



Né Attribué par la bibliothèque



Année univ.: 2017/2018

Les équations différentielles stochastiques en dimension finie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

Mlle. Abdiche Naima¹

Sous la direction de

Mme. N. Ait-Ouali

Soutenu le 19/06/2018 devant le jury composé de

F.Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
N.Ait-Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
M.Laouni	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
S.Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : abdichenaima94@gmail.com

Dédicaces

Je rends grâce a notre dieu le tout misècorde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoire venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humit et de gratitude à :

Mes parents :M'hammed et Halima, les êtres les plus chers a mon coeur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.

Mes très chères frères :Abderrahmane,Mohammed, mes très chères soeurs :Somia, Najya et Amel et toute ma famille.

Mes amies et tous les étudiants de Math :M.Iméne,M.Assma ,A.Assma et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Je désire aussi remercier Mlle Imene Makkaoui , prof de Analyse numérique,son soutien et ses conseils m'ont beaucoup aidés dans le coté de simulation

Tous ceux qui m'on aidé a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

Louanges A Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maître Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons .

*Je tiens à remercier Mme **Ait-Ouali Nadia** pour la bienveillance avec laquelle elle a encadrée ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.*

*Je tiens à remercier également le docteur **F.Madani** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.*

*Je remercie Mlle **S.Idrissi**, Dr **M.Laouni** d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'être membres du jury.*

Je désire aussi remercier tous les professeurs de Math à l'université Dr Tahar Moulay -Saïda pour son aide durant toutes ces années.

Que soient ,enfin, je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail.

Table des matières

1	Introduction au calcul stochastique	8
1.1	Processus Stochastique	8
1.2	Mouvement Brownien	9
1.3	Filtrations	11
1.4	Martingales à temps continu	12
1.5	Intégrale Stochastique	13
1.5.1	Cas de processus étagés	13
1.5.2	Cas général	14
1.5.3	Propriétés	15
1.5.4	Calcul d'Itô :	18
1.5.5	La formule d'Itô multidimensionnelle :	20
1.6	Changement de probabilité	21
1.6.1	Probabilités équivalentes	21
1.6.2	Théorème de Girsanov	21
2	Équations différentielles stochastiques	23
2.1	Équations différentielles stochastique : EDS	23
2.1.1	Définitions	24
2.1.2	Solution d'une équation différentielle stochastique (EDS)	25
2.1.3	Existence et unicité	25
2.1.4	Solution forte	26
2.1.5	Solution faible	26
2.1.6	Exemples	36
2.2	Quelques solutions explicites des EDS	38
3	Intégration numérique des EDS	41
3.1	Rappels sur l'intégration numérique des EDO	41

3.2	Intégration numérique des EDS par la méthode d'Euler . . .	42
3.2.1	Méthode d'Euler	42
3.2.2	Ordre	43
3.3	Intégration numérique des EDS par la méthode de Milstein . .	43
3.4	Méthodes d'ordre supérieur à un	44
3.4.1	Formules de Taylor	44
3.4.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5	46
3.5	Exemples et simulation	46
Bibliographie		53

Introduction

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème a posé problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques relativement un mouvement Brownien. On construira cette intégrale et on donnera sens à l'expression $\int_s^t f(s, w)dB_s$, où $f(s, w)$ est un processus stochastique muni de propriétés de régularité suffisantes. A partir de la théorie de l'intégration, on construit la théorie des EDS.

Les équations différentielles stochastiques sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes et physiques, chimiques, économiques, par conséquent, Les équations différentielles stochastiques sont utilisées représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématique appliquées.

L'objet de ce travail est d'utiliser le calcul stochastique et plus particulièrement, le calcul Itô qui permet d'aborder les équations différentielles stochastiques et l'étude numérique des équations différentielles stochastiques, pour cela ce mémoire est organisé de la manière suivante

On commence le premier chapitre par un bref rappel sur les principales notions utilisées tout le long de ce travail, On donnera les propriétés du mouvement Brownien ainsi que celles des martingales qui seront utiles pour cela. Après avoir présenter quelques résultats importants relatifs à l'intégrale stochastique, on verra comment il peut être mise en oeuvre pour la résolution

des équations différentielles stochastiques.

Dans le second chapitre consiste à une introduction à la théorie des équations différentielles stochastiques. On étudie seulement les ingrédients essentiels de la théorie, à savoir la notion des solutions fortes et faibles, le théorème d'existence et d'unicité sur les équations différentielles stochastiques .

Dans le dernier chapitre on traitera les méthodes d'intégration des EDO pour le calcul numérique des EDS. On commencera par la méthode d'Euler, ensuite à la méthode de Milstein et à la méthode de Runge-Kutta et à la fin on donne quelques exemples avec simulations.

Notations

- Ω : Ensemble des événements.
- $\mathcal{F}$: Famille des événements ; sous-ensemble de l'ensemble des parties de Ω .
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$
- $\mathbb{P}$: Probabilité d'un événement.
- Fonction indicatrice : $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{A}$, 0 sinon.
- $s \vee t = \max(s, t)$, $s \wedge t = \min(s, t)$.
- Une propriété est dite vérifiée p.s. (= presque sûrement) si elle vaut pour toute réalisation $W \in \Omega - \mathcal{N}$ où $\mathcal{N} \subset \Omega$ est un ensemble de probabilité nulle.
- Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\mathcal{F}_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt si, pour tout t , $\tau \leq t \in \mathcal{F}_t$.

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

Dans ce premier chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastiques et nous commençons par les définir.

1.1 Processus Stochastique

Définition 1.1.1. *Un processus aléatoire X_t défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de variables aléatoires $X = (X_t)_{t \geq 0}$ définies sur le même espace de probabilité. En d'autres termes, X est une fonction à deux variables telle que :*

$$X : [0, +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, w) \mapsto X_t(w)$$

– Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \mapsto X_t(w)$ est appelée trajectoire.

Remarque 1.1.1. *Un processus X est dit continu si :*

$$P(t \in \mathbb{R}^+ \mapsto X_t \text{ est continue}) = 1$$

Définition 1.1.2. *Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique. Les lois de dimension finie du processus X sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ où $n \geq 1$ et $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \in T$. On dit que deux processus $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ ont même loi s'ils ont les mêmes lois de dimension finie.*

Définition 1.1.3. Soient $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques

1. On dit que Y est une modification de X si :

$$\forall t \in T, P(X_t = Y_t) = 1$$

2. On dit que les processus X et Y sont indistinguables si :

$$P(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1$$

on note $X \equiv Y$

Définition 1.1.4. (Processus mesurable, processus continu)

- Un processus X est dit mesurable si l'application suivante :

$$([0, +\infty[\times \Omega, B([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$$

$$(t, w) \mapsto X_t(w)$$

est mesurable.

- Un processus est dit continu si pour presque tout $w \in \Omega$, $t \mapsto X_t(w)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).

Définition 1.1.5. Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.

1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien, qui tient son nom de Robert Brown, botaniste écossais du 19^{ème} siècle, est considéré comme un phénomène naturel d'une part, et un objet mathématique d'autre part. Observant le mouvement irrégulier et incessant des particules de pollen en suspension dans l'eau, Richard Brown effectua des expériences avec des particules inorganiques en suspension dans un liquide. Le phénomène qui paraissait à priori vital fut alors écarté de la biologie. De ce fait des chercheurs comme Einstein, Wiener et Levy s'intéressèrent à ce phénomène d'un point de vue autre que le point de vue naturel en lui donnant une forme mathématique qui n'est en vérité qu'une idéalisation mathématique du mouvement réel. Le mouvement Brownien est alors présenté comme :

Définition 1.2.1. *Un mouvement Brownien standard est un processus $(\mathcal{B})_{t \geq 0}$ tel que :*

- $\mathbb{B}_1)$ $\mathcal{B}_0 = 0$ presque sûrement ;
- $\mathbb{B}_2)$ $\mathcal{B}$ est continu, c'est à dire $t \rightarrow \mathcal{B}_t(w)$ est continue pour presque tout w ;
- $\mathbb{B}_3)$ $\mathcal{B}$ est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$ est indépendant de $\mathcal{A}_s^{\mathcal{B}} = \sigma\{(\mathcal{B}_s)_{s \leq t}\}$;
- $\mathbb{B}_4)$ les accroissements sont stationnaires (pour $s < t$ l'accroissement $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$ ne dépend que de la valeur de $(t - s)$, Gaussiens, et tels que si $s \leq t$, on a $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$)

Théorème 1.2.1. [6] *Le théorème pour ce de régularités :*

1. Le M.B est à variation infinie sur tout intervalle.
2. Le M.B n'est dérivable en aucun point (Paley, Wiener, Zygmund 1933).
3. Les trajectoires du MB sont localement Hölder-continues d'ordre α , avec $\alpha < \frac{1}{2}$. Par contre c'est faux si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Théorème 1.2.2. [17]

Un processus $\mathcal{B}$ est un mouvement Brownien si et seulement si c'est un processus Gaussien continu, centré, et de fonction de covariance $\text{cov}(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_t) = \min(s, t)$:

Démonstration 1.2.0.1. $(\Rightarrow)$ *Les composantes du vecteur $(\mathcal{B}_{t_1}, \mathcal{B}_{t_2} - \mathcal{B}_{t_1}, \dots, \mathcal{B}_{t_n} - \mathcal{B}_{t_{n-1}})$, où $t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n$ sont des variables aléatoires Gaussiennes et indépendantes ; il est donc lui-même Gaussien. Par conséquent, toute combinaison linéaire est Gaussienne et le processus $\mathcal{B}$ est Gaussien. Par hypothèse, le processus est continu. Il est aussi centré car $\mathbb{E}(\mathcal{B}_t) = \mathbb{E}(\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_0)$. Enfin, sa fonction de covariance est, pour $s \leq t$*

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_t) &= \mathbb{E}(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_t) \\
 &= \mathbb{E}(\mathcal{B}_s(\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s)) + \mathbb{E}(\mathcal{B}_s^2) \\
 &= \mathbb{E}(\mathcal{B}_s)\mathbb{E}(\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s) + \text{var}(\mathcal{B}_s - \mathcal{B}_0) \\
 &= 0 + s \\
 &= s
 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Nous allons montrer une-à-une les propriétés du mouvement Brownien décrites à la définition (1.2.1). Pour $\mathbb{B}_1$, on a $\mathbb{E}(\mathcal{B}_0^2) = \text{var}(\mathcal{B}_0) = 0$, ce qui fait que $\mathcal{B}_0 = 0$ presque sûrement. Ensuite, $\mathcal{B}$ est continu, par hypothèse, donc $\mathbb{B}_2$ est satisfaite. Pour $\mathbb{B}_3$, nous remarquons que pour $r_1 \leq \dots \leq r_n \leq s \leq t$, le vecteur $(\mathcal{B}_{r_1}, \dots, \mathcal{B}_{r_n}, \mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s)$ est Gaussien. De plus,

$$\text{cov}(\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s, \mathcal{B}_{r_i}) = r_i \wedge s - \min(r_i, t) = 0$$

Donc, $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$ est indépendante de tout vecteur et donc indépendante de $\mathcal{A}_s^t := \sigma\{(\mathcal{B}_s)_{s \leq t}\}$.

Finalement, pour montrer $\mathbb{B}_4$, nous constatons que pour $s \leq t$, $\mathcal{B}_s - \mathcal{B}_t$ est Gaussienne, et donc déterminée par son espérance et sa variance, qui sont $\mathbb{E}(\mathcal{B}_s - \mathcal{B}_t) = 0$ et

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s) &= \text{var}(\mathcal{B}_t) + \text{var}(\mathcal{B}_s) - 2\text{cov}(\mathcal{B}_t, \mathcal{B}_s) \\ &= t + s - 2s \wedge t \\ &= t - s \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ et $\mathcal{B}_t$ et $t - s$ sont indépendantes.

1.3 Filtrations

Définition 1.3.1. Une filtration $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t < +\infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

$$\text{pour : } 0 \leq s \leq t < +\infty, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

- Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré
- La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t . On dit qu'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si pour chaque t , X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Définition 1.3.2. Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration alors on définit la filtration suivante $\mathcal{F}_{t+} = (\cap_{s > t} \mathcal{F}_s)$

- On dit qu'une filtration est continue à droite ($\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$).
- Soit $\mathcal{N}$ la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont $\mathbb{P}$ -négligeables. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est complète.
- On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.

1.4 Martingales à temps continu

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$

Définition 1.4.1. *soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X*

– *Une martingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) = X_s$$

– *Une surmartingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) \leq X_s$$

– *Une sousmartingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Remarque 1.4.1. *Une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale est un jeu perdant, et une sous-martingale est un jeu gagnant*

Si X_t est une martingale, alors pour tout t , on a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ aussi si $(X_t)_{t \leq T}$ une martingale, alors ce processus est complètement déterminé.

Proposition 1.4.1. *Soit X_t , une $\mathcal{A}$ -martingale de carré intégrable, c'est à dire que $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ pour tout t . Alors, pour $s \leq t$, on a :*

$$\mathbb{E}\{(X_t - X_s)^2 / \mathcal{A}_s\} = \mathbb{E}(X_t^2 - X_s^2) / \mathcal{A}_s$$

Démonstration 1.4.0.2. *Par un calcul direct, on a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(X_t - X_s)^2 / \mathcal{A}_s\} &= \mathbb{E}(X_t^2 / \mathcal{A}_s) - 2\mathbb{E}(X_s X_t / \mathcal{A}_s) + \mathbb{E}(X_s^2 / \mathcal{A}_s) \\ &= \mathbb{E}(X_t^2 / \mathcal{A}_s) - 2\mathbb{E}(X_s X_t / \mathcal{A}_s) + X_s^2 \\ &= \mathbb{E}(X_t^2 - X_s^2 / \mathcal{A}_s) \end{aligned}$$

■

Théorème 1.4.1. [15] *(Théorème d'arrêt) Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ étant une constante réelle finie, alors M_{τ_2} est intégrable et :*

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \text{ p.s.}$$

Théorème 1.4.2. [15]/(*Inégalité de Doob*) Si $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale continue, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2\right) \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2)$$

1.5 Intégrale Stochastique

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$ pour des processus stochastiques Φ .

1.5.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus Φ étagés (élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires Φ_j telles que : Φ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable, appartienne à $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et que $\Phi_t = \Phi_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$, soit :

$$\Phi_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j(w) \mathbb{1}_{]t_j, t_{j+1}]}(s)$$

$$\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j (\mathcal{B}(T_{j+1} \wedge t) - \mathcal{B}(T_j \wedge t))$$

On définit alors :

$$\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j (\mathcal{B}(t_{j+1}) - \mathcal{B}(t_j))$$

on a :

$$\triangleright \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s\right) = 0$$

$$\triangleright \text{var}\left(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \Phi_s^2 ds\right)\right]$$

On obtient : $\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j (\mathcal{B}(t_{j+1} \wedge t) - \mathcal{B}(t_j \wedge t))$ ce qui établit la

continuité de l'application $t \longrightarrow \int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$.

Si $T_j, 0 \leq T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, et si $\Phi_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j \mathbf{1}_{[T_j, T_{j+1}]}(s)$ ou Φ_j est une suite de variables aléatoires telles que Φ_j soit $\mathcal{F}_j$ -mesurable, appartienne à $\mathcal{L}^2(\Omega)$, on définit alors :

1.5.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déjà le cas pour le cas de processus étagé. On définit les processus càglàd de carrée intégrable (appartenant à $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble Γ des processus Φ adaptés continus à gauche limites à droite, $(\mathcal{F}_t)$ -adaptés tels que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \Phi_t^2 dt \right] \leq \infty$$

Les processus étagés appartiennent à Γ .

On dit que Φ_n converge vers Φ dans $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si : $\|\Phi - \Phi_n\|^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

L'application $\Phi \rightarrow \|\Phi\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet. On peut définir $\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s$ pour tous les processus Φ de Γ : on approche

Φ par des processus étagés, soit $\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n$ ou $\Phi_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\Phi}_j^n \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}]}$, avec $\Phi_j^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

L'intégrale $\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s$ est alors la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ des sommes

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\Phi}_j^n (\mathcal{B}_{(t_{j+1})} - \mathcal{B}_{(t_j)})$$

dont l'espérance est 0 et la variance :

$$\mathbb{E} \left[\sum_j \tilde{\Phi}_j^2 (t_{j+1} - t_j) \right]$$

On a alors :

$$\triangleright \mathbb{E}(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s) = 0$$

et

$$\triangleright \mathbb{E}(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s)^2 = \mathbb{E}(\int_0^\infty \Phi_s^2 d\mathcal{B}_s).$$

On note $\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \Phi_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s) d\mathcal{B}_s$. Si Φ est étagé on a :

$$\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_i \Phi_i (\mathcal{B}_{t_{i+1} \wedge t} - \mathcal{B}_{t_i \wedge t})$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit :

$$\int_0^{\tau \wedge t} \Phi_s d\mathcal{B}_s = \int_0^t \Phi_s \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) d\mathcal{B}_s$$

1.5.3 Propriétés

On note Λ l'ensemble $\mathcal{L}_{Loc}^2(\Omega \times \mathcal{R}^+)$ des processus Φ adaptés càglàd vérifiant : $\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_s^2(w) ds\right) < \infty, \forall t$

Linéarité

Soit a et b des constantes et $(\Phi^i, i = 1, 2)$ deux processus de Λ .

On a :

$$\int_0^t (a\Phi_s^1 + b\Phi_s^2) d\mathcal{B}_s = a \int_0^t \Phi_s^1 d\mathcal{B}_s + b \int_0^t \Phi_s^2 d\mathcal{B}_s$$

Propriétés de martingale

Proposition 1.5.3.0.1. *soit :*

$$\mathbf{M}_t = \int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$$

où $\Phi \in \Lambda$

1. Le processus $\mathbf{M}$ est une martingale à trajectoires continues.
2. Soit $\mathbf{N}_t = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s \right)^2 - \int_0^t \Phi_s^2 ds$ le processus $(\mathbf{N}_t, t \geq 0)$ est une martingale.

Démonstration 1.5.3.1. *Toutes ces propriétés se démontrent pour des processus étagés, puis pour les processus de Λ par passage à la limite. La propriété de martingale s'écrit :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u / \mathcal{F}_s\right) = \int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u, \forall t \geq s$$

où

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u / \mathcal{F}_s\right) = 0$$

et implique en particulier que :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u\right) = 0$$

La propriété 2) équivaut à

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \Phi_u d\mathcal{B}\right)^2 / \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \Phi_u^2 du / \mathcal{F}_s\right]$$

Si l'on veut définir $\mathbf{M}_t$ pour $t \leq T$, il suffit de demander que $\Phi \in \mathcal{L}^2(\Omega \times [0, T])$, c'est à dire $\mathbb{E}\left(\int_0^T \Phi_t^2 dt\right) < \infty$ et que Φ soit adapté. Sous cette condition $\mathbf{M}_t, t \leq T$ est encore une martingale. ■

Corollaire 1.5.3.0.1. *L'espérance de $\mathbf{M}_t$ est nulle et sa variance est égale à $\int_0^t \mathbb{E}\{\Phi_s\}^2 ds$*

Soit $\Psi \in \Lambda$. $\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s \int_0^t \Psi_s d\mathcal{B}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^s \Phi_s \Psi_s d\mathcal{B}_s\right)$ Si

$$\mathbf{M}_t(\Phi) = \int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$$

et

$$\mathbf{M}_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s d\mathcal{B}_s$$

Le processus $\mathbf{M}_t(\Phi)\mathbf{M}_t(\varphi) - \int_0^t \Phi_s \varphi_s ds$ est une martingale.

Exemple 1.5.3.1. *comme un exemple on a la proposition suivante :*

Proposition 1.5.3.0.2. *Pour tout t on a : $\int_0^t \mathcal{B}_s d\mathcal{B}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{B}_t^2 - t)$*

Démonstration 1.5.3.2.

$$\int_0^t \mathcal{B}_s d\mathcal{B}_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{t_i} (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})$$

L'égalité :

$$2 \sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{t_i} (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i}) = \sum_{i=0}^n (\mathcal{B}_{t_{i+1}}^2 - \mathcal{B}_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^n (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})^2$$

montre que :

$$\int_0^t \mathcal{B}_s d\mathcal{B}_s = \frac{1}{2} [\mathcal{B}_t^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})^2] = \frac{1}{2} [\mathcal{B}_t^2 - t]$$

Martingale locale

Soit X un processus $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ -adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n, n \geq 1\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$ -p.s et pour tout n , $X^{\tau_n} \mathbb{1}_{\tau_n > 0}$ est une martingale.

Proposition 1.5.3.0.3. [12]

- a) *Toute martingale continue est une martingale locale.*
- b) *Toute martingale locale positive est une sur martingale.*
- c) *Une martingale locale bornée est une martingale.*

Semimartingales

On se fixe $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$

Définition 1.5.3.0.1. *On appelle semimartingale un processus adapté X_t s'écrivant :*

$$X_t = X_0 + \mathbf{M}_t + \mathcal{V}_t$$

où $\mathbf{M}$ est une martingale locale et $\mathcal{V}$ un processus à variation finie, nuls en 0, continus adaptés et X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable.

1.5.4 Calcul d'Itô :

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 1.5.4.1. [2] Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration, $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{B}_s \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \quad \forall t \leq T$$

avec :

- X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable.
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$.
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$

Proposition 1.5.4.1. [2] Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale continue telle que :

$$M_t = \int_0^t K_s ds \text{ avec } \mathbb{P} \text{ p.s. } \int_0^T |K_s| ds < +\infty$$

alors :

$$M_t = 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s. } \forall t \leq T$$

Ceci entraîne que :

La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{B}_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s d\mathcal{B}_s$$

alors :

$$X_0 = X'_0 \quad d\mathbb{P} \text{ p.s.} \quad K_s = K'_s \quad ds \times d\mathbb{P} \text{ p.p.} \quad H_s = H'_s \quad ds \times d\mathbb{P} \text{ p.p.}$$

- Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{B}_s$$

alors $K_t = 0 \quad dt \times d\mathbb{P} \text{ p.p.}$

La formule d'Itô prend la forme suivante :

Théorème 1.5.4.1. (formule d'Itô) Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{B}_s$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

où pour définition

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s d\mathcal{B}_s$$

De même si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , ces dérivées étant continues en (t, x) (on dit dans ce cas que f est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$) on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Proposition 1.5.4.2. (Formule d'intégration par parties) Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô, $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{B}_s$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s d\mathcal{B}_s$, Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention que :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$$

,

Démonstration 1.5.4.1. On a, d'après la formule d'Itô

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 ds .$$

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_s' ds$$

1.5.5 La formule d'Itô multidimensionnelle :

La formule d'Itô multidimensionnelle se généralise aux cas où la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens.

Définition 1.5.5.1. On appelle $\mathcal{F}$ -mouvement Brownien d -dimensionnel un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ adapté à $\mathcal{F}_t$, avec $\mathcal{B}_t = (\mathcal{B}_t^1, \dots, \mathcal{B}_t^d)$, où les $(\mathcal{B}_t^i)_{t \geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$ -mouvements browniens standards indépendants. On généralise la notion de processus d'Itô.

Définition 1.5.5.2. On dit que $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus d'Itô si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i d\mathcal{B}_s^i$$

Où

- K_t et les (H_t^i) sont adaptés à $(\mathcal{F}_t)$.
- $\int_0^T |K_s| ds \mathbb{P} \text{ p.s.}$
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty \mathbb{P} \text{ p.s.}$

La formule d'Itô prend alors la forme suivante :

Proposition 1.5.5.1. [15] Soient $(X_t^1, \dots, X_t^n)$ n processus d'Itô :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^{i,j} d\mathcal{B}_s^j$$

alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , ces dérivées étant continues en (t, x) :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) d\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} - dX_s^i &= K_s^i ds + \sum_{j=1}^p H_s^{i,j} d\mathcal{B}_s^j, \\ - d\langle X^i, X^j \rangle_s &= \sum_{m=1}^p H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds. \end{aligned}$$

1.6 Changement de probabilité

1.6.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

.

Théorème 1.6.1.1. *[7] $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si, et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(w) d\mathbb{P}(w),$$

Z est appelée densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et parfois notée $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

1.6.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$, indexé par l'intervalle de temps $[0, T]$.

Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov .

Théorème 1.6.2.1. *Soit $\left(\Theta_t\right)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté vérifiant :*

$\int_0^T \Theta_s^2 ds < \infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \Theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_s^2 ds \right)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$ de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(\mathcal{B}_t^)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $\mathcal{B}_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_s ds$, est un mouvement brownien standard.*

Remarque 1.6.1. *Une condition suffisante pour que $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ soit une martingale est que l'on ait :*

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \Theta_t^2 dt \right) \right) < \infty$$

.

Théorème 1.6.2.2. *[2](Caractérisation de Levy)*

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu, adapté et issu de 0. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- X est un mouvement Brownien.*
- X est une martingale locale et $\langle X, X \rangle_t = t$*

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques

Pourquoi les équations différentielles stochastiques ?

Étymologie :

Équation : connue par les écoliers. Une égalité contenant une (ou plusieurs) variable. La variable est aussi appelée inconnue et les valeurs pour lesquelles l'égalité est vérifiée, est appelée solution.

Équation différentielle : une équation dans laquelle opèrent des opérateurs différentiels, tels qu'une dérivée ou des dérivées partielles. L'inconnue est une fonction.

Stochastique : terme provenant du grec correspondant au terme latin aléatoire. On parle de processus stochastique pour désigner des fonctions qui dépendent du hasard et d'un autre paramètre, qui est généralement le temps.

Équation différentielle stochastique : une équation dans laquelle opèrent formellement des opérateurs différentiels et le "hasard " intervient. Les solutions sont des processus stochastiques.

2.1 Équations différentielles stochastique : EDS

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Considérons une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t)) \quad (2.1)$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $\dot{x}$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $a(t, x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport à y . Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit

$$dx(t) = a(t, x(t))dt \quad (2.2)$$

Une telle équation est utilisée pour d'écrire l'évolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme $\sigma d\mathcal{B}_t$, où $\mathcal{B}$ désigne un mouvement Brownien et s est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t \quad (2.3)$$

2.1.1 Définitions

En fait, l'écriture (2.3) est symbolique car $d\mathcal{B}_t$ n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable!). Il faudrait écrire (2.3) sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)d\mathcal{B}_s \quad (2.4)$$

Définition 2.1.1.1. On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation avec condition initiale X_0 en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme :

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t \quad (E(a, \sigma))$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t a_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)d\mathcal{B}_s^j, \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.5)$$

où pour m, d des entiers positifs

- $a(t, x) = (a_i(t, x))_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérive** ou **drift** de l'EDS,

- $\sigma(t, x) = (\sigma_{i,j}(t, x))_{1 \leq i \leq d}$ est une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient de diffusion** de l'EDS, et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^m)$ est un mouvement brownien standard en dimension m . La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Plus précisément, on a :

2.1.2 Solution d'une équation différentielle stochastique (EDS)

Définition 2.1.2.1. On appelle solution de l'EDS $E(\sigma, s)$ la donnée de

- un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles ;
- un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité ;
- un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté continu $X = (X^1, \dots, X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (2.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$.

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(a, \sigma)$.

On remarquera que lorsqu'on parle de solution de $E(a, \sigma)$, on ne fixe pas a priori l'espace de probabilité filtré ni le mouvement brownien $\mathcal{B}$. Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques.

2.1.3 Existence et unicité

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E(a, \sigma)$.

Définition 2.1.3.1. (*Existence, unicité des EDS*) Pour l'équation $E(a, \sigma)$, on dit qu'il y a

- **existence faible** : si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(a, \sigma)$;
- **existence et unicité faibles** : si de plus toutes les solutions de $E_x(a, \sigma)$ ont même loi ;

- **unicité trajectorielle** : si l'espace de probabilité filtré, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et le mouvement brownien $\mathcal{B}$ étant fixés, deux solutions X et X' de $E(a, \sigma)$ telles que $X_0 = X'_0$ p.s sont indistinguables
On dit de plus qu'une solution X de $E_x(a, \sigma)$ est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de $\mathcal{B}$. Il y a unicité forte pour $E(a, \sigma)$ si pour tout mouvement brownien $\mathcal{B}$, deux solutions fortes associées à $\mathcal{B}$ sont indistinguables.

2.1.4 Solution forte

Définition 2.1.4.1. Un processus stochastique $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est appelé une solution forte de l'EDS (2.3) avec condition initiale X_0 si :

- X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout $t \in [0, T]$.
- on a les conditions de régularité

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T |a(X_s, s)| ds < \infty\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_0^T \sigma(X_s, s)^2 ds < \infty\right\} = 1$$

- pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) d\mathcal{B}_s$$

avec probabilité 1.

Remarque 2.1.1. On définit de manière similaire la solution forte d'une EDS multidimensionnelle, c'est-à-dire qu'on peut supposer que $X \in \mathbb{R}^n$, $a(X, t)$ prend des valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et si $\mathcal{B}_t$ est un mouvement Brownien de dimension k , $\sigma(X, s)$ prend des valeurs dans l'espace des matrices $n \times k$.

2.1.5 Solution faible

Définition 2.1.5.1. La solution faible de l'équation (2.3) est un triplet :

- ▷ $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité filtré.
- ▷ $\mathcal{B}$ un $\mathcal{F}$ -mouvement brownien (standard).
- ▷ X , un processus $\mathcal{F}$ -adapté

les processus X et $\mathcal{B}$ sont définis sur le même espace donné et vérifient :

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t [|a(s, X_s)|^2 + |\sigma(s, X_s)|^2] ds < \infty\right) = 1 \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

et

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t, X_0 = \xi \quad (2.7)$$

Remarque 2.1.1. *Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence de solution faible d'EDS quand elle n'admet pas nécessairement de solution forte.*

preuve : voir [7]

Définition 2.1.5.2. *(Unicité faible en loi)*

On dit qu'il y a unicité faible en loi pour l'équation (2.3) si deux solutions faibles ont toujours même loi.

Définition 2.1.5.3. *(Unicité en loi)*

L'EDS $E_x(a, \sigma)$ admet une solution faible unique en loi si, étant données deux solution faibles $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, \mathcal{B}, X)$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{X})$ (donc seuls les processus et les filtrations sont différentes $\mathcal{B}$ est un mouvement Brownien pour les deux filtrations) avec même condition initiale, alors les processus X et $\tilde{X}$ sont indistinguables.

Exemple 2.1.5.1. *(Unicité faible mais pas trajectorielle)*

Soit $\mathcal{B}$ un mouvement Brownien standard

On pose :

$$\mathcal{W}_t = \int_0^t \text{sign}(\mathcal{B}_s) d\mathcal{B}_s$$

avec

$$\begin{cases} \text{sign}(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \text{sign}(x) = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\mathcal{B}_t = \int_0^t \text{sign}(\mathcal{B}_s) d\mathcal{W}_s$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{sign}(\mathcal{B}_s) d\mathcal{W}_s &= \int_0^t \text{sign}(\mathcal{B}_s) \text{sign}(\mathcal{B}_s) d\mathcal{B}_s \\ &= \int_0^t d\mathcal{B}_s \\ &= \mathcal{B}_t \end{aligned}$$

$\mathcal{W}$ est une martingale issue de 0 telle que $\langle \mathcal{W}, \mathcal{W} \rangle_t = t$ ainsi, par la caractérisation de Levy. $\mathcal{W}$ est aussi un mouvement Brownien. On voit alors que $\mathcal{B}$ est solution de l'EDS

$$dX_t = \text{sign}(X_t)d\mathcal{W}_t \quad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible. Par la caractérisation Levy, toute solution doit être un mouvement Brownien. Par contre, on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation. En effet, $\mathcal{B}$ et $-\mathcal{B}$ sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement Brownien. Aussi, $\mathcal{B}$ n'est pas solution forte : par la formule de Tanaka, la filtration canonique de $\mathcal{W}$ coïncide avec la filtration canonique de $|\mathcal{B}|$ qui est strictement plus petite que celle de $\mathcal{B}$. En effet, l'évènement $\mathcal{B}_t < 0$ appartient à $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}$ mais pas à $\mathcal{F}^{|\mathcal{B}|}$.

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre. Quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés suivis d'un théorème qui assure, sous certaines conditions sur a et σ , l'existence d'une unique solution forte.

Exemple 2.1.5.2. (Une infinité de solutions fortes et pas d'unicité faible)

Considérons l'EDS

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}}dt + 3X_t^{\frac{2}{3}}d\mathcal{B}_t \quad X_0 = 0$$

et le temps d'arrêt

$$\tau_\alpha = \inf\{s \geq \alpha, \mathcal{B}_s = 0\} \quad \alpha \geq 0$$

où $\mathcal{B}$ est un mouvement Brownien standard. Cette équation a une infinité de solutions fortes de la forme :

$$X_t^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau_\alpha \geq t \\ \mathcal{B}_t^3 & \text{si } \tau_\alpha \leq t < \infty \end{cases}$$

En effet,

$$3 \int_0^t (X_s^{(\alpha)})^{\frac{2}{3}} d\mathcal{B}_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau_\alpha \\ 3 \int_{\tau_\alpha}^t \mathcal{B}_s ds + 3 \int_{\tau_\alpha}^t \mathcal{B}_s^2 d\mathcal{B}_s & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô pour $f(x) = x^3$, on a pour tout $t \geq \tau_\alpha$

$$\begin{aligned} f(\mathcal{B}_t) &= \mathcal{B}_t^3 \\ &= \mathcal{B}_{\tau_\alpha} + 3 \int_{\tau_\alpha}^t \mathcal{B}_s^2 d\mathcal{B}_s + 3 \int_0^t \mathcal{B}_s ds \\ &= 3 \int_{\tau_\alpha}^t \mathcal{B}_s^2 d\mathcal{B}_s + 3 \int_{\tau_\alpha}^t \mathcal{B}_s ds \end{aligned}$$

En effet, comme le mouvement Brownien est continu, même si cet inf n'est pas atteint, on aura quand même $\mathcal{B}_{\tau_\alpha} = 0$ d'où

$$3 \int_0^t X_s^{(\alpha)\frac{1}{3}} ds + 3 \int_0^t X_s^{(\alpha)\frac{2}{3}} d\mathcal{B}_s = \begin{cases} 0 & t \leq \tau_\alpha \\ \mathcal{B}_t^3 & \text{sinon} \end{cases} = X_t^{(\alpha)}$$

Exemple 2.1.5.3. (Exemple de non unicité faible)

On se donne l'EDS

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha ds \quad (2.8)$$

avec : $0 < \alpha < 1$

On a alors, pour tout réel n , $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ est une solution de l'EDS (2.1) avec

$$X_t^{(c)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq n \\ (\frac{t-n}{\beta})^\beta & \text{si } t > n \end{cases}$$

Avec $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$

En effet,

$$\begin{aligned}
X_t &= \int_0^t |X_s|^\alpha ds \\
&= \int_n^t \left(\frac{s-n}{\beta}\right)^{\alpha\beta} ds \\
&= \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha\beta} \int_0^t (s-n)^{\alpha\beta} ds \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha\beta}} \frac{(t-n)^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1} \\
&= \frac{1}{\beta^{(1-\frac{1}{\beta})\beta}} \frac{(t-n)^{(1-\frac{1}{\beta})+1}}{(1-\frac{1}{\beta})+1} \\
&= \left(\frac{t-n}{\beta}\right)^\beta \\
&= X_t^{(n)}
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.5.1. [7](Yamada-Watanabe)

Existence faible et unicité trajectorielle impliquent unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace de probabilité filtré, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et tout-mouvement Brownien $\mathcal{B}$, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une unique solution forte de $E_x(a, \sigma)$.

Dans toute la suite, on suppose remplies les conditions suivantes :

Hypothèses lipschitziennes Les fonctions a et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en x , ie. il existe une constante $K \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

Théorème 2.1.5.2. (Cauchy-Lipschitz pour EDS) *Sous les hypothèses lipschitziennes, il y a unicité trajectorielle pour $E(a, \sigma)$. De plus, pour tout espace de probabilité filtré, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_t$ -mouvement Brownien $\mathcal{B}$, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte de $E_x(a, \sigma)$.*

Remarque 2.1.2. *On peut affaiblir l'hypothèse de continuité en t , celle-ci n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t, x)|$ et $\sup_{0 \leq t \leq T} |a(t, x)|$ pour x fixé : on peut à localiser à l'hypothèse lipschitzienne sur a et σ se contenter d'une constante K qui dépend du compact sur lequel t et x sont considérés. Il faut alors conserver une condition de croissance sous-linéaire :*

$$|\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|), |a(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

Démonstration 2.1.5.1. *Pour simplifier la preuve, on considère le cas $d = m = 1$*

Unicité trajectorielle : *On considère deux solutions X et X' de $E(a, \sigma)$ avec $X_0 = X'_0$, définies sur le même espace et avec le même mouvement Brownien $\mathcal{B}$. Pour $M > 0$ fixé, on considère le temps d'arrêt*

$$\tau = \inf(t \geq 0 : |X_t| \geq \mathbf{M}, |X'_t| \geq \mathbf{M}')$$

D'après $E(a, \sigma)$, on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau} &= X_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X_s) d\mathcal{B}_s + \int_0^{t \wedge \tau} a(s, X_s) ds \\ X'_{t \wedge \tau} &= X'_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X'_s) d\mathcal{B}_s + \int_0^{t \wedge \tau} a(s, X'_s) ds \end{aligned}$$

On considère $t \in [0, T]$. Par différence, comme $X_0 = X'_0$ et comme X_0, X' sont bornées par $\mathbf{M}$ sur $]0, \tau[$ l'expression de la variance d'une intégrale stochastique $\mathbf{L}^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les hypothèses lipschitziennes et la majoration $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] &\leq 2(\mathbb{E}[(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) d\mathcal{B}_s)^2] \\
&\quad + \mathbb{E}[(\int_0^{t \wedge \tau} (a(s, X_s) - a(s, X'_s)) d\mathcal{B}_s)^2]) \\
&\leq 2(\mathbb{E}[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds] \\
&\quad + T\mathbb{E}[\int_0^{t \wedge \tau} (a(s, X_s) - a(s, X'_s))^2 ds]) \\
&\leq 2K^2(1+T)\mathbb{E}[\int_0^{t \wedge \tau} (X_s - X'_s)^2 ds] \\
&\leq 2K^2(1+T)\mathbb{E}[\int_0^t (X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau})^2 ds]
\end{aligned}$$

si on pose $h(t) = \mathbb{E}[(X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau})^2]$ et $C = 2K^2(1+T)$ alors on a établi que h vérifie pour $t \in [0, T]$:

$$h(t) \leq c \int_0^t h(s) ds$$

De plus, par définition de τ , la fonction h est bornée par $4\mathbf{M}^2$, l'inégalité de Gronwall (lemme suivant) s'applique avec $a = 0$ et $b = C$. On obtient $h = 0$, c'est à dire $X_{s \wedge \tau} = X'_{s \wedge \tau}$ ps.

Finalement, en faisant $\mathbf{M} \rightarrow +\infty$, on a $\tau \rightarrow +\infty$ et donc $X_t = X'_t$ ps. Les processus X et X' sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle. ■

Lemme 2.1.5.1. (Gronwall) Soient $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$;

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds \quad (2.9)$$

Alors on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$g(t) \leq a \exp(b(t))$$

Démonstration 2.1.5.2. En itérant la condition sur g , on trouve que pour tout $n \geq 1$,

$$g(t) \leq a + a(b(t)) + a \frac{(bt)^2}{2} + \dots + \frac{(bt)^n}{n!} + b^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_n} g(s_{n+1}) ds_{n+1}$$

Si g est majorée par $\mathbf{A}$, le dernier terme se majore par $\mathbf{A}(bt)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui prouve le lemme car le développement à droite tend vers $a \exp(b(t))$.
voir [14]

Existence forte : On procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose :

$$\begin{aligned} X_t^0 &= 0 \\ X_t^1 &= x + \int_0^t \sigma(s, x) d\mathcal{B}_s + \int_0^t a(s, x) ds \\ X_t^2 &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^1) d\mathcal{B}_s + \int_0^t a(s, X_s^1) ds \\ &\dots = \dots \\ X_t^n &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) d\mathcal{B}_s + \int_0^t a(s, X_s^{n-1}) ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisqu'il est clair par récurrence que, pour chaque n , le processus X^n est adapté et a des trajectoires continues, donc le processus $\sigma(t, X_t^n)$ vérifie les mêmes propriétés.

Fixons un réel $T > 0$, et raisonnons sur l'intervalle $[0, T]$. Vérifions d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante $\mathcal{C}_n$ telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}[(X_t^n)^2] \leq \mathcal{C}_n \quad (2.11)$$

Cette majoration est triviale si $n = 0$. Ensuite, si elle est vraie à l'ordre $n-1$, on utilise les majorations

$$|\sigma(s, y)| \leq K' + K|y|, |a(s, y)| \leq K' + K|y|, \forall s \in [0, T], y \in \mathbb{R}$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothèse de récurrence (2.11), on a : $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds] < +\infty$ on a donc :

$$\mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) d\mathcal{B}_s)^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds)]$$

Comme $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie $\mathbf{L}^2$, et les hypothèses lipschitziennes, on majore comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^n)^2] &\leq 3(|x|^2 + \mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})d\mathcal{B}_s)^2]) \\
&+ \mathbb{E}[(\int_0^t a(s, X_s^{n-1})ds)^2] \text{ (par la convexité)} \\
&\leq 3(|x|^2 + \mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds]) \\
&+ t\mathbb{E}[(\int_0^t a(s, X_s^{n-1})^2 ds)]) \text{ (isométrie } \mathbf{L}^2, \text{ Cauchy - Schwarz)} \\
&\leq 3(|x|^2 + 2(1+T)\mathbb{E}[(\int_0^t ((K')^2 + K^2(X_s^{n-1})^2)ds])) \text{ (les hypothèses lipschitziennes)} \\
&\leq 3(|x|^2 + 2T(1+T)((K')^2 + K^2\mathcal{C}_{n-1})) = \mathcal{C}_n
\end{aligned}$$

ce qui établit (2.11) par récurrence. La borne (2.11) et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n , la martingale locale $\int_0^t \sigma(s, X_s^n)d\mathcal{B}_s$ est une vraie martingale bornée dans $\mathbf{L}^2$ sur l'intervalle $[0, T]$. Nous utilisons cette remarque pour majorer par récurrence

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2]$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))d\mathcal{B}_s + \int_0^t (a(s, X_s^n) - a(s, X_s^{n-1}))ds$$

En utilisant l'inégalités de Doob (1.4.2) et de Cauchy-Schwarz ainsi que les hypothèses lipschitziennes, on déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2] &\leq 2\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))d\mathcal{B}_u|^2 \\
&\quad + \sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (a(u, X_u^n) - a(u, X_u^{n-1}))du|^2] \\
&\leq 2(4\mathbb{E}[(\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))d\mathcal{B}_u)^2](par la convexité) \\
&\quad + \mathbb{E}[(\int_0^t (a(u, X_u^n) - a(u, X_u^{n-1}))du)^2]) \\
&\leq 2(4\mathbb{E}[\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du] \\
&\quad + T\mathbb{E}[\int_0^t (a(u, X_u^n) - a(u, X_u^{n-1}))^2 du])(inégalité de Doob)
\end{aligned}$$

par l'isométrie L^2 et Cauchy-Schwarz on a :

$$\leq 2(4 + T)K^2\mathbb{E}[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du] \quad (2.12)$$

par les hypothèses lipschitziennes on a :

$$\leq \mathcal{C}_T\mathbb{E}[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du] \quad (2.13)$$

avec $\mathcal{C}_T = 2(4 + T)K^2$. Si on note

$$g_n(u) = \mathbb{E}[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2]$$

et $g_0(u) = \mathbb{E}[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^0|^2] = x^2$ alors on a établi :

$$g_{n+1}(t) \leq \mathcal{C}_T \int_0^t g_n(u) du \quad (2.14)$$

Par ailleurs, par (2.11) et les inégalités précédentes, on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0, T]$. En effet, $g_0(t)$ pour $t \in [0, T]$ et par une récurrence utilisant (2.13), on établit que pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$, on a

$$g_n(t) \leq x^2(\mathcal{C}_T)^n \frac{t^n}{n!}$$

On déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < +\infty$ comme

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right\|_2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

cela entraîne que p.s

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n|$$

et donc p.s la suite $(X_t^n)_{t \in [0, T]}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t \in [0, T]}$ qui est continu. Comme par récurrence, chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de $\mathcal{B}$, X l'est aussi à la limite

Les estimations (2.12) établissent aussi que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^n - X_s|^2 \right] \leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(T)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty$$

On déduit alors de l'isométrie $\mathbf{L}^2$, des hypothèses lipschitziennes que, avec des limites dans $\mathcal{L}^2$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) d\mathcal{B}_s &= \int_0^t \sigma(s, X_s) d\mathcal{B}_s \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t a(s, X_s^n) d\mathcal{B}_s &= \int_0^t a(s, X_s) d\mathcal{B}_s \end{aligned}$$

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (2.11), on obtient que X est solution forte de $E_x(a, \sigma)$ sur $[0, T]$ ■

2.1.6 Exemples

Dans cette section, on donne trois exemples de résolution d'EDS

Exemple 1 : Soit l'EDS suivante :

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} d\mathcal{B}_t \quad X_0 = x$$

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées, on cherche alors l'unique solution de cette EDS.

On a :

$$e^t dX_t = -e^{-t} X_t dt + d\mathcal{B}_t$$

ou encore

$$e^t dX_t + e^{-t} X_t dt = d\mathcal{B}_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties assure que :

$$d(e^t X_t) = e^t dX_t + X_t e^t dt$$

Ce qui donne :

$$d(e^t X_t) = d(\mathcal{B}_t)$$

et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + e^{-t} \mathcal{B}_t$$

Exemple 2 : Equation d'Ornstein Uhlenbeck

On cherche à résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma d\mathcal{B}_t \quad X_0 = x$$

où μ et σ sont deux réels. Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution. On multiplie les deux côtés de cette équation par $e^{-\mu t}$, on obtient :

$$e^{-\mu t} dX_t = \mu X_t e^{-\mu t} dt + \sigma e^{-\mu t} d\mathcal{B}_t$$

ou encore

$$e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt = \sigma e^{-\mu t} d\mathcal{B}_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties donne :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = \sigma e^{-\mu t} d\mathcal{B}_t$$

d'où, la solution

$$X = x + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} d\mathcal{B}_s$$

Exemple 3 : Modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué et l'autre pas. Dans cet exemple, on traite le cas de l'actif risqué, à savoir le prix d'une action à l'instant t . Il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S(\mu dt + \sigma d\mathcal{B}_t), \quad S_0 = x$$

La solution est :

$$S_t = x e^{\alpha \mathcal{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\mu t}$$

En effet, il suffit d'écrire $\sigma(t, x) = \sigma x$ et $a(t, x) = ax$ pour voir qu'elles vérifient les conditions précédentes. On applique ensuite la formule d'Itô à

$$f(t, x) = x e^{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\mu t}$$

on aura

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, \mathcal{B}_t) \\ &= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, \mathcal{B}_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \mathcal{B}_s) d\mathcal{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, \mathcal{B}_s) ds \\ &= \int_0^t (b - \frac{\sigma^2}{2}) S_s ds + \sigma \int_0^t S_s d\mathcal{B}_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_s ds \end{aligned}$$

d'où

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma d\mathcal{B}_t) \quad S_0 = x$$

2.2 Quelques solutions explicites des EDS

Dans cette partie, on donne une liste de certaines équations différentielles stochastiques dont les solutions générales explicites. Ces équations sont très utilisées car elles peuvent être utilisées pour confirmer l'efficacité des méthodes numériques.

1-Équation homogène avec coefficient constant

Elle s'écrit sous la forme :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma d\mathcal{B}_t \tag{2.15}$$

La solution générale de l'équation (2.15) s'écrit sous la forme :

$$X_t = e^{-at} \left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{as} d\mathcal{B}_s \right) \quad (2.16)$$

Equation non homogène avec coefficient constant

$$dX_t = (aX_t + b)dt + cd\mathcal{B}_t \quad (2.17)$$

La solution générale s'écrit sous la forme :

$$X_t = e^{at} \left(X_0 + \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + c \int_0^t e^{-as} d\mathcal{B}_s \right) \quad (2.18)$$

Equation à coefficients variables

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t))dt + c(t)d\mathcal{B}_t \quad (2.19)$$

La solution générale est donnée par :

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s) d\mathcal{B}_s \right) \quad (2.20)$$

avec la solution fondamentale :

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

Equation homogène avec coefficient constant (dans le cas d'un bruit multiplicatif)

$$dX_t = aX_t dt + bX_t d\mathcal{B}_t \quad (2.21)$$

dont la solution générale est donnée par :

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b \mathcal{B}_t \right)$$

Le premier exemple est donné par :

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t d\mathcal{B}_t$$

La solution est donné par :

$$X_t = X_0 \exp(\mathcal{B}_t)$$

Pour le deuxième exemple, on a :

$$dX_t = X_t d\mathcal{B}_t$$

La solution est donné par :

$$X_t = X_0 \exp(\mathcal{B}_t - \frac{1}{2}t)$$

Chapitre 3

Intégration numérique des EDS

On va voir que l'on peut adapter les méthodes d'intégration des EDO pour le calcul numérique des EDS mais que l'ordre des méthodes (c'est à dire leur vitesse de convergence) pour un même type d'approche est plus faible que pour les EDO. On commencera par considérer la méthode d'Euler dont on comparera le comportement dans les cas d'eterministe et stochastique. On s'intéressera ensuite à la méthode de Milstein et à la méthode de Runge-Kutta, plus sophistiquées mais qui lui sont préférables.

3.1 Rappels sur l'intégration numérique des EDO

Pour intégrer des EDO de la forme :

$\frac{d}{dt}x_t = b_t(x_t)$, avec x_0 fixé, la méthode la plus simple est la méthode d'Euler qui est basée, pour un pas h fixé, sur les approximations successives de x_t de la forme :

$$\hat{x}_{t+h} = \hat{x}_t + b_t(\hat{x}_t) \quad (3.1)$$

Ainsi $\hat{x}_{kh} = x_0 + \sum_{i=0}^{(i-1)h} b_{ih}(\hat{x}_{ih})$ et on définira l'erreur absolue à l'instant T par

$$\mathbb{E}_{T,h} = |x_T - \hat{x}_T| \quad (3.2)$$

On peut montrer que pour h suffisamment petit, dès lors qu'on a une solution unique sur $[0, T]$ pour x_t la méthode d'Euler vérifie $\mathbb{E}_{T,h} \leq \mathcal{C}h$ pour un certain $\mathcal{C} \geq 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$. On dit que la méthode d'Euler est d'ordre 1. Plus généralement on définira l'ordre d'une méthode

d'intégration des EDO comme le plus grand réel $\gamma > 0$, s'il existe, tel que :

$$\mathbf{E}_{T,h} \leq \mathcal{C}h^\gamma \quad (3.3)$$

pour un certain $\mathcal{C} > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$. Bien entendu, plus l'ordre est élevé et plus la technique d'intégration numérique considérée est performante.

Une méthode populaire et performante d'intégration numérique des EDO est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (parfois notée RK4) dont le schéma prend la forme suivante[4] :

$$\hat{x}_{t+h} = \hat{x}_t + \frac{h}{6}[k_t^{(1)} + 2k_t^{(2)} + 2k_t^{(3)} + k_t^{(4)}] \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{cases} k_t^{(1)} = b_t(\hat{x}) \\ k_t^{(2)} = b_{t+\frac{h}{2}}(\hat{x} + \frac{h}{2}k_t^{(1)}) \\ k_t^{(3)} = b_{t+\frac{h}{2}}(\hat{x} + \frac{h}{2}k_t^{(2)}) \\ k_t^{(4)} = b_{t+h}(\hat{x} + hk_t^{(3)}) \end{cases}$$

3.2 Intégration numérique des EDS par la méthode d'Euler

3.2.1 Méthode d'Euler

Le schéma d'Euler appliqué à l'intégration numérique de l'EDS

$$dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)d\mathcal{B}_t \quad (3.5)$$

conduit à l'approximation :

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{X}_t + b_t(\hat{X}_t)h + \sigma_t(\hat{X}_t)d\mathcal{B}_t \quad (3.6)$$

avec $\Delta\mathcal{B} = \mathcal{B}_{t+h} - \mathcal{B}_t$

Exemple 3.2.1.1. on a :

$$dX_t = rX_tdt + \alpha X_t d\mathcal{B}_t \quad (3.7)$$

dont on a vu que la solution s'écrit

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha \mathcal{B}_t \right) \quad (3.8)$$

la méthode d'Euler conduit à :

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{X}_t + rh\hat{X}_t + \alpha\hat{X}_t\Delta\mathcal{B}_t \quad (3.9)$$

Pour la même trajectoire discrétisée de $\mathcal{B}$ la solution exacte aux points de discrétisation est directement fournie par la relation (3.8).

3.2.2 Ordre

Dans le cas stochastique, on décrit classiquement les performances d'une méthode au moyen de l'erreur moyenne absolue définie par

$$\mathbb{E}_{T,h} = \mathbb{E}[|X_T - \hat{x}_T|] \quad (3.10)$$

Si $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}_{T,h} = 0$ on dira que le schéma de discrétisation envisagé converge fortement. Cette convergence forte sera dite d'ordre γ si $\mathbb{E}_{T,h} \leq \mathcal{C}h^\gamma$ pour un certain $\mathcal{C} > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$

On peut démontrer que la méthode d'Euler appliquée aux EDS est fortement convergente, d'ordre 1/2 On remarque ici que l'ordre γ de la méthode d'Euler est deux fois plus faible dans le cas stochastique que dans le cas déterministe

3.3 Intégration numérique des EDS par la méthode de Milstein

L'approximation de Taylor fournie ci dessus n'est que d'ordre 1/2 du fait que le terme en $\sigma(X_t)\Delta\mathcal{B}_t$ de l'équation (3.6) est d'ordre 1/2 car $\mathbb{E}[(\Delta\mathcal{B}_t)^2] = h$. Il faut donc, pour obtenir une méthode fortement convergente d'ordre $\gamma = 1$ pousser plus loin le développement du terme $\sigma(X_t)d\mathcal{B}_t$ de l'EDS en intégrant le terme d'ordre 1 en $(\Delta\mathcal{B}_t)^2$. On obtient alors la méthode de Milstein dont le schéma s'écrit comme suit :

$$X_{t+h} = \hat{X} + hb_t(\hat{X}) + \sigma_t(\hat{X})\Delta\mathcal{B}_t + \frac{1}{2}\sigma_t(\hat{X})\frac{d\sigma_t}{dx}(\hat{X})((\Delta\mathcal{B}_t)^2 - h) \quad (3.11)$$

Cette formule provient des approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} X_{t+h} &\approx X_t + hb_t(X_t) + \int_t^{t+h} [\sigma_t(X_t) + \frac{d\sigma_t}{dx}(X_t)\sigma_t(X_t)(\mathcal{B}_u - \mathcal{B}_t)]d\mathcal{B}_u \\ &\approx X_t + hb_t(X_t) + \sigma_t(X_t)\Delta\mathcal{B}_t + \frac{1}{2}\frac{d\sigma_t}{dx}(X_t)\sigma_t(X_t)[(\Delta\mathcal{B}_t)^2 - h] \end{aligned}$$

car, on a $d(\frac{1}{2}\mathcal{B}_t^2) = \mathcal{B}_t d\mathcal{B}_t + \frac{1}{2}dt$ et donc

$$\int_t^{t+h} (\mathcal{B}_u - \mathcal{B}_t)d\mathcal{B}_u = [\frac{1}{2}(\mathcal{B}_{t+h}^2 - \mathcal{B}_t^2) - \frac{1}{2}h] - \mathcal{B}_t(\mathcal{B}_{t+h} - \mathcal{B}_t) \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathcal{B}_{t+h} - \mathcal{B}_t)^2 - h] \quad (3.13)$$

3.4 Méthodes d'ordre supérieur à un

Comme on l'a vu dans le cas des EDO, il est également possible de construire des méthodes d'ordre supérieur à 1 pour les EDS.. Notons simplement que les schémas de discrétisation des EDS deviennent rapidement très complexes avec l'augmentation de l'ordre de la méthode. Pour développer de telles méthodes, on peut considérer les versions stochastiques des formules de Taylor avec reste intégrale que l'on va présenter rapidement, ou d'autres méthodes comme les méthodes de Runge-Kutta .

3.4.1 Formules de Taylor

Cas déterministe

Commençons par rappeler la forme des formules de Taylor avec reste intégrale dans le cas déterministe et leur emploi pour approcher les EDO.

Pour une EDO de la forme $\frac{d}{dt}x_t = b_t(x_t)$ et une fonction $\mathbf{f}_t(x_t)$ dérivable on a $\mathbf{f}_t(x_t) = \mathbf{f}_t^t(x_t) + b_t(x_t)\mathbf{f}_t^x(x_t)$ que l'on notera $L\mathbf{f}_t(X_t)$, avec la notation $\mathbf{f}_t^u = \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial u}$.

On a ainsi :

$$\mathbf{f}_{t_0}(x_t) = \mathbf{f}_{t_0}(x_{t_0}) + \int_{t_0}^t L\mathbf{f}_u(X_u)du \quad (3.14)$$

Pour x_t la formule de Taylor avec reste intégrale s'écrit, en exploitant la relation (3.14) pour $\mathbf{f} = b$, puis en itérant la formule

$$\begin{aligned}
x_t &= x_{t_0} + \int_{t_0}^t b_u(x_u) du \\
&= x_{t_0} + \int_{t_0}^t (b_{t_0}(x_{t_0}) + \int_{t_0}^u Lb_v(x_v) du) \\
&= x_{t_0} + \int_{t_0}^t b_{t_0}(x_{t_0}) du + Lb_{t_0}(x_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u dudv + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u \int_{t_0}^v L^2 b_w(x_w) dudvdw \\
&= x_{t_0} + (t - t_0)b_{t_0}(x_{t_0}) + \frac{(t - t_0)^2}{2} Lb_{t_0}(x_{t_0}) \\
&\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u \int_{t_0}^v L^2 b_w(x_w) dudvdw
\end{aligned} \tag{3.15}$$

formule que l'on peut continuer à itérer. De même, qu'on vient d'exploiter la relation $\frac{d}{dt}x_t = b_t(x_t)$, la relation $\frac{d}{dt}\mathbf{f}_t(x_t) = L\mathbf{f}_t(x_t)$ conduira à un développement de la forme

$$\mathbf{f}(x_t) = \sum_{k=0}^r \frac{(t - t_0)^k}{k!} L^k \mathbf{f}_{t_0}(x_{t_0}) + \int_0^t \cdots \int_0^{u_{k+1}} L^{k+1} \mathbf{f}(x_{u_k}) du_1 \cdots du_{k+1} \tag{3.16}$$

Cas stochastique

Les formules d'Itô-Taylor découlent de la formule d'Itô qui à partir de l'expression

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t b_u(X_u) du + \int_{t_0}^t \sigma_u(X_u) d\mathcal{B}_u \tag{3.17}$$

conduit à

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_t(X_t) &= \mathbf{f}_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}_u^t(X_u) + b_u(X_u)\mathbf{f}_u^x(X_u) + \frac{1}{2}\mathbf{f}_u^{xx}(X_u)\sigma_u(X_u)] du \\
&\quad + \int_{t_0}^t \sigma_u(X_u)\mathbf{f}_u^x(X_u) d\mathcal{B}_u \\
&= \mathbf{f}_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L_0 \mathbf{f}_u(X_u) du + \int_{t_0}^t L_1 \mathbf{f}_u(X_u) d\mathcal{B}_u
\end{aligned}$$

Comme dans le cas déterministe, on peut exploiter ces formules pour obtenir

un développement de X_t :

$$\begin{aligned}
 X_t = X_{t_0} &+ \int_{t_0}^t [b_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^u L_0 B_v(X_v) dv + \int_{t_0}^u L_1 b_v(X_v) d\mathcal{B}_v] du + \int_{t_0}^t [\sigma_{t_0}(X_{t_0}) \\
 &+ \int_{t_0}^u L_0 \sigma_v(X_v) + \int_{t_0}^u L_1 \sigma_v(X_0) d\mathcal{B}_v] d\mathcal{B}_u
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

On peut itérer ces formules pour obtenir, en laissant de côté le reste intégrale, des approximations d'ordre élevé.

3.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5

Un inconvénient des méthodes de Taylor et qu'elles mettent en oeuvre des dérivées des termes de dérive et de diffusion b_t et σ_t . En fait, il existe des méthodes de type Runge-Kutta, qui ne nécessitent pas de effectuer de telles dérivations. Indiquons ici sans justification la forme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5 :

$$X_{t+h} = X_t + a_t(X_t)h + \sigma_t(X_t)\Delta\mathcal{B}_t + \frac{1}{2}(\sigma_t(X'_t) - \sigma_t(X_t))\frac{[(\Delta\mathcal{B}_t)^2 - h]}{\sqrt{h}}$$

avec :

$$X'_t = X_t + a_t(X_t)h + \sigma_t(X_t)\sqrt{h}$$

3.5 Exemples et simulation

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques est très important, car la résolution analytique n'est pas toujours facile. Cela rend difficile l'étude de l'évolution dynamique d'un phénomène. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des EDS. Nous utilisons dans le paragraphe qui suit le programme de Matlab :

- **Exemple 1 :**

on a l'équation suivante :

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}}dt + 3X_t^{\frac{2}{3}}d\mathcal{B}_t \quad X_0 = 1$$

Intégration exacte : formule d'Itô pour $Y_t = g(X_t) = X_t^a$:

$$\begin{aligned}
dY_t &= aX_t^{a-1}dX_t + \frac{1}{2}a(a-1)X_t^{a-2}(dX_t)^2 \\
&= \left(\frac{1}{3}aX_t^{a-1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}a(a-1)X_t^{a-2+\frac{4}{3}}\right)dt + aX_t^{a-1+\frac{2}{3}}d\mathcal{B}_t
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

pour $a = \frac{1}{3}$ on a la solution exacte est :

$$X_t = \left(X_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\mathcal{B}_t\right)^3$$

En Matlab, on peut facilement programmer l'exemple par les trois méthodes avec la fonction suivante :

Détails :

T : Le temps final

n : Le nombre de points dans l'intervalle de temps

$h = T/n$: Le pas de temps

t : Linspace(0,T,n) : l'intervalle dans temps $[0, T]$

$X(0) = 1$: condition initiale

```

clear
clc
T=1; % temps final
n=50; % le nombre de points dans l'intervalle de temps [0, T]
h=T/n; % pas de temps
t=linspace(0,T,n); % l'intervalle dans temps [0,T]

m=150;
X(1,:)=ones(1,m); % Condition initiale  $X_0=1$ 
X_m(1,:)=ones(1,m);
X_r(1,:)=ones(1,m);
Z=randn(n,m); % variable aleatoire  $N(0,1)$  pour simuler le MB
dB=sqrt(h)*Z;

% Simulation de la solution de l'EDS :  $dX_t=b_tdt+\sigma_tdB_t$  : ✓
b_t=1/3*X_t et sigma_t= $X_t^{(2/3)}$ 
% ✓
----- ✓
% Trois exemples :
for i=1:n-1
    for j=1:m

        b(i,j)=1/3*X(i,j)^(1/3);
        sigma(i,j)=X(i,j)^(2/3);
        X(i+1,j)=X(i,j)+h*b(i,j)+sigma(i,j)*dB(i,j); % Euler

        b_m(i,j)=1/3*X_m(i,j)^(1/3);
        sigma_m(i,j)=X_m(i,j)^(2/3);
        d_sigma_m(i,j)=2/3*X_m(i,j)^(-1/3);

        X_m(i+1,j)=X_m(i,j)+h*b_m(i,j)+sigma_m(i,j)*dB(i,j)+...
        1/2*sigma_m(i,j)*d_sigma_m(i,j)*(dB(i,j)^2-h); % Milstein

        b_r(i,j)=1/3*X_r(i,j)^(1/3);
        sigma_r(i,j)=X_r(i,j)^(2/3);

        Y(i,j)=X_r(i,j)+h*b_r(i,j)+sigma_r(i,j)*sqrt(h);

        X_r(i+1,j)=X_r(i,j)+h*b_r(i,j)+sigma_r(i,j)*dB(i,j)+...
        1/2*(Y(i,j).^(2/3)-sigma_r(i,j))*(dB(i,j)^2-h)/sqrt(h); % Runge-✓
    Kutta 1.5
    end
end

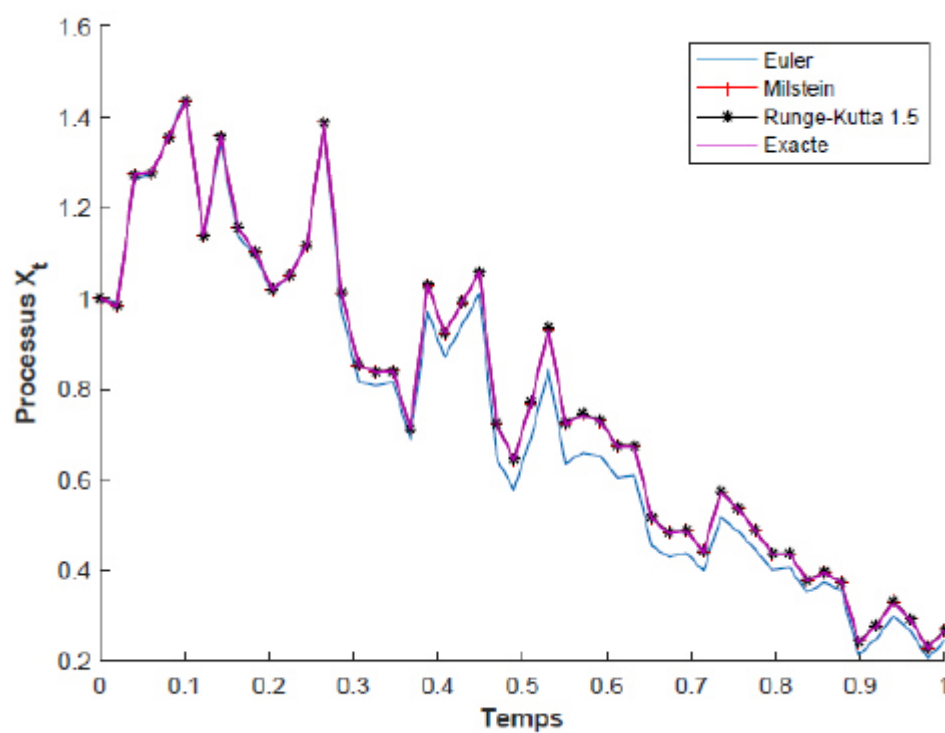
```

```
X0=1;
B=cumsum(dB,1); % Générer le MB à partir des accroissement

for i=1:n
for j=1:m
X_exact(i,j)=(X0^(1/3)+1/3*B(i,j))^3; % Solution exacte
end
end

X_exact=[ones(1,m) ; X_exact];
X_exact(end,:)=[];

hold on
for i=89:89
plot(t,X(:,i),t,X_m(:,i),'-+r',t,X_r(:,i),'-*k',t,X_exact(:,i)) %✓
tracer une trajectoire du processus X_t pour les trois schemas✓
numeriques
end
xlabel('Temps')
ylabel('Processus X_t')
legend('Euler', 'Milstein', 'Runge-Kutta 1.5', 'Exacte')
```



• **Exemple 2 :**

on a l'équation suivante :

$$dX_t = aX_t dt + bX_t d\mathcal{B}_t \quad (3.20)$$

La solution exacte de l'équation (3.20) est :

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + b\mathcal{B}_t\right)$$

si on a :

$a = -1$;

$b = 1$;

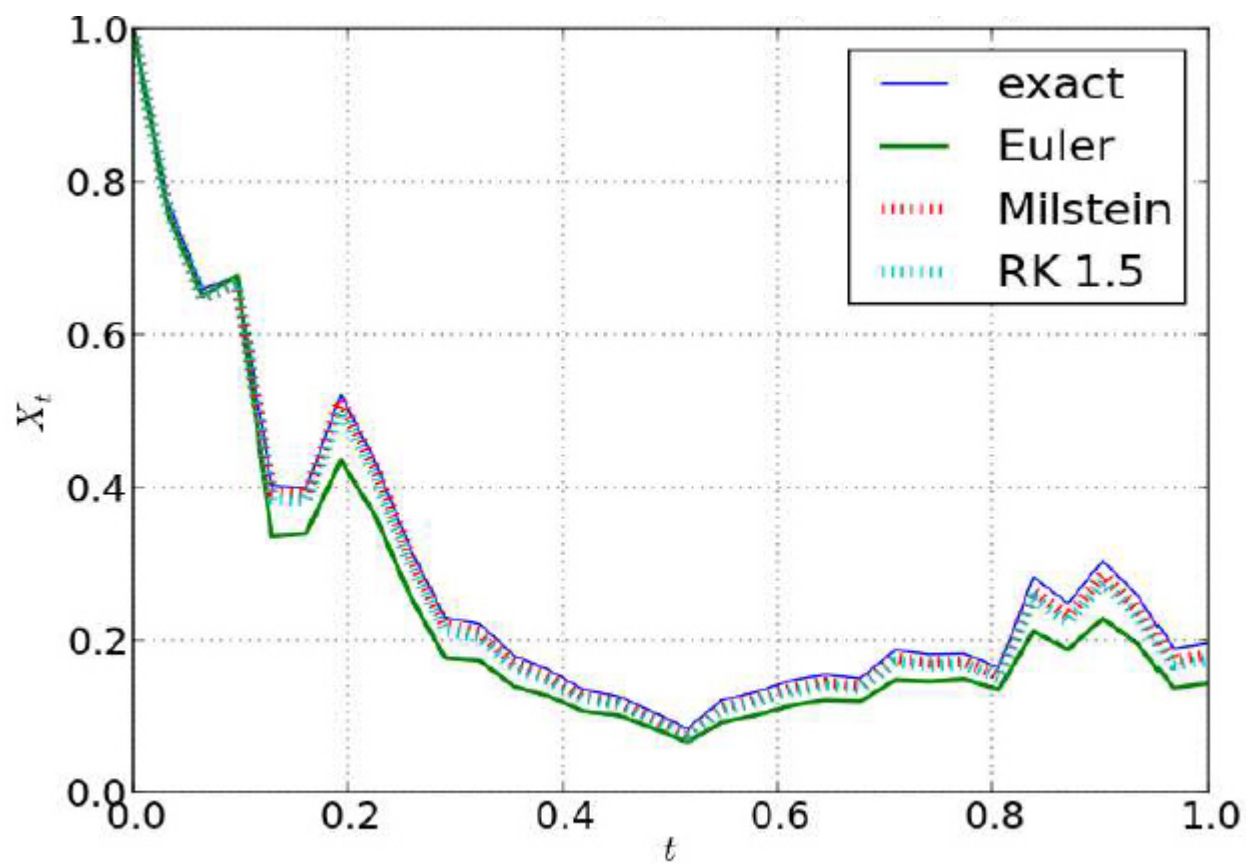
$X_0 = 1$

donc : la solution exacte de l'équation est :

$$dX_t = -X_t dt + X_t d\mathcal{B}_t \quad (3.21)$$

est :

$$X_t = \exp\left(\left(-\frac{3}{2}t\right) + dB_t\right)$$



Conclusion

En conclusion, nous avons pu voir clairement l'intérêt énorme de la technique d'application du calcul stochastique sur les équations différentielles stochastiques. Cet intérêt nous permet de créer des liens féconds entre processus stochastiques et EDP.

On a étudié quelques notions relatives aux EDS et à leur intégration exacte (formule d'Itô) ou approchée (méthodes numériques) en fonction de $\mathcal{B}$. Cette approche est utile en particulier pour obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDS, par exemple par simulation d'Euler, Milstein et Runge-Kutta.

Bibliographie

- [1] A. Belqadhi. (14 janvier 2008). Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement Brownien et intégration d'Itô.
- [2] Abi Ayad Ilham. Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master.Option :Probabiliste et statistiques.Thème : Introduction aux équation différentielles stochastiques.
- [3] B. Stout. (Fevrier 2007). Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles.
- [4] B.Mohamed. (Avril 2015).Cours d.Analyse Numérique 2.
- [5] C. Ndongo. (Mars 2012). Processus aléatoires et applications finance, 11-15
- [6] F. Russo. (Conference tipe 2012,le 24 septembre 2011). équations différentielles stochastiques (EDS), 3-7.
- [7] J. Breton. (Septembre-Décembre 2014). Calcul stochastique M2 Mathématiques.
- [8] J. Fran. (Université Paris-Sud 30 septembre 2001). Mouvement Brownien, Martingales et calcul Stochastique, 34-35.
- [9] K. Burrage, E. Platen . (1994). Runge-Kutta methods for stochastic differential equations, 63-78.
- [10] M. Jeanblan. (Septembre 2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY ,39-40.
- [11] N. Berglund. (Université d'Orléans. Version de Janvier 2012). Martingales et calcul stochastique,75.
- [12] P. Medvegyev. (2007). Stochastic Integration Theory.
- [13] P. Bougerol. (3 Décembre 2015). Calcul Stochastique des martingales continues.

-
- [14] S.M. Lacus. (2002). Simulation and inference for stochastic differential equations.
 - [15] P.Protter. (2004). Stochastic integration and differential equation.
 - [16] R.Zaghdane. .(Soutenu le :12 /04/2014). Dynamique de structures soumises à des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique des équations différentielles stochastiques.
 - [17] R.Rhodes. . Cours de probabilités à Saint-Louis.
 - [18] Séminaire des doctorants. (Bordeaux, mercredi 12 mars 2003). Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique.
 - [19] T. Chonavel. (Septembre 2013). équations différentielles stochastiques. Notes de cours.Filière 4,30-34.
 - [20] T. Chonavel. (2011). Notes de cours d'analyse numérique et optimisation continue.