alpha) + \frac{n}{2} grad(|grad \ln \alpha|^2) + 2Ricci(grad \ln \alpha) = 0. \tag{3.30}$$

Preuve
D'aprés la Théorème (3.3.1), En substituant $f = \alpha^2$, par l'application $\phi : (M \times_\alpha N,\ G_\alpha) \to (M \times N,\ G)$ définir par $\phi(x,\ y) = (x,\ y)$, Alors ϕ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}&grad\triangle\alpha^2 + 2Ricci(grad\alpha^2) - 2(\triangle \ln \alpha + (n-2)|grad \ln \alpha|^2)grad\alpha^2\\ &\qquad + (n-4)(\nabla^M_{grad \ln \alpha} grad\alpha^2) = 0.\end{aligned}$$

et,

$$grad\alpha^2 = 2\alpha^2 grad \ln \alpha$$

,

$$\begin{aligned}\nabla^M_{grad \ln \alpha} grad\alpha^2 &= 2\nabla^M_{grad \ln \alpha} \alpha^2 grad \ln \alpha\\ &= 2\alpha^2 \nabla^M_{grad \ln \alpha} grad \ln \alpha + 2grad \ln \alpha(\alpha^2) grad \ln \alpha\\ &= \alpha^2 grad(|grad \ln \alpha|^2) + 4\alpha^2 |grad \ln \alpha|^2 grad \ln \alpha.\end{aligned}$$

C'est connu cela $\triangle\alpha^2 = 2\alpha^2 \triangle \ln \alpha + 4\alpha^2 |grad \ln \alpha|^2$, alors

$$\begin{aligned}grad\triangle\alpha^2 &= grad(2\alpha^2 \triangle \ln \alpha + 4\alpha^2 |grad \ln \alpha|^2)\\ &= 2grad(\alpha^2 \triangle \ln \alpha) + 4grad(\alpha^2 |grad \ln \alpha|^2)\\ &= 2\alpha^2 grad(\triangle \ln \alpha) + 4\alpha^2 (\triangle \ln \alpha) grad \ln \alpha\\ &+ 4\alpha^2 grad(|grad \ln \alpha|^2) + 8\alpha^2 |grad \ln \alpha|^2 grad(\ln \alpha).\end{aligned}$$

Finalement, il suit que l'application

$$\begin{aligned}\phi : (M \times_\alpha N,\ G_\alpha) \to\ & (M \times N,\ G),\\ & (x,\ y) \longrightarrow \phi(x,\ y) = (x,\ y).\end{aligned}$$

Est biharmonique si et seulement si :

$$grad(\triangle \ln \alpha) + \frac{n}{2} grad(|grad \ln \alpha|^2) + 2Ricci(grad \ln \alpha) = 0.$$

Maintenant, nous allons passer à quelque exemple sur les application biharmonique non harmonique.

Exemple 3.3.1. *Soit l'application,*

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times_\alpha N^n \to \ \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times N^n \quad (m \neq 2), \\ (x,\ y) \longrightarrow \phi(x,\ y) = (x,\ y). \end{gathered}$$

Si supposent que $\ln \alpha$ *et radial* $(\ln \alpha = f(r))$. *Alors avec dapré le corolaire (3.3.1) nous déduisons que l'application* ϕ *et biharmonique si et seulement si* f *Satisfait l'équation différentiable suivante :*

$$f''' + \frac{m-1}{r} f'' - \frac{m-1}{r^2} f' + n f' f'' = 0.$$

Soit $\beta = f'$, *cette équation devient*

$$\beta'' + \frac{m-1}{r} \beta' - \frac{m-1}{r^2} \beta + n\beta\beta' = 0.$$

En cherchant les solutions particulières de type $\beta = a/r (a \in \mathbb{R}^*)$, *alors* ϕ *et biharmonique si et seulement si*

$$a = \frac{4-2m}{n}.$$

Nous obtient

$$\alpha(r) = c_r \frac{4-2m}{n} (C > 0),$$

et dans ce cas L'application ϕ *et biharmonique non-harmonique.*

Exemple 3.3.2. *Considère* $M = S^m$ *Paramétrisation fourni*

$$x = (\cos s,\ \sin s.z) \quad s \in [0,\ \pi] \quad et \quad z \in S^{m-1}.$$

Dans une base orthonormé S^m *définir par*

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_i = (0,\ f_i)$$

pour $i = 2, \ldots, m$, avec f_i c'est la tangent de la sphere S^{m-1} comme

$$\sum_{i=2}^{m} \nabla_{e_i} e_i = -(m-1)\cot s \frac{\partial}{\partial s}.$$

Nous considérons L'application $\phi : S^m \times_\alpha N^n \to S^m \times N^n$ définir par $\phi(x,\ y) = (x,\ y) = ((\cos s,\ \sin s.z),\ y)$ si on supose l'applicaion f défi-nir par $f = \ln \alpha$ Dépend seulement de s. Alors par la corollaire (3.3.1), nous déduisons que l'application ϕ est biharmonique si et seulement si la fonction f satisfait l'équation différentielle suivante

$$f''' + nf'f'' + (m-1)((\cot s)f'' - (1-\cot^2 s)f') = 0.$$

Si on pose $\gamma(s) = f'(s)$, de même façon on obtient,

$$\gamma'' + n\gamma\gamma' + (m-1)\Big((\cot s)\gamma' - (1-\cot^2 s)\gamma\Big) = 0.$$

Par exemple, si le $m = 1$, la fonction $\gamma(s) = \frac{1}{ns+C}$ est une solution de cette équation, et que nous obtenons

$$\alpha(s) = \sqrt[n]{(ns+C)^2}.$$

Dans ce cas, l'application de ϕ est biharmonique non-harmonique.

cette résultat semblable est donné par le corollaire suivant :
Corollaire 3.3.2. *Soit L'application*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times N, G) & \longrightarrow & (M \times_\beta N, G_\beta) \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

Alors ϕ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} grad \triangle \ln\beta + 2(\triangle \ln\beta) grad \ln\beta + (4 - 2n\beta^2)|grad \ln\beta|^2 grad \ln\beta \\ + (2 - \frac{n}{2}\beta^2) grad(|grad \ln\beta|^2) + 2Ricci(grad \ln\beta) = 0. \end{aligned}$$

De façon équivalente *phi* est biharmonique si et seulement si la fonction $f = \beta^2$ satisfait l'équation suivante

$$grad\triangle f + 2Ricci(gradf) - \frac{n}{4}grad(|gradf|^2) = 0.$$

Comme un second résultat, nous étudierons le biharmoniqueity de l'application $\widetilde{\phi}\ :\ (M^m \times_f N^n, G_\alpha) \rightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2},\ G)$ définir par $\widetilde{\phi}(x,\ y) = (\phi(x),\ \psi(y))$.Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *Soit l'application,*

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_\alpha) &\longrightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2},\ G) \\ \widetilde{\phi}(x,\ y) = &\longmapsto (\phi(x),\ \psi(y)) \end{aligned}$$

avec $\phi\ :\ (M,\ g) \rightarrow (P_1,\ k_1)$ et $\psi\ :\ (N,\ h) \rightarrow (P_2,\ k_2)$ deux application harmoniques. Alors l'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} &Tr_g(\nabla^\phi)^2 d\phi(grad \ln f) \\ &\quad + Tr_g R^{P_1}(d\phi(grad \ln f),\ d\phi)d\phi + n\nabla^\phi_{\mathrm{grad} \ln f} d\phi(grad \ln f) = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Preuve

soit $\{e_1, ...e_m)\}$ (resp $\{f_1....f_n\}$) une base locale ortonormale sur M (resp N). On pose

$$h_i = \begin{cases} \widetilde{e_i} = (e_i, 0), & si \quad i = 1, ..., m \\ \frac{1}{f}\widetilde{b}_{i-m} = \frac{1}{f}(0, b_{i-m}), & si \quad i = m+1, ..., n+m \end{cases}$$

alors $\{(h_1, ..., h_{m+n}\}$ est une base locale ortonormale sur la variété produit tordue $M \times_{f^2} N$. on note dans ce cas,

$$d\widetilde{\phi}(X,\ Y) = (d\phi(X),\ d\psi(Y))$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$.Alors avec la définition de champ de tension, on à

$$\begin{aligned} \tau(\widetilde{\phi}) &= Tr_{G_f} \nabla d\widetilde{\phi} \\ &= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} d\widetilde{\phi}(e_i,\ 0) + \frac{1}{f^2 \mathrm{o} \pi} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} d\widetilde{\phi}(0,\ f_j) \\ &\quad - d\widetilde{\phi}(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,\ 0)) - \frac{1}{f^2 \mathrm{o} \pi} d\widetilde{\phi}(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,\ f_j)). \end{aligned}$$

Utilisation l'équation (2.1), avec

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,\ 0) = (\nabla_{e_i} e_i,\ 0)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,\ f_j) = (0,\ \nabla_{f_j} f_j) - n(f^2 \circ \pi)(grad \ln f, 0),$$

alors

$$\begin{aligned}
\tau(\widetilde{\phi}) &= (\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i),\ 0) - (d\phi(\nabla_{e_i} e_i),\ 0) \\
&+ \frac{1}{f^2 o\pi}(0, \nabla^{\phi}_{f_j} d\phi(f_j)) - \frac{1}{f^2 o\pi}(0,\ d\phi(\nabla_{f_j} f_j)) + n(d\phi(grad \ln f), 0) \\
&= (\tau(\phi),\ 0) + \frac{1}{f^2 o\pi}(0,\ \tau(\phi)) + n(d\phi(grad \ln f), 0).
\end{aligned}$$

Depuis ϕ et ϕ c'est harmonique, en déduire

$$\tau(\widetilde{\phi}) = n(d\phi(grad \ln f),\ 0).$$

Avec définition, l'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2(d\phi(grad \ln f), 0) + Tr_{G_f} R^{P_1 \times P_2}((d\phi(grad \ln f),\ 0), d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi} = 0. \tag{3.32}$$

En développant les termes de cette équation $Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2(d\phi(grad \ln f),\ 0)$, nous avons

$$\begin{aligned}
Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2(d\phi(grad \ln f),\ 0) &= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}(d\phi(grad \ln f), 0) \\
&- \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times N}_{(e_i 0)}(e_i,0)} f(d\phi(grad \ln f), 0) \\
&+ \frac{1}{f^2 o\pi}(\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}(d\phi(grad \ln f), 0) \\
&- \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0 f_j)}(0,f_j)}(d\phi(grad \ln f), 0)).
\end{aligned}$$

En développant terme à terme cette équation, nous avons

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}(d\phi(grad \ln f),\ 0) = (\nabla^{\phi}_{e_i} \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(grad \ln f),\ 0),$$

$$\begin{aligned}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times N}_{(e_i 0)}(e_i,0)} f(d\phi(grad \ln f),\ 0) &= \nabla^{\phi}_{(\nabla_{e_i} e_i,0)}(d\phi(grad \ln f),\ 0)\\ &= (\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i} e_i} d\phi(grad \ln f), 0),\end{aligned}$$

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} (d\phi(grad \ln f), 0) = 0$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0f_j)}(0,f_j)} (d\phi(grad \ln f), 0) = -n(f^2 \circ \pi)(\nabla^{\phi}_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f), 0).$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned}Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2(d\phi(grad \ln f), 0) = (Tr_g(\nabla^{\phi})^2 d\phi(grad \ln f)\\ + n\nabla^{\phi}_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f), 0).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Pour le terme $Tr_{G_f} R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad \ln f),\ 0),\ d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}$, on à

$$\begin{aligned}&Tr_{G_f} R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad \ln f),\ 0),\ d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}\\ &\quad = R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad \ln f),\ 0),\ d\widetilde{\phi}(e_i,\ 0))d\widetilde{\phi}(e_i,\ 0)\\ &\quad + \frac{1}{f^2 o\pi} R^{P_1\times P_2}((d\widetilde{\phi}(grad \ln f), 0), d\widetilde{\phi}(0,\ f_j))d\widetilde{\phi}(0,\ f_j).\end{aligned}$$

Il est très simple de voir cela

$$\begin{aligned}R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad \ln f), 0), d\widetilde{\phi}(e_i,\ 0))d\widetilde{\phi}(e_i,\ 0)\\ = (Tr_g R^{P_1}(d\phi(grad \ln f),\ d\phi)d\phi,\ 0)\end{aligned}$$

et

$R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad \ln f), 0), d\widetilde{\phi}(0,\ f_j))d\widetilde{\phi}(0,\ f_j) = 0,$

alors

$$\begin{aligned}Tr_{G_f} R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad \ln f),\ 0), d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}\\ = (Tr_g R^{P_1}(d\phi(grad \ln f), d\phi)d\phi, 0).\end{aligned} \tag{3.34}$$

en Utilisation les equation (3.33) et (3.34), nous avons

$$\begin{aligned}
&Tr_{G_f}(\nabla^{\widetilde{\phi}})^2(d\phi(grad\ln f),0) + Tr_{G_f}R^{P_1\times P_2}((d\phi(grad\ln f),\ 0), d\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi} \\
&\qquad = (Tr_g(\nabla^{\phi})^2 d\phi(grad\ln f) + n\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi(grad\ln f) \\
&\qquad + Tr_g R^{P_1}(d\phi(grad\ln f), d\phi)d\phi, 0).
\end{aligned}$$

En déduire que cette application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si ϕ Satisfait l'équation suivante

$$\begin{aligned}
Tr_g(\nabla^{\phi})^2 d\phi(grad\ln f) + Tr_g R^{P_1}(d\phi(grad\ln f), d\phi)d\phi \\
+ n\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi(grad\ln f) = 0.
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.3. *Soit l'application,*

$$\begin{array}{rcl}
\phi : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
(t,\ x_2,\ x_3,\ x_4) & \longmapsto & (t,\ x_2,\ x_3)
\end{array}$$

et considérons l'application

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{\phi} : \mathbb{R}^4 \times_f N^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times N^n \\
\Big((t,\ x_2,\ x_3,\ x_4),\ y\Big) & \longmapsto & \Big((t,\ x_2,\ x_3),\ y\Big)
\end{array}$$

avec $\alpha = \ln f$ alors d'après le théorème (3.3.2) l'application ϕ est biharmonique Si et seulement si $\alpha = \ln f$ Satisfait l'équation différentiable suivante de troisième ordre suivante

$$\alpha''' + n\alpha'\alpha'' = 0.$$

Si on pose $\beta(t) = \alpha'(t)$, alors la dernière équation donné par :

$$\beta'' + n\beta\beta' = 0.$$

Par exemple, la fonction $\beta = \frac{2}{nt+C}$ c'est une solution de l'équation, Nous avons cours,

$$f(t) = \sqrt[n]{(nt+C)^2}$$

et dons cette cas, L'application $\widetilde{\phi}$ elle est biharmonique non-harmonique.

Une conséquence immédiate du Théorème (3.3.2) est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.3. *[10] Soit $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n,\ G_\alpha) \to (M^m \times P^p,\ G)$ définir par $\widetilde{\phi}(x,\ y) = (x,\ \phi(y))$ avec $\phi : N \to P$ est harmonique. Alors $\widetilde{\phi}$ est une application biharmonique si et seulement si :*

$$grad\triangle \ln f + 2Ricci(grad \ln f) + \frac{n}{2} grad(|grad \ln f|^2) = 0.$$

Et dans cas particulière, si $\phi = Id_N$, on obtient corollaire suivant

Corollaire 3.3.4. *Soit $\phi : (M^m \times_f N^n,\ G_\alpha) \to (M^m \times N^n,\ G)$ définir par $\phi(x,\ y) = (x,\ y)$ alors ϕ est une application biharmonique si et seulement si*

$$grad\triangle \ln f + 2Ricci^M(grad \ln f) + \frac{n}{2} grad(|grad \ln f|^2) = 0.$$

(voir [14])

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baird, P. Eells, J. A Conservation Law for Harmonic Maps ; Lecture Notes in Math. 894 ; Springer : Berlin,Germany, 1981, pp. 1-25.

[2] Baird, P. ; Fardoun, A. ; Ouakkas, S. Conformal and semi-conformal biharmonic maps. Ann. Glob. Anal. Geom. 2008, 34, 403-414.

[3] Baird, P. Harmonic Maps with Symmetry, Harmonic Morphisms and Deformation of Metrics ; Research Notes in Mathematics ; CRC Press : London, UK,1983 ; pp. 27-39.

[4] Baird, P. ; Kamissoko, D. On constructing biharmonic maps and metrics. Ann. Glob. Anal. Geom. 2003, 23,

[5] Baird, P. ; Loubeau, E. ; Oniciuc, C. Harmonic and biharmonic maps from surfaces. In Harmonic maps and differential geometry ; Amer. Math. Soc. : Providence, RI, USA, 2011 ; pp. 234-241.

[6] Baird, P. ; Wood, J.C. Harmonic Morphisms between Riemannain Manifolds ; London mathematical Society Monographs (N.S.) ; Oxford University Press : Oxford, UK, 2003.

[7] Balmus, A. Biharmonic properties and conformal changes. Analele Stiintifice ale Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat. 2004, 50, 367-372. Mathematics 2016, 4, 15 17 of 17

[8] Balmus, A. ; Montaldo, S. ; Oniciuc, C. Biharmonic maps between warped product manifolds. J. Geom. Phys. 2007, 57, 449-466.

[9] Bang-Yen Chen-Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds-World Scientific,(2017)

[10] Balmus A., Montaldo S., Oniciuc C., Biharmonic maps between warped product manifolds, J. Geom. Phys. 57 (2008), 449 ?466.

[11] Bertola M., Gouthier D., Lie triple systems and warped products, Rend. Mat. Appl. (7) 21 (2001), 275 ?293.

[12] Eells, J. Ratto, A. Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries : Methods of Ordinary Differential Equations Applied to Elliptic Variational Problems ; Princeton University Press : Princeton, NJ, USA, 1993 ;Vol. 130.

[13] Eells, J. ; Lemaire, L. Selected topics in harmonic maps, CBMS Regional Conference Series in Mathematics ; American Mathematical Society : Providence, RI, USA, 1981, Vol. 150.

[14] Djaa, N.E.H. ; Boulal, A. ; Zagane, A. Generalized warped product manifolds and biharmonic maps.Acta Math. Univ. Comen. 2012, 81, 283-298.

[15] Eells, J. ; Lemaire, L. Another report on harmonic maps. Bull. Lond. Math. Soc. 1988, 20, 385-524.

[16] Jiang, G.Y. 2-harmonic maps and their first and second variational formulas. Chin. Ann. Math. Ser. 1986, A7, 389-402.

[17] Loubeau, E. Montaldo, S. Oniciuc, C. The stress-energy tensor for biharmonic maps. Math. Z. 2008, 259, 503-524.

[18] Lu W.J., Geometry of warped product manifolds and its five applications, PhD Thesis, Zhejiang University, 2013.

[19] Montaldo, S. Oniciuc, C. A short survey of biharmonic maps between Riemannian manifolds. Rev. Union Mat. Argent. 2006, 47, 1-22.

[20] Ou, Y.-L. p-harmonic morphisms, biharmonic morphisms, and non-harmonic biharmonic maps. J. Geom. Phys. 2006, 56, 358-374.

[21] Ouakkas, S. Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps. Diff. Geom. Appl. 2008, 26,495-502.