République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Processus stochastiques presque périodiques : application aux équations différentielles stochastiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse stochastiques, statistique des processus et applications (ASSPA)

par

Taibi **H**azar [1]

Sous la direction de

Dr M$^{\text{lle}}$ Lamia Bousmaha

Soutenu le 24/06/2018 devant le jury composé de

Dr S. Rahmani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr L. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr S. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr A. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : taibihazar@gmail.com

Remerciement

Je remercie Dieu, de m'avoir donné le courage et la patience afin de terminer ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toutes mes gratitudes envers ma promotrice, **Dr. L. BOUSMAHA**, pour son soutien et la confiance qu'elle m'a accordée en me proposant ce sujet, et elle m' à aider plus qu'elle ne le pense. En j'écouté patiemment, et en discutant maintes fois de la nature et l'avancement de mon travail, elle m'a permis de synthétiser, comprendre et expliquer un grand nombre de questions. Ces conseils et sa gentillesse m'a apporté un précieux soutien. On a pu découvrir lors de ces années d'études quelqu'un d'intègre et de qualités humaines aussi bien que scientifiques éminemment rares et précieuses, qu'elle soit chaleureusement remerciée ici. Mes remerciement sont aussi adressés mes jury Mlle **S. RAHMANI**, Mlle **S. IDRISSI** et Mme **A. BENZATOUT**.

Merci à mes parents et à mon frère et mes soeurs pour m'avoir inculqué le goût d'apprendre, de m'avoir enseigné à penser et de m'avoir encouragé sans cesse pour aller plus loin, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à notre formation. Merci a tous les membres de la Faculté des Sciences Exactes en général et aux membres du Département de Mathématiques en particulier.

Enfin, je n'oublie pas de remercier ceux qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre a élaborer ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes sœurs et mon frère.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous mes camarades de promo et tous mes amis.

Table des matières

Liste des abréviations

AP Espace des fonctions presque périodiques et à valeurs dans X.

APD Presque-périodicité en distribution.

APFD Presque-périodicité en distribution finies dimensionnelles.

APOD Presque-périodicité en distribution unidimensionnelle.

Introduction Générale

Les fonctions périodiques sont des fonctions, lorsqu'elles sont appliquées à une variable, donnent la même valeur si on ajoute à cette variable une certaine quantité fixée, appelée période. Ainsi la périodicité permet de réduire les intervalles d'études de ces fonctions.

Soit f une fonction périodique de la variable réelle t. Si T est la période élémentaire, on a : $f(x+T) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}$ et plus généralement,

$$f(x+nT) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les nombres nT constituent les périodes de f. Dans tout intervalle $[a; a+T[$, il y a un point d'abscisse multiple de T, c'est-à-dire une période nT.
La somme de deux fonctions périodiques dont le rapport de leurs périodes est irrationnel n'est pas périodique. Cette propriété a conduit H. Bohr à introduire les fonctions presque périodiques, au début des années vingt (1925). Les fonctions presque périodiques ont des propriétés voisines de celles des fonctions périodiques, en fait on a une périodicité approximative dans le sens que pour tout x réel, l'écart $f(x+T) - f(x)$ peut être rendu de plus en plus petit. C'est-à-dire, une fonction donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est presque périodique si l'ensemble

$$T(\varepsilon, f) = \{\tau \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\| \leq \varepsilon\}.$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un nombre réel $\ell > 0$ tel que chaque intervalle de longueur ℓ contient au moins un élément de $T(\varepsilon, f)$.

L'utilisation des fonctions presque périodiques remonte à l'époque grecque antique. Ptolémée dans son livre Almagest donne une méthode (scientifique) pour expliquer le comportement de la lune, de la terre et de soleil. Cette méthode s'appelle méthode d'épicycle, elle consiste à approcher la fonction qui donne le mouvement de la planète par un polynôme trigonométrique.

Cette approximation des fonctions par des polynômes trigonométriques est une propriété importante des fonctions presque périodiques.
Le concept de fonctions presque périodiques a été introduit par H. Bohr pour fonctions à valeur numérique et étendu par S. Bochner pour les fonctions avec des valeurs dans les espaces polonais.

La théorie des fonctions presque périodiques se développe avec vigueur depuis quatre vingt années environ ; très exactement les premiers résultats de celle-ci ont été publiés dans les deux articles du pionnier de cette classe de fonctions H. Bohr [9], apparus dans la revue "Acta-Mathematica", en 1925-1926 : Jouant un rôle important dans l'étude des équations différentielles, elle a été développée après par d'autres auteurs, notamment par Bochner [8] vers 1933 qui a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque périodiques, équivalentes à celle donnée par H. Bohr, mais plus maniable.

L'existence et l'unicité des solutions presque périodiques sont d'une grande importance dans l'étude qualitative des équations différentielles stochastiques à cause de leurs applications dans plusieurs domaines, comme la biologie mathématique, la physique, la théorie de contrôle et d'autre domaines.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :
Le premier chapitre, a pour objectif donner une collection de résultats classiques sur les différentes définitions des fonctions presque périodiques qui sont équivalentes, en commençons par la donnée des différentes définitions des fonctions presque périodiques :
Celle de Bohr qui est une généralisation de la périodicité.
Le critère d'approximation par lequel une fonction presque périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques généralisées et la définition de Bochner qui caractérise la presque périodicité d'une fonction en utilisant sa normalité. J'ai présenté également dans ce chapitre les fonctions presque périodiques dans le cas déterministe et le cas aléatoire.
Le deuxième chapitre, est consacrée à une étude comparative entre les diffèrents types de Bochner-presque périodicité au cas où l'espace d'état est métrisable.
Le troisième chapitre, sert à étudier l'existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p des équations différentielles stochastiques dans les deux cas autonome et non autonome.
Enfin, j'ai achevé ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Les fonctions presque périodiques

1.1 Priliminaire

La notion de périodicité est étroitement liée aux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$:
Rappelons qu'un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro, est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit monogène, c'est-à-dire de la forme T$\mathbb{Z}$ avec T réel strictement positif, (dans ce cas, nous appellerons T le générateur de G). En particulier, un sous-groupe dense est dense.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeur réelles ou complexes, alors l'ensemble des réels T, noté $G(f)$, tels que, pour tout x réel

$$f(x+T) = f(x)$$

est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$

Définition 1. *On dira qu'une fonction f est périodique, si $G(f)$ n'est pas réduit à 0.*
Un élément T non nul de $G(f)$ est une période de f, et l'on dira que f est périodique de période T ou encore qu'elle est T-périodique. L'ensemble $G(f)$ est alors appelé groupe des périodes de f.

Pour une fonction périodique f, on a donc deux posibilités : ou bien $G(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$, ou bien il est monogéne et engendré par son plus petit élément strictement positif.
Lorsque le groupe $G(f)$est monogéne, si T est la plus petite période strictement positive de $G(f)$, on aura

$$G(f) = T\mathbb{Z};$$

et on dira que T est la période de f.

Remarque 1. *1. Le groupe $G(f)$ est égal à $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la fonction f est constante ;*

2. On peut ramener l'étude des fonctions périodiques à celle des fonctions périodiques de période 2π. En effet, si f est T-périodique, alors $g : x \to f(\frac{T}{2\pi}x)$ est 2π-périodique.

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Il est clair que l'ensemble des fonctions continue 2π-périodique est un sous espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Une question naturelle est la suivante : qu'en est il de l'ensemble des fonctions continu périodique sur $\mathbb{R}$?. La réponse est négative. En effet, considérons la fonction f définie par $f(x) = e^{i2\pi x}+e^{i2\pi\omega x}$, où ω est irrationnel. Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques. Supposons qu'il existe $\tau \neq 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x+\tau) - f(x) = 0$. C'est à dire

$$e^{i2\pi(x+\tau)} + e^{i2\pi\omega(x+\tau)} - (e^{i2\pi x} + e^{i2\pi\omega x}) = 0$$

ou de façon équivalente

$$e^{i2\pi x}(e^{i2\pi\tau} - 1) + e^{i2\pi\omega x}(e^{i2\pi\tau} - 1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En posant $\alpha = e^{i2\pi\tau} - 1$ et $\beta = e^{i2\pi\omega\tau} - 1$, on peut aussi écrire :

$$\alpha e^{i2\pi x} + \beta e^{i2\pi\omega x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

La dernière équation a une solution si $\alpha = \beta = 0$. C'est-à-dire que

$$e^{i2\pi\tau} = e^{i2\pi\omega\tau} = 1.$$

On conclut que τ et $\omega\tau$ sont dans $\mathbb{Z}$, et comme ω est irrationel, donc τ et $\omega\tau$ ne pouvent pas être simultanément dans $\mathbb{Z}$. Ce qui est absurde.

En plus du fait que l'ensemble des fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$ n'est pas stable par rapport aux opérations usuelles, on peut aussi montrer que cet ensemble n'est pas stable par limite uniforme. Il suffit de considérer la suite de fonctions continues et 2^n-périodiques

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin^2(\frac{\pi x}{2^k})$$

La série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} \sin^2(\frac{\pi x}{2^k})$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Mais sa limite f n'est pas périodique.

Soit $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach. Notons par $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeur dans l'espace de Banach $(\mathbb{X}, \|.\|)$, que l'on munit de la norme uniforme. Dans ce qui suit, on verra comment relaxer la condition de périodicité de façon à combler les insuffisances citées précédemment.

Motivations et Propriétés élémentaires

L'appartion formelle de la théorie des fonctions presque périodiques remonte aux travaux de H. Bohr [9] publiés entre 1923 et 1926. Le Mathématicien D. H. Bohr s'interessa au problème (ouvert depuis les années 1850) de position des zéros de la fonction Zeta de Riemann définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s};\ s \in \mathbb{C}$$

Il remarqua que pour s de partie réelle constant, les séries $\zeta(s)$ ont un comportement régulier proche de celui des fonctions périodiques mais restrictif (la somme et le produit de fonctions presque périodiques est presque périodique, limite uniforme suite de fonction presque périodique est une fonction presque périodique). Ce ne sont pas des fonctions qui sont presque des fonctions périodiques, mais ce sont des fonctions qui possèdent de nombreuses presque périodes.

Les fonctions presque périodiques sont, intuitivement, des fonctions f (continues) pour lesquelles, en choisissant des "périodes" T de plus en plus grandes, on a une périodicité approximative de plus en plus précise, c'est-à-dire que (pour tout x) l'écart $f(x+T) - f(x)$ peut être rendu arbitrairement petit. Mais la définition formelle correspondante, à savoir : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel non nul T tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| < \varepsilon,$$

est en fait insuffisante à capturer cette idée, puisque cette propriété est vérifiée par toutes les fonctions uniformément continues.

Commençons par introduire un concept qui traduit l'idée intuitive selon laquelle les points d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ "sont bien dispersés".

1.2 Les différentes définitions des fonctions presque périodiques

1.2.1 Critère de Bohr

Définition 2. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est relativement dense s'il existe un réel l tel que tout intervalle de longueur l rencontre A, i.e.,*

$$\exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R} :]a, a + \ell[\cap A \neq 0.$$

Exemples 1. *1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense puisque tout intervalle de longueur 2 contient un élément de $\mathbb{Z}$;*

2. *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense puisque tout $l > 0$, l'intervalle*

$$[-l - 1, -1] \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

3. *Toute sous groupe additif non trivial est relativement dense ;*
4. *L'ensemble $\{\pm\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement dense. En effet, pour $l = 2$, un intervalle de longueur l est de la forme $[a, a + 2]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Si $a \leq 0 \leq a + 2$, le problème est résolu. Si $0 \leq a \leq a + 2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 \leq n \leq (a + 2)^2$ et donc $a \leq \sqrt{n} \leq a + 2$. Le cas où $a \leq a + 2 \leq 0$ se traite de façon similaire que précédemment ;*
5. *L'ensemble $\{\pm n^2, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas relativement dense. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n > l$. L'intervalle $[n^2+1, n^2+\ell+1]$ est de longueur l et est strictement contenu dans $[n^2, (n+1)^2]$.*

A présent, nous pouvons énoncer la définition de la presque périodicité de Bohr :

Définition 3. *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est dite presque périodique au sens de Bohr si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$T(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x + \tau) - f(x)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon\},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l = l_\varepsilon > 0$, tel que

$$T(f, \varepsilon) \cap [a, a + l] \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}$$

Un nombre réel $\tau \in T(f, \varepsilon)$ est dit ε-presque période ou ε-translation. Le réel positif l_ε est dit longueur d'inclusion asocié à ε.

Une fonction, presque périodique et continue,est dite uniformément presque périodique et on écrit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ ou bien f est $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$

Il a y lieu de mentionner que toute fonction continue τ-périodique est presque périodique. En effet, c'est une conséquence directe du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\tau\mathbb{Z} \subset T(f, \varepsilon)$.

Dans ce qui suit, on présentera certaines propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques.

Propriétés de $T(f, \varepsilon)$:

Lemme 1. *i) une fonction continue f est presque-périodique si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $T(f, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

ii) Pour tout ε strictement positif $T(f, \varepsilon)$ est fermé.

iii) Si $\tau \in T(f, \varepsilon)$ alors $-\tau \in T(f, \varepsilon)$.

iv) Pour tout ε strictement positif $T(f_a, \varepsilon) = T(f, \varepsilon)$ où $f_a(t) = f(t + a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. C'est à dire que l'espace des fonctions presque-périodiques $AP(\mathbb{X})$ est stable par translation.

v) Une fonction $f : \mathbb{R} \in X$, est uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que $T(f, \varepsilon) \supset [-\delta, \delta]$.

vi) $T(g \circ f, \varepsilon) \supset T(f, \delta_\varepsilon)$ si g est une fonction continue de $\bar{R}_f$ (fermeture de image de f dans $\mathbb{X}$) dans un espace de Banach Y.

L'espace des fonctions presque-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{X}$ est noté par $AP(\mathbb{X})$.

Exemples de fonctions presque-périodiques.

Par exemple, une fonction périodique est presque-périodique ; sa période et ses multiples sont les presque-périodes.

Une fonction presque-périodique est bornée, uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et elle est à image relativement compacte dans $\mathbb{X}$.

Exemple :

Toute somme finie de fonctions périodiques à périodes aléatoires dont les rapports sont des nombres irrationnels.

i) $f(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}x$

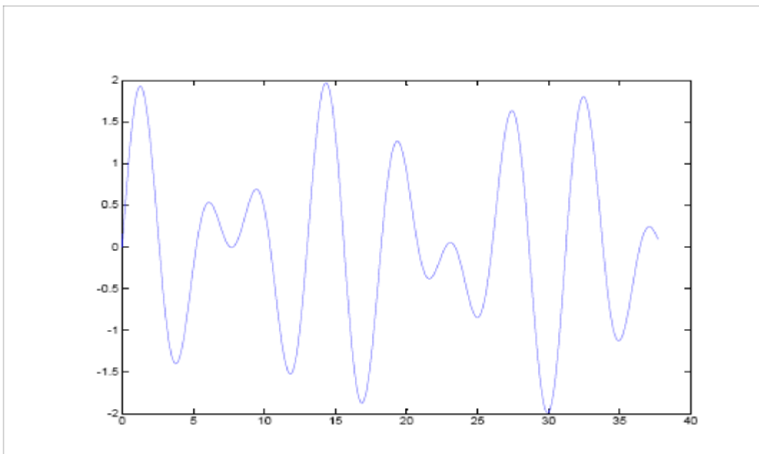

FIGURE 1.1 –

Nous donnons aussi des exemples de courbes paramétrées avec fonctions périodiques, fonctions presque-périodiques :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \cos(t) \end{cases}$$

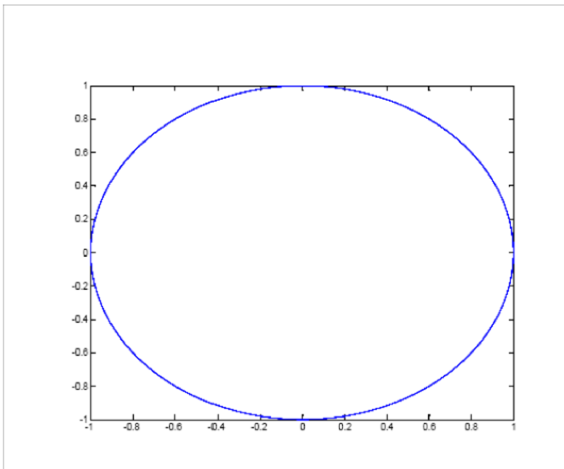

FIGURE 1.2 –

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(t) + \sin\sqrt{2}t, \\ y(t) &= \cos(t) + \cos\sqrt{2}t. \end{cases}$$

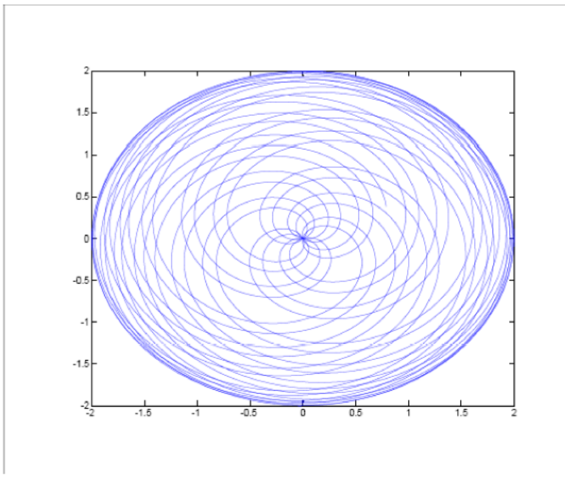

FIGURE 1.3 –

$$\begin{cases} x(t) & = \sin(t) + \cos\sqrt{2}t, \\ y(t) & = \cos(t) + \sin\sqrt{2}t. \end{cases}$$

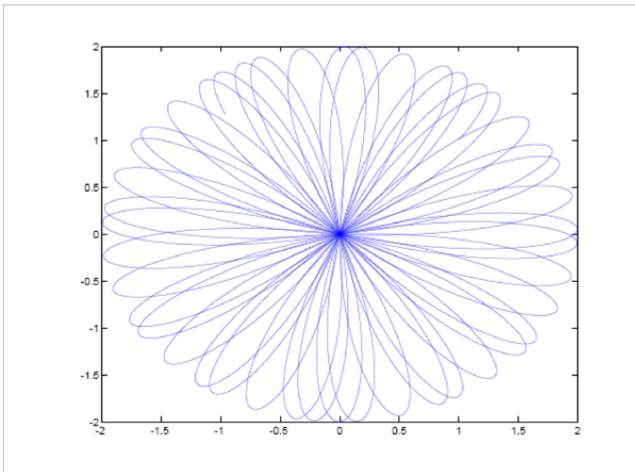

FIGURE 1.4 –

Nous allons maintenant présenter la propriété d'approximation des fonctions presque périodiques au sens de Bohr par des polynômes trigonométriques généralisés.

1.2.2 Critère d'approximation

Définition 4. *On appelle* ***polynôme trigonométrique généralisé****, toute combinaison de la forme*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x) \quad avec \quad , a_k \in \mathbb{X},\ \lambda_k \in \mathbb{R}\, et\, n \in \mathbb{N}$$

On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces polynômes.

Proposition 1. *L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisé $\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

Preuve :

Il est clair que les fonctions $x \mapsto a_k \exp(i\lambda_k x); \forall k = \overline{1.n}$ sont continues et périodiques, alors elles sont presque périodiques.

Comme la somme des fonctions presque périodiques est toujours presque périodique, alors $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x)$ est presque périodique.
Donc $\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Définition 5. *On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un* ***polynôme trigonométrique*** *$P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Théorème 1. *Une fonction $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. si et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynômiale.*

Preuve

La démonstration de ce théorème est longue et technique, le lecteur intéressé pourra se rapporter à [11].

Proposition 2. *La série uniformément convergente* $\sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x)$ *avec* , $a_k \in \mathbb{X}, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *est presque périodique.*

Preuve

Chaque terme de la série est une fonction presque périodique, alors la somme de n premiers termes $S_n(x)$ est presque périodique. Par conséquent, la somme S(x) de la série est aussi presque périodique, (limite uniforme de $S_n(x)$).

La définition des fonctions presque périodiques au sens de Bohr est parfois peu maniable. Il est important de chercher des propriétés moins intuitives, mais plus utilisables, des fonctions presque périodiques, qui puissent en constituer une nouvelle définition basée sur une propriété topologique des fonctions translatées.

Par la suite, entre les années 1920 et les années 1930, la théorie de Bohr s'est considérablement developpée. S. Bochner [8] a étendu cette notion au cas de fonctions à valeurs dans un espace (abstrait) de Banach. Il y a aussi V.V. Stepanov, H.Weil et A. Besicovitch qui ont défini la presque périodicité pour des fonctions non continues. Il faut aussi mentionner les nom de J. Favard, J. Von Newmann et N.N. Bogolyubov qui ont beaucoup contribué au dévelopement de cette théorie.

1.2.3 Critère de Bochner

Beaucoup de résultats sur la presque périodicité des solutions de plusieurs classe d'équations différentielles ont été obtenus juste aprés l'appartion de la théorie. Dés les années 20, Bohr et Neugebauer ont montré, en utilisant la définition, que les solutions bornées du systéme d'équations

$$x' = Ax + f(t) \tag{1.1}$$

sont presque périodiques si la fonction f est presque périodique et l'application linéaire A ne dépend pas de t. Dans le cas où A est presque périodique, Bochner (dans son article de 1933) a établi l'existence de solutions presque périodiques pour l'équation 1.1 en utilisant la normalité de la solution, notion équivalente à la presque périodicité au sens de Bohr.

Définition 6. *(presque périodicité au sens de Bochner) Une fonction f est presque périodique au sens de Bochner si et seulement si elle est normale, c-à-d si de toute suite (s'_n) de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite (s_n) telle que $f(t+s_n)$ converge uniformement par rapport à t, ce qui est équivaut à dire que l'ensemble des fonctions translatées $\{f(t+.), t \in \mathbb{R}$ est précompact pour la topolgie de la convergence uniforme.*

La définition de Bochner donne un moyen plus efficace pour vérifier les propriétés algébriques et topologiques des fonctions presque périodiques. Mais elle est moins efficace pour trouver des solutions presque périodiques d'équations d'évolution d'une manière générale.

En 1962, Bochner a donné, dans son article "A new approch to Almost periodicity" [8], une autre caractérisation, dite critère de suites doubles de Bochner des fonctions presque périodiques.

Définition 7. ***(critère de suite double de Bochner)***
On dit que f est Bochner-presque périodique ssi $\forall\{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\} \in \mathbb{R}$, il existe deux sous suites $\{\alpha_n\} = \{\alpha'_{m_n}\}, \{\beta_n\} = \{\beta'_{m_n}\}$ de même indices telles que

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{r\to\infty} f(\alpha_r+\beta_s+t) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n+\beta_n+t), \tag{1.2}$$

existent ponctuellement par rapport à t.

Une propriété cruciale du critère de suites doubles de Bochner est que les limites de 1.2 existent par rapport aux trois modes de convergences : ponctuelle, uniforme sur intervalles compacts et uniformes sur $\mathbb{R}$. Ce critère remarquable permet donc d'établir la convergence uniforme en vérifiant la convergence simple. Ce critère a été trés exploité pour trouver des solutions presque périodiques par Bochner lui même, J. Favard et C. Tudor [34] et ses collaborateurs.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) X est Bochner-presque périodique.

2) X est vérifié le critère de suites doubles de Bochner.

3) X est presque périodique dans le sens de Bohr si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, ou asymptotiquement presque périodique dans le sens de Bochner si $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$.

1.3 Propriétés des fonctions Bohr-presque périodiques

Si f et g sont deux fonctions presque périodiques, alors les fonctions $f+g$ et fg le sont aussi ; contrairement aux apparences, ce résultat n'est pas trivial, comme on peut le voir dans (exemple de Besicovitch). D'autre propriétés des fonctions Bohr-presque périodiques sont cités ci-dessous :

Proposition 3. *Si f est une fonction continue presque périodique, alors f est bornée et uniformément continue.*

Preuve. Dans cette preuve, on a deux points à démontrer :

1. La bornitude de f :

   Supposons que $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Pour $\varepsilon = 1$, on notera l_1 le réel positif correspond.

   Comme f est continue sur le compact $[0, l_1]$, elle est bornée sur $[0, l_1]$, c'est à dire,

   $$\exists M > 0, \sup_{x \in [0, l_1]} \|f(x)\| \leq M.$$

   Soit $\tau \in [-x, -x + l_1]$ un ε-presque période associé à f.

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \|f(x+\tau) - f(x)\| < 1$$

   Il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|f(x) - f(x+\tau) + f(x+\tau)\|, \\ &\leq \|f(x) - f(x+\tau)\| + \|f(x+\tau)\|, \\ &\leq M + 1 \end{aligned}$$

   Donc f est bornée.

2. La continuité uniforme de f :

   Soit $\varepsilon > 0$ et $l = l_\varepsilon$ la longueur d'inclusion associé. Comme f est uniformément continue sur $[-1, 1+l]$, alors il existe $0 < \delta(\varepsilon) < 1$ tel que,

   $$\forall x, y \in [-1, 1+l]; |x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

   D'autre part, si $\tau \in [-x, -x + l]$ est un ε-presque période, on a

   $$\|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

D'où pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x-y| < \delta(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &= \|f(x)+f(x+\tau)-f(x+\tau)-f(y+\tau)+f(y+\tau)-f(y)\|,\\ &\leq \|f(x)-f(x+\tau)\|+\|f(x+\tau)-f(y+\tau)\|+\|f(y+\tau)-f(y)\|,\\ &\leq \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4. *Soit f une fonction continue presque périodique, l'ensemble $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{X}$.*

Démonstration Un ensemble $E \subset \mathbb{X}$ est dit relativement compact, si pour toute suite dans E, on peut extraire une sous-suite convergente dans E.
Dans un espace de Banach, la compacité relative coïncide avec la précompacité. Il suffit de montrè que pour toute $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε dans $\mathbb{X}$, telles que leur réunion couvre l'ensemble $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $l = l_\varepsilon$ la longueur d'inclusion associé à f. Comme f est continue sur le compacte $[0, l]$, on déduit alors que l'ensemble $\{f(x); x \in [0, l]\}$ est un compact dans $\mathbb{X}$.

On prend $x_1, x_2, ..., x_n$, les centres des boules qui couvrent $\{f(x); x \in [0, l]\}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et τ (ε- translation) dans l'intervalle $[-t, -t+l]$.
Comme $t + \tau \in [0, l]$, il existe un entier p dans $\{1, 2, ..., n\}$ tel que $f(x+\tau) \in \mathbf{b}(x_p, \varepsilon)$, avec $\mathbf{b}(x_p, \varepsilon)$: boule de centre x_p et de rayon ε, donc

$$\|f(x)-x_p\| \leq \|f(x)-f(x+\tau)\| + \|f(x+\tau)-x_p\| < 2\varepsilon = \varepsilon',$$

par conséquent

$$\{f(x); x \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{p=1}^{n} \mathbf{b}(x_p, \varepsilon').$$

□

Proposition 5. *L'espace $AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ a une structure d'espace vectoriel, c'est à dire :*

1. *Si $f \in AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$, alors $\alpha f \in AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ pour tout réel αf :*
2. *Si $f, g \in AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$, alors $f + g \in AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$.*

Preuve

1. Soit f une fonction presque périodique, montrons que αf est presque périodique. On a f est presque périodique c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$; il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\alpha f(x+T) - \alpha f(x)\|_{\mathbb{X}} &= |\alpha| \|f(x+T) - \alpha f(x)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq |\alpha|\varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

D'où $\forall \varepsilon' > 0$, il existe $\ell_{\varepsilon'} = \ell_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\|\alpha f(x+T) - \alpha f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon'.$$

Donc $\alpha f \in AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$

2. Soit $f, g \in AP(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$; il existe deux polynômes trigonométriques P et Q tels que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) - P(x)\| \leq \varepsilon \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}} \|g(x) - Q(x)\| \leq \varepsilon.$$

Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|(f+g) - (P+Q)\| &\leq \|f - P\| + \|g - Q\| \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

qui nous confirme la presque périodicité de la fonction $f + g$.

Proposition 6. *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f \neq 0$; alors f^2 l'est aussi.*

Preuve Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x+T) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x)|}$$

On a

$$\begin{aligned} |f^2(x+T) - f^2(x)| &= |(f(x+T) - f(x))(f(x+T) - f(x))| \\ &\leq |f(x)||f(x+T) - f(x)| \\ &\leq \leq \frac{\varepsilon}{2|f(x)|} 2|f(x)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc f^2 est presque périodique.

Proposition 7. *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, si $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(f * g) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

Preuve Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ donc f est continue et comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $(f * g)$ est continue. On a pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\|(f * g)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On suppose que $g \neq 0$ car si $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ alors $f * g = 0$ et donc $(f * g) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
On a $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre τ vérifiant

$$\|f(x + \tau) - f(x)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

Posons $x = y - t \in \mathbb{R}$

$$\|f(y - t + \tau) - f(y - t)\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
(f * g)(x + \tau) - (f * g)(y) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)f(y + \tau - x) - \int_{\mathbb{R}} g(x)f(y - x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(y + \tau - x) - f(y - x))g(x)dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|(f * g)(x + \tau) - (f * g)(y)\|_{\mathbb{X}} &= \|f(y + \tau - x) - f(y - x)\|_{\mathbb{X}} |g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} |g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

1.4 Presque périodicité des fonctions à un paramètre

Pour étudier la presque périodicité des solutions des équations différentielles de type

$$x' = f(t, x) \tag{1.3}$$

il est indispensable d'imposer la presque périodicité de la fonction f(t,x) uniformement par rapport à x dans les compacts, sinon la fonction composée $f(t, \phi(t))$ (où ϕ est une solution de l'équation (1.3) n'est pas presque périodique en général). Par exemple, la fonction $f(t, x) = \sin(tx)$ est presque périodique pour chaque x par contre la fonction composée $f(t, \sin(t)) = \sin(t \sin(t))$ n'est pas presque périodique.

Définition 8. *On dit qu'une fonction continue f est presque périodique en t et uniformèment en $x \in B$ avec B un sous ensemble borné de $\mathbb{X}$.*

Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre τ vérifiant

$$\|f(t+\tau, x) - f(t,x)\| \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in B.$$

Théorème 2. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{X} \\ (t,x) &\rightarrow f(t,x) \end{aligned}$$

une fonction presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ et uniformément en $x \in B$ avec $B \subset X$.

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \ell\|x-y\|, \forall x, y \in \mathbb{X} \quad et \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ est une fonction presque périodique, alors la fonction

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{X} \\ t &\rightarrow \Gamma(t) = f(t, g(t)) \end{aligned}$$

est aussi une fonction presque périodique.

Preuve On a $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon], \alpha \in \mathbb{R}$ contient un nombre T vérifiant

$$\|g(x+T) - g(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2\ell}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

On a,

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t+\tau) - \Gamma(t)\| &= \|f(t+\tau), g(t+\tau) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \|f(t+\tau), g(t+\tau) - f(t+\tau, g(t))\|_{\mathbb{X}} + \|f(t+\tau), g(t+\tau) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \ell\|g(t+\tau) - g(t)\|_{\mathbb{X}} + \|f(t+\tau), g(t+\tau) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

Comme f est presque périodique, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre τ vérifiant

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau), g(t+\tau) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

En combinant les inégalités 1.4 et 1.5, on obtient

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Gamma(t+\tau) - \Gamma(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau), g(t+\tau) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Par conséquent $\Gamma : t \mapsto f(t, g(t))$ est presque périodique.

1.5 Presque périodicité asymptotique au sens de Bohr

La notion de fonctions asymptotiquement presque périodiques a été introduite pour la première fois par Fréchet [19], elle concerne les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}_+$ et qui ont un comportement presque périodique a partir d'un certain rang.

Définition 9. *Une fonction f définie et continue sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$ est dite asymptotiquement presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\ell = \ell(\varepsilon) > 0$ et $T = T(\varepsilon) \geq 0$, tel que tout intervalle de ℓongueur ℓ de $\mathbb{R}$ contient au moins un point τ, qui vérifié*

$$\sup_{t\geq T} |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \text{ pour tout } t \geq T \text{ avec } t+\tau \geq T$$

1.6 Presque périodicité des fonctions aléatoires

Plusieurs phénomènes naturels où dus à l'hommme (comme le climat, la pollution, des phénomènes neurophysiologiques, etc) mathématiquement modélisables, sont aléatoires et sont régis par des équations différentielles stochastiques.
Le premier qui à introduit le concept de fonctions aléatoires presque périodique est E. Slutsky[32], il a étudié dans son papier de 1938, la presque périodicité des trajectoire d'un processus stochastique stationnaire. La théorie des fonctions aléatoires presque périodiques a connu un grand développement durant les années 1980 et les années 1990.

1.6.1 Presque périodicité des trajectoires

T. Kawata [23] a étudié le concept d'uniforme presque périodicité des trajectoires et R. J. Swift [33] a obtenu, en utilisant les résultats de Kawata, quelques conditions suffisantes pour qu'un processus stochastique harmonisable soit presque périodique.

1.6.2 Presque périodicité en loi

Le cas des fonctions presque périodiques à valeurs dans l'espace Polonais $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ de toutes les mesures de probabilités sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ a été introduit par Morozan et Tudor [28], ce qui leur a permis de définir le concept de presque périodicité en loi unidimensionnelle de C. Tudor [34] d'un processus stochastique.

Définition 10. *Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ à valeurs dans un espace Polonais $\mathbb{E}$ est dit presque périodique en loi unidimensionnelle (APOD) si l'appplication*

$$\mu_t : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathcal{P}(\mathbb{E}) \\ t & \mapsto \mu_t \end{cases}$$

est presque périodique, où μ_t est la loi de (X(t)).
APOD= Almost periodic one-dimentional distributions.

Définition 11. *Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ à valeurs dans un espace Polonais $\mathbb{E}$ est dit presque périodique en loi finidimensionnelle (APFD) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'application*

$$\mu_t^{t_1,\ldots,t_n} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathcal{P}(\mathbb{E}^n) \\ t & \mapsto \mu_t^{t_1,\ldots,t_n} \end{cases}$$

est presque périodique, où $\mu_t^{t_1,\ldots,t_n}$ est la loi de $(X(t+t_1),...,X(t+t_n))$.
APFD= Almost periodic finite-dimentionale distributions.

Définition 12. *La presque périodicité en loi infinidimensionnelle (APD) d'un processus stochastique continu $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est caractérisée par la presque périodicité de l'application*

$$\tilde{\mu_t} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_k) \\ t & \mapsto \tilde{\mu_t} \end{cases}$$

où $\tilde{\mu_t}$ est la loi de $\tilde{X}(t) := X(t+.)(\mathcal{C}_k = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$).
APD= Almost periodic distributions .

Plusieur résultats de C .Tudor et ses collaborateur ont été obtenus grâce à une métrique notée d_{BL}, définie sur l'espace de probabilités $\mathcal{P}(\mathbb{E})$, compatible avec la topologie de la convergence étroite et complète. Cette distance est définie par :

$$|f|_L = \sup\{\frac{f(x)-f(y)}{d_{\mathbb{E}}(x,y)}; x \neq y\}, \quad |f|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{E}} |f(x)|.$$
$$\text{et } \ |f|_{BL} = \max\{|f|_\infty, |f|_L\}.$$

pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$,

$$d_{BL}(\mu,\nu) = \sup_{|f|_{BL}\leq 1} \Big| \int_{\mathbb{E}} f d(\mu-\nu) \Big|$$

où $f \in C_b(\mathbb{E}), (C_b(\mathbb{E})$ est l'espace de Banach des fonctions continues bornées définie sur $\mathbb{E}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. La plus part de nos résultat sont obtenus grâce à cette métrique.

Dans le cas général des fonctions à valeurs dans l'espace des mesure (signées), une étude exhaustive a été réalisée par I. Danilov ([12],[13],[14])

Dans le même sens, Gladyshev [20] a introduit la presque périodicité corrélée d'un processus stochastique et Hurd [22] la presque périodicité unitaire. Dans [34], C.Tudor a fait une étude comparative entre ces différentes notions de presque périodicité.

1.6.3 Presque périodicité en probabilité

Le concept de la presque périodicité en probabilité à été initialement introduit pour la permière fois par O. Onicescu et V. Istratescu [29].

Définition 13. *On dit que le processus X est Bohr-presque périodique en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $l = l(\varepsilon, \eta) > 0$ tels que pour tout intervalle de longueur ℓ il existe τ pour lequel*

$$P\{d_{\mathbb{E}}(X(t+\tau), X(t)) > \eta\} \leq \epsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Définition 14. *On dit que le processus X est asymptotiquement Bohr-presque périodique en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ il existe $l(\varepsilon, \eta) > 0$ et $T = T(\varepsilon, \eta)$ tels que pour tout intervalle de ℓongueur ℓ il existe τ pour lequel*

$$P\{d_{\mathbb{E}}(X(t+\tau), X(t)) > \eta\} \leq \epsilon, \text{ pour tout } t \geq T,\ t+\tau \geq T.$$

Precupanu [30] a démontré que la plupart des propriétés de base des fonctions presque périodiques restent vraies dans le cas des processus à valeur réelles presque périodiques en probabilité.

On peut aussi définir la presque périodicité en probabilité au sens de Bochner d'un processus stochastique X par la relative compacité de l'ensemble $\{\tilde{X}(t), t \in I\}$ par rapport à la topologie de la convergence uniforme en probabilité, ce qui revient à dire que X satisfait le critére de suite double de Bochner pour la convergence en probabilité.

Plusieurs résultats sur l'étude des solutions stationnaires, périodiques ou presque périodiques, des équations différentielles stochastiques ont été établis. Dorogoytsev [17] et Morozan ([26],[27]) ont étudié la périodicité des solutions des équations différentielles stochastiques affines (en dimension finie et infinie), la presque périodicité à été obtenue par Morozan, Halanay et Tudor [21]. Concernant la presque périodicité en loi unidimensionnelle (APOD) des solutions des équations différentielles stochastiques affines, elle a été obtenu par Morozan et Tudor[28]. Tudor et Da Prato [15] ont prouvé sous la condition de dissipativité l'éxistence des solutions presque périodiques en loi infinidimensionnelle (APD) des équations différentielles stochastiques semi-linéaires (en particulier les équation affines) sur les espace de Hilbert.

1.7 Processus presque périodiques en moyenne d'ordre p

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, pour $p \geq 2$ l'espaces $L^p(\Omega; \mathbb{X})$ est un espace de Banach quand il est muni avec sa norme $\|.\|_{L^p(\Omega;\mathbb{X})}$.

Définition 15. *Un processus stochastique $X : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X})$ est dit continue si*

$$\lim_{t \to s} \mathbb{E}\|X(t) - X(s)\|^p = 0$$

Définition 16. *Un processus stochastique $X : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X})$ est dit stochastiquement borné si*

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{P}\{\|X(t)\| > N\} = 0$$

Définition 17. *Un processus stochastique continu $X : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X})$ est dit presque périodique en moyenne p si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $T_0(\varepsilon) > 0$ tel que chaque intervalle de longueur $T_0(\varepsilon)$ contient un certain nombre τ vérifié :*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \quad \mathbb{E}\|X(t + \tau) - X(t)\|^p < \varepsilon$$

Le processus stochastique continu X qui est presque périodique en moyenne d'ordre 2 appelé presque périodique en moyenne quadratique.
Comme pour les fonctions périodiques classiques, le nombre τ sera appellée ε-translation de X.
L'ensemble de tous les processus presque périodiques $X : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X})$ sera noté $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; L^p(\Omega; \mathbb{X}))$.

Le lemme suivant donne certaines propriétés de processus presque périodiques en moyenne p.

Lemme 2. *Si X appartient à $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; L^p(\Omega; \mathbb{X}))$, alors*

(1) L'application $t \to \mathbb{E}\|X(t)\|^p$ est uniformément continue ;

(2) Il existe une constante $M > 0$ tel que $\mathbb{E}\|X(t)\|^p$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$;

(3) X est stochastiquement bornée.

Preuve Les preuves (1) et (2) ne sont pas difficiles, pour montrer (3) on utilise l'inégalité de Tchebychev et la propriété (2) du lemme précédant et on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbf{P}\{\|X(t)\|N\} \leq \frac{1}{N^P} \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|X(t)\|^p \leq \frac{M}{N^P};$$

donc $\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \quad \mathbf{P}\{\|X(t)\| > N\} = 0$

Définition 18. *Une fonction $F : \mathbb{R} \times L^p(\Omega; \mathbb{X})$ avec $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; L^p(\Omega; \mathbb{X})$ est l'espace des processus presque périodiques en moyenne p muni avec la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.*
Soit $(\mathbb{X}_1, \| \cdot \|_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \| \cdot \|_2)$ sont des espaces de Banach et soient $L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$,ses espaces-$L^p$ respectivement.

Définition 19. *Une fonction $F : \mathbb{R} \times L^p(\Omega; \mathbb{X}_1) \to L^p(\Omega; \mathbb{X}_2) \to F(t, Y)$, qui est conjointement continue est appelée presque périodique en moyenne d'ordre p en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $Y \in K$ où $K \in L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ est un compact si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $T_0(\varepsilon) > 0$ tel que chaque intervalle de longueur $T_0(\varepsilon) > 0$ contient un certain nombre τ vérifie :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t+\tau, Y) - F(t, Y)\|_2^p$$

pour chaque processus stochastique $Y : \mathbb{R} \to K$.

1.7.1 Composition du processus presque périodiques en moyenne d'ordre p

Nous avons les résultats de composition suivants :

Théorème 3. *Soit $F : \mathbb{R} \times L^p(\Omega; \mathbb{X}_1) \to L^p(\Omega; \mathbb{X}_2), (t, Y) \to F(t, Y)$ un processus presque périodique en moyenne p en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $Y \in K$, où $K \subset L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ est un compacte. On suppose que F est uniformément continue et bornée dans le sous espace $K' \subset L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tels que $(X, Y) \in K' \subset L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ et $\mathbb{E}\|X - Y\|_1 < \delta_\varepsilon$, alors*

$$\mathbb{E}\|F(t, Y) - F(t, Z)\|_2^p < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

pour tous $Y, Z \in L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ et pour chaque $t \in \mathbb{R}$, alors pour tout processus presque périodique en moyenne d'ordre p $f : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ le processus stochastique $t \to F(t; \phi(t))$ est aussi presque périodique.

Preuve Puisque $\phi : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ est presque périodique alorss :

$$\mathbb{E}\|\phi(t+\tau) - \phi(t)\|_1^p < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

On a aussi que $\phi : \mathbb{R} \to L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ est borné et que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|\phi(t)\|_1^p < \infty$. Soit $k'' \subset L^p(\Omega; \mathbb{E}_1)$ un sous ensemble borné tel que $\phi(t) \in K''$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Maintenant

$\mathbb{E}\|F(t+\tau, \phi(t+\tau)) - F(t, \phi(t))\|_2^p \leq 2^{P-1}\mathbb{E}\|Ft+\tau, \phi(t+\tau)) - F(t+\tau, \phi(t))\|_2^p + 2^{p-1}\mathbb{E}\|F(t, \phi(t+\tau)) - F(t, \phi(t))\|_2^p$.

Tenant compte de l'équation 1.6 (prendre $\delta_\varepsilon = \varepsilon$) et en utilisant la continuité uniforme de F sur un sous espace borné de $L^p(\Omega; \mathbb{X}_1)$ on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t, \phi(t+\tau)) - F(t, \phi(t))\|_2^p < \frac{\varepsilon}{2^p}. \tag{1.7}$$

Par l'utilisation de presque périodicité de F on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t, \phi(t+\tau)) - F(t, \phi(t+\tau))\|_2^p < \frac{\varepsilon}{2^p}. \tag{1.8}$$

A partir de 1.7 et 1.8 on obtient :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t+\tau, \phi(t+\tau)) - F(t, \phi(t))\|_2^p < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Donc le processus $t \to F(t, \phi(t))$ est presque périodique en moyenne P.

Chapitre 2

Presque-périodicité au sens de Bochner pour les processus stochastiques

Depuis la création de la théorie de presque périodicité par H. Bohr dans les années 1920, de nombreux concepts de la presque périodicité se sont révélés utiles, en particulier ceux de Stepanov, Besicovitch et Weyl. Dans le contexte des processus stochastiques, chacune de ces notions donne lieu à plusieurs définitions possibles tels que : presque-périodicité en distribution, en probabilité, en moyenne quadratique, presque sûr etc. Bochner-presque périodicité coïncide avec Bohr-presque périodicité lorsque le temps d'intervalle I est la ligne entière $\mathbb{R}$ [7], mais cela ne revient qu'une presque périodicité asymptotique au sens de Bohr quand $I = [0, +\infty)$. Il a l'avantage par rapport à la définition de Bohr qu'il ne dépend pas de la structure uniforme de l'espace d'état mais seulement de sa topologie (voir la remarque 2 dans ce chapitre).

Notation et terminologie

Dans tout ce qui suit, on nous donne :

- un espace topologique séparable complètement régulier $\mathbb{E}$ (l'espace d'état), par ex. $\mathbb{E}$ est un espace métrisable séparable,
- un intervalle I, qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ (intervalle de temps),
- un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$,
- un processus stochastique continu X sur $\mathbb{E}$ défini sur $\Omega \times \mathrm{I}$.

Nous utilisons les notations suivantes :

- Nous notons $\mathcal{C}(\mathrm{I}; \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{E}$.
- L'espace des trajectoires du processus X est l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{E}$, qui est induit avec la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts

de I et que nous désignons par $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k(\mathrm{I};\mathbb{E})$. La définition de $\mathcal{C}_k$ semble dépendre du choix d'une uniformité sur $\mathbb{E}$ (par exemple, d'une métrique dans le cas métrisable), mais en réalité la topologie de $\mathcal{C}_k$ est indépendante de ce choix, voir ([18], Théorème 8.2.6).

- Pour tout espace uniforme F, on dénote $\mathcal{C}_u(\mathrm{I};\mathrm{F})$ l'espace des fonctions continues de I dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur I.

- Pour toute fonction $x : \mathrm{I} \to \mathbb{E}$, et pour tout $t \in \mathrm{I}, \widetilde{x}(t)$ est l'application de translation $x(t + .) : \mathrm{I} \to \mathbb{E}, s \to x(t + s)$.

- Pour tout espace topologique F, on note $\mathcal{P}(\mathcal{C}_k)$ l'espace des probabilités de Radon sur F muni de la topologie de convergence faible, qui est la topologie la plus grossière de sorte que les applications $\mu \to \mu(f)$ sont continues pour toute les fonctions continues borné $f : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$.

- Nous désignons par la loi (U) la loi d'une variable aléatoire U. La loi du processus X est la loi de la variable aléatoire $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}(0)$ à valeur dans $\mathcal{C}_k$.

Comme nous nous concentrons principalement sur l'étude de Bochner-presque périodicité pour les processus stochastiques, par défaut, dans ce chapitre, «presque périodique» signifie «Bochner-presque périodique».

2.1 Le cas des espaces métrisables

Dans cette section, $\mathbb{E}$ est un espace polonais, c'est-à-dire $\mathbb{E}$ est séparable et sa topologie peut être définie par une distance $d_{\mathbb{E}}$ telle que $(\mathbb{E}, d_{\mathbb{E}})$ soit complèt.

Avant de donner les différentes définitions de presque-périodicité pour les processus stochastiques, rappelons les définitions correspondantes pour les fonctions déterministes.

2.1.1 Presque-périodicité dans le cas déterministe

Soit $d_{\mathbb{E}}$ une distance sur $\mathbb{E}$ qui est compatible avec la topologie de $\mathbb{E}$, et soit $x : \mathrm{I} \to (\mathbb{E}; d_{\mathbb{E}})$ est une fonction continue.

On dit que x est Bochner-presque périodique si l'ensemble $\{\widetilde{x}(t), t \in \mathrm{I}\} = \{x(t + .), t \in \mathrm{I}\}$ est totalement bornée dans l'espace $\mathcal{C}_u(\mathrm{I}, \mathbb{E})$.

Définition 20. *On dit que x est Bohr-presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient au moins un ε-presque-période, c'est-à-dire, un nombre τ pour lequel*

$$d_{\mathbb{E}}(x(t+\tau), x(t)) \leq \varepsilon, \quad pour\ tout\ t \in \mathrm{I} = \mathbb{R}.$$

Définition 21. *On dit que x est asymptotiquement Bohr-presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) > 0$ et $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient au moins un ε-presque-période pour lequel*

$$d_{\mathbb{E}}(x(t+\tau), x(t)) \leq \varepsilon, \quad pour\ tout\ t \geq T\ \ tel\ que\ t+\tau \geq T.$$

Dans le premier cas (Bohr-presque périodicité), on dit que l'ensemble de ε-périodes de x est relativement dense dans I. Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel, une fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est asymptotiquement Bohr-presque périodique ssi il a la forme $x = y + z$, où y est Bohr-presque périodique et z est une fonction continue avec $\lim_{\pm\infty} z = 0$.
Les énoncés suivants sont équivalents (voir [8], [15] et le corollaire 5)

1. x est Bochner-presque périodique.
2. x vérifié le critère de suite double de Bochner, c'est-à-dire, pour chaque paire de suite (α'_n) et (β'_n) dans I, il existe des sous-suite $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ respectivement avec les mêmes indices tels que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, les limites

$$lim_{n\to\infty} lim_{m\to\infty} x(t+\alpha_n+\beta_m) \quad \text{et} \quad lim_{n\to\infty} x(t+\alpha_n+\beta_n), \tag{2.1}$$

   existent et sont égales.
3. x est presque périodique au sens de Bohr si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, ou presque périodique asymptotiquement au sens de Bohr si $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$.

Remarque 2. *1. Le critère de suite double de Bochner montre que la presque périodicité de Bochner est topologique, c'est-à-dire, qu'elle ne dépend pas du choix de $d_{\mathbb{E}}$, à condition que $d_{\mathbb{E}}$ soit compatible avec la topologie de $\mathbb{E}$.*

2. Une propriété marquante du critère de suite double de Bochner est que les limites de 2.1 *existent dans n'importe quel trois modes de convergences : point par point, uniforme sur des intervalles compacts et uniforme sur* I *(par rapport à $d_{\mathbb{E}}$). Ce critère a donc l'avantage de permettre d'établir une convergence uniforme par convergence simple.*

3. La presque périodicité asymptotique au sens de Bohr est strictement plus faible que la presque périodicité au sens de Bohr.

2.1.2 Presque-périodicité et presque périodicité asymptotique au sens de distribution

Selon la terminologie de Tudor [34], on a les définitions suivantes :

Définition 22. *On dit que X est Bochner-presque périodique en distribution, APD en abrégé, si l'application $t \to$ loi $(\widetilde{X}(t)), \mathrm{I} \to \mathcal{P}(C_k)$ est Bochner-presque périodique.*

Définition 23. *On dit que* X *est Bohr-presque périodique en distribution si l'application $t \to$ loi $(\widetilde{X}(t)), \mathrm{I} \to \mathcal{P}(C_k)$ est Bohr-presque périodique en distribution.*

Définition 24. *On dit que* X *est asymptotiquement Bohr-presque périodique en distribution si l'application $t \to$ loi $(\widetilde{X}(t)), \mathrm{I} \to \mathcal{P}(C_k)$ est asymptotiquement Bohr- presque périodique en distribution.*

Voir d'autres définitions de la périodicité en distribution, voir ([1], [28],[34]) : par exemple, nous disons que X a des distributions dimensionnelles finies presque périodiques (APFD en abrégé), si pour toutes les suites finies $(t_1, ..., t_n)$ dans I, l'application $t \mapsto$ loi $(\mathrm{X}(t_1+t), ..., \mathrm{X}(t_n+t))$ est presque périodique. De même, si l'application $t \to$ loi $(\mathrm{X}(t))$ est presque périodique, nous disons que X a des distributions unidimensionnelles presque-périodiques (APOD en abrégé).

Bochner-presque périodicité en distribution telle que définie est prouvée pour certaines solutions des équations différentielles stochastiques dans ([28], [35], [1], [15]).

Proposition 8. *Si* X *est APD alors presque toutes ses trajectoires sont uniformément continues sur* I.

preuve Supposons que X soit presque périodique en distribution, alors la famille $(\widetilde{X}(r))_{r\in \mathrm{I}}$ est faible dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$. Par ([6], Théorème 7.3) ou ([35], Théorème 4), cela implique que pour chaque intervalle $[a, b] \subset \mathrm{I}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathrm{P}\{\sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ t,s\in[a,b]}} d_{\mathbb{E}}(\widetilde{X}(r)(t), \widetilde{X}(r)(s) > \eta\} < \varepsilon$$

pour tout $r \in \mathrm{I}$. En équivalence

$$\mathrm{P}\{\sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ t,s\in[a,b]}} d_{\mathbb{E}}(\mathrm{X}(r+t), \mathrm{X}(r+s)) > \eta\} < \varepsilon$$

pour tout $r \in \mathrm{I}$. Donc

$$\mathrm{P}\{\sup_{|t-s|<\delta} d_{\mathbb{E}}(\mathrm{X}(t), \mathrm{X}(s)) > \eta\} < \varepsilon.$$

En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\delta_n > 0$ tel que

$$\mathrm{P}\{\sup_{|t-s|<\delta_n} \mathrm{d}_{\mathbb{E}}(\mathrm{X}(t), \mathrm{X}(s)) > \frac{1}{n}\} < \frac{1}{n}.$$

Soit

$$\Omega_n = \{\sup_{|t-s|<\delta_n} d_{\mathbb{E}}(\mathrm{X}(t), \mathrm{X}(s)) \leq \frac{1}{n}\} \text{ et } \Omega_0 = \limsup_n \Omega_n.$$

pour chaque $\omega \in \Omega_0$, l'application $t \mapsto \mathrm{X}(t)(\omega)$ est uniformément continue. De plus nous avons $\mathrm{P}(\Omega_n) \geq 1-\frac{1}{n}$, donc $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$ puisque $\mathrm{P}(\limsup \Omega_n) \geq \limsup \mathrm{P}(\Omega_n)$.

Corollaire 1. *Si les trajectoires de* X *sont uniformément continues, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) X *est APFD.*

(2) X *est APD.*

Avant de donner la preuve du corollaire 1, nous rappelons la définition suivante : Pour $f \in$ $\mathrm{C}_b(\mathbb{E})$, (où $\mathrm{C}_b(\mathbb{E})$ est l'espace de Banach de fonctions continues et bornées défini sur $\mathbb{E}$),

$$|f|_L = \sup\{\tfrac{f(x)-f(y)}{d_{\mathbb{E}}(x,y)}; x \neq y\}, \quad |f|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{E}} |f(x)|.$$
$$\textit{et } \ |f|_{BL} = \max\{|f|_\infty, |f|_L\}.$$

Pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$, nous définissons

$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sup_{|f|_{BL}\leq 1} \int_{\mathbb{E}} f d(\mu - \nu).$$

La métrique d_{BL} sur $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ est complète et compatible avec la topologie de la convergence faible.

Preuve de corrollaire

Clairement (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons que X est $APFD$. Soit (α'_n) et(β'_n) deux suite dans I et pour $t_1, t_2, ..., t_k$, $t \in \mathrm{I}$ défini (en utilisant les notations de [34]).

$$\mu_t^{t_1,...,t_k} :=\text{loi}((\mathrm{X}(t_1 + t), ..., \mathrm{X}(t_k + t)))$$

Par une procédure diagonale on peut trouver des sous-suite $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ avec les mêmes indices que pour tout $k \geq 1$, pour tout $q_1, q_2, ..., q_k \in \mathbb{Q} \cap \mathrm{I}$ (où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels), et pour tout $t \in \mathrm{I}$, les limites.

$$\lim_n \mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{q_1,\ldots,q_k} \text{ et } \lim_n \lim_m \mu_{t+\alpha_n+\beta_m}^{q_1,\ldots,q_k}$$

existent et sont égaux. Nous avons, pour tout $t_1, t_2, ..., t_k,\ t \in \mathrm{I}$, et pour tout $q_1, q_2, ..., q_k \in \mathbb{Q} \cap \mathrm{I}$.

$$\begin{aligned} d_{BL}(\mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{q_1,\ldots,q_k}, \mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{t_1,\ldots,t_k}) &= \sup_{\|f\|_{BL}\le 1} \int_{\mathbb{E}^k} f d(\mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{q_1,\ldots,q_k} - \mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{t_1,\ldots,t_k}) \\ &\le \int_\Omega d_{\mathbb{E}^k}[(\mathrm{X}(q_1+t+\alpha_n+\beta_n), ..., \mathrm{X}(q_k+t+\alpha_n+\beta_n)), \\ &\quad (\mathrm{X}(t_1+t+\alpha_n+\beta_n), ..., \mathrm{X}(t_k+t+\alpha_n+\beta_n))]dP. \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité uniforme des trajectoires de X, si $(q_1, ..., q_k) \to (t_1, ..., t_k)$, alors

$$d_{BL}(\mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{q_1,\ldots,q_k}, \mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{t_1,\ldots,t_k}) \to 0$$

uniformément par rapport à $t \in \mathrm{I}$ et $n \geq 0$. Par un résultat classique sur l'inversion des limites, on déduit que pour tout $k \geq 1$ et $t_1, ..., t_k,\ t \in \mathrm{I}$, les limites

$$\lim_n \mu_{t+\alpha_n+\beta_n}^{t_1,\ldots,t_k} \text{ et } \lim_n \lim_m \mu_{t+\alpha_n+\beta_m}^{t_1,\ldots,t_k}$$

existe et sont égaux. Par conséquent, pour montrer que les limites

$$\lim_n \text{ loi } (\widetilde{X}(t+\alpha_n+\beta_n)) \text{ et } \lim_n \lim_m \text{ loi } (\widetilde{X}(t+\alpha_n+\beta_n))$$

existent et sont égaux, il suffit de prouver que $(\widetilde{X}(t))_{t\in\mathrm{I}}$ est serré dans $\mathcal{C}_K$. Puisque les trajectoires de X sont uniformément continues, on peut trouver pour chaque $\omega \in \Omega$ et pour tout $\eta > 0$, un nombre $\delta(\omega) > 0$, tel que, pour tout $t, s \in \mathrm{I}$,

$$\sup_{|t-s|<\delta(\omega)} d_{\mathbb{E}}(\mathrm{X}(t)(\omega), \mathrm{X}(t)(\omega)) < \eta. \tag{2.2}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{P}\{\delta > \delta_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon. \tag{2.3}$$

En effet, supposons que (2.6) soit faux, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta^* > 0$, on a $\mathrm{P}\{\delta \leq \delta^*\} > \varepsilon_0$. En particulier, pour chaque $m \in \mathbb{N}, \mathrm{P}\{\delta \leq \frac{1}{m}\} > \varepsilon_0$. Soit $\mathrm{A}_m = \{\delta \leq \frac{1}{m}\}$, nous avons

$$\mathrm{P}\{\delta = 0\} = \inf_m \mathrm{P}\{\delta \leq \frac{1}{m}\} > \varepsilon_0 > 0,$$

ce qui contredit $\delta(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Ainsi, à partir de (2.2) et (2.6), nous déduisons qu'il existe de δ_ε tels que

$$P\{\sup_{|t-s|<\delta_\varepsilon} d_{\mathbb{E}}(X(t), X(s)) > \eta\} \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour chaque intervalle $[a,b] \subset I$ et chaque $r \in I$, nous avons

$$P\{\sup_{\substack{|t-s|<\delta_\varepsilon \\ t,s\in[a,b]}} d_{\mathbb{E}}(\widetilde{X}(r)(t), \widetilde{X}(r)(s)) > n\} \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

Puisque X est APFD, la famille $(X(t))_{t\in I} = (\widetilde{X}(t)(0))_{t\in I}$ est serrée, donc par (2.4) et ([6], [36]) nous concluons que $(\widetilde{X}(t))_{t\in I}$ est serré dans $\mathcal{C}_k$.

Corollaire 2. *Supposons que* $I = \mathbb{R}^+$. *Si* X *est un processus de Feller homogène avec des trajectoires uniformément continues, les propriétés suivantes de X sont équivalentes :*

(1) *X est APOD.*

(2) *X est APFD.*

(3) *X est APD.*

preuve L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) découle du corollaire 1. Clairement (2) $\Rightarrow$ (1). Reste à montrer que (1) $\Rightarrow$ (2).
En utilisant à nouveau la notation de Tudor [34], posons

$$\mu_t := \text{loi } (X(t)) \text{ et } \mu_t^{t_1,\ldots,t_k} := \text{loi } ((X(t_1+t), \ldots, X(t_k+t))).$$

Supposons que X est APOD, alors pour toute suite $(\alpha'_n) \subset \mathbb{R}^+$, il existe une sous-suite $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ telle que pour chaque fonction $g \in C_b(\mathbb{E})$($C_b(\mathbb{E})$ est l'espace de Banach des fonctions continues et bornées, $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$) la limite

$$\lim_n \mu_{t+\alpha_n}(g)$$

existe uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}^+$. Pour montrer que la limite

$$\lim_n \mu_{t+\alpha_n}^{t_1,\ldots,t_k}$$

existe uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}^+$, il suffit du montrer pour $k = 2$ et $t_1 < t_2$. Soit $f \in C_b(\mathbb{E} \times \mathbb{E})$, nous avons

$$\mu_{t+\alpha_n}^{t_1,t_2}(f) = \int_E \mu_0(dx_0) \int_{\mathbb{E}} p_{t_1+t+\alpha_n}(x_0, dx_1) \int_E P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) f(x_1, x_2),$$

où $p_t(x, .)$ est la fonction de transition pour un processus de Markov X de temps homogène. Puisque X est un processus de Feller, la fonction

$$x_1 \mapsto g(x_1) := \int_{\mathbb{E}} p_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) f(x_1, x_2)$$

est dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{E})$. Donc

$$\mu_{t+\alpha_n}^{t_1,t_2}(f) = \int_{\mathbb{E}} \mu_0(dx_0) \int_{\mathbb{E}} p_{t_1+t+\alpha_n}(x_0, dx_1) g(x_1) = \mu_{t+t_1+\alpha_n}(g)$$

converge uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}^+$, d'où X est APFD.

2.1.3 Presque-périodicité et presque-périodicité asymptotique en probabilité ou en p-moyenne

Nous disons que X est Bochner-presque périodique en probabilité si $\{\widetilde{X}(t), t \in \mathrm{I}\}$ est totalement borné par rapport à la topologie de la convergence uniforme en probabilité, ce qui revient à dire que X vérifié le critère de suite double de Bochner pour la convergence en probabilité. Rappelons de Remarque 2 (2) que cette propriété ne dépend que de la topologie de la convergence en probabilité, et non de toute métrique compatible avec cette topologie, donc indépendante de la métrique $d_{\mathbb{E}}$ sur $\mathbb{E}$.

Définition 25. *On dit que X est Bohr-presque périodique en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $l = l(\varepsilon, \eta) > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contienne au moins un nombre τ pour lequel*

$$\mathrm{P}\{d_{\mathbb{E}}(X(t+\tau), X(t)) > \eta\} \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Définition 26. *On dit que X est asymptotiquement Bohr-presque périodique en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $l = l(\varepsilon, \eta) > 0$ et $T = T(\varepsilon, \eta)$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contienne au moins un nombre τ pour lequel*

$$\mathrm{P}\{d_{\mathbb{E}}(X(t+\tau), X(t)) > \eta\} \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t \geq T, t+\tau \geq T.$$

Precupanu [30], a montré que la plupart des propriétés de base des fonctions Bohr-presque périodiques peuvent être formulées en conséquence pour les processus presque périodiques en probabilité à valeurs dans $\mathbb{R}$, en particulier le Théorème d'approximation habituel avec des polynômes trigonométriques aléatoires est valable pour les processus stochastiques.

Considérons maintenant le cas où $\mathbb{E}$ est un espace normé et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. On note $\|.\|_{\mathbb{E}}$ la norme de $\mathbb{E}$. Soit $p \geq 1$. On dit que X est presque périodique en p-moyenne si l'application $X : \mathbb{R} \to \mathrm{L}^P(\Omega; \mathbb{E})$ est presque périodique par rapport à la métrique induite par $\|.\|_p = (\int \|.\|_{\mathbb{E}}^p dP)^{\frac{1}{p}}$.

Proposition 9. *[25] Soit* $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. *Si* X *est presque périodique en p-moyenne, alors il est presque périodique en probabilité. Inversement, si* X *est presque périodique en probabilité et que la famille* $\{\|X(t)\|_{\mathbb{E}}^p, t \in \mathbb{R}\}$ *est uniformément intégrable, alors* X *est presque périodique en p-moyenne .*

□

La Presque périodicité en moyenne quadratique (en utilisant la définition de Bohr, mais avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$) est prouvée pour quelques solutions d'équations différentielles stochastiques dans ([2], [3], [4]).

Contre-exemple (**presque périodicité en probabilité et continuité uniforme des trajectoires**) la Presque périodicité en probabilité d'un processus X n'implique pas que ses trajectoires soient uniformément continues. Par exemple, soit (δ_n) une suite de variables aléatoires sur l'espace de probabilité $([0,1], dt)$ (dt est la mesure de Lebesgue) telle que $\delta_n := 1_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}$ pour $2^{k-1} \leq n < 2^k, k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $n \geq 1$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(1-t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ defini par

$$X_t(\omega) = \begin{cases} f_{[t]}(t-[t]) & \text{si} \quad \delta_{[t]}(\omega) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \delta_{[t]}(\omega) = 0 \end{cases}$$

où [t] est la partie entière de t. Les trajectoires de X sont continues sur $\mathbb{R}^+$, mais presque aucune n'est uniformément continue, ni bornée, puisque $P(\limsup \delta_n = 1) = 1$. D'après la proposition 8, le processus X n'a pas une distribution presque périodique. D'un autre côté, nous avons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} P(X_t > \varepsilon) \leq \lim_{t\to\infty} P(\delta_{[t]} = 1) = 0$$

ce qui signifie que X est asymptotiquement Bohr-presque périodique en probabilité, c'est donc Bochner-presque périodique en probabilité .

Une variante de cet exemple, avec des trajectoires uniformément bornées, est obtenue en remplaçant X par min (X, 1).

2.1.4 Les propriétés de presque-périodicité presque sûr

Nous pouvons donner au moins trois définitions différentes :

(a) Le processus stochastique X est presque sûrement presque périodique s'il existe un sous ensemble mesurable $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_1) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_1$, la trajectoire $t \to X(t)(\omega)$ est presque périodique.

(b) Le processus stochastique X vérifie le critère de suite double uniforme presque sûr de Bochner si, pour chaque paire de suite (α_n') et (β_n') dans I, il existe un sous-ensemble mesurable $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_1) = 1$ et il y a des sous-suites $(\alpha_n) \subset (\alpha_n')$ et $(\beta_n) \subset (\beta_n')$ respectivement, avec les mêmes indices (indépendants de ω) tels que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, les limites

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} X(t+\alpha_n+\beta_m)(\omega)\, et \lim_{n\to\infty} X(t+\alpha_n+\beta_n)(\omega) \tag{2.5}$$

existent et sont égaux pour tout $\omega \in \Omega_1$. (Dans ce cas, Ω_1 dépend de la paire de suite (α_n') et(β_n').)

(c) On dit que X est presque sûrement équi-presque périodique au sens de Bochner s'il existe un sous ensemble mesurable $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_1) = 1$ et la famille de trajectoires $\{X(\omega)\}_{\omega\in\Omega_1}$ est équi-presque périodique au sens de Bochner, c'est-à-dire, si la famille des applications de translation $\{\widetilde{X}(t)(\omega)\}_{\omega\in\Omega_1}$ est totalement bornée sur $\mathcal{C}_u(\mathrm{I}, \mathbb{E})$.

Évidemment $(c) \Rightarrow (b)$ et $(c) \Rightarrow (a)$. Les implications inverses sont fausses, voir les contre-exemples 2.1.4 et 2.1.5.
Si $\{X(\omega)\}_{\omega\in\Omega_1}$ est un sous ensemble totalement borné de $\mathcal{C}_k(\mathrm{I}; \mathbb{E})$, alors X est presque sûrement équi-presque périodique au sens de Bochner s'il satisfait le critère de suite double uniforme de Bochner, avec l'hypothèse supplémentaire que l'ensemble Ω_1 dans (c) est indépendant de (α_n') et (β_n'). Pour la preuve de cette propriété et des connexions avec équi-presque périodicité dans le sens de Bohr, voir le Théorème 9.

Contre-exemple (presque sûre presque-périodicité et presque sûr équi-presque périodicité)

L'inverse de $(c) \Rightarrow (a)$ est faux. Par exemple, le processus X défini par $X(t)(\omega) = e^{i\frac{t}{\omega}}$, pour tout $\omega \in]0, 1]$ et $t \in \mathrm{I}$ est presque sûrement presque périodique, mais il n'est pas presque périodique en probabilité (donc il est pas presque sûrement équi-presque périodique). En effet, puisque $|X| \leq 1$ alors pour prouver que X n'est pas presque périodique en probabilité, il suffit de montrer que X n'est pas presque périodique en moyenne quadratique. Soit τ ê est un ε-presque période i.e. $\mathrm{E}|X_{t+\tau} - X_t|^2 \leq \varepsilon$, pour tout $t \in \mathrm{I}$. soit $\mathrm{A}(\tau) := \mathrm{E}|X_{t+\tau} - X_t|^2$,

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \int_0^1 |e^{i\frac{t+\tau}{\omega}} - e^{i\frac{t}{\omega}}|^2 d\omega = \int_0^1 |e^{i\frac{\tau}{\omega}} - 1|^2 d\omega = 4\int_0^1 |\frac{e^{i\frac{\tau}{2\omega}} - e^{-i\frac{\tau}{2\omega}}}{2i}|^2 d\omega \\ &= 2\int_0^1 \sin^2(\frac{\tau}{\omega}) d\omega = 2|\tau| \int_{|\tau|}^{\infty} \frac{1-\cos(2u)}{u^2} du \\ &= 2|\tau| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\tau|+k\pi}^{|\tau|+(k+1)\pi} \frac{1-\cos(2u)}{u^2} du \geq 2|\tau| \int_{|\tau+\pi|}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = 2\frac{|\tau|}{|\tau|+\pi}. \end{aligned}$$

Donc si $|\tau| \geq \frac{\varepsilon\pi}{2-\varepsilon}$, on obtient$A(\tau) > \varepsilon$, ce qui montre que l'ensemble de ε-presque-périodes n'est pas relativement dense dans I, donc X n'est pas presque périodique en moyenne quadratique.

2.1.5 Comparaison entre les presque périodicités

Lemme 3. *Soit $(X_n(t))$ une suite de processus convergeant en probabilité uniformément par rapport à $t \in \mathrm{I}$. Il existe une sous-suite $(X_{n_k}(t)) \subset (X_n(t))$ qui converge presque sûrement pour chaque $t \in \mathrm{I}$.*

preuve Supposons que $(X_n(t))$ converge en probabilité vers un processus (X(t)) uniformément par rapport à $t \in \mathrm{I}$, notons $Y_n(t) = d(X_n(t), X(t))$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $N = N(\varepsilon, \eta)$ tel que pour tout $t \in \mathrm{I}$ et $n \geq N$, on a

$$P(Y_n(t) > \varepsilon) < \eta.$$

Soit (η_k) une vraie suite positive telle que

$$\sum_{k \geq n} \eta_k \text{ converge à zéro comme } n \to \infty.$$

A chaque $\varepsilon > 0$ et $\eta_k > 0$, il correspond $\mathrm{N_k} = \mathrm{N}(\varepsilon, \eta_k)$ tel que, pour tout $t \in \mathrm{I}, P(Y_{N_k}(t) > \varepsilon) < \eta_k$. Montrons que $(Y_{N_k}(t))$ converge presque sûrement pour chaque $t \in \mathrm{I}$. Nous avons

$$P(\sup_{k \geq n} Y_{N_k}(t) > \varepsilon) = P(\bigsqcup_{k \geq n} \{Y_{N_k}(t) > \varepsilon\}) \leq \sum_{k \geq n} \eta_k,$$

et le terme de droite converge vers zéro quand $n \to \infty$. Ainsi $(Y_{N_k}(t))$ converge presque sûrement vers zéro pour tout $t \in \mathrm{I}$. Par conséquent $(X_{N_k}(t))$ converge presque sûrement vers (X(t)) pour tout $t \in \mathrm{I}$. □

Théorème 4. *Les propriétés suivantes de X sont équivalentes :*

(1) *X satisfait le critère de suite double uniforme presque sûr de Bochner.*

(2) *X est presque périodique en probabilité.*

preuve Évidemment (1) $\Rightarrow$ (2). On prouve maintenant (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons que X soit presque périodique en probabilité. Soient (α'_n) et (β'_n) deux suites dans I. Il existe des sous suites $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ avec les mêmes indices tels que pour chaque $t \in \mathrm{I}$, les limites en probabilité

$$P - \lim_n X(\alpha_n + \beta_n + t) \text{ et } P - \lim_n \lim_m X(\alpha_n + \beta_m + t)$$

existe et sont égaux. Par Remarque 2(2) ces limites existent uniformément par rapport à $t \in \mathrm{I}$. Le lemme précédent implique qu'il existe des sous suite (encore notées de la même manière) $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ avec les mêmes indices tels que, pour chaque $t \in \mathrm{I}$, les limites

$$\lim_n X(\alpha_n + \beta_n + t) \text{ et } \lim_n \lim_m X(\alpha_n + \beta_m + t)$$

existent et sont égaux presque sûrement.

Presque périodicité en distribution et les autres propriétés de presque périodicité

Maintenant nous Comparons la presque-périodicité en distribution avec les autres propriétés de presque périodicité.

Remarque 3. *Dans toutes les définitions précédentes de presque-périodicité, c'est seulement dans la définition de presque-périodicité en distribution que le choix d'une topologie sur l'espace $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{E})$ des trajectoires joue un rôle.*

Théorème 5. ***(Un résultat de comparaison général)*** *Considérons les propriétés suivantes de X :*

(a) X et APD .

(b) X satisfait le critère de suite double uniforme presque sûr de Bochner.

(c) X est presque périodique en probabilité.

Alors

(1) *(a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c).*

(2) *Si nous supposons que presque toutes les trajectoires de X sont uniformément continues, l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) est vraie.*

Preuve de (1) : L'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ a été montrée dans le Théorème 4. Reste à montrer que $(a) \Rightarrow (b)$.

Supposons (a) et montrons (b). Nous avons seulement besoin de vérifier le critère de suite double de Bochner. Soit (α'_n) et (β'_n) deux suite dans I. Il existe des sous suites (α_n) et (β_n) avec les mêmes indices tels que pour tout $t \in \mathrm{I}$ les limites

$$\lim_n \lim_m \mathrm{loi}(\widetilde{X}(t + \alpha_n + \beta_n)) \quad \text{et} \quad \lim_n \mathrm{loi}(\widetilde{X}(t + \alpha_n + \beta_n)) \tag{2.6}$$

existe et sont égaux. Cela signifie en particulier que, pour chaque n, la limite existe $\lim_m \mathrm{loi}(\widetilde{X}(t + \alpha_n + \beta_n))$. Notons que pour tout $t, s \in \mathrm{I}, \widetilde{X}(t)(s) = \widetilde{X}(0)(t + s)$ donc 2.6 implique

$$\lim_n \lim_m \mathrm{loi}(\widetilde{X}(\alpha_n + \beta_m)) \quad \text{et} \quad \lim_n \mathrm{loi}(\widetilde{X}(\alpha_n + \beta_n) \tag{2.7}$$

existe et sont égaux.

Nous utilisons mainteant un théorème de représentation de Skorokhod dû à Blackwell et Dubins

Théorème 6. (***Blakwell-Dubins***)*[7]*
Soit $\mathbb{U}$ *est un espace polonais, et soit* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ *l'espace des mesures de probabilités sur la* σ*-l'algèbre de Borel de* $\mathbb{U}$*, muni de la convergence étroite. Il existe un espace de probabilité* $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, \underline{P})$ *et, pour chaque* $\mu \in P(\mathbb{U})$*, une application mesurable* $\mathfrak{X}(\mu) : \underline{\Omega} \to \mathbb{U}$ *tel que, si* (μ_n) *est une suite dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ *qui converge étroitement vers* $\mu \in P(\mathbb{U})$*, alors* $(\mathfrak{X}(\mu_n))$ *converge P.s. vers* $\mathfrak{X}(\mu)$*.*

preuve de théorème 5 (continuation) Appliquons le théorème de Blackwell-Dubins à l'espace polonais $\mathcal{C}_k$. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on note

$$\widetilde{Y}(t) = \mathfrak{X}(\mathrm{loi}(\widetilde{X}(t))) \,\text{et}\, Y = \widetilde{Y}(0) = \mathfrak{X}(\mathrm{loi}(\widetilde{X}(0))) = \mathfrak{X}(\mathrm{loi}(X)).$$

Puis toutes les limites dans

$$\lim_n \lim_m \widetilde{Y}(\alpha_n + \beta_m) \,\text{et}\, \lim_n \widetilde{Y}(\alpha_n + \beta_n) \tag{2.8}$$

existe et sont égaux p.s, c'est-à-dire, presque toutes les trajectoires de Y appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{C}$ de $x \in \mathcal{C}_k$ de sorte que toutes les limites de

$$\lim_n \lim_m \widetilde{x}(\alpha_n + \beta_m) \,\text{et}\, \lim_n \widetilde{x}(\alpha_n + \beta_n) \tag{2.9}$$

existent et sont égaux. Vérifions que c'est une propriété de loi (Y). Soit $d_{\mathcal{C}}$ une distance sur $\mathcal{C}_k$ compatible avec la topologie de $\mathcal{C}_k$, et notons, pour $s, s' \in \mathrm{I}$ et $\varepsilon > 0$

$$A(s, \widetilde{y}(s'), \varepsilon) = \{x \in \mathcal{C}_k; d_{\mathcal{C}}(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s')) < \varepsilon\}. \tag{2.10}$$

Il est facile de voir que $A(s, \widetilde{y}(s'), \varepsilon)$ est un sous ensemble de Borel de $\mathcal{C}$. En effet, nous avons

$$A(s, \widetilde{y}(s'), \varepsilon) = \{x \in \mathcal{C}_k; d_{\mathcal{C}}(\tau_s(\widetilde{x}(0)), \widetilde{y}(s')) < \varepsilon\}, \tag{2.11}$$

qui est ouvert par continuité pour tout $t \in$ I de l'application

$$\tau_t : \begin{cases} \mathcal{C}_k & \to \mathcal{C}_k \\ x = \tilde{x}(0) & \mapsto \tilde{x}(t) = x(t + .). \end{cases}$$

En utilisant des arguments similaires, nous montrons que l'ensemble

$$\mathfrak{D} = \{x \in \mathcal{C}_k; \text{toutes les limites de 2.9 existent}\} \tag{2.12}$$

est un sous ensemble de Borel de $\mathcal{C}_k$. Pour $\varepsilon > 0, s \in$ I et $n \geq 1$, soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(n, \varepsilon) &= \left\{x \in \mathcal{C}_k; \limsup_m d_{\mathcal{C}}(\widetilde{x}(\alpha_n + \beta_m), \widetilde{x}(\alpha_n + \beta_n)) < \varepsilon\right\}. \\ &= \cup_{M \geq 1} \cap_{m \geq M} A(\alpha_n + \beta_m, \alpha_n + \beta_n, \varepsilon) \end{aligned}$$

où $A(s, s', \varepsilon)$ est un sous ensemble ouvert de $\mathcal{C}_k$ défini par :

$$A(s, s', \varepsilon) = \{x \in \mathcal{C}_k; d_{\mathcal{C}}(\widetilde{x}(s), \widetilde{x}(s')) < \varepsilon\}. \tag{2.13}$$

soit

$$\mathfrak{C} = \cap_{K \geq 1} \cup_{N \geq 1} \cap_{n \geq N} \mathfrak{B}(n, 1/K). \tag{2.14}$$

L'ensemble $\mathfrak{C}$ est un sous ensemble de Borel de $\mathcal{C}_k$, et une fonction $x \in \mathcal{C}_k$ appartient à $\mathfrak{C}$ ssi

$$(\forall K \geq 1), (\exists N \geq 1), (\forall n \geq N), (\exists M \geq 1), (\forall m \geq M), d_{\mathcal{C}}(\widetilde{x}(\alpha_n + \beta_m), \widetilde{x}(\alpha_n + \beta_n)) < \frac{1}{K}. \tag{2.15}$$

Ainsi, $x \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{C}$ ssi les limites de 2.9 existent et sont égales. Ainsi, les limites de (1.5) existent et sont égales p.s. ssi $\underline{P}\{Y \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{C}\} = 1$. Comme loi (X)= loi (Y), et par continuité, pour chaque $t \in$ I, de l'application

$$\pi_t : \begin{cases} \mathcal{C}_k \to \mathbb{E} \\ x \to x(t), \end{cases}$$

on en déduit qu'il existe un sous ensemble mesurable $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_1) = 1$ et, pour tout $t \in$ I, les limites

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} X(t + \alpha_n + \beta_m)(\omega) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} X(t + \alpha_n + \beta_n)(\omega), \tag{2.16}$$

existe et sont égaux pour tout $\omega \in \Omega_1$. Ainsi, X satisfait le critère de suite double uniforme presque sûr de Bochner, ce qui prouve (b).

Preuve de (2) : Il ne reste plus qu'à montrer que $(c) \Rightarrow (a)$. Supposons (c) et notons $(\alpha_n^{'})$ et $(\beta_n^{'})$ deux suite dans I. Il existe des sous-suite $(\alpha_n) \subset (\alpha_n^{'})$ et $(\beta_n) \subset (\beta_n^{'})$ avec les mêmes indices tels que pour chaque $t, s \in$ I, les limites en probabilité

$$P - \lim_n X(\alpha_n + \beta_n + t + s) \text{ et } P - \lim_n \lim_m X(\alpha_n + \beta_n + t + s)$$

existe et sont égaux. Par conséquent, pour chaque $(t_1, t_2, ..., t_k) \in \mathrm{I}^k$,
$P - \lim_n (X(\alpha_n + \beta_n + t_1 + s), X(\alpha_n + \beta_n + t_2 + s), ..., X(\alpha_n + \beta_n + t_k + s))$ et $P - \lim_n \lim_m (X(\alpha_n + \beta_m + t_1 + s), X(\alpha_n + \beta_m + t_2 + s), ..., X(\alpha_n + \beta_m + t_k + s))$

existent et sont égaux, donc

$$\lim_n \mathrm{loi}(X(\alpha_n + \beta_n + t_1 + s), ..., X(\alpha_n + \beta_n + t_k + s))$$

et

$$\lim_n \lim_m \mathrm{loi}(X(\alpha_n + \beta_m + t_1 + s), ..., X(\alpha_n + \beta_m + t_k + s))$$

existent et sont égaux, c'est-à-dire que X est APFD, et par le corollaire 1 on en déduit (a).
□

Corollaire 3. *Tout processus stationnaire strictement continu est presque périodique en probabilité.*

Corollaire 4. *Si X est presque sûrement équi-presque périodique, alors X est presque périodique en distribution et en probabilité*

preuve En effet, puisque X est presque sûrement équi-presque périodique, presque toutes ses trajectoires sont uniformément continues, et nous pouvons appliquer le Théorème 5(2).
□

Contre-exemple (équi-presque périodicité presque sûre et presque périodicité en distribution) L'inverse du corollaire 4 est faux. Par exemple, soit U une variable aléatoire à valeurs entières avec $P(U = n) > 0$ pour chaque entier n, et soit $X(t) = U$ pour tout $t \in \mathrm{I}$. Alors X est presque périodique en distribution (il est même stationnaire), et il a des trajectoires presque périodiques (constantes). Mais X n'est pas équi-presque périodique presque sûrement, puisque la famille de ses trajectoires n'est pas presque sûrement équi-bornée.

Chapitre 3

Existence des solutions presque périodiques pour certaines équations différentielles stochastiques

Soient $(\mathbb{K}, \|\cdot\|_{\mathbb{K}})$ et $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Hilbert séparables réels et $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité filtré. L'espace $\mathbb{L}_2^0 = \mathbf{L}_2(\mathbb{K}, \mathbb{H})$ représente l'espace de tous les opérateurs $\mathscr{Q}$-Hilbert-Schmidt agissant de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{H}$ muni du norme de Hilbert-Schmidt $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2^0}$.

3.1 Le cas autonome

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité du solution presque périodique en moyenne p de l'équation differentielle stochastique semilineaire :

$$dX(t) = AX(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))d\mathbb{W}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

où $A : D(A) \subset \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est un opérateur linéaire fermé densément défini (il est possible qu'il est non borné), $F, G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues, et $\mathbb{W}$ est un processus $\mathscr{Q}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Dans cette section, nous avons besoin les hypothéses suivantes :
$(\mathbf{H}_1)$ L'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformement expentiellement stable $(T(t))_{t\geq 0}$ définit sur $\mathbb{H}$ et qu'il existe des constantes $M, \delta > 0$ telque

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}, \quad t \geq 0.$$

$(\mathbf{H}_2)$ soit $F : \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H})(t,X) \longrightarrow F(t,X)$ est une fonction presque périodique en moyenne d'ordre p en $t\in\mathbb{R}$ uniformément en $X\in\mathscr{O}$ ($\mathscr{O}\subset\mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H})$) est un sous espace compact. De plus, F est lipschitzienne dans le sens suivant : il existe $K>0$ tel que

$$\mathbb{E}\|F(t,X)-F(t,Y)\|^p \leq K\mathbb{E}\|X-Y\|^p$$

pour tous les processus stochastiques $X,Y\in\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$ et $t\in\mathbb{R}$.

$(\mathbf{H}_3)$ soit $G : \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{L}_2^0)(t,X) \longrightarrow G(t,X)$ est une fonction presque périodique en moyenne p en $t\in\mathbb{R}$ uniformément en $X\in\mathscr{O}'$ ($\mathscr{O}'\subset\mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H})$) est un sous espace compacte. De plus, G est lipschitzienne dans le sens suivant : il existe $K'>0$ tel que

$$\mathbb{E}\|G(t,X)-G(t,Y)\|^p_{\mathbb{L}_2} \leq K'\mathbb{E}\|X-Y\|^p$$

pour tous les processus stochastiques $X,Y\in\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$ et $t\in\mathbb{R}$.

Définition 27. *Un processus $\mathscr{F}_t$-progressivement mesurable $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est appelée une solution mild de l'équation différentielle stochastique 3.1 sur $\mathbb{R}$ si*

$$X(t)=T(t-s)X(s)+\int_s^t T(t-\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_s^t T(t-\sigma)G(\sigma,X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

pour tout $t\geq s$ et pour chaque $s\in\mathbb{R}$.

En utilisant le principe de point fixe de Banach classique, on obtient ce qui suit :

Théorème 7. *Sous les hypothèses $(\boldsymbol{H}_1)$-$(\boldsymbol{H}_2)$-$(\boldsymbol{H}_3)$ alors l'équation 3.1 admet une solution mild presque périodique en moyenne d'ordre p unique sous la forme explicite suivante :*

$$X(t)=\int_{-\infty}^t T(t-\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_{-\infty}^t T(t-\sigma)G(\sigma,X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma),\quad t\in\mathbb{R}.$$

chaque fois que $\Theta_p<1$, où

$$\Theta_p := 2^pM^p[K_F(\frac{1}{\delta^p})+C_pK_G(\frac{p-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}}(\frac{1}{\delta p})]\quad pour\quad p>2$$

et

$$\Theta_p = 2M^2(\frac{K}{\delta^2}+\frac{K'}{\delta})\quad pour\quad p=2.$$

Preuve

Tout d'abord, notons que X est donnée par

$$X(t)=\int_{-\infty}^t T(t-\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_{-\infty}^t T(t-\sigma)G(\sigma,X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma) \tag{3.2}$$

est bien défini et satisfait

$$X(t) = T(t-s)X(s) + \int_s^t T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t T(t-\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

pour tout $t \geq s$ et pour chaque $s \in \mathbb{R}$ et puisque X est donné par 3.2 est une solution mild de l'équation 3.1.

On définit $\Lambda X(t) = \phi X(t) + \psi X(t)$, où

$$\begin{aligned} \phi X(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma, \\ \psi X(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma). \end{aligned}$$

Montrons d'abord que $\phi X(.)$ et $\psi X(.)$ sont presque périodiques en moyenne d'ordre p quand x est presque périodique en moyenne d'ordre p. En effet, en supposant que X est presque périodique en moyenne d'ordre p et en utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ et voir le Théorème 4.4 page 125 [5], on peut facilement voir que l'application $\sigma \longrightarrow F(\sigma, X(\sigma))$ est presque périodique en moyenne d'ordre p, c'est-à-dire, que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur l_ε contienne au moins τ pour lequel

$$\mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p < \mu\varepsilon$$

pour chaque $\sigma \in \mathbb{R}$, avec $\mu = \dfrac{\delta^p}{M^p}$.

En utilisant l'hypothése $(\mathbf{H}_1)$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\|\phi X(t+h) - \phi X(t)\|^p \\ &\leq \mathbb{E}[\int_{-\infty}^t \|T(t-\sigma)\|\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|d\sigma]^p \\ &\leq M^p\mathbb{E}[\int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-\sigma)}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|d\sigma]^p \\ &\leq M^p\mathbb{E}[\int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{q}\delta(t-\sigma)}e^{-\frac{1}{p}\delta(t-\sigma)}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|d\sigma]^p, \end{aligned}$$

où $q > 0$ résout $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Maintenant on utilise l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\|\phi X(t+h) - \phi X(t)\|^p \\ &\leq M^p(\int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^{p-1} \times (\int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-\sigma)}\mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p d\sigma) \\ &\leq M^p(\int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^p \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p \\ &\leq \tfrac{M^p}{\delta^p} \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Compte tenu de ce qui précède, $\mathbb{E}\|\phi X(t+\tau) - \phi X(t)\|^2 < \varepsilon$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, alors $\phi X(.)$ est presque périodique en moyenne d'ordre p.

Pour $\psi X(.)$, nous divisons la preuve en deux cas : $p>2$ et $p=2$. On commence par le cas où $p>2$. En supposant que X est presque périodique en moyenne d'ordre p et en utilisant $(\mathbf{H}_2)$ et voir le Théorème 4.4 page 125 [5], on peut facilement voir que l'application $s\mapsto G(\sigma,X(\sigma))$ est presque périodique en moyenne d'ordre p. Donc que pour chaque $\varepsilon>0$ il existe $l_\varepsilon>0$ tel que tout intervalle de longueur l_ε contienne au moins τ pour lequel

$$\mathbb{E}\|G(\sigma+\tau,X(\sigma+\tau))-G(\sigma,X(\sigma))\|^p_{\mathbb{L}^0_2}<\frac{\varepsilon}{C^pM^p(\frac{2}{\delta P})(\frac{P-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}}}$$

pour chaque $\sigma\in\mathbb{R}$.

L'étape suivante consiste à prouver la presque-périodicité en moyenne p de $\psi X(.)$. Bien sûr, c'est un peu plus compliqué que le cas précédent en raison de la l'implication du mouvement brownien $\mathbb{W}$. Pour surmonter une telle difficulté, nous utilisons abondamment voir Proposition 3.20, pg 93 [5] et des propriétés de $\tilde{\mathbb{W}}$ définies par $\tilde{\mathbb{W}}(s):=\mathbb{W}(s+\tau)-\mathbb{W}(\tau)$ pour chaque s. Notons que $\tilde{\mathbb{W}}$ est aussi un mouvement brownien et a la même distribution comme $\mathbb{W}$.

Utilisons l'hypothése $(\mathbf{H}_1)$, l'inégalité de Hölder et, Proposition 3.26. page 102 [5], on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|\psi X(t+\tau)-\psi X(t)\|^p\\
&\leq C_p\mathbb{E}[\int_{-\infty}^t\|T(t-\sigma)\|^2\|G(\sigma+\tau,X(\sigma+\tau))-G(\sigma,X(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}^0_2}d\sigma]^{p/2}\\
&\leq C_pM^p\mathbb{E}[\int_{-\infty}^t e^{-2\delta(t-s)}\|G(\sigma+\tau,X(\sigma+\tau))-G(\sigma,X(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}^0_2}d\sigma]^{\frac{p}{2}}\\
&< C_pM^p(\int_{-\infty}^t e^{\frac{p}{p-2}\delta(t-s)}d\sigma)^{\frac{p-2}{2}}\times(\int_{-\infty}^t e^{-\frac{p}{2}\delta(t-s)}\mathbb{E}\|G(\sigma+\tau,X(\sigma+\tau))-G(\sigma,X(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}^0_2}d\sigma)\\
&\leq C_pM^p(\int_{-\infty}^t e^{-\frac{p}{p-2}\delta(t-s)}d\sigma)^{\frac{p-2}{2}}(\int_{-\infty}^t e^{-\frac{p\delta}{2}\delta(t-\delta)}d\sigma)\times\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\|G(\sigma+\tau,X(\sigma+\tau))-G(\sigma,X(\sigma))\|^p_{\mathbb{L}^p_2}d\sigma)\\
&\leq C_pM^p(\frac{2}{\delta p})(\frac{p-2}{p\delta})^{\frac{p-2}{2}}\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\|G(\sigma+\tau,X(\sigma+\tau))-G(\sigma,X(\sigma))\|^p_{\mathbb{L}^0_2})\\
&\leq\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour le cas $p=2$, nous procédons de la même manière en utilisant l'inégalité d'isomérie pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|\psi X(t+\tau)-\psi X(t)\|^2\\
&=\int_{-\infty}^t\mathbb{E}\|T(t-s)[G(s+\tau,X(s+\tau))-G(s,X(s))]\|^2ds\\
&\leq M^2\int_{-\infty}^t e^{-2\delta(t-s)}\mathbb{E}\|G(s+\tau,X(s+\tau))-G(s,X(s))\|^p_{\mathbb{L}^0_2}ds\\
&\leq M^2(\int_{-\infty}^t e^{-2\delta(t-s)}ds)\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\|G(s+\tau,X(s+\tau))-G(s,X(s))\|^p_{\mathbb{L}^0_2}\\
&<\varepsilon
\end{aligned}$$

alors, $\psi X(\cdot)$ est presque périodique en moyenne d'ordre p.

Pour compléter la preuve, nous montrerons que Λ est une contraction. pour cela, soit $X, Y \in$ $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L^p}(\mathbf{\Omega}, \mathbb{H}))$. En procédant comme avant en commencons avec le cas où $p > 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|\Lambda X(t) + \Lambda Y(t)\|^p \\
&\leq 2^{p-1}\mathbb{E}\|\int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)[F(\sigma, X(\sigma)) - F(\sigma, Y(\sigma))]d\sigma\|^p \\
&+2^{p-1}\mathbb{E}\|\int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)[G(\sigma, X(\sigma)) - G(\sigma, Y(\sigma))]d\mathbb{W}(\sigma)\|^p.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$, en appliquant l'inégalité de Hölder, proposition 3.26. page 102 [5] et en utilisant aussi les hypothéses $(\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|\Lambda X(t) + \Lambda Y(t)\|^p \\
&\leq 2^{p-1}\mathbb{E}[\int_{-\infty}^{t} \|T(t-\sigma)\|\|F(\sigma, X(\sigma)) - F(\sigma, Y(\sigma))\|d\sigma]^p \\
&+2^{p-1}C_p\mathbb{E}[\int_{-\infty}^{t} \|T(t-\sigma)\|^2\|G(\sigma, X(\sigma)) - G(\sigma, Y(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}_2^0}d\sigma]^{p/2} \\
&\leq 2^{p-1}(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^{p-1} \times (\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}\mathbb{E}\|F(\sigma, X(\sigma)) - F(\sigma, Y(\sigma))\|^p d\sigma) \\
&+ 2^{p-1}C_p(\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{p}{p-2}\delta(t-s)}d\sigma)^{\frac{p}{p-2}} \times (\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{p}{2}\delta(t-s)}\mathbb{E}\|G(\sigma, X(\sigma)) - G(\sigma, Y(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}_2^0}d\sigma) \\
&\leq 2^{p-1}M^pK_F(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^p\|X-Y\|^p_\infty \\
&+2^{p-1}C_pM^pK_G(\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{p\delta}{p-2}(t-\sigma)}d\sigma)^{\frac{p-2}{2}}(\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{p\delta}{2}(t-\sigma)}d\sigma)\|X-Y\|^p_\infty \\
&\leq 2^pM^p[K_F(\tfrac{1}{\delta^p}) + C_pK_G(\frac{p-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}}(\frac{1}{\delta^p})]\|X-Y\|^p_\infty
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le cas où $p = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|\Lambda X(t) + \Lambda Y(t)\|^2 \\
&\leq 2M^2(\textstyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}\mathbb{E}\|F(\sigma, X(\sigma)) - F(\sigma, Y(\sigma))\|^2d\sigma) \\
&+ 2M^2\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-\sigma)}\mathbb{E}\|G(\sigma, X(\sigma)) - G(\sigma, Y(\sigma))\|^2d\sigma \\
&\leq 2M^2 \cdot C_1(\textstyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)(\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)})\mathbb{E}\|X(\sigma) - Y(\sigma))\|^2d\sigma \\
&+2M^2C_2\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}\mathbb{E}\|X(\sigma) - Y(\sigma)\|^2d\sigma \\
&\leq 2M^2 \cdot C_1(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^2\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\|X(\sigma) - Y(\sigma)\|^2 \\
&+2M^2 \cdot C_2(\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-\sigma)}d\sigma)\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\|X(\sigma) - Y(\sigma)\|^2 \\
&\leq 2M^2(\tfrac{C_1}{\delta^2} + \tfrac{C_2}{\delta})\|X-Y\|^2_\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\Theta_p < 1$, alors Λ est une contraction, l'utilisation de principe de point fixe de Banach complète la preuve.

3.2 Le cas non autonome

Soit $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert séparable réel. Cette section est principalement concernée avec l'existence de solutions presque périodique en moyenne d'ordre p aux équations différentielles stochastiques semi linéaire non autonomes

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))d\mathbb{W}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

où $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille des opérateurs linéaires fermés densément définis qui satisfaites les conditions 3.4 et 3.5 de "Acqiustpace-Terrini", $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues satisfaisant certaines conditions supplémentaires, et $\mathbb{W}$ est un processus $\mathscr{Q}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'existence des solutions presque périodiques (respectivement, périodiques) des équations différentielles stochastiques autonomes a été étudié par plusieurs ouvrage. Dans Da. Prato et Tudor [15] l'existence de solutions presque périodiques de 3.1 dans le cas où $A(t)$ est périodique, c'est à dire, $A(t + T) = A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour certain $T > 0$, a été établi. Dans cette section, nous revenons à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions presque périodiques en moyenne quadratique de l'équation 3.1 lorsque les opérateurs $A(t)$ satisfont les conditions suivantes :

Pour une famille des opérateurs linéaires fermés $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ l'existence d'une famille d'évolution qui lui associe n'est pas toujour garanti, mais si la famille $A(t)$ vérifiè les conditions de Terreni-Acquistpace, qui sont :

il existe $\lambda_0 \geq 0$ telque l'opérateur linéaire $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ satisfait

$$\Sigma_\phi \cup \{0\} \subseteq \rho(A(t) - \lambda_0) \ni \lambda, \|R(\lambda, A(t) - \lambda_0)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|} \tag{3.4}$$

et

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda_0, A(t) - \lambda_0)[R(\lambda_0, A(t)) - R(\lambda_0, A(s))]\| \leq L|t - s|^\mu |\lambda|^{-v} \tag{3.5}$$

Ici, nous supposons que $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est une famille des opérateurs linéaires fermés densément définis sur un domaine commun $\mathscr{D} = D(A(t))$, qui est indépendant de t et dense dans $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$, $F : \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues.

Nous supposons que le système

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \quad t \geq s, \\ u(s) = x \in \mathbf{L}^p(\Omega; \mathbb{H}), \end{cases} \tag{3.6}$$

a une famille d'évolution associée des opérateurs $\{U(t,s) : t \geq s \text{ avec } t,s \in \mathbb{R}\}$, qui est uniformément, asymptotiquement stable.

3.2.1 Existence des solutions presque périodiques

Dans cette sous section, nous avons besoin l'hypothése suivante en plus de $(\mathbf{H}_2)$, $(\mathbf{H}_3)$ qui ont présentée dans la section précédente :
$(\mathbf{H}_4)$ Les opérateurs $A(t), U(r,s)$ commute et que la famille d'évolution $U(t,s)$ est asymptotiquement stable. A savoir, il existe des constantes $M, \delta > 0$ telles que

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{-\delta(t-s)} \text{ pour tout } t \geq s.$$

De plus, $R(\lambda_0, A(\cdot)) \in \mathbf{AP}(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})))$ pour λ_0 dans Eq 3.4.
Afin d'étudier l'équation 3.1 nous avons besoin du lemme suivant qui est une conséquence immédiate de [[24], Proposition 4.4].

Lemme 4. *Supposons que $A(t)$ satisfait les conditions d'"Acquistpace-Terrini" $U(t,s)$ est expentiellement stable, et $R(\lambda_0, A(\cdot)) \in \mathbf{AP}(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})))$. Soit $h > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$ telque chaque intervalle de longueur l_ε contient au moins un nombre τ qui vérifie la propriété suivante*

$$\|U(t+\tau, s+\tau) - U(t,s)\| \leq \varepsilon e^{\frac{-\delta}{2}(t-s)}$$

pour tout $t - s \geq h$.

Définition 28. *Un processus $\mathscr{F}_t$-progressivement mesurable $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ appelé une solution mild de l'équation 3.1 sur $\mathbb{R}$ si*

$$X(t) = U(t,s)X(s) + \int_s^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma) \qquad (3.7)$$

pour tout $t \geq s$ pour chaque $s \in \mathbb{R}$.

Théorème 8 (3). *Sous les hypothèses $(\boldsymbol{H}_2)$, $(\boldsymbol{H}_3)$ et $(\boldsymbol{H}_4)$ alors l'équation 3.1 a une solution mild presque périodique en moyenne d'ordre p unique, qui peut être explicitement exprimée comme suit :*

$$X(t) = \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma), \qquad \textit{pour chaque } t \in \mathbb{R}$$

quand

$$\Theta_p := 2^p M^p [K_F(\frac{1}{\delta^p}) + C_p K_G(\frac{p-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}}(\frac{1}{p^\delta})] \quad pour \quad p > 2$$

et

$$\Theta = M^2(2\frac{K}{\delta^2} + \frac{K'}{\delta}) < 1 \quad pour \quad p = 2.$$

Preuve Pour la démonstration voir **P.H. Benzandry.T. Diagana** [preuve de théorème 5.2 p $136, 137$.]

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les différentes définitions des processus presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach ainsi que leurs propriétés fondamentales. Une attention particulière a été accordée à la presque-périodicité au sens de Bochner pour les processus stochastiques.

Une étude comparative entre les différents types de presque périodicité dans un espace polonais a été considéré y compris la presque périodicité en probabilité, en moyenne quadratique et en loi....

Nous avons établi également l'existence des solutions presque périodiques pour certaines équations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert dans les deux cas (autonome et non autonome). Par conséquent, nous avons estimé que la théorie des processus presque périodiques est un domaine très intéressant, riche par ses diverses applications.

Annexe

3.3 Les critères de presque périodicité de Bochner pour les fonctions avec des valeurs dans un espace métrique

Soit $(\mathbb{E}, d)$ un espace métrique (pas nécessairement complet). On dit qu'un sous ensemble $\mathcal{A} \subset \mathrm{I}$ est relativement dense s'il existe un nombre réel l>0 tel que pour chaque nombre $a \in \mathrm{I}, [a, a+l] \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Un tel nombre l est appelé une longueur d'inclusion de $\mathcal{A}$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{E})$ est équi-presque périodique (resp. équi-asymptotiquement presque périodique) dans le sens de Bohr si, pour tout $\varepsilon > 0$, existe un ensemble relativement dense $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{H}, \varepsilon)$ dans I (resp. il existe un ensemble relativement dense $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{H}, \varepsilon)$ dans I et un nombre $r \geq 0$) tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{A}$ et $h \in \mathcal{H}$,

$$d(h(t+\tau), h(t)) < \varepsilon \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ (resp. pour tout } t \geq r,\ t+\tau \geq r).$$

Un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{E})$ est dit équinormal si, à partir de toute suite $(\alpha_n^{'})$ dans I, on peut extraire une sous suite (α_n) telle que la suite $h(t+\alpha_n)$ converge uniformément à $t \in \mathrm{I}$ et $h \in \mathcal{H}$.

Les résultats suivants sont des adaptations de celles obtenues par Ruess et Summers [31] dans le cas des espaces localement convexes. Nous considérons seulement le cas $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$, le cas presque périodique suit exactement de la même manière avec des changements mineurs évidents.

Lemme 5. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{E})$. Supposons que $\mathcal{H}$ soit totalement borné dans $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^+, \mathbb{E})$ et équi-asymptotiquement presque périodique. Alors, $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)$ est totalement borné dans $\mathbb{E}$.*

preuve Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\mathcal{H}$ est équi-asymptotiquement presque périodique dans le sens de Bohr, il existe un nombre $r = r(\varepsilon) > 0$ et un ensemble relativement dense $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{H}, \varepsilon)$ dans $[r, +\infty[$ tel que, pour chaque $\tau \in \mathcal{A}$ et pour chaque $h \in \mathcal{H}$,

$$d(h(t+\tau), h(t)) < \varepsilon \text{ pour tout } t \geq r, \ \textit{tel que} \quad t+\tau \geq r).$$

Soit $N = \max(r, l)$, où l est une longueur d'inclusion de $\mathcal{A}$. On choisit $\tau_k \in [kN, (k+1)N]$, $k = 1, 2, ...$ Notons $\mathcal{H}/_{0,5N}$ la restriction de toutes les fonctions de $\mathcal{H}$ à l'intervalle $[0, 5N]$. Alors $\mathcal{H}/_{[0,5N]}$ est totalement borné en $\mathcal{C}([0, 5N]; \mathbb{E})$. Ainsi, d'après le Théorème d'Ascoli, nous obtenons que $\mathcal{H}/_{[0,5N]}$ est uniformément équicontinue. Soit $\delta \in [0, \frac{N}{2}]$ tel que $d(h(t_1), h(t_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$ chaque fois que $h \in \mathcal{H}$ et $t_1, t_2 \in [0, 5N]$ avec $|t_1 - t_2| < \delta$. Supposons maintenant que $t_1, t_2 > 4N$, avec $|t_1 - t_2| < \delta$. En prenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $t_1, t_2 \in [kN, (k+2)N]$, soit $s_i = t_i - \tau_{k-2}, i = 1, 2$. Puisque $s_1, s_2 \in [N, 4N]$ et $|s_1 - s_2| < \delta$, nous avons

$$d(h(t_1), h(t_2)) < d(h(s_1, +\tau_{k-2}), h(s_1)) + d(h(s_1), h(s_2)) + d(h(s_2), h(s_2 + \tau_{k-2})) < \varepsilon$$

pour tout h dans $\mathcal{H}$, ce qui implique que $\mathcal{H}$ est en effet uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}^+$. Pour vérifier que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)$ est totalement borné dans $\mathbb{E}$, on part de l'équicontinuité de $\mathcal{H}$ pour obtenir un recouvrement finie $\{T_i\}_{i=1}^n$ de [0,3N] et $t_i \in T_i, i = 1, ..., n$ tel que pour chaque $h \in \mathcal{H}$

$$d(h(t), h(i)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ chaque fois que } t \in T_i, i = 1, ..., n.$$

Si $t > 3N$, choisissons $k \in \mathbb{N}$ pour que $t \in [kN, (k+1)N]$. En posant $s = t - \tau_{k-2}$, on a alors $s \in [N, 3N]$ d'où $s \in T_i$ pour certains $i = 1, ..., n$. Par conséquent, étant donné tout $h \in \mathcal{H}$, nous obtenons

$$d(h(t), h(i)) \leq d(h(s + \tau_{k-2}), h(s)) + d(h(s), h(t_i)) < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Puisque pour chaque $i = 1, ..., n$ l'ensemble $\mathcal{H}(t_i)$ est totalement borné, on en déduit, compte tenu de l'inégalité (3.8), que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)$ est totalement borné.

Théorème 9. *Soit $\mathcal{H}$ un sous ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{H}}^+ = \{\tilde{h}(t), h \in \mathcal{H}, t \in \mathbb{R}^+\}$ est un sous ensemble totalement borné de $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}^+; \mathbb{E})$, c'est-à-dire, $\mathcal{H}$ est Bochner-equi-presque périodique.*
2. *(a) $\mathcal{H}$ est un sous ensemble totalement borné dans $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^+; \mathbb{E})$, et*
   (b) $\mathcal{H}$ satisfait le critère de suite double uniforme de Bochner.
3. *(a) $\mathcal{H}$ est un sous ensemble totalement borné dans $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^+; \mathbb{E})$ et*
   (b) $\mathcal{H}$ est équinormal.
4. *(a) $\mathcal{H}$ est un sous ensemble totalement borné dans $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^+; \mathbb{E})$ et*
   (b) $\mathcal{H}$ est équi-asymptotiquement presque périodique dans le sens de Bohr.

preuve De [8], nous avons l'équivalence entre 2 et 3. D'après ([37], théorème 5, et théorème page 56) et le lemme 5, nous déduisons l'équivalence entre 3 et 4.
Supposons que 4 soit équivalent à 1. Supposons 4, alors au vu du lemme 5, le sous ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)$ est totalement borné dans $\mathbb{E}$, donc $\widetilde{H}^+(t)$ est totalement borné dans $\mathbb{E}$ pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$. Nous avons également vu le lemme 5 que $\widetilde{H}^+$est uniformément équicontinue . Ainsi par le théorème d'Ascoli ([10], théorème 2, page X.17), il est totalement borné dans $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$. Inversement, il est évident que si $\widetilde{H}^+$ est un sous-ensemble totalement borné de $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$ alors $\mathcal{H}$ est un sous ensemble totalement borné de $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$. Il reste à montrer que $\mathcal{H}$ est équi-asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire un recouvrement finie $\{T_i\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^+$ et $t_i \in T_i, i = 1, ..., n$ tel que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^+$, on a

$$d(h(\omega + t), h(\omega + t_i)) \leq \varepsilon, \text{ chaque fois que } t \in T_i, i = 1, ..., n.$$

Soit $r = l > \max\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, et posons

$$\mathcal{A} = \left[\bigcup_{l}^{n}(T_i - t_i)\right] \bigcap [r, +\infty[.$$

Vérifions que $\mathcal{A} \cap [t, t+l] \neq \emptyset$ pour tout $t \geq r$, c'est-à-dire, que $\mathcal{A}$ est un ensemble relativement dense dans $[r, +\infty[$. Soit $t \geq r$, puisque $\{T_i\}_{i=1}^n$ est une couverture de $\mathbb{R}^+$ et $t+l \in \mathbb{R}^+$, il existe $i \in 1, ..., n$ tel que $t+l \in T_i$. On observe que $t \leq t+l-t_i \leq t+l$ et ensuite $t+l-t_i \in \mathcal{A} \cap [t, t+l]$. Maintenant, pour un $t \geq r$ et $\tau \in \mathcal{A}$ donné, on choisit $i \in \{1, ..., n\}$ et $s \in T_i$ tels que $\tau = s - t_i$. Puisque $t - t_i \geq 0$ on a, pour tout $t \in [r, +\infty[$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$.

$$d(h(t + \tau), h(t)) = d(h(t - t_i + s), h((t - t_i) + t_i)) < \varepsilon.$$

□

Donc $\mathcal{H}$ est équi-asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr.

Corollaire 5. *Soit $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$. Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

1. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{H}}^+(x) = \{\widetilde{x}(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est totalement borné dans $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$*
2. *x est asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr.*

Bibliographie

[1] L. Arnold and C. Tudor. Stationary and almost periodic solutions of almost periodic affine stochastic diférential equations. *Stochastics Rep*, 64 :177-193, 1998.

[2] P. H. Bezandry and T. Diagana. Existence of almost periodic solutions to some stochastic diferential equations. *Appl. Anal.*, 86**(7)** :819- 827, 2007.

[3] P. H. Bezandry and T. Diagana. *Square-mean almost periodic solutions nonautonomous stochastic diferential equations.* Electron. J. Diférential Equations, pages No. 117, 10 pp. (electronic), 2007.

[4] P. H. Bezandry and T. Diagana. *Existence of quadratic-mean almost periodic solutions to some stochastic hyperbolic diférential equations.* Electron. J. Diférential Equations, pages No. 111, 14, 2009.

[5] P. H. Bezandry and T. Diagana. *Almost Periodic Stochastic Processus*, springer-Science, Business Media, New York, (2011).

[6] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[7] D. Blackwell and L. E. Dubins. An extension of Skorohod's almost sure representation theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*,89 :691-692, 1983.

[8] S. Bochner. A new approach to almost periodicity. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 48 :2039-2043, 1962.

[9] H. Bohr, *Almost Periodic Functions.* Chelsea Publishing Company, New York, 1956.

[10] N. Bourbaki. *General topology.* Chapters 5-10. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[11] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions.* Second Edition, Chelsea, New York 1989.

[12] L. I. Danilov. Measure -valued almost periodic function .*Mat. Zametki*, 61**(1)** :57-68,1997.

[13] L. I. Danilov. Measure -valued almost periodic function and almost periodic selections of multivalued mappings. *Mat.Sb*, 188**(10)** :3-24,1997.

[14] L. I. Danilov. On almost periodic Measure -valued function *Mat.Sb*,191 **(12)** :27-50,2000

[15] G. Da Prato and Tudor (1995) periodic and almost periodic solution for semilinear stochastic equation, *stochastic analysis and applications*, 13-33.

[16] G. Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Number 44 in Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[17] A. Y. Dorogovtsev. Existence of periodic solution of an abstractly stochastic equation. *Asymptotic periodicity of the solution of the Cauchy problem.* Teor .Veroyatnost. i Mat. Statist .,**(39)** :47-52,126,1988.

[18] R. Engelking. *General topology*, volume 6 of Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

[19] M. Fréchet. Les fonction asymptotiquement presque périodique continues. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 213 :520-522, 1941.

[20] E. G. Gladyshev. Periodically and almost periodically coorelated radom processes with continuos time parameter. *The. prob .Appl.***8**.

[21] A. Halanay, T. Morozan, and C. Tudor. Tracking discrete almost-periodic signals under random perturabations. *Internat. J. Control*, **47(1)** :381-392,1988.

[22] H. L. Hurd. Almost periodically unitary stochastic processes. Stochastic Process. Appl, 43(1) :99-113,1992.

[23] T. Kawata. Almost periodic weakly stationary processes. In Statistic and probability : *essays in honor of C. R. Rao*, pages 383-396. *North-Holland, Amsterdam* .

[24] L. Maniar, R.Schnaubelt, almost periodicitiy of Inhomogenous Parabolic Evolution Equation, New York(2003) 299-318.

[25] O. Mellah and P Raynand de fitte. Countre examples to mean square almost periodicity of the solution of some SDEs with almost periodic coefficients. *Ar Xiv e-prints August 2012*, 1208.6384. 173-177, 1963

[26] T. Morozan. Bounded and periodic solution of affine stochastic differential equations. *Stud. Cerc. Mat.*,38**(6)** : 523-527, 1986.

[27] T. Morozan.periodic solution of affine stochastic differential equations. *Stoch. Anal. Appl* ., 4**(1)** :87-110,1986.

[28] T. Morozan and C. Tudor. Almost periodic solution to affine Ito equation. *stoch. Amal Appl.* 7**(4)** :451-474,1989.

[29] O. Onicescu and V. I. Istrătescu. Approximation theorems for random functions. Rend. Mat. **(6)**, 8 :65-81, 1975. *Collection of articles dedicated to Mauro Picone on the occasion of his ninetieth birthday.*

[30] A. M. Precupanu. On the almost periodic functions in probability. *Rend. Mat.* **(7)**, 2(3) :613-626, 1982.

[31] W. M. Ruess and W. H. Summers. Asymptotic almost periodicity and motions of semigroups of operators. *In Proceedings of the symposium on operator theory (Athens, 1985)*, volume 84, pages 335-351, 1986.

[32] E. Slutsky. Sur les fonctions aléatoires presque périodique et sue la décomposition des fonctions aléatoires en composantes stationnaire.pages 33-55,1938.

[33] R. J. Swift . Almost periodic harmonizable process. Georgian Math. J.,**3(3)** :275-292, 1996.

[34] C. Tudor. Almost periodic solutions of affine stochastic evolution equations. *Stochastics Rep.*, 38*(4)* :251-266, 1992.

[35] C. Tudor. *Almost periodic stochastic processes.* In Qualitative problems for diférential equations and control theory, pages 289-300. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[36] W. Whitt. *Weak convergence of probability measures on the function space* $C[0,\infty]$. Ann. Math. Statist., 41 :939-944, 1970.

[37] S. Zaidman. *Almost-periodic functions in abstract spaces*, volume 126 of Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.