



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2017/2018



S-spectre essentiel des opérateurs bornés

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Allou Zarga¹

Sous la direction de

Dr. A. Azzouz

Soutenu le 25/06/2018 devant le jury composé de

Pr. F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Pr. G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
M^{elle}. H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : allouzarga@gmail.com

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon "**Dieu**" qui nous a donné le courage et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon promoteur de mémoire Docteur "**A. Azzouz**", qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidé par ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoigné tout au long de travail.

A messieurs les membres du jury :

Je remercie :

Le professeur "**F. Hathout**" qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter de présider le jury de ce mémoire, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie vivement le professeur "**G. Djellouli**" et M^{elle} "**H. Abbas**" d'avoir accepter d'examiner ce travail, qu'ils veuillent trouver ici ma gratitude et ma reconnaissance.

Je remercie aussi tous les enseignants du département de mathématique, et en particulier ceux qui m'ont accompagné durant

Dédicaces

Il m'est agréable de dédier ce modeste travail à :

Mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi,

sans leur amour et leur confiance,

je ne serais jamais arrivée là.

Mes très chers frères qui m'ont toujours soutenus

avec beaucoup d'amour et de compréhension.

Toute la famille "Allou"

A mes amies

Table des matières

1	Théorie des opérateurs linéaire bornés	9
1.1	Définitions et propriétés élémentaires	9
1.1.1	Opérateurs linéaires bornés	10
1.1.2	Inverse et Adjoint d'un opérateur linéaire borné	10
1.1.3	Spectre d'un opérateur linéaire borné	12
1.2	Opérateurs Compacts	13
1.2.1	Opérateur Compact	13
1.3	Opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et Opérateurs de Riesz	16
1.3.1	Opérateurs de Fredholm, Semi-Fredholm	17
1.3.2	Opérateurs de Browder, Semi Browder	22
1.3.3	Opérateur de Kato	23
1.3.4	Opérateur de Riesz et Projection de Riesz	24
2	Spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné	26
2.1	Spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné	26
2.2	Spectre essentiel de la somme (Produit) de deux opérateurs linéaires bornés . .	29
3	S-Spectre essentiel d'un opérateur borné	37
3.1	S-spectre essentiel	37
3.2	Caractérisation du S-spectre essentiel	39

3.3	S- spectre essentiel de Browder	42
3.4	S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés	54

Liste des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de notre travail :

X espace de Banach, X^* son espace dual.

A Un opérateur linéaire borné dans X .

$Inv(X)$ Ensemble des opérateurs inversibles sur X .

$\mathcal{L}(X)$ Ensemble des opérateurs linéaires bornés dans X

$\mathcal{K}(X)$ L'ensemble des opérateurs compacts dans X .

$N(A)$ Espace nul (ou noyau) d'un opérateur linéaire A $R(A)$ son image

$\mathbf{R}_\lambda(A)$ Résolvante de A , $\rho(A)$ Ensemble résolvant de $A \in \mathcal{L}(X)$

$\sigma(A)$ Spectre de A

$\sigma_p(A)$ Spectre ponctuel de A , $\sigma_c(A)$ Spectre continu de A

$\sigma_r(A)$ Spectre résiduel de A , $\sigma_d(A)$ Spectre discret de A

$\sigma_e(A)$ Spectre essentiel de A , $\sigma_{e,s}(A)$ S-spectre essentiel de A

$r(A)$ Rayon Spectral de A

$\alpha(A)$ Dimension de $N(A)$, $\beta(A)$ Codimension de $R(A)$

$\Phi(X)$ L'opérateur de Fredholm

$\Phi_+(X)$ Semi-Fredholm supérieur, $\Phi_-(X)$ Semi-Fredholm inférieur

$\Phi_\pm(X)$ Opérateur Semi-Fredholm,

$i(A)$ Indice d'un opérateur de Fredholm

$\mathcal{F}(X)$	Ensemble des perturbations de Fredholm
$\mathcal{B}(X)$	Opérateur de Browder
$\mathcal{R}(X)$	Opérateur de Riesz
$asc(A)$	Ascent d'un opérateur A
$desc(A)$	Descent de A
P_λ	Projection de Riesz

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude du S-spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X , il portera aussi sur l'étude du S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs.

Ce mémoire se compose de trois axes répartis en trois chapitres hors introduction. On considère A un opérateur linéaire borné inversible sur l'espace de Banach tout au long de ce travail. Dans la premier chapitre introductif, on commence par présenter la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés qui est une partie importante de l'analyse fonctionnelle. Ensuite on rappelle quelques définitions et propriétés élémentaires standards de cette théorie et qui seront des éléments de base de ce mémoire. En outre, on donne des définitions et des résultats sur les opérateurs compacts et l'étude spectrale de ces opérateurs, en plus de ces opérateurs il existe des classes des opérateurs s'appellant les opérateurs de Fredholm semi- Fredholm et les perturbations de Fredholm supérieurs et inférieurs qui sont des classes très importantes pour définir le spectre essentiel qui sera détaillé dans le chapitre suivant. Les opérateurs de Browder sont des classes des Fredholm qui sont définis par l'ascendant et le descendant d'un opérateur, on introduira ainsi les opérateurs de Kato et de Riesz.

Dans le deuxième chapitre, on discutera sur le spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné, il est essentiellement centré sur les opérateurs de Fredholm. Tout d'abord on donne quelques définitions et des caractérisation distinctes de ce spectre

Plusieurs définitions sont liées aux opérateurs de Fredholm, semi-Fredholm et les opérateurs de Browder et introduites par des mathématiciens comme **H. Weyl**, **T. Kato**, **M. Schech-**

ter, **F. E. Browder**, et **R. Mennicken**.

Dans le dernier chapitre on définit le S-spectre essentiel d'un opérateur borné. L'objectif de cette partie est consacrée à l'étude des caractérisations de S-spectre essentiel et la relation entre le S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs et le S-spectre essentiel de chacun de ces opérateurs. Ce chapitre est basé sur un travail récent de **F, Abdelmouleh, A, Ammare** **A, Jeribi** qui ont introduit le S-spectre essentiel et le S-spectre essentiel de Browder et on donné et les relations qui leurs lient.

Chapitre 1

Théorie des opérateurs linéaire bornés

L'objectif de ce chapitre est de rappeler des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions et propriétés élémentaires sur la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans des espaces de Banach X . Ensuite nous donnons quelques résultats sur les opérateurs compacts. En outre, nous rappelons les définitions des opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et les opérateurs de Riesz. Enfin nous donnons l'étude spectrale de la somme et produits des opérateurs bornés.

On peut donner pour plus de lecture les références suivantes [[9], [14], [15], [19]], et qui peuvent donner plus de détail.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Nous donnons dans cette section quelques définitions et propriétés élémentaires des opérateurs linéaires bornés et on parle sur l'adjoint et l'inverse d'un opérateur, ensuite on définit le spectre d'un opérateur.

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1. (Opérateurs linéaires)

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $u \rightarrow Au$ définie sur X ou sur un sous-espace vectoriel de X appelé domaine de A noté $D(A)$ à valeurs dans Y , c'est à dire : $D(A) = \{x \in X, Ax \in Y\}$

Remarque 1.1.1. Dans le cas de notre étude, l'opérateur A sera défini sur tout X donc borné.

Définition 1.1.2. (Opérateur linéaire borné) :

Un opérateur **continu** ou **borné** est un opérateur tel que $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$. On note $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés sur X .

Définition 1.1.3. Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle un opérateur borné de X dans Y toute application linéaire continue de X dans Y . Pour $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note l'image d'un opérateur par $R(A) = \{Ax, x \in X\}$ et le noyau par $N(A) = \{x \in X, Ax = 0\}$

Remarque 1.1.2. L'opérateur **identité** de X dans Y sera noté par $\mathbb{I}$.

1.1.2 Inverse et Adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.1.4. (Opérateur inverse) :

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $A : X \rightarrow Y$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : Y \rightarrow X$ tel que

$$AS = \mathbb{I}_Y \text{ et } SA = \mathbb{I}_X$$

L'ensemble des opérateurs inversibles sera noté par : $\text{Inv}(X)$

Définition 1.1.5. (Adjoint d'un opérateur) :

Soient X, Y deux espaces de Banach et A est un opérateur borné de X dans Y . L'adjoint de A noté A^* , est l'opérateur borné de Y^* dans X^* vérifiant :

$$(A^*\ell)(x) = \ell(A(x))$$

avec ℓ est une forme lineaire continue.

Théorème 1.1.1. *Soient X et Y deux Banach. L'application de $\mathcal{L}(X;Y)$ dans $\mathcal{L}(Y;X)$ qui à A associe son adjoint A^* est isométrique (i.e : $\|A\| = \|A^*\|$ pour tout $A \in \mathcal{L}(X;Y)$)*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (\sup_{\|\ell\| \leq 1} |\ell(Ax)|) = \sup_{\|\ell\| \leq 1} (\sup_{\|x\| \leq 1} |\ell(Ax)|) = \\ &= \sup_{\|\ell\| \leq 1} \|A^*\ell\| = \|A^*\| \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.1. *On a les relations d'orthogonalité suivantes :*

Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X;Y)$. Alors on a :

- (i) $N(A) = R(A^*)^\perp$,
- (ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$,
- (iii) $N(A)^\perp \supseteq \overline{R(A^*)}$,
- (iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

Définition 1.1.6. (*Opérateur transposé*) :

Soient X et Y deux espaces de Banach et A un opérateur densément définie de X dans Y ; La transposée de A , c'est un opérateur de X dans Y de la façon suivante : tA , et la forme linéaire $x \in X \rightarrow y^(A(x))$ soit continue. On pose ${}^tA(y^*) = x^*$. On a donc :*

$${}^tA(y^*)(x) = y^*(A(x))$$

pour tout $x \in X$ et $y^ \in Y$*

1.1.3 Spectre d'un opérateur linéaire borné

Soit X un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même, muni de la norme $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_X$. L'espace $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach unifère (possède un élément e telque $\|e\| = 1$).

Définition 1.1.7. (*Ensemble résolvant, Résolvante*) Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ on appelle *l'ensemble résolvant* de A est :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - A \text{ soit une } \mathbf{bijection} \text{ de } X \text{ sur } X\}$$

($i, e : \lambda I - A$ a un inverse borné ; $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$) L'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est appelé *la résolvante* de A en et noté $R_\lambda(A)$

Définition 1.1.8. (*Spectre d'un opérateur*) :

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, le *spectre* de A et on noté $\sigma(A)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(A)$

(L'ensemble résolvant de A). Donc :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ n'est pas inversible dans } X\},$$

et on écrit :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

Alors on peut trouver trois types du spectre distincts :

1) Le spectre ponctuel : Noté par $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A , il est défini comme suit :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus N(\lambda I - A) \neq \{0\} \quad \text{c-à-d : } \lambda I - A \text{ n'est pas } \mathbf{injectif}\}$$

alors

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus Ax = \lambda x, \quad x \in X, \quad x \neq 0\}$$

2) Le spectre continu : Noté par $\sigma_c(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\lambda I - A)$ est injectif, non surjectif, mais son image est **dense** dans X , c-à-d.

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus N(\lambda I - A) = \{0\}, \quad R(\lambda I - A) \neq X, \quad \overline{R(\lambda I - A)} = X\}$$

3) Le spectre résiduel Noté par $\sigma_r(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans X , c-à-d.

$$\sigma_r(A) = \{N(\lambda I - A) = \{0\}, \quad (R(\lambda I - A))^\perp \neq \{0\}\}$$

Remarque 1.1.3. *Le spectre de A est :*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Définition 1.1.9. (Le rayon spectral) : Pour tout opérateur borné $A \in \mathcal{L}(X)$, on définit le rayon spectral de A comme étant la quantité :

$$r(A) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$$

On remarque que, $r(A) \leq \|A\|$

Lemme 1.1.1. *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$. Alors :*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et est égale à $r(A)$.
- (ii) Si X est un espace de Hilbert et si $A \in \mathcal{L}(X)$ est auto-adjoint, alors $r(A) = \|A\|$.

1.2 Opérateurs Compacts

Dans cette section, on définit les opérateurs compacts et nous parlons sur la théorie spectrale des opérateurs compacts.

1.2.1 Opérateur Compact

Applications linéaires compactes : Si X est un espace de Banach, on note $B_X(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B_X(0, r)}$ la boule fermée. Dans le cas où $r = 1$, on note pour simplifier $B_X = B_X(0, 1)$ et $\overline{B_X} = \overline{B_X}(0, 1)$. S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on oubliera parfois de préciser que la boule est dans X , en notant simplement $B(0; r)$ ou $\overline{B}(0; r)$.

Définition 1.2.1. Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ est dite **compact** si l'image $A(\overline{B}_X)$ est une partie **relativement compact** de Y . l'ensemble des applications linéaires compactes de X dans Y noté par $\mathcal{K}(X; Y)$ où seulement $\mathcal{K}(X)$ si $X = Y$.

La proposition suivante décrit la structure de $\mathcal{K}(X; Y)$.

Proposition 1.2.1. Soient X et Y deux espaces de Banach; l'ensemble $\mathcal{K}(X; Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X; Y)$.

Proposition 1.2.2. Soient X, Y et Z des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$; si S ou A est **compact** alors AS est **compact**. En particulier, $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(X)$.

Remarque 1.2.1. Il est clair que tout opérateur A de **rang fini** (*i.e* : l'image de A est d' dimension fini) est **compact** : En effet, l'ensemble $A(\overline{B}_X)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, si une suite $(A_n)_n$ d'opérateur de rang fini dans $\mathcal{L}(X, Y)$ converge vers A dans $\mathcal{L}(X, Y)$, alors A est compact. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.

Lemme 1.2.1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact et $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda \neq 0$. Alors $R(A - \lambda)$ est **fermé**.

Lemme 1.2.2. Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{K}(X)$, alors $\lambda I - A$ est à image fermée et

$$\dim N(\lambda I - A) < \infty$$

Un opérateur compact est nécessairement continu, car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée tel que $\|Ax_n\| \rightarrow \infty$, ce qui contredit la compacité.

Théorème 1.2.1. Si $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ est compact alors pour tout suite $(x_n)_n$ tel que $x_n \xrightarrow{n} x$ on a $Ax_n \xrightarrow{n} Ax$. La réciproque est vraie si X est un espace **réflexif**.

Définition 1.2.2. (*Spectre d'un opérateur compact*) :

Soit X un espace de Banach. On appelle spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$, le sous-ensemble du plan complexe défini par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas bijective}\}$$

On dit que $\lambda \in \sigma(A)$ est une valeur propre de A de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si $\lambda I - A$ n'est pas injective et $\dim(N(\lambda I - A)) = m$.

Lemme 1.2.3. Soit A est un opérateur compact, $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \neq 0$, alors λ est un point isolé de $\sigma(A)$

Théorème 1.2.2. [20], Si un opérateur A est somme d'opérateur compact K et un opérateur B , alors $\sigma_c(A) \subset \sigma(B)$.

(Produit des opérateurs)

Définition 1.2.3. Soient X, Y, Z et H quatres espaces vectoriels, et $A : X \rightarrow Y$ et $S : Y \rightarrow Z$, deux opérateurs linéaires, On définit l'opérateur composition SA (dit aussi opérateur produit) de A et S par :

$$(SA)(x) = S(A(x))$$

- Si T est un opérateur de H dans Y , alors : $(TS)A = T(SA)$.
- Si T est un opérateur de Y dans H , alors : $(T + S)A = TA + SA$.

Remarque 1.2.2. Dans le cas du produit, Il est connu que le spectre du produit d'opérateur auto-adjoint par un opérateur positive est toujours réel. La question qui se pose naturellement : Est-ce-que le spectre du produit de deux opérateurs auto-adjoints est réel ?

La réponse n'est pas vraie même en dimension 2. Il suffit de prendre en effet :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient un produit AB avec un spectre imaginaire donc non auto-adjoint.

Donnons quelques propriétés du produit des opérateurs auto-adjoints.

Théorème 1.2.3. *[13], Si A et B sont des opérateurs auto-adjoints sur X , alors*

- 1. $\sigma(AB)$ est symétrique par rapport à l'axe des réels et $\sigma_r(AB)$ ne contient aucun réel nul.*
- 2. AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.*
- 3. Dans le cas A et B sont des projections, AB est unitairement équivalents à son adjoint et dont le spectre est non négatif. (voir [12])*

Remarque 1.2.3. *On se pose les questions suivantes : - Les inclusions $\sigma(A) \subset \sigma(AB)$ et $\sigma(B) \subset \sigma(AB)$ et la réciproque sont elles vraies ?*

- sachant les spectres ($\sigma(A)$ de A , $\sigma(B)$) de B , Est-ce- qu'on déterminer le spectre de AB ? On donne une esquisse de réponse, en fait ni $\sigma(A) \subset \sigma(AB)$ ni $\sigma(B) \subset \sigma(AB)$ est nécessairement vérifié même en dimension inférieure de l'espace.

Si $AB = BA$ alors $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

D'autre part, si λ est une valeur propre de AB , avec A et B sont des matrices $N \times N$ (non nécessairement inversibles), alors λ est aussi une valeur propre de BA . En effet, si v est un vecteur propre de AB différent de 0 par rapport à λ , alors Bv est un vecteur propre de BA associé à la même valeur propre.

Si 0 est une valeur propre de AB alors $0 = \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$, alors 0 est aussi une valeur propre de BA

1.3 Opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et Opérateurs de Riesz

Cette section donne plusieurs définitions et propriétés différents sur les opérateurs de Fredholm, Browder, Kato et opérateurs de Riesz sur l'espace de Banach.

1.3.1 Opérateurs de Fredholm, Semi-Fredholm

Définition 1.3.1. Soient X et Y deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés. Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note $N(A)$ le noyau de A et $R(A)$ l'image de A . On dit que :

- 1) A est un opérateur de **Fredholm** si $\dim N(A)$ et $\text{codim} R(A)$ sont **finies**, l'ensemble des ces opérateurs est noté par :

$$\Phi(X, Y) \text{ ou } \Phi(X) \text{ lorsque } X = Y$$

- 2) A est un opérateur de **semi-Fredholm supérieur** si $\dim N(A)$ est finie et $R(A)$ est fermé, l'ensemble des ces opérateurs est noté par :

$$\Phi_+(X, Y) \text{ ou } \Phi_+(X) \text{ lorsque } X = Y$$

- 3) A est un opérateur de **semi-Fredholm inférieur** si $\text{codim} R(A)$ est finie, l'ensemble des ces opérateurs est noté par :

$$\Phi_-(X, Y) \text{ ou } \Phi_-(X) \text{ lorsque } X = Y$$

- 4) A est un opérateur de **semi-Fredholm** si $A \in \Phi_\pm(X, Y) = \Phi_+(X, Y) \cup \Phi_-(X, Y)$.

Remarque 1.3.1. Comme l'image d'un opérateur est fermée si elle est de codimension finie, alors :

$$(i) \quad \Phi(X, Y) = \Phi_+(X, Y) \cap \Phi_-(X, Y).$$

(ii) $\Phi(X)$ est un ensemble non-vide puisqu'il contient l'identité. Par contre $\Phi(X, Y)$ peut être vide lorsque $X \neq Y$.

Définition 1.3.2. Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note $\alpha(A) = \dim(N(A))$ et $\beta(A) = \text{codim}(R(A))$, On appelle **indice** d'un opérateur de **Fredholm** la fonction à valeurs entières suivante :

$$i : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$A \rightarrow i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$$

Et dans ce cas, on a $i(A) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, Il est clair que

- Si $A \in \Phi(X)$ alors $i(A) < \infty$.
- Si $A \in \Phi_+(X) \setminus \Phi(X)$ alors $i(A) = -\infty$.
- Si $A \in \Phi_-(X) \setminus \Phi(X)$ alors $i(A) = +\infty$.

Remarques 1.3.1. Soient X et Y deux espaces de Banach, on remarque que :

- (i) Dans le cas où X et Y sont de dimension finie, tous les opérateurs sont de **Fredholm** et leur indice est égale à $\dim X - \dim Y$.
- (ii) Tout opérateur inversible de $\mathcal{L}(X, Y)$ est de **Fredholm** d'indice nul, En effet, il découle de l'inversibilité de A que $N(A) = \{0\}$, c'est à dire $\alpha(A) = 0$, et $R(A) = X$ qui est fermée et sa codimension est nulle ($\beta(A) = 0$).
- (iii) Si $K \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, alors $K - \lambda$ est un opérateur de **Fredholm** pour tout compact non-nul $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (iv) Tout opérateur injectif à image fermée est **semi-Fredholm supérieur** d'indice négatif.
- (v) Tout opérateur surjectif est de **semi-Fredholm inférieur** d'indice positif.

Voici un premier critère de fermeture des opérateurs linéaires.

Théorème 1.3.1. soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur à image fermée. Alors on a :

- (i) A est **semi-Fredholm supérieur** si et seulement si A^* est **semi-Fredholm inférieur**
- (ii) A est **semi-Fredholm inférieur** si et seulement si A^* est **semi-Fredholm supérieur**
- (iii) A est **semi-Fredholm** si et seulement si A^* est **semi-Fredholm**
- (iv) A est **Fredholm** si et seulement si A^* est **Fredholm**

Et dans tous ces cas, on a : $i(A^*) = -i(A)$.

Preuve. Puisque $R(A)$ est fermée alors $R(A^*)$ est fermée, donc :

$$R(A) = N(A^*)^\perp \text{ et } R(A^*) = N(A)^\perp$$

Par conséquence, $\alpha(A^*) = \dim N(A^*) = \text{codim} R(A) = \beta(A)$

et $\beta(A^*) = \text{codim}R(A^*) = \dim N(A) = \alpha(A)$.

Et puisque $\dim N(A^*)$ et $\text{codim}R(A^*)$ est finis alors A^* est de **Fredholm**.

$$i(A^*) = \alpha(A^*) - \beta(A^*) = \beta(A) - \alpha(A) = -i(A)$$

Maintenant, les autres assertions se vérifient facilement. ■

Théorème 1.3.2. Soient $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $S \in \mathcal{L}(X; Y)$.

- (i) Si $A \in \Phi_+(X, Y)$ et $S \in \Phi_+(Y, Z)$, alors $SA \in \Phi_+(X, Z)$.
- (ii) Si $A \in \Phi_-(X, Y)$ et $S \in \Phi_-(Y, Z)$, alors $SA \in \Phi_-(X, Z)$.
- (iii) Si $A \in \Phi(X, Y)$ et $S \in \Phi(Y, Z)$ alors $S \in \Phi(X, Z)$.

Preuve. Montrons l'assertion (ii).

Soient M et N des sous-espaces fermés de dimension finie tels que $Y = R(A) \oplus M$

et $Z = R(S) \oplus N$. Alors il vient que $Z = (R(S) + SM) \oplus N$, et comme SM est de dimension finie, on obtient que $SA \in \Phi_-(X, Z)$.

Les assertions (i) et (ii) se déduisent de (i) par dualité. ■

Corollaire 1.3.1. Soit A un opérateur borné sur X .

- (i) Si $A \in \Phi_+(X)$ alors $A^n \in \Phi_+(X)$ pour tout $n \geq 1$.
- (ii) Si $A \in \Phi_-(X)$ alors $A^n \in \Phi_-(X)$ pour tout $n \geq 1$.
- (iii) Si $A \in \Phi(X)$ alors $A^n \in \Phi(X)$ pour tout $n \geq 1$.

Théorème 1.3.3. Soient $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

- (i) Si $SA \in \Phi_+(X, Y)$ alors $A \in \Phi_+(X, Y)$.
- (ii) Si $SA \in \Phi_-(X, Y)$ alors $S \in \Phi_-(X, Y)$.
- (iii) Si $SA \in \Phi(X, Y)$ alors $A \in \Phi_+(X, Y)$ et $S \in \Phi_-(Y, Z)$.

Preuve. (ii) comme $R(SA) \subseteq R(S)$, on obtient que $\text{codim}R(S) \leq \text{codim}R(SA)$.

D'où $S \in \Phi_-(Y, Z)$. Les assertions (i) et (ii) se déduisent de (i) par dualité. ■

Lemme 1.3.1. Soient $A : X \rightarrow Y$ un opérateur borné et M un sous-espace de X de codimension finie n . Alors A est de **Fredholm** de plus $i(A) = i(A_0) + n$.

Lemme 1.3.2. Si $A, B \in \Phi(X)$ alors $BA \in \Phi(X)$. De plus,

$$i(BA) = i(A) + i(B)$$

Preuve. Soit $\tilde{A}$ la bijection associée à A et posons A_0 , la restriction de A à X_0 . (Notons que A_0 la restriction de A à X_0).

Comme A est un isomorphisme et B de Fredholm, l'opérateur BA est de Fredholm avec $i(BA) = i(B)$.

En identifiant X_0 et $X_0 \times \{0\}$, on obtient que BA_0 est la restriction commune de BA et $B\tilde{A}$ à X_0

Par le lemme précédent $B\tilde{A}$ à X_0 est Fredholm $\Leftrightarrow BA_0$ est Fredholm $\Leftrightarrow BA$ est Fredholm

De plus :

$$\begin{aligned} i(BA) &= i(BA_0) + \dim(X/X_0) \\ &= \dim(B\tilde{A}) - \dim(X_0 \times Y_0/X_0 \times \{0\}) + \alpha(A) \\ &= i(B) + i(A) \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Φ_A est un ouvert.
- (ii) $i(\lambda - A)$ est constante sur composante de Φ_A .
- (iii) $\alpha(\lambda - A)$ et $\beta(\lambda - A)$ sont constantes sur toutes les composantes de Φ_A sauf sur un ensemble discret de point qui sont très grands.

Théorème 1.3.4. (Alternative de Fredholm) Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact.

On a pour tout $\lambda \in C^*$:

- (i) $N(\lambda I - A)$ est de dimension finie.
- (ii) $R(\lambda I - A)$ est fermé.
- (iii) $N(\lambda I - A) = \{0\} \Leftrightarrow R(\lambda I - A) = X$.

Perturbation de Fredholm et semi-Fredholm : On va exposer les résultats principaux des perturbations de Fredholm basés essentiellement sur le papier de Abedlmouleh et Jiribi [1].

Définition 1.3.3. Soient X, Y deux espaces de Banach et l'opérateur $F \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors on a :

- (i) F est appelée perturbation de Fredholm si $F + A \in \Phi(X, Y)$ avec $A \in \Phi(X)$.
- (ii) F est appelée perturbation de semi-Fredholm supérieur si $F + A \in \Phi_+(X, Y)$ avec $A \in \Phi_+(X)$.
- (iii) F est appelée perturbation de semi-Fredholm inférieur si $F + A \in \Phi_-(X, Y)$ avec $A \in \Phi_-(X)$.

Remarque 1.3.2. Soient X, Y deux espaces de Banach donc :

- 1) Les ensembles de perturbation de Fredholm noté par :

$$\mathcal{F}(X, Y) \text{ ou } \mathcal{F}(X) \text{ avec } X = Y$$

- 2) Les ensembles de perturbation de semi-Fredholm supérieur noté par :

$$\mathcal{F}_+(X, Y) \text{ ou } \mathcal{F}_+(X) \text{ avec } X = Y$$

- 3) Les ensembles de perturbation de semi-Fredholm inférieur noté par :

$$\mathcal{F}_-(X, Y) \text{ ou } \mathcal{F}_-(X) \text{ avec } X = Y$$

Remarque 1.3.3.

$$\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}_+(X, Y) \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$$

$$\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}_-(X, Y) \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$$

Lemme 1.3.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $F \in \mathcal{L}(X)$, alors :*

- (i) *Si $A \in \Phi(X)$ et $F \in \mathcal{F}(X)$, alors $A + F \in \Phi(X)$ et $i(A + F) = i(A)$.*
- (ii) *Si $A \in \Phi_+(X)$ et $F \in \mathcal{F}_+(X)$, alors $A + F \in \Phi_+(X)$ et $i(A + F) = i(A)$.*
- (iii) *Si $A \in \Phi_-(X)$ et $F \in \mathcal{F}_-(X)$, alors $A + F \in \Phi_-(X)$ et $i(A + F) = i(A)$.*

Ascent et Descent d'un opérateur linéaire borné :

Définition 1.3.4. [11] *Pout $A \in \mathcal{L}(X)$, on appelle ascent de A et on note $asc(A)$ le plus petit entier n tel que $N(A^n) = N(A^{n+1})$, si un tel entier n'existe pas alors $asc(A) = \infty$, et on écrit :*

$$asc(A) = \min\{n \in \mathbb{N} : N(A^n) = N(A^{n+1})\}$$

Définition 1.3.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, on appelle descent de A et on note $desc(A)$ le plus petit entier n tel que $R(A^n) = R(A^{n+1})$, si un tel entier n'existe pas alors $desc(A) = +\infty$ et on écrit :*

$$desc(A) = \min\{n \in \mathbb{N} : R(A^n) = R(A^{n+1})\}$$

1.3.2 Opérateurs de Browder, Semi Browder

Définition 1.3.6. [11]

*Deux classes importants dans la théorie de Fredholm sont donnée par les classes des opérateurs semi-Fredholm avec un ascent ou descent finie. Nous étudions deux classes des opérateurs la classe de tout les opérateurs **semi-Browder supérieur** dans un espace de Banach définie par :*

$$\mathcal{B}_+(X) = \{A \in \Phi_+(X) : asc(A) < \infty\}$$

*la classe de tous les opérateurs **semi-Browder inférieur** dans un espace de Banach est donnée par :*

$$\mathcal{B}_-(X) = \{A \in \Phi_-(X) : desc(A) < \infty\}$$

Finalement la classe des opérateurs de **Browder** est définie par :

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_+(X) \cap \mathcal{B}_-(X)$$

Remarque 1.3.4. On remarque que $\Phi(X)$, $\Phi_+(X)$ et $\Phi_-(X)$ sont des semi-groupes ouverts dans $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}_+(X)$, $\mathcal{B}_-(X)$ sont des sous ensembles du $\mathcal{B}(X)$

Théorème 1.3.5. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ alors :

- 1) A est un semi-Browder supérieur $\Leftrightarrow A^*$ est un semi-Browder inférieur.
- 2) A est un semi-Browder inférieur $\Leftrightarrow A^*$ est un semi-Browder supérieur.
- 3) A est un Browder $\Leftrightarrow A^*$ est un Browder.

Proposition 1.3.2. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ alors :

- 1) A est un semi-Browder supérieur $\Leftrightarrow R(A)$ est fermée et $N^\infty < \infty$.
- 2) A est un semi-Browder inférieur $\Leftrightarrow \text{codim} R^\infty < \infty$.
- 3) A est un Browder $\Leftrightarrow \dim N^\infty < \infty$ et $\text{codim} R^\infty < \infty$.

Remarque 1.3.5. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ alors on remarque que :

- A est un semi-Browder supérieur alors, $i(A) \leq 0$.
- A est un semi-Browder inférieur alors, $i(A) \geq 0$.
- A est un Browder alors, $i(A) = 0$.

1.3.3 Opérateur de Kato

Définition 1.3.7. [11] Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, on dit que A est un opérateur de **Kato** si $R(A)$ est fermée et A satisfait les conditions suivantes :

1. $N(A) \subset R^\infty(A)$.
2. $N^\infty(A) \subset R(A)$.
3. $N^\infty(A) \subset R^\infty(A)$.

$$4. N(A) \subset \overline{R^\infty(A)}.$$

$$\text{Avec : } R^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(A^n)$$

Décomposition de Kato : [3]

Soit A un opérateur semi-Fredholm, alors il existe des sous-espaces fermés $X_1, X_2 \subset X$ invariant avec respect de A tel que $X = X_1 \oplus X_2$, $\dim X_1 < \infty$, $A|_{X_1}$ est nilpotent et $A|_{X_2}$ est de Kato.

1.3.4 Opérateur de Riesz et Projection de Riesz

Algèbre de Calkin

Définition 1.3.8. Soient $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés et $\mathcal{K}(X)$ l'idéal fermé de $\mathcal{L}(X)$. L'algèbre $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ formé des classes $A + \mathcal{K}(X)$ est dite **algèbre de Calkin** avec $A \in \mathcal{L}(X)$ et noté par $\mathcal{C}(X)$

Théorème 1.3.6. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, A est un opérateur de **Fredholm** si et seulement si $\pi(A)$ est inversible dans l'algèbre de Calkin. où $\pi : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ est la projection canonique. i.e $(\pi(A) = A + \mathcal{K}(X))$.

Définition 1.3.9. (La partie quasinilpotente)

La partie quasinilpotente de A notée par :

$$H_0 = \{u \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n u\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$$

où 0 est un point isolée du spectre.

Définition 1.3.10. (Opérateur de Riesz) :[2]

$A \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur de **Riesz** et on le note $\mathcal{R}(X)$ si pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A - \lambda I$ est de Fredholm

Autrement dit $A \in \mathcal{R}(X)$ si et seulement si A est quasinilpotent dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{C}(X)$

Définition 1.3.11. (*La projection de Riesz :*)

Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, si λ_0 est un point isolé dans $\sigma(A)$, Notons :

$$\Gamma_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \epsilon\}$$

le cercle orienté positivement, On définit le projecteur de Riesz de A associé à λ_0 sur Γ_{λ_0} par :

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda I_X)^{-1} d\lambda,$$

Chapitre 2

Spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné

Dans ce chapitre on commence par des définitions sur les types du spectre essentiel d'un opérateurs linéaire borné dans un espace de Banach, ensuite nous étudions le spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés.

2.1 Spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné

On plus de les types de spectre d'un opérateur linéaire borné, il existe un autre type qui s'appelle **le spectre essentiel** pour définit cet dernier on donne d'abord la définition du spectre discret :

Définition 2.1.1. (*le spectre discret*) : C'est l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie, noté par $\sigma_d(A)$.

Définition 2.1.2. Dans un espace de Hilbert, si A est un opérateur auto-adjoint on a une seule définition du spectre essentiel : c'est l'ensemble du tous les points du spectre ne sont pas des valeurs propres isolées de multiplicité finie, c-à-d : il est le complémentaire du spectre discret, on note par $\sigma_e(A)$, alors on écrit :

$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$$

Mais dans un espace de Banach le spectre essentiel a plusieurs définitions non équivalents la difinition la plus plausible du spectre essentiel est :

$$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \text{ n'est pas de Fredholm } \Phi(A) \text{ d'indice } 0\}$$

Mais d'autre part il a des autres définitions par [6] on le présent comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{e1}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \notin \Phi_+(X)\} = \mathbb{C} \setminus \Phi_{+A} \\ \sigma_{e2}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \notin \Phi_-(X)\} = \mathbb{C} \setminus \Phi_{-A} \\ \sigma_{e3}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \notin \Phi_{\pm}(X)\} = \mathbb{C} \setminus \Phi_{\pm A} \\ \sigma_{e4}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \notin \Phi(X)\} = \mathbb{C} \setminus \Phi_A \\ \sigma_{e5}(A) &= \bigcap_{K \in K(X)} \sigma(A + K) \\ \sigma_{e6}(A) &= \mathbb{C} \setminus \rho_6(A) \\ \sigma_{e7}(A) &= \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_{ap}(A + K) \\ \sigma_{e8}(A) &= \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_{\delta}(A + K) \\ \sigma_{pa}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \text{ n'est pas à image fermé}\} \end{aligned}$$

Avec :

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \inf_{\|x\| \leq 1} \|\lambda - A\| = 0\}$$

$$\sigma_{\delta}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda - A \text{ non surjective}\}$$

$$\rho_6(A) = \{\lambda \in \rho_5(A) \setminus \text{tous les scalaires } \lambda \text{ dans } \rho(A)\}$$

et :

$$\rho_5(A) = \{\lambda \in \Phi_A \setminus i(\lambda - A) = 0\}$$

Propriété 2.1.1. $\sigma_{e1}(A)$ et $\sigma_{e2}(A)$ sont les spectres essentiels de **Gustafson** et **Weidmann**, $\sigma_{e3}(A)$ le spectre essentiel de **Kato**, $\sigma_{e4}(A)$ est le spectre essentiel de **Wolf**, $\sigma_{e5}(A)$ le spectre essentiel de **Schechter** ou de **Weyl**, $\sigma_{e6}(A)$ est de **Browder**, $\sigma_{e7}(A)$ est de **Rakovcević**, $\sigma_{e8}(A)$ le spectre essentiel introduit par **Schmoeger**.

Proposition 2.1.1. (*Caractérisation du spectre essentiel :*) En général on a :

- $\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(A) = \sigma_{e3}(A) \subseteq \sigma_{e4}(A) \subseteq \sigma_{e5}(A) \subseteq \sigma_{e6}(A)$.
- $\sigma_{e5}(A) = \sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e8}(A)$.
- $\sigma_{e1}(A) \subset \sigma_{e7}(A)$.
- $\sigma_{e2}(A) \subset \sigma_{e8}(A)$.

Proposition 2.1.2. Soit X un espace de Banach et $A \in C(X)$. Alors :

$\lambda \notin \sigma_{e5}(A)$ si et seulement si $\lambda \in \Phi_A$, et $i(\lambda - A) = 0$.

Proposition 2.1.3. Soit $A \in C(X)$, alors

- (i) $\lambda \notin \sigma_{e7}(A)$ si et seulement si $\lambda - A \in \Phi_+(X)$ et $i(\lambda - A) \leq 0$.
- (ii) $\lambda \notin \sigma_{e8}(A)$ si et seulement si $\lambda - A \in \Phi_-(X)$ et $i(\lambda - A) \geq 0$.
- (iii) A est un opérateur linéaire borné, alors $\sigma_{e8}(A) = \sigma_{e7}(A^*)$.

Remarque 2.1.1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, Si le complémentaire de $\sigma_{e4}(A)$ est connexe, alors :

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A)$$

Rappelez le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. [11]

Soient A, B deux opérateurs linéaires bornés sur X .

- (i) Si $BA \in \Phi_+(X)$ alors $A \in \Phi_+(X)$.
- (ii) Si $BA \in \Phi_-(X)$ alors $A \in \Phi_-(X)$.
- (iii) Si $A \in \Phi(X)$ et $B \in \Phi(X)$ alors $BA \in \Phi(X)$ et $i(AB) = i(A) + i(B)$.
- (iv) Si $AB \in \Phi(X)$ et $BA \in \Phi(X)$ alors $A \in \Phi(X)$ et $B \in \Phi(X)$.

2.2 Spectre essentiel de la somme (Produit) de deux opérateurs linéaires bornés

Cette section donne le spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés et son relation avec le spectre essentiel de chacun de ces opérateurs, avec leurs produits sont des perturbation Fredholm ou des perturbation semi-Fredholm supérieur ou inférieur dans l'espace de Banach X , on commence par le théorème suivant du livre [6] :

Donnons un premier résultat du spectre du produit.

Théorème 2.2.1. *Si $A \in \mathcal{L}(X)$ est de Fredholm d'indice 0 et $B \in \mathcal{L}(X)$, alors*

$$\sigma(AB) = \sigma(BA) \quad (2.1)$$

$$\sigma_e(AB) = \sigma_e(BA) \quad (2.2)$$

Preuve. Puisque $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$ et $\sigma_e(AB) \setminus \{0\} = \sigma_e(BA) \setminus \{0\}$

Au point 0, les assertions du lemme suivant achève la preuve. ■

Lemme 2.2.1. [5], *Si $A \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et $B \in \mathcal{L}(X)$, alors*

$$AB \text{ inversible} \iff BA \text{ inversible}$$

$$AB \text{ Fredholm} \iff BA \text{ Fredholm}$$

Théorème 2.2.2. *Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, si $0 \in \rho(A)$. Alors pour $\lambda \neq 0$, on a*

$$\lambda \in \sigma_{ei}(A) \iff \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^{-1}) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8.$$

Preuve. $\lambda \in \sigma_{ei}(A) \iff \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^{-1})$ pour $i = 4, 5$.

D'autre part, peut être écrit $\lambda \neq 0$.

$$A - \lambda = -\lambda(A^{-1} - \lambda^{-1})A.$$

Puisque, A est injectif et surjectif, alors $\alpha(A - \lambda) = \alpha(A^{-1} - \lambda^{-1})$ et $R(A - \lambda) = R(A^{-1} - \lambda^{-1})$.

Cela montre que $\lambda \in \Phi_{+A}$ (resp. Φ_{-A}) si et seulement si $\frac{1}{\lambda} \in \Phi_{+A^{-1}}$ (resp. $\Phi_{-A^{-1}}$)

et on a $i(A - \lambda) = i(A^{-1} - \lambda^{-1})$. Donc :

$$\lambda \in \sigma_{ei}(A) \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^{-1}) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 7, 8$$

.

■

Théorème 2.2.3. *Soit A et B deux opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach X .*

(i) *Si $AB \in \mathcal{F}(X)$ alors*

$$\sigma_{ei}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ei}(B)] \setminus \{0\}, \quad i = 4, 5.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}(X)$, alors

$$\sigma_{e4}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)] \setminus \{0\}.$$

De plus, si le complément de $\sigma_{e4}(A)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e5}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)] \setminus \{0\} \tag{2.3}$$

(ii) *Si l'hypothèse de (i) est satisfait et si $C\sigma_{e5}(A + B)$, $C\sigma_{e5}(A)$ et $C\sigma_{e5}(B)$ sont connexes, alors*

$$\sigma_{e6}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e6}(A) \cup \sigma_{e6}(B)] \setminus \{0\}.$$

(iii) *Si $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, alors*

$$\sigma_{ei}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ei}(B)] \setminus \{0\}, \quad i = 1, 7.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}_+(X)$, alors

$$\sigma_{e1}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)] \setminus \{0\}. \quad (2.4)$$

De plus, Si $C\sigma_{e4}(A)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e7}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(VB)] \setminus \{0\}. \quad (2.5)$$

(iv) Si $BA \in \mathcal{F}_-(X)$, alors

$$\sigma_{ei}(B + A) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ei}(B)] \setminus \{0\}, \quad i = 2, 8.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}_-(X)$, alors

$$\sigma_{e2}(B + A) \setminus \{0\} = [\sigma_{e2}(A) \cup \sigma_{e2}(B)] \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

De plus, Si le complémentaire de $\sigma_{e4}(A^)$ est connexe, alors*

$$\sigma_{e8}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e8}(A) \cup \sigma_{e8}(B)] \setminus \{0\} \quad (2.7)$$

(v) Si $AB \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, alors

$$\sigma_{e3}(A + B) \setminus \{0\} \subset [(\sigma_{e3}(A) \cup \sigma_{e3}(B)) \cup (\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(B)) \cup (\sigma_{e2}(A) \cap \sigma_{e1}(B))] \setminus \{0\}.$$

De plus, Si $BA \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, alors

$$\sigma_{e3}(A + B) \setminus \{0\} = [(\sigma_{e3}(A) \cup \sigma_{e3}(B)) \cup (\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(B)) \cup (\sigma_{e2}(A) \cap \sigma_{e1}(B))] \setminus \{0\}.$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est généralisé dans [4] pour les perturbation

de Fredholm et semi-Fredholm. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on écrit :

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) = AB - \lambda(A + B - \lambda I) \quad (2.8)$$

$$(B - \lambda I)(A - \lambda I) = BA - \lambda(A + B - \lambda I) \quad (2.9)$$

(i) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B) \cup \{0\}$. Alors, $(A - \lambda I) \in \Phi(X)$ et $(B - \lambda I) \in \Phi(X)$. D'après l'assertion (iii) de lemme 2.1.1, donne $(A - \lambda I)(B - \lambda I) \in \Phi(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, on applique l'équation 2.8, on a $(A + B - \lambda I) \in \Phi(X)$, donc $\lambda \notin \sigma_{e4}(A + B)$. On obtient :

$$\sigma_{e4}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)] \setminus \{0\} \quad (2.10)$$

Soit $\lambda \notin \sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B) \cup \{0\}$. Alors par la proposition 2.1.2, $(A - \lambda I) \in \Phi(X)$, $i(A - \lambda I) = 0$, $(B - \lambda I) \in \Phi(X)$ et $i(B - \lambda I) = 0$ et alors par l'assertion (iii) de lemme 2.1.1, donne $(A - \lambda I)(B - \lambda I) \in \Phi(X)$ et $i((A - \lambda I)(B - \lambda I)) = 0$. De plus, puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, on applique l'équation 2.8, et le lemme 1.3.3. Alors on a :

$$(A + B - \lambda I) \in \Phi(X) \text{ et } i(A + B - \lambda I) = 0.$$

Maintenant on applique la proposition 2.1.2, donc on a $\lambda \notin \sigma_{e5}(A + B)$, avec

$$\sigma_{e5}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)] \setminus \{0\} \quad (2.11)$$

On démontre l'inclusion inverse des équations 2.10 et 2.11.

Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e4}(A + B) \cup \{0\}$, alors $(A + B - \lambda I) \in \Phi(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$ et $BA \in \mathcal{F}(X)$, alors par l'équations 2.8 et 2.9. On a :

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) \in \Phi(X) \text{ et } (B - \lambda I)(A - \lambda I) \in \Phi(X) \quad (2.12)$$

D'après l'équation 2.12 et l'assertion (iv) du lemme 2.1.1. Il est clair que $(A - \lambda I) \in \Phi(X)$

et $(B - \lambda I) \in \Phi(X)$. Donc $\lambda \notin \sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)$.

Cela démontre que : $[\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e4}(A + B) \setminus \{0\}$.

Alors :

$$\sigma_{e4}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e4}(A) \cup \sigma_{e4}(B)] \setminus \{0\}.$$

Ceci prouve que :

$$[\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e5}(A + B) \setminus \{0\}.$$

Soit $\lambda \notin \sigma_{e5}(A + B) \cup \{0\}$, alors par la proposition 2.1.2, $(A + B - \lambda I) \in \Phi(X)$ et $i(A + B - \lambda I) = 0$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$ et $BA \in \mathcal{F}(X)$, on voit que $(A - \lambda I) \in \Phi(X)$ et $(B - \lambda I) \in \Phi(X)$.

On peut appliqué les équations (2.8, 2.12) et l'assertion (iii) du lemme 2.1.1 et le lemme 1.3.3, on a :

$$i[(A - \lambda I)(B - \lambda I)] = i(A - \lambda I) + i(B - \lambda I) = i(A + B - \lambda I) = 0. \quad (2.13)$$

Puisque A est un opérateur linéaire borné, on obtient $\rho(A) \neq \emptyset$, et $C\sigma_{e4}(A)$ on déduit dans la remarque 2.1.1 que :

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A).$$

On utilise l'équation précédente que $(A - \lambda I) \in \Phi(X)$, on déduire que $i(A - \lambda I) = 0$.

dans l'équation 2.13, on a $i(B - \lambda I) = 0$. On conclut $\lambda \notin \sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)$ avec

$$[\sigma_{e5}(A) \cup \sigma_{e5}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e5}(A + B) \setminus \{0\}.$$

Donc on démontre l'équation 2.3.

(ii) Les ensembles $C\sigma_{e5}(A + B)$, $C\sigma_{e5}(A)$ et $C\sigma_{e5}(B)$ sont connexe.

Puisque A et B sont des opérateurs bornés on a, $\rho(A)$, $\rho(B)$ et $\rho(A + B)$ ne sont pas des ensembles vides. Donc on utilise [8], on déduire que :

$\sigma_{e5}(A + B) = \sigma_{e6}(A + B)$, $\sigma_{e5}(A) = \sigma_{e6}(A)$ et $\sigma_{e5}(B) = \sigma_{e6}(B)$. Donc, l'équation 2.3 donne ;

$$\sigma_{e6}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e6}(A) \cup \sigma_{e6}(B)] \setminus \{0\}.$$

(iii) Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B) \cup \{0\}$, alors $(A - \lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $(B - \lambda I) \in \Phi_+(X)$. On utilise [[17], p 129], on a $(A - \lambda I)(B - \lambda I) \in \Phi_+(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, on peut appliqué l'équation 2.8, et l'assertion (ii) de lemme 1.3.3 on a donc $(A + B - \lambda I) \in \Phi_+(X)$. Donc, $\lambda \notin \sigma_{e1}(A + B)$. Alors

$$\sigma_{e1}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)] \setminus \{0\} \quad (2.14)$$

Maintenant, supposons que $\lambda \notin \sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B) \cup \{0\}$, alors par la proposition 2.1.3 l'assertion (i), on a

$$(A - \lambda I) \in \Phi_+(X), \quad i(A - \lambda I) \leq 0, \quad (B - \lambda I) \in \Phi_+(X) \text{ and } i(B - \lambda I) \leq 0.$$

On utilise [[17], p 129], et [[11], p 153], on a

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) \in \Phi_+(X) \text{ et } i[(A - \lambda I)(B - \lambda I)] \leq 0.$$

Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, on applique l'équation 2.8 et l'assertion (ii) du lemme 1.3.3, on a alors

$$(A + B - \lambda I) \in \Phi_+(X) \text{ et } i(A + B - \lambda I) \leq 0$$

.

On peut applique la proposition 2.1.3 enoncé (i), il est clair que $\lambda \notin \sigma_{e7}(A + B)$ Donc :

$$\sigma_{e7}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)] \setminus \{0\} \quad (2.15)$$

On démontre l'inclusion inverse des équations 2.14 et 2.15.

On suppose que $\lambda \notin \sigma_{e1}(A + B) \cup \{0\}$ alors $(A + B - \lambda I) \in \Phi_+(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X)$,

alors d'après les équations 3.6 et 3.7, et l'assertion (ii) de lemme 1.3.3 on a.

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) \in \Phi_+(X), (B - \lambda I)(A - \lambda I) \in \Phi_+(X) \quad (2.16)$$

D'après l'équation 2.16, le lemme 2.1.1 et le lemme 2.1.1 l'énoncé (i),

il est clair que $(A - \lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $(B - \lambda I) \in \Phi_+(X)$.

Alors $\lambda \notin \sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)$. Donc :

$$[\sigma_{e1}(A) \cup \sigma_{e1}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e1}(A + B) \setminus \{0\}$$

Cela prouve l'équation 3.2 . Maintenant on démontre ;

$$[\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e7}(A + B) \setminus \{0\}.$$

Soit $\lambda \notin \sigma_{e7}(A + B) \cup \{0\}$, alors par la proposition 2.1.3 (i),

$$(A + B - \lambda I) \in \Phi_+(X) \text{ et } i(A + B - \lambda I) \leq 0.$$

Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X)$, Il est clair que $(A - \lambda I) \in \Phi_+(X)$ et $(B - \lambda I) \in \Phi_+(X)$.

On utilise les équations 2.8 et 2.16 et l'assertion (ii) de lemme 1.3.3. On a

$$i[(A - \lambda I)(B - \lambda I)] = i(A + B - \lambda I) \leq 0.$$

Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, alors $(A - \lambda_0 I) \in \Phi(X)$ et $i(A - \lambda_0 I) = 0$, puisque $\rho(A) \subset \rho_4(A)$ alors

$\lambda_0 \in \rho_4(A)$. $\rho_4(A) = C\sigma_{e4}(A)$ est connexe et par la proposition 1.3.1 l'énoncée (ii), on a

$i(A - \lambda I)$ est constante pour tout composant de Φ_A , alors $i(A - \lambda I) = 0$, pour tout $\lambda \in \rho_4(A)$.

On applique [[11], p 153], il est clair que

$$i[(A - \lambda I)(B - \lambda I)] = i[(A - \lambda I)] + i[(B - \lambda I)] \leq 0,$$

Donc $i(B - \lambda I) \leq 0$. Par la proposition 2.1.3 (i), on conclut $\lambda \notin \sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)$ alors

$$[\sigma_{e7}(A) \cup \sigma_{e7}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e7}(A + B) \setminus \{0\},$$

Alors, on obtient l'équation 2.5.

(iv) La preuve de l'équation 2.6 est similaire que (iii) pour l'équation 2.4.

Maintenant on démontre l'équation suivante :

$$\sigma_{e8}(A + B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e8}(A) \cup \sigma_{e8}(B)] \setminus \{0\}.$$

Soient A et $B \in \mathcal{L}(X)$. On applique l'assertion (iii) de la proposition 2.1.3 :

On a $\sigma_{e8}(A) = \sigma_{e7}(A^*)$, $\sigma_{e8}(B) = \sigma_{e7}(B^*)$ et $\sigma_{e8}(A + B) = \sigma_{e7}(A^* + B^*)$.

Appliquant (iii) pour l'équation 2.5, on obtient :

$$\sigma_{e7}(A^* + B^*) \setminus \{0\} = [\sigma_{e7}(A^*) \cup \sigma_{e7}(B^*)] \setminus \{0\}.$$

Donc, on montre l'équation 2.7

(v) Puisque, l'égalités :

$$\sigma_{e3}(A) = \sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(A)$$

$$\sigma_{e3}(B) = \sigma_{e1}(B) \cap \sigma_{e2}(B)$$

et

$$\sigma_{e3}(A + B) = \sigma_{e1}(A + B) \cap \sigma_{e2}(A + B)$$

sont connues, $AB \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, alors par les équations 2.4 et 2.6 on déduit que :

$$\sigma_{e3}(A + B) \setminus \{0\} = [(\sigma_{e3}(A) \cup \sigma_{e3}(B)) \cup (\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(B)) \cup (\sigma_{e2}(A) \cap \sigma_{e1}(B))] \setminus \{0\}. \quad \blacksquare$$

Chapitre 3

S-Spectre essentiel d'un opérateur borné

L'objectif de ce chapitre est d'introduire essentiellement le S-spectre essentiel d'un opérateur linéaires borné, on commence par quelques définitions du S-spectre essentiel. En plus nous donnons les caractérisations du S-spectre essentiel comme au chapitre précédent, particulièrement le S-spectre essentiel de Browder. Enfin nous discuterons le S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés.

Dans ce chapitre, On s'intéresse à l'étude de l'opérateur $\lambda S - A$, si $S = I$, on retrouve les résultats du chapitre précédent. Dorénavant, on va considérer que l'opérateur $S \neq I$.

3.1 S-spectre essentiel

Dans cette section on définit le S-spectre essentiel d'un opérateur borné, on plus elle donne les caractérisations de ce dernier.

Définition 3.1.1. Soient X un espace de Banach, A et S deux opérateurs linéaires bornés sur X , avec $S \neq O$, on définit l'ensemble S -résolvant de A par :

$$\rho_S(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \text{ a un inverse borné}\}$$

Le S -spectre de A est alors le complémentaire de l'ensemble S -résolvent c-à-d :

$$\sigma_S(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_S(A).$$

Dans un espace de Hilbert X , si A est un opérateur auto-adjoint, on ne trouve qu'une seule définition du spectre essentiel qui consiste en l'ensemble de tous les points du spectre qui ne sont pas des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Par ailleurs, dans un espace de Banach le S -spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné possède plusieurs définitions mais non équivalentes comme on l'a déjà vu au chapitre précédent.

Pour S borné, on donne les définitions et les variantes du S -spectre essentiel d'un opérateur A , noté $\sigma_{e,S}(A)$ relativement aux définitions des différents opérateurs (Fredholm, Riesz, Kato,...) :

$$\sigma_{e1,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin \Phi_+(X) \} := \mathbb{C} \setminus \Phi_{+A,S},$$

$$\sigma_{e2,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin \Phi_-(X) \} := \mathbb{C} \setminus \Phi_{-A,S},$$

$$\sigma_{e3,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin \Phi_{\pm}(X) \} := \mathbb{C} \setminus \Phi_{\pm A, S},$$

$$\sigma_{e4,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin \Phi(X) \} := \mathbb{C} \setminus \Phi_{A,S},$$

$$\sigma_{e5,S}(A) : = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_S(A + K).$$

$$\sigma_{eB+,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin B_+(X) \} := \mathbb{C} \setminus B_{+A,S},$$

$$\sigma_{eB-,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin B_-(X) \} := \mathbb{C} \setminus B_{-A,S},$$

$$\sigma_{e6,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \notin B(X) \} := \mathbb{C} \setminus B_{A,S},$$

$$\sigma_{e7,S}(A) : = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{ap,S}(A + K).$$

$$\sigma_{e8,S}(A) : = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{\delta,S}(A + K).$$

$$\sigma_{e9,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \text{ n'est pas essentiellement inversible à gauche} \}$$

$$\sigma_{e10,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \text{ n'est pas essentiellement inversible à droite} \}$$

$$\sigma_{e11,S}(A) : = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{l,S}(A + K),$$

$$\sigma_{e12,S}(A) : = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{r,S}(A + K).$$

avec

$$\sigma_{ap,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{\|x\|=1, x \in D(A)} \|(\lambda S - A)x\| = 0 \},$$

$$\sigma_{\delta,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \text{ n'est pas surjective} \},$$

$$\sigma_{r,S}(A) : = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \text{ n'est pas inversible à droite} \}$$

et

$$\sigma_{l,S}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda S - A \text{ n'est pas inversible à gauche} \}.$$

Proposition 3.1.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\Phi_{A,S}$ est un ouvert.
2. $i(\lambda S - A)$ est constante sur composante de $\Phi_{A,S}$.
3. $\alpha(\lambda S - A)$ et $\beta(\lambda S - A)$ sont constantes sur toutes les composantes de $\Phi_{A,S}$ sauf sur un ensemble discret de point qui sont très grands.

La section suivante est inspirée du livre de Müller [11].

3.2 Caractérisation du S-spectre essentiel

Dans cette section, on donne les différentes caractérisations du S -spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X . Un premier résultat est établi par Jeribi [Aref 2013].

Théorème 3.2.1. *Soient S et A deux opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Banach X , alors :*

- (i) $\sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$.
- (ii) $\sigma_{e7,S}(A) = \sigma_{e1,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) > 0\}$.
- (iii) $\sigma_{e8,S}(A) = \sigma_{e2,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) < 0\}$.
- (iv) $\sigma_{e11,S}(A) = \sigma_{e9,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) > 0\}$.
- (v) $\sigma_{e12,S}(A) = \sigma_{e10,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) < 0\}$.

Preuve.

- (i) Supposons $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$. Alors $(A - \lambda S) \in \Phi(X)$ et $i(A - \lambda S) = 0$, en appliquant [[11], p 173], il existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tel que $A - \lambda S + K$ est inversible, alors $\lambda \in \rho_S(A + K)$. Ceci montre que : $\lambda \notin \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_S(A + K)$. On a alors

$$\sigma_{e5,S}(A) \subset \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \quad (3.1)$$

Montrons à présent l'inclusion inverse de l'équation 3.1. Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A)$, alors il existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\lambda \in \rho_S(A + K)$, par suite $A - \lambda S + K \in \Phi(X)$ et $i(A - \lambda S + K) = 0$. L'opérateur $A - \lambda S$ peut être écrit sous la forme :

$$A - \lambda S = A + K - \lambda S - K \quad (3.2)$$

Puisque $K \in \mathcal{K}(X)$, d'après [[11], p 161], on a $A - \lambda S \in \Phi(X)$ et donc

$$i(A - \lambda S) = i(A + K - \lambda S) = 0.$$

Ce qui permet de conclure que $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$, et donc :

$$\sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \subset \sigma_{e5,S}(A).$$

Ce qui achève la démonstration de la première assertion.

Les démonstrations des autres cas sont analogues à celle de la première assertion. ■

A partir du théorème précédent on peut établir une caractérisation plus simple de quelques S -spectres essentiels :

Corollaire 3.2.1. *Soient S et A deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X , alors :*

- (i) $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A)$ si et seulement si $\lambda \in \Phi_{A,S}$ et $i(A - \lambda S) = 0$.
- (ii) $\lambda \notin \sigma_{7,S}(A)$ si et seulement si $\lambda S - A \in \Phi_+(X)$ et $i(A - \lambda S) \leq 0$.
- (iii) $\lambda \notin \sigma_{8,S}(A)$ si et seulement si $\lambda S - A \in \Phi_-(X)$ et $i(A - \lambda S) \geq 0$.

Preuve. La preuve de ce corollaire est immédiate par le théorème 3.2.1 ■

Remarque 3.2.1. *On remarque que :*

- (1) L'énoncé (i) du corollaire généralise le résultat donné par Schechter [16] lorsque $S = I$.
- (2) Les énoncés (ii) – (iii) du corollaire précédent étendent le résultat donné par Schmoe-ger [18]

En faisant intervenir la théorie des indices des opérateurs, on peut connecter les S -spectres essentiels de deux opérateurs par le biais de celui de leur produit, on a :

Proposition 3.2.1. *Soit S et $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que $S \neq A$ alors :*

- (i) Si $\alpha(S) < \infty$ alors $\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(SA)$.
- (ii) Si $\beta(S) < \infty$ alors $\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(AS)$.
- (iii) Si $S \in \Phi(X)$ alors $\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e4,S}(AS) = \sigma_{e4,S}(SA)$.

Preuve.

- (i) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(SA)$, alors $(\lambda S - SA) \in \Phi(X)$ cela implique que $S(\lambda - A) \in \Phi(X)$.

Puisque $\alpha(S) < \infty$, d'après [[17], p 111] on déduit que $(\lambda - A) \in \Phi(X)$ ce qui implique que $\lambda \notin \sigma_{e4}(A)$. Donc :

$$\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(SA). \quad (3.3)$$

(ii) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(AS)$. Alors $(\lambda S - AS) \in \Phi(X)$, cela implique que $(\lambda - A)S \in \Phi(X)$.

Puisque $\beta(S) < \infty$, Alors par [[17], p 114], on voit que $(\lambda - A) \in \Phi(X)$, donc $\lambda \notin \sigma_{e4}(A)$.

Par conséquent :

$$\sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e4,S}(AS). \quad (3.4)$$

(iii) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4}(A)$, alors $(\lambda - A) \in \Phi(X)$, puisque $S \in \Phi(X)$ alors en appliquant, [[17], p 106] on conclut que $(\lambda - A)S \in \Phi(X)$ et $S(\lambda - A) \in \Phi(X)$.

Parsuite $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(AS)$ et $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(SA)$. On a donc : $\sigma_{e4,S}(SA) \subset \sigma_{e4}(A)$ et $\sigma_{e4,S}(AS) \subset \sigma_{e4}(A)$. Tenant compte des équations 3.3 et 3.4 on obtient :

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e4,S}(AS) = \sigma_{e4,S}(SA)$$

■

3.3 S- spectre essentiel de Browder

Il s'agit dans cette section d'étudier le S - spectre essentiel de Browder d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X , commençons par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soient S et A deux opérateurs linéaire bornés sur un espace de Banach X , alors :*

$$\begin{aligned} \sigma_{e6,S}(A) &= \sigma_{e4,S}(A) \cup acc\sigma_S(A) \\ \sigma_{eB+,S}(A) &= \sigma_{e1,S}(A) \cup acc\sigma_S(A) \\ \sigma_{eB-,S}(A) &= \sigma_{e2,S}(A) \cup acc\sigma_S(A) \end{aligned}$$

où $acc\sigma_S(A)$ désigne l'accumulation du S -spectre de A .

Preuve. Soit $\lambda \notin \sigma_{e6,S}(A)$ alors $(\lambda S - A) \in B(X)$, par [[11], p 186], il existe une décomposition $X = X_1 \oplus X_2$ tels que :

- $\dim X_1 < +\infty$,
- $A - \lambda S|_{X_1}$ est nilpotent et
- $S|_{X_2}$ est inversible

Alors pour tout $\mu \neq \lambda$ mais assez proche de λ , $A - \mu S$ est inversible, donc $\mu \in \rho_S(A)$. Cela induit que λ n'est pas un point d'accumulation de $\sigma_S(A)$. D'autre part, $A - \lambda S|_{X_1}$ est nilpotent de dimension finie et alors, $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A)$ ainsi $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \text{acc } \sigma_S(A)$. Par conséquent :

$$\sigma_{e4,S}(A) \cup \text{acc } \sigma_S(A) \subset \sigma_{e6,S}(A) \quad (3.5)$$

Montrons l'inclusion inverse de l'équation 3.5. Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \text{acc } \sigma_S(A)$ alors $(A - \lambda S) \in \Phi(X)$. Notons par $X = X_1 \oplus X_2$ la décomposition de Kato de $A - \lambda S$, ainsi $(A - \lambda S)|_{X_1}$ est nilpotent de dimension finie et $(A - \lambda S)|_{X_2}$ est un opérateur de Kato, Par hypothèse, $A - \mu S$ est inversible pour tout μ proche de λ , ($\mu \neq \lambda$) et donc $(A - \mu S)|_{X_2}$ est inversible aussi. Ainsi $(A - \lambda S)|_{X_2}$ est un opérateur de Kato $(A - \lambda S)|_{X_2}$ qui est aussi inversible. Alors $(A - \lambda S) \in B(X)$, Par conséquence : $\lambda \notin \sigma_{e6,S}(A)$. Parsuite :

$$\sigma_{e6,S}(A) \subset \sigma_{e4,S}(A) \cup \text{acc } \sigma_S(A)$$

Les assertions concernant les spectres de semi-Browder supérieur et semi-Browder inférieur peuvent être démontrées de la même manière. ■

Proposition 3.3.1. *Soient A , S et $B \in \mathcal{L}(X)$ tel que $r_e(B) = 0$, avec*

$r_e(B) = \max\{|z| : z \in \sigma_{e6,I}(B)\}$ et B commute avec S et A . Alors :

- (i) $\sigma_{e6,S}(A) = \sigma_{e6,S}(A + B)$.
- (ii) $\sigma_{eB+,S}(A) = \sigma_{eB+,S}(A + B)$.
- (iii) $\sigma_{eB-,S}(A) = \sigma_{eB-,S}(A + B)$.

Preuve.

- (i) Soit $\lambda \notin \sigma_{e6,S}(A)$ alors $(A - \lambda S) \in B(X)$. Puisque, $AB = BA$ et $SB = BS$ alors

$$B(A - \lambda S) = (A - \lambda S)B.$$

L'utilisation de [[11], p 185] donne :

$$B + A - \lambda S \in B(X)$$

Donc : $\lambda \notin \sigma_{e6,S}(A + B)$ Alors :

$$\sigma_{e6,S}(A + B) \subseteq \sigma_{e6,S}(A) \quad (3.6)$$

L'inclusion inverse de l'équation 3.6 se déduit par symétrie, il suffit de remplacer A et B par $A + B$ et $-B$

(ii) Soit $\lambda \notin \sigma_{eB+,S}(A)$ alors $A - \lambda S \in \beta_+(X)$. Puisque $AB = BA$ et $SB = BS$, alors $B(A - \lambda S) = (A - \lambda S)B$. On utilise encore [[11], p 185], pour voir que $B + A - \lambda S \in \mathcal{B}_+(X)$, alors $\lambda \notin \sigma_{eB+,S}(A + B)$, cela implique que :

$$\sigma_{eB+,S}(A + B) \subseteq \sigma_{eB+,S}(A) \quad (3.7)$$

L'inclusion inverse de l'équation 3.7 se démontre aussi par symétrie. L'assertion (iii) peut être vérifiée de la même manière à partir de l'assertion (ii) ■

Remarque 3.3.1. Si $K \in \mathcal{K}(X)$ où K est quasinilpotent commutant avec S et A alors, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{e6,S}(A) : &= \sigma_{e6,S}(A + K), \\ \sigma_{eB-,S}(A) : &= \sigma_{eB-,S}(A + K), \\ \sigma_{eB+,S}(A) : &= \sigma_{eB+,S}(A + K). \end{aligned}$$

Théorème 3.3.2. Soit $A, S \in \mathcal{L}(X)$ et $\tilde{\mathcal{K}}(X) = \{K \in \mathcal{K}(X) : KA = AK \text{ et } KS = SK\}$.

alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{eB-,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)} \sigma_{\delta,S}(A + K). \\ \sigma_{e6,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)} \sigma_{ap,S}(A + K). \\ \sigma_{e6,S}(A) : &= \bigcap_{K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)} \sigma_S(A + K).\end{aligned}$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_{eB-,S}(A)$ alors par la remarque (3.3.1) $\lambda \in \sigma_{eB-,S}(A + K)$ pour tout $K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)$, puisque $\sigma_{eB-,S}(A + B) \subseteq \sigma_{\delta,S}(A + K)$ pour $K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)$. Ainsi :

$$\sigma_{eB-,S}(A) \subset \bigcap_{K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)} \sigma_{\delta,S}(A + K).$$

Inversement, soit $\lambda \notin \sigma_{eB-,S}(A)$, donc $A - \lambda S$ est semi-Browder inférieur,

en appliquant [[11], p 186], il existe une décomposition $X = X_1 \oplus X_2$ tels que $\dim X_1 < +\infty$, $AX_i \subseteq X_i$ ($i = 1, 2$), $A - \lambda S|_{X_1}$ est nilpotent et $A - \lambda S|_{X_2}$ est surjectif.

On considère l'opérateur K défini par $K = I \oplus 0$ est de rang fini, commutant avec A et S tel que $A - \lambda S + K$ est surjectif. Aussi, il existe $K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)$ tel que $\lambda \notin \sigma_{\delta,S}(A + K)$ implique :

$$\lambda \notin \bigcap_{K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)} \sigma_{\delta,S}(A + K).$$

et alors :

$$\bigcap_{K \in \tilde{\mathcal{K}}(X)} \sigma_{\delta,S}(A + K) \subset \sigma_{eB-,S}(A).$$

La démonstration de assertions pour les spectres de semi-Browder supérieur et semi-Browder inférieur peut être obtenue de façon similaire.

On rappelle que le complémentaire d'un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ sera noté par $C\Omega$ ou $\overline{\Omega}$.

Donnons un intérêt de la connexité du S -spectre et de son complémentaire : ■

Proposition 3.3.2. *Soit A et $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $S \neq A$. Alors :*

(i) *Si $C\sigma_{e4,S}(A)$ est connexe et $\rho_S(A)$ est non vide, alors :*

$$\sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e4,S}(A).$$

(ii) *Si $C\sigma_{e5,S}(A)$ est connexe $\rho_S(A)$ est non vide, alors :*

$$\sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e6,S}(A).$$

(iii) *Si $\Phi_{A,S}$ est connexe $\rho_S(A)$ est non vide, alors :*

$$\sigma_{e1,S}(A) = \sigma_{7,S}(A) \text{ et } \sigma_{e2,S}(A) = \sigma_{8,S}(A).$$

Preuve.

(i) D'après le théorème (3.2.1), on a

$$\sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e4,S}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$$

alors : $\sigma_{e4,S}(A) \subset \sigma_{e5,S}(A)$.

Inversement, soit $\lambda \in \sigma_{e5,S}(A)$, il suffit de voir que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \subset \sigma_{e4,S}(A)$$

qui est équivalent à :

$$C\sigma_{e4,S}(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} = \emptyset.$$

par l'absurde ; on suppose que $C\sigma_{e4,S}(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \neq \emptyset$ et soit

$$\lambda_0 \in C\sigma_{e4,S}(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\}$$

Puisque

$\rho_S(A) \neq \emptyset$, alors il existe $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_1 \in \rho_S(A)$ et par conséquent $\lambda_1 S - A \in \Phi(X)$ et $i(\lambda_1 S - A) = 0$. D'autre part, $C\sigma_{e4,S}(A)$ est connexe, il résulte de l'assertion (ii) de la proposition (3.1.1) que $i(\lambda S - A)$ est constant sur chaque composante de $\Phi_{A,S}$. Ainsi,

$$i(\lambda_1 S - A) = i(\lambda_0 S - A) = 0$$

ce qui constitue une contradiction. Forcément,

$$C\sigma_{e4,S}(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : i(A - \lambda S) \neq 0\} \neq \emptyset$$

Et par conséquent :

$$\sigma_{e5,S}(A) \subset \sigma_{e4,S}(A).$$

(ii) l'inclusion $\sigma_{e5,S}(A) \subset \sigma_{e6,S}(A)$ est connue, il suffit de voir que $\sigma_{e6,S}(A) \subset \sigma_{e5,S}(A)$ qui est équivalent à :

$$C\sigma_{e5,S}(A) \cap \sigma_{e6,S}(A) = \emptyset.$$

Supposons que $C\sigma_{e5,S}(A) \cap \sigma_{e6,S}(A) \neq \emptyset$ alors il existe $\lambda_0 \in C\sigma_{e5,S}(A) \cap \sigma_{e6,S}(A)$. Soit $\lambda \in C\sigma_{e5,S}(A)$, par la Proposition 3.1.1, (iii)], il vient que :

$$\alpha(\lambda S - A) = \alpha\lambda_0 S - A \quad \text{et} \quad \beta(\lambda S - A) = \beta(\lambda_0 S - A).$$

Pour montrer que $\lambda \in \sigma_{e6,S}(A)$, procédons par l'absurde. Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e6,S}(A)$, alors en appliquant [[11], p 186], il existe une décomposition $X = X_1 \oplus X_2$ tels que $\dim X_1 < +\infty$, $A - \lambda S|_{X_1}$ est nilpotent et $A - \lambda S|_{X_2}$ est inversible. Donc pour tout μ assez proche de λ et $\mu \neq \lambda$, $A - \mu S$ est inversible. alors il existe un voisinage V_λ de λ tel que $V_\lambda \setminus \{\lambda\} \subset \rho_S(A)$. Du fait que $C\sigma_{e5,S}(A)$, est connexe alors il existe $\lambda_1 \in C\sigma_{e5,S}(A)$

tel que $\lambda_1 \in V_\lambda \setminus \{\lambda\}$ Donc

$$\alpha(\lambda_1 S - A) = \beta(\lambda_1 S - A) = 0 \quad \text{donc} \quad \beta(\lambda_0 S - A) = (y(\lambda_0 S - A) = 0$$

Donc : $\lambda_0 S - A \in B(X)$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse $\lambda_0 \in \sigma_{e6,S}(A)$. Cela montre que : $C\sigma_{e5,S}(A) \subset \sigma_{e6,S}(A)$. Et par conséquent :

$$\emptyset \neq \rho_S(A) \subset \sigma_{e6,S}(A) \subset \sigma_S(A),$$

qui est impossible. On conclut alors que $C\sigma_{e5,S}(A) \cap \sigma_{e6,S}(A) = \emptyset$. Ainsi :

$$\sigma_{e6,S}(A) \subset \sigma_{e5,S}(A).$$

(iii) Il est facile de vérifier que $\sigma_{e1,S}(A) \subset \sigma_{e7,S}(A)$. Pour l'inclusion inverse on prend $\mu \in C\sigma_{e1,S}(A)$, alors

$$\mu \in \Phi_{+A,S} = \Phi_{A,S} \cup (\Phi_{+A,S} \setminus \Phi_{A,S}).$$

Ainsi, nous allons discuter les deux cas suivants (selon où se trouve μ) :

- Si $\mu \in \Phi_{A,S}$ alors $i(A - \mu S) = 0$. En effet, soit $\mu_0 \in \rho_S(A)$, alors $\mu_0 \in \Phi_{A,S}$ et $i(A - \mu_0 S) = 0$. Il suit de la Proposition (3.1.1) que $i(A - \mu S)$ est constant pour chaque composante de $\Phi_{A,S}$, ainsi $\rho_S(A) \subseteq \Phi_{A,S}$, alors : $i(A - \mu S) = 0$ pour tout $\mu \in \Phi_{A,S}$. Cela montre que $\mu \in C\sigma_{e7,S}(A)$.
- Si $\mu \in (\Phi_{+A,S} \setminus \Phi_{A,S})$, alors

$$\alpha(A - \mu S) < \infty, \quad \text{et} \quad \beta(A - \mu S) = +\infty$$

donc :

$$i(A - \mu S) = -\infty < 0.$$

De ce qui précède, on obtient :

$$\sigma_{e\tau,S}(A) \subset \sigma_{e1,S}(A).$$

La deuxième égalité est obtenue de la même manière. ■

Définition 3.3.1. Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X et λ_0 un point isolé de $\sigma_S(A)$. Pour un contour admissible Γ_{λ_0} , on définit l'intégrale $S - \text{Riesz}$ pour A , S et λ_0 par :

$$P_{\lambda_0,S} = -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda S)^{-1} d\lambda,$$

Proposition 3.3.3. Soient $A, S \in \mathcal{L}(X)$ et λ_0 un point isolé de $\sigma_S(A)$. Soit $P_{\lambda_0,S}$ l'intégrale de $S - \text{Riesz}$ pour A, S et λ_0 . Alors :

- (i) $P_{\lambda_0,S}$ est une projection.
- (ii) Si $AS^{-1} = S^{-1}A$, alors $N(A - \lambda_0 S) \subset R(P_{\lambda_0,S})$.
- (iii) En plus des hypothèses de l'assertion (ii), si X est un espace de Hilbert, A et S sont auto-adjoints, alors $P_{\lambda_0,S}$ est une projection orthogonale sur $N(A - \lambda_0 S)$.

Preuve.

- (i) Soit Γ_{λ_0} et $\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}$ deux contours admissibles définissant $P_{\lambda_0,S}$. Supposons que Γ_{λ_0} est contenu dans l'intérieur dans la région borné par $\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}$. Sachant l'identité de la $S - \text{résol-}$ vante, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{\lambda_0,S}^2 &= \frac{S}{(2i\pi)^2} \oint_{\Gamma_{\lambda_0} \times \tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} (A - \lambda S)^{-1} S (A - \mu S)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{S}{(2i\pi)^2} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} d\lambda \oint_{\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} \frac{[(A - \lambda S)^{-1} - (A - \mu S)^{-1}]}{\lambda - \mu} d\mu \\ &= \frac{S}{(2i\pi)^2} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda S)^{-1} \oint_{\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} \frac{1}{\lambda - \mu} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

$$-\frac{S}{(2i\pi)^2} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} \oint_{\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} \frac{1}{\lambda - \mu} (A - \mu S)^{-1} d\mu d\lambda \quad (3.8)$$

On applique le théorème du résidus [10] à la première intégrale de l'équation 3.8 pour avoir :

$$\oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda S)^{-1} \oint_{\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} \frac{1}{\lambda - \mu} d\mu d\lambda = -2i\pi \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda S)^{-1} d\lambda. \quad (3.9)$$

Pour la deuxième intégrale, on constate que :

$$\oint_{\Gamma_{\lambda_0}} \oint_{\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} \frac{1}{\lambda - \mu} (A - \mu S)^{-1} d\mu d\lambda = \oint_{\tilde{\Gamma}_{\lambda_0}} (A - \mu S)^{-1} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} \frac{1}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu = 0,$$

Puisque les intégrales sont absolument convergentes et $\frac{1}{\lambda - \mu}$ est analytique à l'intérieur de Γ_{λ_0} . Il vient de l'équation 3.9 que :

$$P_{\lambda_0, S}^2 = P_{\lambda_0, S}.$$

(ii) Soit $f \in N(A - \lambda_0 S)$, alors pour $\lambda \neq \lambda_0$,

$$(A - \lambda S)^{-1} f = (\lambda_0 S - \lambda S)^{-1} f.$$

On voit que :

$$\begin{aligned} P_{\lambda_0, S} f &= -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0 S}} (A - \lambda S)^{-1} f d\lambda \\ &= -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0 S}} (\lambda_0 S - \lambda S)^{-1} f d\lambda = f. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f \in R(P_{\lambda_0, S})$.

(iii) On montre que si $A = A^*$ et $S = S^*$, alors $((A - \lambda S)^{-1})^* = (A - \bar{\lambda} S)^{-1}$

Choisissons $r > 0$ tel que $\Gamma_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = r\}$ est un contour admissible et prenons $\lambda = \lambda_0 + re^{i\theta}$ alors :

$$P_{\lambda_0, S} = -\frac{S}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} (A - (\lambda_0 + re^{i\theta})S)^{-1} r d\theta$$

et

$$\begin{aligned} P_{\lambda_0}^* &= -\frac{S}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} ((A - (\lambda_0 + re^{i\theta})S)^{-1})^* r d\theta \\ &= -\frac{S}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} (A^* - (\overline{\lambda_0 + re^{i\theta}})S)^{-1} r d\theta \\ &= -\frac{S}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} (A - (\lambda_0 + re^{-i\theta})S)^{-1} r d\theta. \end{aligned}$$

Avec une nouvelle répartition telle que $\theta_1 = -\theta$, on peut voir que :

$$P_{\lambda_0, S}^* = -\frac{S}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} (A - (\lambda_0 + re^{i\theta_1})S)^{-1} r d\theta_1 = P_{\lambda_0, S}.$$

On doit aussi montrer que $N(A - \lambda S) = R(P_{\lambda_0, S})$. Par la partie (ii), il est seulement nécessaire de montrer que $N(A - \lambda S) \supset R(P_{\lambda_0, S})$, on calcule :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_0 S)P_{\lambda_0, S} &= -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda_0 S)(A - \lambda S)^{-1} d\lambda \\ &= -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda_0 S + \lambda S - \lambda S)(A - \lambda S)^{-1} d\lambda \\ &= -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (\lambda S - \lambda_0 S)(A - \lambda S)^{-1} d\lambda \\ &= -\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (\lambda - \lambda_0)(AS^{-1} - \lambda)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Par U_{λ_0} , on note l'intérieur de Γ_{λ_0} sur $U_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0\}$, l'opérateur $(\lambda - \lambda_0)(AS^{-1} - \lambda)^{-1}$ est analytique, à valeurs dans l'ensemble des fonctions et satisfait la borne :

$$\|\lambda - \lambda_0\| \|(AS^{-1} - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{d(\lambda, \sigma(AS^{-1}))},$$

où $d(x, y)$ est la distance entre x et y . A présent, on prend le diamètre de Γ_{λ_0} assez

petite pour que $(\lambda - \lambda_0)(AS^{-1} - \lambda)^{-1}$ se prolonge en une fonction analytique sur U_{λ_0} et alors par le théorème de Cauchy on a :

$$-\frac{S}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (\lambda - \lambda_0)(AS^{-1} - \lambda)^{-1} d\lambda = 0.$$

Cela établit que :

$$N(A - \lambda S) \supset R(P_{\lambda_0, S})$$

■

Définition 3.3.2. *Le S -spectre discret d'un opérateur A noté $\sigma_{d_S}(A)$ est l'ensemble des points isolés $\lambda \in \mathbb{C}$ du spectre tels que les projections S - Riesz correspondantes $P_{\lambda, S}$ sont de dimensions finies.*

Une autre partie du spectre qui est généralement plus grande que $\sigma_{6, S}(A)$ est $\sigma_S(A) \setminus \sigma_{d_S}(A)$. Avec la notation :

$$\sigma_{B, S}(A) = \sigma_S(A) \setminus \sigma_{d_S}(A) \text{ et } \rho_{B, S}(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{B, S}(A)$$

Le plus grand ensemble ouvert sur lequel la résolvante est un meomorphisme fini et précisément :

$$\rho_{B, S}(A) = \sigma_{d_S}(A) \cup \rho_S(A),$$

les points du $\sigma_{d_S}(A)$. Pour $\lambda \in \rho_{B, S}(A)$, Par $P_{\lambda, S}(A)$ et $P_{\lambda, S}$ on désigne respectivement la projection S - Riesz (respectivement de rang fini) correspondante avec image et noyau notés par $\mathcal{R}_{\lambda, S}$ et $K_{\lambda, S}$, respectivement la projection de S-Riesz. En vertu de l'invariance de $P_{\lambda, S}$ on définit l'opérateur :

$$A_{\lambda, S} = (A - \lambda S)(I - P_{\lambda, S}) + P_{\lambda, S},$$

selon la décomposition :

$$X = K_{\lambda,S} \oplus \mathcal{R}_{\lambda,S} \text{ et } A_{\lambda,S} = ((A - \lambda S)|\mathcal{K}_{\lambda,S}) \oplus I$$

On a, en fait, juste amputé la partie de dimension finie de $A - \lambda S$ dans la décomposition de S-Riesz. Puisque :

$$\sigma((A - \lambda S)|\mathcal{K}_{\lambda,S}) = \sigma(A - \lambda S) \setminus \{0\},$$

$A_{\lambda,S}$ a un inverse borné noté par $R_B(A, \lambda)$ appelé la S-résolvante de Browder i.e : $R_B(A, \lambda) = ((A - \lambda S)|\mathcal{K}_{\lambda,S})^{-1} \oplus I$ Par rapport à $X = \mathcal{K}_{\lambda,S} \oplus \mathcal{R}_{\lambda,S}$. Ou bien :

$$R_{B,S}(A, \lambda) = ((A - \lambda S)|\mathcal{K}_{\lambda,S})^{-1}(I - P_{\lambda,S}) + P_{\lambda,S} \text{ pour } \lambda \in \rho_{B,S}(A)$$

Cela constitue une extension de la résolvante ordinaire $R_S(A, \lambda)$ de $\rho_S(A)$ à $\rho_{B,S}(A)$ et conserve plusieurs de ses propriétés importantes :

Proposition 3.3.4. *Soit A et $S \in \mathcal{L}(X)$. Alors pour $\lambda, \mu \in \rho_{B,S}(A)$ on a :*

$$R_{B,S}(A, \lambda) - R_{B,S}(A, \mu) = (\lambda - \mu)R_{B,S}(A, \lambda)SR_{B,S}(A, \mu)(A, \mu) + R_{B,S}(A, \lambda)\mathfrak{R}(\lambda, \mu)R_{B,S}(A, \mu),$$

avec ; $\mathfrak{R}(\cdot, \cdot)$ est un opérateur de rang fini ayant pour expression :

$$\mathfrak{R}(\lambda, \mu) = [(A - (\lambda + 1)S)P_{\lambda,S} - (A - (\mu + 1)S)P_{\mu,S}].$$

Preuve. On a $R_{B,S}(A, \lambda)R_{B,S}(A, \mu) = R_{B,S}(A, \lambda)[A_{\mu,S} - A_{\lambda,S}]R_{B,S}(A, \mu)$.

Donc,

$$\begin{aligned} A_{\mu,S} - A_{\lambda,S} &= [(A - \mu S)(I - P_{\mu,S}) + P_{\mu,S}] - [(A - \lambda S)(I - P_{\lambda,S}) + P_{\lambda,S}] \\ &= [(A - (\lambda + 1)S)P_{\lambda,S} - (A - (\mu + 1)S)P_{\mu,S}] + (\lambda - \mu)S \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} R_{B,S}(A, \lambda) - R_{B,S}(A, \mu) &= (\lambda - \mu)R_{B,S}(A, \lambda)SR_{B,S}(A, \mu) + \\ &\quad R_{B,S}(A, \lambda)[(A - (\lambda + 1)S)P_{\lambda,S} - (A - (\mu + 1)S)P_{\mu,S}]R_{B,S}(A, \mu). \end{aligned}$$

■

3.4 S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés

Dans cette section, on s'intéresse au S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés, on commence par le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit A et $S \in \mathcal{L}(X)$. Si $0 \in \rho(A) \cap \rho(S)$ alors on a :*

$$\lambda \in \sigma_{ei,S}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei,S^{-1}}(A^{-1}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8.$$

Preuve. On note que :

$$A - \lambda S = -\lambda S(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1})A \quad (3.10)$$

Maintenant on suppose que $\frac{1}{\lambda} \in \Phi_{As^{-1}} - 1$, alors, $A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1} \in \Phi(X)$.

Puisque, $0 \in \rho(A) \cap \rho(S)$ implique que $A, S \in \Phi(X)$ et $i(A) = i(S) = 0$. on utilise [[17], p 111] et l'équation 3.10, on déduit que $A - \lambda S \in \Phi(X)$. Donc, $\lambda \in \Phi_{A,S}$ et

$$\begin{aligned} i(A - \lambda S) &= i(A) + i(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1}) + i(S) \\ &= i(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Soit $0 \neq \lambda \in \Phi_{A,S}$ implique que $\lambda S(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1})A \in \Phi(X)$. Cependant, $A \in \Phi(X)$ alors :

$$S(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1}) \in \Phi(X).$$

Puisque $S \in \Phi(X)$ alors $(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1}) \in \Phi(X)$. Par conséquence $\frac{1}{\lambda} \in \Phi_{A^{-1},S^{-1}}$, On déduit que :

$$\lambda \in \sigma_{ei,S}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei,S^{-1}}(A^{-1}) \text{ pour } i = 4, 5$$

Puisque, A et S sont injectifs et surjectifs, alors par l'équation 3.10 :

$$\alpha(A - \lambda S) = \alpha(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1})$$

et

$$R(A - \lambda S) = R(A^{-1} - \lambda^{-1}S^{-1})1.$$

Cela montre que $\lambda \in \Phi_{+A,S}$ (resp. $\Phi_{-A,S}$) si et seulement si $\frac{1}{\lambda} \in \Phi_{+A^{-1},S^{-1}}$, (resp. $\Phi_{-A^{-1},S^{-1}}$) et par l'équation 3.11, Par conséquence :

$$\lambda \in \sigma_{ei,S}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ei,S^{-1}}(A^{-1}) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 7, 8.$$

■

Le théorème suivant donne une relation entre le S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs linéaires bornés et le S- spectre essentiel de chacun de ces opérateurs où leurs produits qui sont des perturbation Fredholm ou des perturbations semi-Fredholm sur l'espace de Banach X .

Théorème 3.4.2. *Soient S , A et B trois opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X tel que $S \neq A$ et $S \neq B$.*

(i) *Si $AB \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha(S) < \infty$ et $SA = AS$, alors :*

$$\sigma_{e4,S}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

Si on outre, $BA \in \mathcal{F}(X)$, $\beta(S) < \infty$ et $SB = BS$, alors

$$\sigma_{e4,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(ii) Si les hypothèses dans (i) sont satisfaites et $\beta(S) = \alpha(S)$, alors

$$\sigma_{e5,S}(A+B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

Si de plus, le complémentaire de $\sigma_{e4,S}(A)$ est connexe, alors

$$\sigma_{e5,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\}. \quad (3.12)$$

(iii) Si les hypothèses de (ii) sont satisfaites et si $C\sigma_{e5}(A+B)$, $C\sigma_{e5,S}(A)$ et $C\sigma_{e5,S}(B)$ sont connexes alors

$$\sigma_{e6,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(iv) Si $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, $\alpha(S) < \infty$ et $SA = AS$, alors

$$\sigma_{e1,S}(A+B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

Si, on outre $BA \in \mathcal{F}_+(X)$ et $R(S)$ est fermée dans X , alors

$$\sigma_{e1,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B)] \setminus \{0\} \quad (3.13)$$

(v) Si les hypothèses de (iv) sont satisfaites et $\alpha(S) = \beta(S)$, alors

$$\sigma_{e7,S}(A+B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

Si on outre, $\Phi_{A,S} BS = SB$ alors :

$$\sigma_{e7,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B)] \setminus \{0\} \quad (3.14)$$

(vi) Si $AB \in \mathcal{F}_-(X)$ et $BS = SB$, alors

$$\sigma_{e2,S}(A+B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e2,S}(A) \cup \sigma_{e2,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

Si on ourte, $BA \in \mathcal{F}_-(X)$ et $S \in \Phi_-(X)$, alors

$$\sigma_{e2,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e2,S}(A) \cup \sigma_{e2,S}(B)] \setminus \{0\} \quad (3.15)$$

(vii) Si les hypothèses de (vi) sont satisfaites et $\alpha(S) = \beta(S)$, alors

$$\sigma_{e8,S}(A+B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e8,S}(A) \cup \sigma_{e8,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

Si on outre, $\Phi_{A,S}$ est connexe, alors

$$\sigma_{e8,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e8,S}(A) \cup \sigma_{e8,S}(B)] \setminus \{0\} \quad (3.16)$$

(viii) Si $AB \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, $\alpha(S) < \infty$ and S est commute avec A et B , alors

$$\begin{aligned} & \sigma_{e3,S}(A+B) \setminus \{0\} \\ & \subset ([\sigma_{e3,S}(A) \cup \sigma_{e3,S}(B)] \cup [\sigma_{e1,S}(A) \cap \sigma_{e2,S}(B)] \cup [\sigma_{e2,S}(A) \cap \sigma_{e1,S}(B)]) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

De plus, si :

$BA \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, $\beta(S) < \infty$ et $R(S)$ est fermée dans X .

alors

$$\begin{aligned} & \sigma_{e3,S}(A+B) \setminus \{0\} \\ & = ([\sigma_{e3,S}(A) \cup \sigma_{e3,S}(B)] \cup [\sigma_{e1,S}(A) \cap \sigma_{e2,S}(B)] \cup [\sigma_{e2,S}(A) \cap \sigma_{e1,S}(B)]) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Preuve. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$. On écrit :

$$(\lambda S - A)(\lambda S - B) = AB + \lambda(\lambda S^2 - AS - SB) \quad (3.17)$$

$$(\lambda S - B)(\lambda S - A) = BA + \lambda(\lambda S^2 - SA - BS). \quad (3.18)$$

(i) Soit $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B) \cup \{0\}$. Alors, $(\lambda S - A) \in \Phi(X)$ et $(\lambda S - B) \in \Phi(X)$. D'après [[17], p 106] on a $(\lambda S - A)(\lambda S - B) \in \Phi(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, on applique l'équation 3.17, on a $(\lambda S^2 - AS - SB) \in \Phi(X)$, donc $S(\lambda S - A - B) \in \Phi(X)$. Puisque $\alpha(S) < \infty$ alors par [[17], p 111], on conclut que $(\lambda S - A - B) \in \Phi(X)$ d'où $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A + B)$. Alors :

$$\sigma_{e4,S}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B)] \setminus \{0\}. \quad (3.19)$$

On démontre l'inverse de l'équation 3.19. Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A + B) \cup \{0\}$, alors $(\lambda S - A - B) \in \Phi(X)$. Puisque $S \in \Phi(X)$ et $SB = BS$, $S(\lambda S - A - B) \in \Phi(X)$ et $(\lambda S - A - B)S \in \Phi(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, $BA \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha(S) < \infty$ et $\beta(S) < \infty$ alors d'après les équations 3.17 et 3.18, on a :

$$(A - \lambda S)(B - \lambda S) \in \Phi(X) \text{ et } (B - \lambda S)(A - \lambda S) \in \Phi(X) \quad (3.20)$$

On applique [[11], p 151], il est clair que $(\lambda S - A) \in \Phi(X)$ et $(\lambda S - B) \in \Phi(X)$. Alors $\lambda \notin \sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B)$. Cela montre que :

$$[\sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e4,S}(A + B) \setminus \{0\} \quad (3.21)$$

(ii) Soit $\lambda \notin [\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\}$, alors

$(A - \lambda S) \in \Phi(X)$, $i(A - \lambda S) = 0$, $(B - \lambda S) \in \Phi(X)$ et $i(B - \lambda S) = 0$. on [[17], p 106], tel que $(A - \lambda S)(B - \lambda S) \in \Phi(X)$ et $i((A - \lambda S)(B - \lambda S)) = 0$. De plus, puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, on applique l'équation 3.17 et [7], alors :

$$S(A + B - \lambda S) \in \Phi(X) \text{ et } i(S(A + B - \lambda S)) = 0$$

Puisque $\alpha(S) = \beta(S) < \infty$ alors par [[17], p 111 et p 106], il vient que :

$$(A + B - \lambda S) \in \Phi(X) \text{ et } \underbrace{i(S)}_{=0} + i(A + B - \lambda S) = 0.$$

alors, $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A + B)$, d'où :

$$\sigma_{e5,S}(A + B) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\} \quad (3.22)$$

On démontre l'inverse de l'éq 3.22 $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A + B) \setminus \{0\}$, alors $(A + B - \lambda S) \in \Phi(X)$ et $i(A + B - \lambda S) = 0$. Puisque $AB \in \mathcal{F}(X)$, $BA \in \mathcal{F}(X)$ et $\alpha(S) = \beta(S) < \infty$, il est facile de montrer que $(A - \lambda S) \in \Phi(X)$ et $(B - \lambda S) \in \Phi(X)$. D'autre part, on utilise les équations 3.17 et 3.20 et [[17], p 106] et [7] pour voir :

$$\begin{aligned} i[(A - \lambda S)(B - \lambda S)] &= i(A - \lambda S) + i(B - \lambda S) \\ &= i(S) + i(A + B - \lambda S) \\ &= i(A + B - \lambda S) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Puisque A est borné, on obtient, $\rho(A) \neq \emptyset$. $C\sigma_{e4,S}(A)$ est connexe, ceci avec la première assertion de la proposition 3.3.2, ce qui nous permet de déduire que :

$$\sigma_{e4,S}(A) = \sigma_{e5,S}(A).$$

On utilise la dernière égalité et le fait que $(A - \lambda S) \in \Phi(X)$, pour déduire que $i(A - \lambda S) = 0$. il résulte de l'équation 3.23 $i(B - \lambda S) = 0$. On conclut que $\lambda \notin \sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)$ alors :

$$[\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e5,S}(A + B) \setminus \{0\}.$$

Ce qui démontre l'équation 3.12

(iii) Les ensembles $C\sigma_{e5,S}(A+B)$, $C\sigma_{e5,S}(A)$ et $C\sigma_{e5,S}(B)$ sont connexes, puisque A et B sont des opérateurs bornés, on a $\rho_S(A)$, $\rho_S(B)$ et $\rho_S(B+A)$ ne sont pas des ensembles vides. En utilisant le deuxième énoncé de la proposition 3.3.2, on déduit que :

$$\sigma_{e5,S}(A+B) = \sigma_{e6,S}(A+B), \sigma_{e5,S}(A) = \sigma_{e6,S}(A) \text{ et } \sigma_{e5,S}(B) = \sigma_{e6,S}(B).$$

Alors l'équation 3.12 donne :

$$\sigma_{e6,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e6,S}(A) \cup \sigma_{e6,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(iv) Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B) \cup \{0\}$, alors

$$(A - \lambda S) \in \Phi_+(X) \text{ et } (B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$$

On utilise ensuite [[17], p 122] pour voir que $(A - \lambda S)(B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$. Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, on applique l'équation 3.17 et [7] On a $S(A + B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$, puisque $\alpha(S) < \infty$ et $R(S)$ est fermée $S \in \mathcal{L}(X)$ alors $(A + B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$. Donc, $\lambda \notin \sigma_{e1,S}(A+B)$. Par suite :

$$\sigma_{e1,S}(A+B) \setminus \{0\} \subset \sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B) \cup \{0\} \quad (3.24)$$

Supposons que $\lambda \notin \sigma_{e1,S}(A+B) \cup \{0\}$ alors $(A+B-\lambda S) \in \Phi_+(X)$. Puisque $S \in \Phi_+(X)$ alors $S(A+B-\lambda S) \in \Phi_+(X)$ et $(A+B-\lambda S)S \in \Phi_+(X)$. Et du fait que $AB \in \mathcal{F}_+(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X)$, on applique les équations 3.17 et 3.18 et [7] pour obtenir :

$$(A - \lambda S)(B - \lambda S) \in \Phi_+(X), (B - \lambda S)(A - \lambda S) \in \Phi_+(X) \quad (3.25)$$

D'après l'équation 3.25 et [[11], p 151], Il est clair que $(A - \lambda S) \in \Phi_+(X)$ et $(B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$. Donc $\lambda \notin \sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B)$. Alors

$$[\sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e1,S}(A + B) \setminus \{0\}.$$

Cela démontre l'équation 3.13

(v) Maintenant, on suppose que $\lambda \notin \sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B) \cup \{0\}$, alors par le corollaire 3.2.1, on a :

$$(A - \lambda S) \in \Phi_+(X) \quad i(A - \lambda S) \leq 0$$

$$(B - \lambda S) \in \Phi_+(X) \quad i(B - \lambda S) \leq 0$$

En utilisant [[17], p 122] et [[11], p 153], on a :

$$(A - \lambda S)(B - \lambda S) \in \Phi_+(X) \text{ et } i[(A - \lambda S)(B - \lambda S)] \leq 0.$$

Puisque, $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, par l'éq 3.17 et [7] alors :

$$S(A + B - \lambda S) \in \Phi_+(X) \text{ et } i(S(A + B - \lambda S)) \leq 0.$$

Alors :

$$i(S) + i(A + B - \lambda S) \leq 0.$$

Puisque, $\alpha(S) = \beta(S)$ alors $i(A + B - \lambda S) \leq 0$.

En appliquant encore une fois le corollaire 3.2.1, il devient clair que $\lambda \notin \sigma_{e7,S}(A)$ Donc :

$$\sigma_{e7,S}(A + B) \setminus \{0\} \subset \sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B) \cup \{0\} \quad (3.26)$$

Maintenant, on démontre l'inclusion inverse de l'éq 3.26

Soit $\lambda \notin \sigma_{e7,S}(A + B) \setminus \{0\}$, alors $(A + B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$ et $i(A + B - \lambda S) \leq 0$.

Puisque $AB \in \mathcal{F}_+(X)$, $BA \in \mathcal{F}_+(X)$ et $S \in \Phi_+(X)$, alors un raisonnement similaire au

précédent nous donne :

$$(A - \lambda S) \in \Phi_+(X), \quad (B - \lambda S) \in \Phi_+(X)$$

et

$$i((A - \lambda S)(B - \lambda S)) = i(A - \lambda S) + i(B - \lambda S) \leq 0.$$

Puisque A est un opérateur linéaire borné, on obtient $\rho(A) \neq \emptyset$. En plus du fait que $\Phi_{A,S}$ soit connexe, alors

$$\sigma_{e7,S}(A) = \sigma_{e1,S}(A).$$

Donc, $i(A - \lambda S) \leq 0$ alors $i(B - \lambda S) \leq 0$, Par conséquent $\lambda \notin \sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B)$ d'où

$$[\sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B)] \setminus \{0\} \subset \sigma_{e7,S}(A + B) \setminus \{0\}.$$

Cela montre l'équation 3.14

(vi) La preuve de (vi) peut être vérifiée de la même manière que (v). Il suffit de remplacer $\Phi_+(X)$, $\sigma_{e1,S}(\cdot)$, $\sigma_{e7,S}(\cdot)$, $i(\cdot) \leq 0$, l'équation 3.14, et l'assertion (ii) du corollaire 3.2.1 par $\Phi_-(X)$, $\sigma_{e2,S}(\cdot)$, $\sigma_{e8,S}(\cdot)$, $i(\cdot) \geq 0$, l'éq 3.16. et l'assertion (iii) du corollaire 3.2.1 respectivement.

(vii) Puisque les égalités : $\sigma_{e3,S}(A) = \sigma_{e1,S}(A) \cap \sigma_{e2,S}(A)$, $\sigma_{e3,S}(B) = \sigma_{e1,S}(B) \cap \sigma_{e2,S}(B)$ et

$$\sigma_{e3,S}(A + B) = \sigma_{e1,S}(A + B) \cap \sigma_{e2,S}(A + B)$$

sont connues, $AB \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$ et $BA \in \mathcal{F}_+(X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, alors par les équations 3.13, et 3.15, on déduit que :

$$\sigma_{e3,S}(A+B) \setminus \{0\} = [\sigma_{e3,S}(A) \cup \sigma_{e3,S}(B)] \cup [\sigma_{e3,S}(A) \cap \sigma_{e3,S}(B)] \cup [\sigma_{e2,S}(A) \cap \sigma_{e1,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

■

Théorème 3.4.3. *Soient S , A et B trois opérateurs linéaires bornés X tels que $S \neq A$ et $S \neq B$.*

(i) *Si $AB \in \mathcal{F}(X)$ alors :*

$$\sigma_{ei,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = [\sigma_{ei,S}(A) \cup \sigma_{ei,S}(B)] \setminus \{0\}, \quad i = 4, 5.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}(X)$, $SA = AS$ et $BS = SB$ alors :

$\sigma_{e4,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = \sigma_{e4,S^2}(SA + BS) \setminus \{0\} = [\sigma_{e4,S}(A) \cup \sigma_{e4,S}(B)] \setminus \{0\}$. Par ailleurs, si le complémentaire $\sigma_{e4,S}(A)$ est connexe, alors :

$$\sigma_{e5,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = \sigma_{e5,S^2}(SA + BS) = [\sigma_{e5,S}(A) \cup \sigma_{e5,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(ii) *Si les hypothèses de (i) sont satisfaites et si $C\sigma_{e5,S^2}(AS + SB)$, $C\sigma_{e5,S}(A)$ et $C\sigma_{e5,S}(B)$ sont connexes, alors :*

$$\sigma_{e6,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = \sigma_{e6,S^2}(SA + BS) = [\sigma_{e6,S}(A) \cup \sigma_{e6,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(iii) *Si $AB \in \mathcal{F}_+(X)$ alors :*

$$\sigma_{ei,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{ei,S}(A) \cup \sigma_{ei,S}(B)] \setminus \{0\}, \quad i = 1, 7.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}_+(X)$, $SA = AS$ et $BS = SB$ alors :

$$\sigma_{e1,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = [\sigma_{e1,S}(A) \cup \sigma_{e1,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

De plus, Si $\Phi_{A,S}$ est connexe ; alors :

$$\sigma_{e7,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = [\sigma_{e7,S}(A) \cup \sigma_{e7,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(iv) Si $AB \in \mathcal{F}_-(X)$ alors :

$$\sigma_{ei,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{ei,S}(A) \cup \sigma_{ei,S}(B)] \setminus \{0\}, \quad i = 2, 8.$$

Si de plus, $BA \in \mathcal{F}_-(X)$, $SA = AS$ et $BS = SB$ alors :

$$\sigma_{e2,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = [\sigma_{e2,S}(A) \cup \sigma_{e2,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

De plus, si $\Phi_{A,S}$ est connexe alors :

$$\sigma_{e8,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = [\sigma_{e8,S}(A) \cup \sigma_{e8,S}(B)] \setminus \{0\}.$$

(v) Si $AB \in \mathcal{F} + (X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, alors :

$$\sigma_{e3,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} \subset [\sigma_{e3,S}(A) \cup \sigma_{e3,S}(B)] \cup [\sigma_{e1,S}(A) \cap \sigma_{e2,S}(B)] \cup [\sigma_{e2,S}(A) \cap \sigma_{e1}(B)] \setminus \{0\}.$$

De plus, $BA \in \mathcal{F} + (X) \cap \mathcal{F}_-(X)$, $SA = AS$ et $BS = SB$ alors :

$$\sigma_{e3,S^2}(AS + SB) \setminus \{0\} = [\sigma_{e3,S}(A) \cup \sigma_{e3,S}(B)] \cup [\sigma_{e1,S}(A) \cap \sigma_{e2,S}(B)] \cup [\sigma_{e2,S}(A) \cap \sigma_{e1}(B)] \setminus \{0\}.$$

Preuve. La preuve est une adoption directe de la preuve du théorème 3.4.2 ■

Conclusion

Notre travail est consacré à l'étude du S-spectre essentiel d'un opérateur linéaire borné, et on plus on a étudié le S-spectre essentiel de la somme de deux opérateurs bornés et sa relation avec le S-spectre essentiel de ces opérateurs. Tout d'abord la première partie de ce travail on s'est intéressé aux propriétés de la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach X . Après avoir établi un résultat sur les opérateurs compacts, de Frefholm, Browder, Kato et de Riesz, ensuite on a étudié les caractérisations de plusieurs types de spectre essentiel et le spectre essentiel de la somme de deux opérateurs bornés. Ce travail est complété par l'étude des propriétés de S-spectre essentiel d'un opérateur et ses caractérisations. Enfin notre analyse donne la relation du S-spectre essentiel de la somme avec le S-spectre essentiel de chacun de ces opérateurs.

Bibliographie

- [1] F. ABDELMOULEH, A. JERIBI : Gustafson, Weidman, Kato, Wolf, Schechter, Browder, Rakoćević and Schmoegeer essential spectra of the sum of two bounded operators and application to a transport operator 167-176
- [2] P. AIENA, Riesz operators and perturbation ideals, *Note Mat.* 9 (1989), 1-27.
- [3] P. AIENA and M. MBEKHTA , Characterisation of some classes of operators by means of the Kato decomposition, *Boll. Un. Mat. Ital. A* (7) 10-A (1996), 609-621.
- [4] V. HARDT , R. MENNICKEN et S. NABOKO Systems of singular differential operators of mixed order and applications to l-dimensional MHD problems, *Math. Nach.* 205, 19-68 (1999).
- [5] R. HARTE, Young Ok Kim and Woo Young Lee. "spectrale pictures of AB and BA", *Proceedings Mathematical Society*, vol. 134, 1(2006), pp 105-110.
- [6] A. JERIBI : Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices
- [7] A. JERIBI, N. MOALLA : Characterization of some subsets of Schechter's essential spectrum and application to singular transport equation, *J. Math. Anal. appl.* 358(2009), 434-444.
- [8] A. JERIBI, M. MNIF, Fredholm operators, essential spectra and application to transport equations, *Acta Appl. Math.* 89, 155-176 (2005).
- [9] T. KATO. Perturbation theory for linear operators. Springer (1980), 2nd Edition.

-
- [10] MARSDEN. J. E : Basic Complex Analysis, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973. Journ., 19(1965), 86-97.
 - [11] V. MÜLLER, Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras.
 - [12] MURPHY. G, J : T^* -algebras and operators theory. New York, Academic Press, (1990).
 - [13] H. RADJAVI et J. P. Williams, Products of selfadjoint operators, Michigan Math. J. Volume 16, 2(1969), pp177-185
 - [14] M. REED, B. Simon : Methods of modern mathematical physics : Analysis of operators. vol.4 Academic Press (1978).
 - [15] W. RUDIN : Functional Analysis. 1991 (Second Edition). Real and Complex Analysis 1974. McGraw-Hill.
 - [16] M. SCHECHTER , Spectra of Partial Differential Operators, North-Holland Amsterdam-New York-Oxford, 1986.
 - [17] M. SCHECHTER , Principles of Functional Analysis. Grad. Stud. Math. 36, Amer. Math. Soc, Providence,RI. 2002.
 - [18] C. SCHMOEGER, The spectral mapping theorem for the essential approximate point spectrum, Colloq. Math. 74(1997), 167-176.
 - [19] J. WEIDMANN : Linear Operators in Hilbert Space. Springer. Vol 1. 1980.
 - [20] T. YASHINO, Spectral resolution of a hyponormal operators with the spectrum on a curve, Tohoku Math. Journ 19(1965), 86-87.