



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ.: 2017/2018

Géodésique sur les variétés de Walker de dimension 3

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Bakrou Siham¹

Sous la direction de

Dr. M. H . Dida

Soutenue le 19/06/2018 devant le jury composé de

Dr. A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. M. H. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Pr. F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mr. B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : siham.bakrou@gmail.com

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur , monsieur

[Dr.H. Dida](#) , pour sa patience, ses remarques et ses conseils,

sa disponibilité

et sa bienveillance durant la réalisation de ce travail .

je remercie également les membres du jury déavoir

Accepter de lire et d'évaluer ce travail.

Un grand merci adressé au personnel et aux enseignants du département

de mathématique.

Comme je remercie ceux qui m'aident de proche ou de loin à concrétisé

ce travail

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui m'ont donnée la possibilité de poursuivre mes études, pour leurs guides affectueux, pour l'espoir qu'ils me donnent, pour les conseils dans la vie et leurs soutiens durant mes année d'études avec patience, courage et j'espère que je puisse leurs rende le maximum de bonheur qu'ils m'ont offert et que doeu les bénisse.

- A mes soeurs.
- A mes frères.
- A mes cousins et cousines
- A tous mes amis ainsi qu'à tous mes camarades
- A tous mes chers professeurs durant toutes mes année d'études.

Enfin, à tous ceux qui me sont chères ; qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect et ma gratitude.

- A tous ceux qui m'aiment.
- A tous ceux qui m'aiment.
- A tous ceux que m'aime.

Je dédie ce mémoire.

Table des matières

Introduction	5
1 Généralités	9
1.1 Variétés Différentiables	10
1.1.1 Espace Tangent	17
1.1.2 Application Tangente	24
1.2 Fibré Tangent	27
1.2.1 Champs de Vecteurs	30
1.2.2 Crochets et Algèbre de Lie	32
1.3 Connexions Linéaires	34
1.4 Géodésiques	36
1.4.1 Transport Parallèle	36
2 Variété Riemannienne	41
2.1 Notions de Tenseur	41
2.1.1 Métrique Riemannienne	43
2.1.2 Isométrie	43
2.1.3 Tenseur de torsion	44
2.2 Connexion de Levi-Civita	45
3 3-Variétés Lorentziennes de Walker	55
3.1 Métriques semi-Riemanniennes	55
3.1.1 Variétés Lorentziennes	58
3.1.2 Espace de Minkowski \mathbb{E}_1^3	60

3.1.3	Courbes dans l'espace de Minkowski	64
3.2	Variété de Walker	67
3.2.1	Produit vectoriel	67
3.2.2	Connexions de Levi-Civita	68
3.2.3	Géodésique sur les Variétés de Walker	71

Introduction



La géométrie différentielle est une continuité du calcul infinitésimal, elle permet d'étudier grâce aux techniques du calcul différentiel une nouvelle famille d'espaces topologiques appelées "variétés différentiables". Le calcul différentiel permet d'étudier l'évolution d'un phénomène au voisinage d'un instant donné (sa vitesse, son accélération) lorsque celui ci décrit une portion d'un espace dans lequel on a une structure d'espace vectoriel normé. Notre but est de montrer qu'on peut faire de l'analyse mathématique en dehors des espaces qui n'admettent pas de structure d'espace vectoriel normé. Plus encore, nous pouvons mesurer des portions de la terre, nous nous déplaçons entre les villes, les pays, on peut décrire presque toutes les régions du globe terrestre d'une manière adéquate, en utilisant un petit livre, appelé atlas, formé d'un ensemble de cartes, qui sont des ouverts du plan \mathbb{R}^2 . Ici, chaque point du globe peut être représenté dans une carte. En s'inspirant de la cartographie, on définit une variété différentiable de dimension n ($n \in \mathbb{N}$) par un atlas qui est un ensemble d'ouverts de \mathbb{R}^n appelés cartes. H. Poincaré a saisi l'importance du concept d'une variété différentiable, il s'est arrêté sur les changements de cartes d'un

atlas. C'est Whitney (en 1944) qui a réglé définitivement ce problème ; c'est dans les changements de cartes où réside la notion de variété différentiable [7, 24, 23].

Pour se déplacer entre divers villes de notre planète terre, on choisit assez souvent les chemins les plus courts (géodésiques), ces trajectoires ne sont pas des droites. La formulation géométrique de ces notions a conduit à introduire des métriques sur des variétés différentiables (variétés riemanniennes), et par la suite, à des modèles non euclidiens :

1. **Modèle de Riemann** : La sphère \mathbb{S}^2 (munie de la métrique induite par le produit scalaire habituel de l'espace \mathbb{R}^3) admet pour géodésiques les grands cercles.

2. **Le problème cosmologique** : L'univers (espace-temps) est une variété différentiable de dimension 4. Le problème cosmologique consiste à déterminer la forme globale de cette variété, ainsi que les structures diverses exprimant la distribution et l'évolution de l'énergie. Dans sa théorie de la relativité générale, A. Einstein représente le potentiel gravitationnel, donc les distributions des masses, par une métrique locale d'espace temps. La géométrie locale de l'espace-temps (en particulier les géodésiques, donc les rayons lumineux qui sont des géodésiques particulières) est ainsi déterminé par la distribution de masses, les Γ_{ij}^k de la connexion associée représentant la magnitude de la force gravitationnelle.

L'étude des métriques indéfinies a donné naissance à la géométrie pseudo-Riemannienne (aussi connu sous le nom de semi-Riemannienne) géométrie qui a montres valeurs dans beaucoup d'applications en particulier dans des contextes physiques tels que la relativité générale et la théorie des cordes [14, 3]. Étonnamment, il semble qu'une partie de l'univers peut même être représentée par les modèles établis via la géométrie Lorentzienne qui représente un cas particulier de géométrie pseudo-Riemannienne. Plus explicitement, les variétés Lorentziennes sont des variétés lisses qui sont fournies avec la métrique Lorentzienne, c'est-à-dire une métrique pseudo-Riemannienne avec signature $(1, q)$. Ces variétés sont exploitées comme modèles cosmologiques pour prédire les phénomènes se produisant sur l'échelle des planètes tels que le Big Bang et l'expansion de l'univers [3].

Le lemme fondamental de la géométrie Riemannienne ou pseudo-Riemannienne affirme qu'une métrique g non dégénérée détermine une connexion symétrique compatible unique, appelée connexion de Levi-Civita. Néanmoins, il est possible que plusieurs métriques

engendrent la même connexion. Cette non-unicité est étudiée pour les métriques de signature arbitraire et pour les métriques de Lorentz, il apparaît que cela provient soit d'une décomposition de Rham-Wu, soit d'un champ de vecteur nul parallèle. Il est bien connu que l'existence d'un champ de ligne parallèle sur une variété Riemannienne donne lieu à une décomposition locale de la variété en tant que produit direct. Cette propriété s'étend aux variétés semi-Riemanniennes chaque fois que le champ de ligne est non dégénéré, c'est-à-dire, qu'il est traversé par un champ de vecteur défini localement non-nul. Cependant, les conséquences géométriques de l'existence d'un champ de ligne dégénéré parallèle ne sont pas encore bien comprises. Une motivation supplémentaire pour étudier l'influence d'un champ vectoriel nul parallèle provient de la non-unicité de la connexion de Levi-Civita dans le cadre semi-Riemannien. De plus, les différentes métriques Lorentziennes non décomposables localement peuvent avoir la même connexion Levi-Civita si et seulement si il existe un vecteur nul parallèle sur le collecteur. Une de ces variétés intéressantes sont les variétés pseudo-Riemanniennes qui admettent un champ de ligne dégénéré parallèle. Ils apparaissent naturellement dans de nombreux contextes physiques divers. Walker a étudié ces variétés et en 1950, il a décrit leur structure locale en dérivant une forme canonique [2] qui a joué un rôle central pour d'autres investigations [16, 21, 11]. Motivé par son travail, une variété semi-riemannienne qui admet un champ de ligne dégénéré parallèle s'appelle un collecteur de Walker.

Notre travail s'articule autour de trois points essentiels :

1^{er} chapitre : Il est consacré au rappel des notions de base essentielles à la compréhension de la géométrie différentielle.

Il donne le cadre mathématique très détaillé, dans lequel se place ce document. Nous définissons la notion de champs de vecteurs, de connexion linéaire, de transport parallèle et les opérations classiques qui y sont associées au calcul de la dérivée covariante, citons les géodésiques.

2^{eme} chapitre : On introduira les notions fondamentales de métrique Riemannienne, connexion de Levi-Civita sur une variété Riemannienne, tenseur de courbure et géodésique.

3^{eme} chapitre : Il constitue le coeur du travail où nous développons avec beaucoup

de détails l'objectif essentiel qui consiste à étudier les géodésiques sur les 3-variétés de **Walker**. Dans la section 1, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base de la géométrie semi-Riemannienne, en particulier la géométrie Lorentzienne. Nous définissons l'espace métrique Lorentzien E_1^3 et le caractère causal des vecteurs tangents et des sous-espaces. Tout vecteur non nul v dans l'espace tangent de M est dit être temporel (respectivement espace, lumière) si $g(v, v) < 0$ (respectivement $g(v, v) > 0, g(v, v) = 0$). Dans la section 2, nous introduisons les variétés tridimensionnelles de **Walker**, c'est-à-dire une variété Lorentzienne tridimensionnelle admettant un champ de ligne dégénéré parallèle. Les variétés **Walker** sont décrites en termes de coordonnées locales x, y, z et une fonction de définition $f = f(x, y, z)$. Si la variété est stricte, alors elle peut être caractérisée par $f = f(y, z)$. Nous calculons, ainsi, les connexions et les courbures d'une variété tridimensionnelle de **Walker** arbitraire. Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéressons aux géodésiques d'une variété de **Walker** tridimensionnelle (M, g_f) , en particulier celles à composante constante ou linéaire. Supposons que $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ est une courbe dans (M, g_f) , nous prouvons que les droites sur M avec une constante γ_3 est une géodésique dans M et son caractère causal dépend de sa seconde composante, c'est-à-dire que si γ_2 est constant, alors γ est une géodésique de type lumière; si elle n'est pas constante, la courbe est une géodésique temporelle. De plus, nous établissons que s'il existe une géodésique dans M avec une troisième composante linéaire, M est une variété strictement **Walker**. Dans une variété strictement de **Walker**, si γ est une géodésique, alors γ_3 est soit constant soit linéaire. Nous montrons aussi que toute variété de **Walker** de dimension trois est géodésiquement complète.

Chapitre 1

Généralités

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur \mathbb{R}^n . Pour cela, nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à \mathbb{R}^n , afin d'y transférer ce que nous savons déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à \mathbb{R}^n . De tels objets nous sont familiers dans \mathbb{R}^3 : une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe... ressemblent localement à \mathbb{R}^2 . Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensembles de \mathbb{R}^3 . Ce que nous allons définir ne peut a priori pas être vu comme sous ensemble d'un \mathbb{R}^n . Nous voulons en donner une définition intrinsèque, que nous appellerons variétés, sans faire référence à un espace plus grand. Nous sommes dans la situation d'habitants d'une sphère qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à \mathbb{R}^3 . Un habitant d'une sphère, s'il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de \mathbb{R}^2 . C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. Nous allons recoller ensemble des ouverts de \mathbb{R}^n . Globalement, nous n'auront pas nécessairement \mathbb{R}^n , mais localement, nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

1.1 Variétés Différentiables

Définition 1.1.1. Soit M un espace topologique¹, une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) formé de

1. un ouvert $U \in M$;
2. un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ qu'on appelle une fonction coordonnées.

Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) . Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M tout entier est appelé atlas de la variété. On dira alors que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de M . A priori, cet atlas n'est pas unique. En particulier, la réunion de deux atlas est encore un atlas.

Définition 1.1.2. Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M sont dites compatibles si :

1. $(U \cap V) = \emptyset$, ou si
2. $(U \cap V) \neq \emptyset$, et dans ce cas

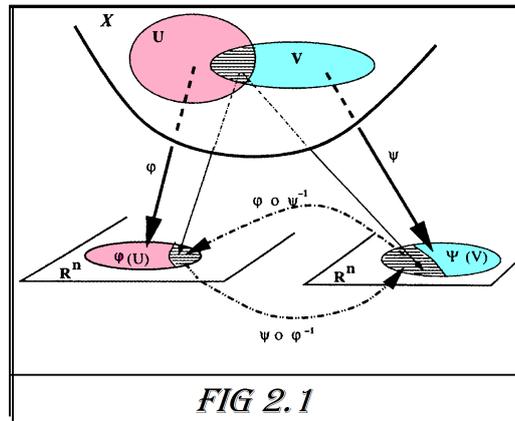
$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

est un difféomorphisme entre les ouverts de \mathbb{R}^n est illustrée sur la fig 2.1 qui suit. En coordonnées locales, une carte (U, φ) donne un système locale de coordonnées sur $U \cap V$, on a deux systèmes de coordonnées $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. Ces deux applications s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} & : y = (y^1, \dots, y^n) \mapsto (x^1 = f^1(y), \dots, x^n = f^n(y)), \\ \psi \circ \varphi^{-1} & : x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1 = g^1(x), \dots, y^n = g^n(x)). \end{aligned}$$

La compatibilité signifie que les fonctions f^i et g^i sont de classe C^∞

1. ie M variété topologique de dim n si : M espace sépare, base comtable, localement homoumorphique a \mathbb{R}^n



Définition 1.1.3. Un atlas de dimension n de M est un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension n tel que :

1. les ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ recouvrent M ;
2. toutes les cartes de \mathcal{A} sont compatibles deux à deux.

Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur M . On dit que deux atlas sont équivalents si leur réunion est encore un atlas, c'est-à-dire que, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $\mathcal{A}' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sont équivalents si toutes les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (V_β, ψ_β) sont compatibles deux à deux.

Définition 1.1.4. Une variété différentiable est le couple (M, \mathcal{A}) où M est la variété topologique de dimension n et \mathcal{A} est l'atlas maximal² de classe C^∞ de M , on l'appelle aussi la structure différentiable de M .

Définition 1.1.5. Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension n .

Définition 1.1.6. Soient (M^m, \mathcal{A}) et (N^n, \mathcal{B}) deux variétés différentiables. On dit que l'application $f : M \rightarrow N$ est de classe C^∞ si chaque représentation locale de f (respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B}) est de classe C^∞ , c'est-à-dire, si la composition $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ est une application lisse de $\psi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \varphi(V)$ pour toute carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, on dit que $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme de classe C^∞ si f et f^{-1} sont de classe C^∞ ; (voir fig 3.1)

2. si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas

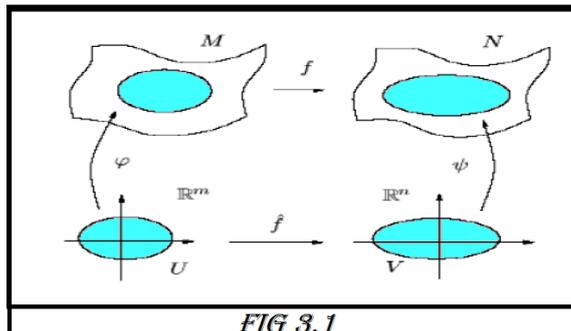


FIG 3.1

Remarques 1.1.1.

1. Sur un espace non séparé il n'existe pas de métrique, puisque tout espace muni d'une distance est séparé. De même un sous-espace compact n'est pas forcément fermé et l'image d'un compact par une application continue n'est pas toujours compact. C'est pour avoir ce type de propriété que l'on impose à une variété d'être un espace séparé. En revanche, tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.
2. Base dénombrable : la classe d'équivalence d'un atlas \mathcal{A} peut être représentée par son atlas maximal qui est l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec celles de \mathcal{A} . On veut que la topologie définie par les domaines de ces cartes ait une base dénombrable. Cette hypothèse est importante, sans elle, il est par exemple possible de munir \mathbb{R}^n d'une topologie qui le rende homéomorphe à un \mathbb{R}^k muni de la topologie canonique, pour $k < n$ quelconque.
3. On peut construire des cartes incompatibles sur des variétés. Considérons par exemple la droite réelle recouverte d'une part par la carte globale (\mathbb{R}, φ_1) où $\varphi_1 \equiv Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x$ et d'autre part la carte (\mathbb{R}, φ_2) où $\varphi_2 \equiv Cube : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x^3$. Les formules de changement de coordonnées sont

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto y = z^{1/3}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto z = y^3$$

On vérifie aisément que ces transformations sont continues mais que $z \mapsto y = z^{1/3}$ n'est pas différentiable en $z = 0$.

Exemples 1.1.1.

1. \mathbb{R}^n est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte (\mathbb{R}^n, id) .
2. Tout \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, φ) . De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, φ) .
3. L'espace euclidien \mathbb{E}^n est une variété de dimension n : il est en bijection avec \mathbb{R}^n via le choix d'un système de coordonnées x . L'atlas à une carte (\mathbb{E}^n, x) définit donc une structure différentiable.

Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à \mathbb{R}^n .

Exemples 1.1.2.

1. Le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1, cependant il n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} (puisque \mathbb{S}^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) :

$$U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}; U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

$$\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\} \rightarrow]0, 2\pi[: (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta$$

$$\varphi_2 : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \rightarrow]-\pi, \pi[: (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta.$$

Les domaines de ces cartes recouvrent clairement le cercle : $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^1$. De plus $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles. Ainsi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas et définit une structure différentiable sur \mathbb{S}^1 .

2. La sphère unité

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est une variété de dimension n . En effet ; on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique, les points $N = (1, 0, \dots, 0)$ et $S = (-1, 0, \dots, 0)$

désignant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts $U_N = S^n \setminus \{N\}$, et $U_S = S^n \setminus \{S\}$ et les applications :

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1-x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1+x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Déterminons les applications de changement de cartes $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ et

$\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui sont des difféomorphismes données par $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Donc $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ définit une structure différentiable sur S^n . (voir fig 4.1)

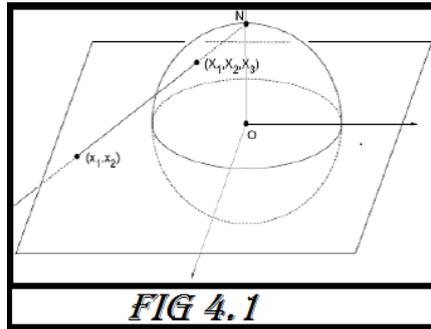


FIG 4.1

3. Tout sous-ensemble ouvert Ω d'une variété différentiable M est lui même une variété différentiable. Sa structure différentiable est définie par l'atlas :

$$A_\Omega = \{(U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega})\}$$

où $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas de M .

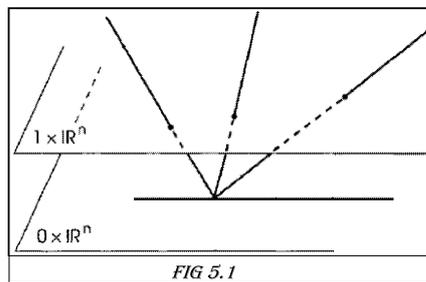
4. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n et d'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ respectivement. Alors l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $n+m$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$, où $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est une variété, de même que le tore plat de dimension n , $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

5. L'espace projectif réel de dimension n noté $P^n\mathbb{R}$ est l'espace quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$$

On peut donc considérer $P^n\mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . (voir fig 5.1)



On peut donc considérer $P^n\mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . On définit l'espace projectif réel $P^n\mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n\mathbb{R}$ la projection naturelle.

Remarque 1.1.1. Pour $i = 0, \dots, n$, on considère l'ensemble $V_i \subset P^n\mathbb{R}$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et on définit φ_i l'application $V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x_i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Pour $(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul, on note $[x_0 : \dots : x_n] \in P^n\mathbb{R}$ la droite passant par le point de coordonnées (x_i) . Les x_i s'appellent les coordonnées homogènes

$$[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid (x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n)$$

On a $V_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$. L'application de carte est

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad V_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Son inverse est

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow V_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : y_n] \end{aligned}$$

Ceci nous définit des cartes $c_i = (V_i, \varphi_i, \mathbb{R}^n)$. Vérifions que c_1 est compatible avec c_2 . D'une part, $\varphi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{y_1 = 0\}$ et $\varphi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{y_1 = 0\}$ sont des ouverts de \mathbb{R}^n .

L'application de changement de cartes est :

$$\begin{aligned} \varphi_1(V_1 \cap V_2) &\rightarrow \varphi_2(V_2 \cap V_1) \\ (y_i) &\mapsto \frac{1}{y_1}(1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

qui est bien de classe C^1 . De la sorte on établit que les cartes sont deux à deux compatibles. Les V_i recouvrant le projectif, les c_i forment donc un atlas.

Définition 1.1.7. *Le $(n + 1)$ – uple $x = (x_0, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées homogène de $p(x)$. On note $[x] = [(x_0, \dots, x_n)]$ le point de coordonnées homogène x . Nous allons munir $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ d'un atlas $(U_i, \phi_i)_{0 \leq i \leq n}$ et donc en faire une variété. Posons :*

$$V_i = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_i \neq 0 \text{ où } 0 \leq i \leq n\}$$

Définissons les applications Φ_i par :

$$\begin{aligned} \Phi_i : V_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \Phi_i(x) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

Le signifie que le terme correspondant est omis.

i / Ce sont des applications continues et $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$ si et seulement si $p(x) = p(y)$
 ii / D'après les propriétés de la topologie quotient, $U_i = \Phi_i(V_i)$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ et ϕ_i passe au quotient et donne une application bijective et continue ϕ_i de U_i dans

$$\mathbb{R}^n. \text{ Explicitement : } \Phi_i(p(x)) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

iii / L'application réciproque est donnée par :

$\Phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1})$ ce qui montre que Φ_i est homéomorphisme de U_i sur \mathbb{R}^n .

Les fonctions de transition $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ sont bien des difféomorphismes de $\Phi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\Phi_j(U_i \cap U_j)$, car pour $y_j \neq 0$ on a

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \dots, \frac{\widehat{y}_j}{y_j}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right).$$

Nous avons ainsi une structure de variété lisse sur $P^n\mathbb{R}$ de dimension n .

1.1.1 Espace Tangent

Définition 1.1.8. (Courbes Paramétrées sur une Variété)

Une courbe paramétrée sur M est une application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ de domaine $I \subset \mathbb{R}$. Son expression locale dans une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ et la courbe :

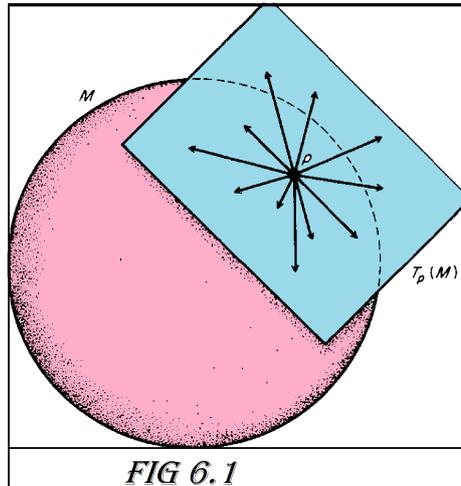
$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}^1(t), \dots, \tilde{\gamma}^m(t)) = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^m(\gamma(t))) \end{aligned}$$

La courbe γ est régulière en $t \in I$ ($x = \gamma(t) \in M$), si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que U contient le point P , son expression locale $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ est une courbe régulière en t , c-à-d $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) \neq \vec{0}$.

Remarque 1.1.2. Si γ est une courbe régulière en x , on peut toujours changer sa paramétrisation pour avoir $\gamma(0) = x$. Localement, autour de x , on peut aussi choisir une carte φ telle que $\varphi(x) = (0, \dots, 0) \equiv \vec{0} \in \mathbb{R}^m$. On peut donc toujours avoir une courbe locale $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ régulière en $\tilde{\gamma}(0) = \vec{0}$.

Considérons maintenant une variété différentiable M et un point x de M . On note \mathcal{C} l'ensemble des courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par x (voir fig 6.1)

$$\begin{aligned} \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned} ; \gamma(0) = x$$



Définition 1.1.9. *Un vecteur tangent à M en un point x est le vecteur tangent à une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ au point $\gamma(0) = x$ (où elle est régulière). On appelle espace tangent à M en x l'ensemble $T_x M$ des vecteurs tangent à M en x , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents en x à toutes les courbes sur M qui passent par x qui soient régulières.*

Par définition, l'espace tangent en x à M est l'ensemble des classes d'équivalences dans \mathcal{C} pour cette relation. Cette définition signifie donc que $T_x M$ est constitué des « tangentes » des courbes dans M . L'indépendance vis à vis du choix des coordonnées locales est essentielle pour assurer la cohérence de cette définition.

Il faut cependant souligner qu'un « vecteur tangent » à M n'a pas de sens si M n'est pas un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . La tangente est plutôt vue ici dans \mathbb{R}^n , grâce aux cartes locales.

Bien que nous puissions visualiser les vecteurs (au moins dans \mathbb{R}^n), cette définition ne fait pas apparaître une structure d'espace vectoriel de $T_x M$. C'est pourquoi nous avons recours à une seconde définition.

On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur M ,

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ de classe } C^1\}$$

Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions :

$(fg)(x) = f(x)g(x)$. Pour $x \in M$, nous définissons sur $\mathcal{F}(M)$ une relation d'équiva-

lence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } x \in U, \text{ tel que } f|_U = g|_U$$

On note $C_p^1(M) = \mathcal{F}(M) / \sim$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{F}(M)$ pour cette relation. Le produit sur $\mathcal{F}(M)$ passe au quotient. Donc $C_p^1(M)$ est une algèbre. Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Proposition 1.1.1. L'espace tangent $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n , l'ensemble $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | x, i = 1, \dots, m\}$ forme une base de $T_x M$ en coordonnées locales. Par conséquent, tout vecteur tangent à M en x est de la forme

$$X_x = \sum X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$$

où $X^i(x) \in \mathbb{R}$.

Soient M une variété différentiable, $p \in M$, et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de classe C^∞ telle que $\gamma(t) = p$ pour $t \in I$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un ouvert, écrivant

$$C^\infty(p) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U), U \text{ voisinage de } p\}$$

La courbe γ définit une application

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_t : C^\infty(p) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)'(t) \end{aligned}$$

On peut interpréter $\dot{\gamma}_t f$ comme la dérivée de f dans la direction de γ au point p . (voir fig 7.1)

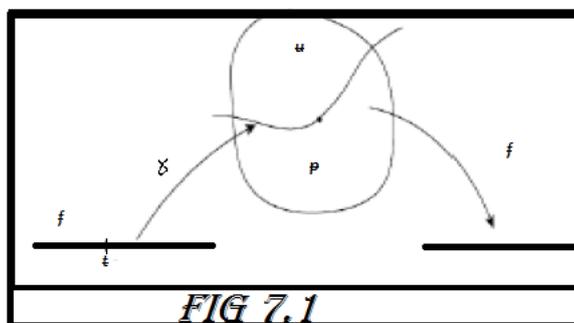


FIG 7.1

Définition 1.1.10. Deux courbes γ_1 et γ_2 sont tangentes au point x si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ et s'il existe une carte locale (U, φ) telle que $x \in U$ et $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$.

La définition est indépendante de la carte choisie.

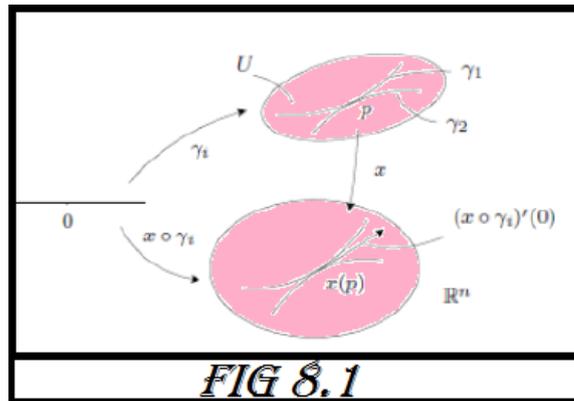
En effet; si (V, ψ) est une autre carte autour de x , on a (voir fig 8.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0) \end{aligned}$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par x : $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si elles sont tangentes en x .

Cette relation signifie que nous considérons deux courbes γ_1 et γ_2 comme équivalentes si elles ont même « vecteur tangent en 0 dans \mathbb{R}^n », sur n'importe quelle carte locale.



Exemple 1.1.1. $M = \mathbb{R}^n$. Si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe lisse et $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ est la dérivée de γ au point p , alors

$$\dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)'(t) = f'(p) \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \nabla f(p).$$

En général, l'application $\dot{\gamma}_t$ satisfait à

$$\begin{aligned} 1/ \dot{\gamma}_t(af + bg) &= a\dot{\gamma}_t f + b\dot{\gamma}_t g, \\ 2/ \dot{\gamma}_t(fg) &= g(p)\dot{\gamma}_t f + f(p)\dot{\gamma}_t g. \end{aligned}$$

Pour tout $f, g \in C^\infty(p)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que $\dot{\gamma}_t$ est une dérivation.

Définition 1.1.11. Une dérivation en x est une application linéaire $D_x : C_x^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_x est une dérivation si, pour tous réels α et β , et toutes fonctions \tilde{f}, \tilde{g} dans $C_x^1(M)$,

$$(i) D_x(\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha D_x \cdot \tilde{f} + \beta D_x \cdot \tilde{g} \text{ (linéarité),}$$

$$(ii) D_x(\tilde{f}\tilde{g}) = g(x)D_x \cdot \tilde{f} + f(x)D_x \cdot \tilde{g} \text{ (Leibniz)}$$

Définition 1.1.12. l'espace tangent en x à M , $T_x M$, est l'espace vectoriel des dérivations sur $C_x^1(M)$.

Remarque 1.1.3. la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{F}(M)$ sert à ne faire dépendre $D_x(\tilde{f})$ que des valeurs de f « autour » de x . En effet, la seule information que \tilde{f} puisse conserver de f est son comportement dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de x . Donc aucun autre point que x ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation D_x sur $C_x^1(M)$. Ensuite, la relation de Leibniz assure que cette dépendance ne peut se faire qu'au maximum par la première dérivée de f en x , car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.

Définition 1.1.13. Un vecteur tangent de M en $p \in M$ est une application

$v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$1. v(af + bg) = av(f) + bv(g), f, g \in C^\infty(p), a, b \in \mathbb{R};$$

$$2. v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g) \text{ (Règle de Leibniz).}$$

L'espace tangent en p est le \mathbb{R} -espace vectoriel linéaire de vecteur tangent au point p , noté $T_p M$.

Remarques 1.1.2.

1. Si $v, w \in T_p M$ et $c, b \in \mathbb{R}$, alors : $cv + bw$ est l'application

$$\begin{aligned} X = (av + bw) : C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto X(f) = cv(f) + bw(f) \end{aligned}$$

$cv + bw$ est un vecteur tangent au point p .

2. On note $vf = v(f)$

3. Si $v \in T_p M$ et $c \in C^\infty(p)$ est une fonction constante, alors : $cv = 0$.

4. Soit U un voisinage de p interprété comme une variété différentiable. Puisque nous utilisons les fonctions en $C^\infty(p)$ dans la définition de $T_p M$, les espaces $T_p M$ et $T_p U$ peuvent être identifiés de façon naturelle.

Soit (U, x) , $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ une carte au point p . On définit un vecteur tangent $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ au point p en fixant

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) = D_i(f \circ x^{-1})(x(p)), f \in C^\infty(p)$$

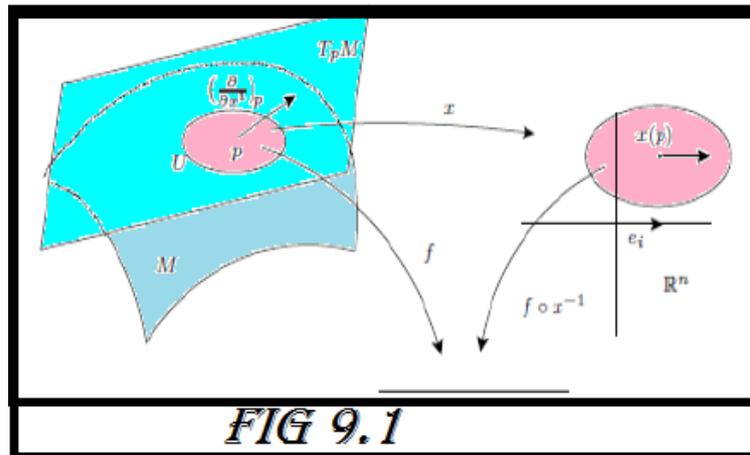
D_i est la dérivée partielle par rapport à la i -ème variable. On note aussi

$$(\partial_i)_p = D_{x^i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p.$$

Exemple 1.1.2. Pour toute carte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en x_0 , on associe n dérivations en x_0 en posant

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}(f) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

pour tout $f \in D_{x_0}(M, \mathbb{R})$. (voir fig 9.1)



Équivalence des définitions

Ces deux définitions sont équivalentes, nous pouvons les relier de la façon suivante. Soit $\gamma \in \mathcal{C}$ un représentant d'une classe de \mathcal{C}/\sim . Soit $f \in \mathcal{F}(M)$ un représentant d'une classe de $C_x^\infty(M)$. On définit une dérivation associée à γ par la formule :

$$\tilde{f} \mapsto \left(\frac{df}{dt}(\gamma(t)) \right)_{|t=0}$$

On vérifie bien que c'est une dérivation sur $C_x^\infty(M)$, c'est-à-dire que le résultat ne dépend que des classes de f et γ . Nous avons ainsi une relation entre la première définition et la seconde. Il est possible de montrer que cette application est une bijection.

Nous tirons de tout cela que $T_x M$ est un espace vectoriel, dont tout vecteur $X(x)$ peut être vu soit comme la dérivée d'une courbe (non unique) passant par x , donc comme un « vecteur », soit comme une dérivation en x sur les fonctions définies au voisinage de x .

Puisque nous avons un espace vectoriel, il est utile d'en trouver une base. Soient (x_1, \dots, x_n) des coordonnées au voisinage de x . Une base de $T_x M$ est donnée par les n dérivations $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$, pour $1 \leq i \leq n$, dont les courbes associées sont les γ_i définies par : $x_j(\gamma_i(t)) = 0$ pour $j \neq i$ et $x_i(\gamma_i(t)) = t$.

En particulier, la dimension de $T_x M$ en tant qu'espace vectoriel est la dimension de M en tant que variété. Donc tout vecteur $X(x) \in T_x M$ s'écrit $X(x) = X_i(x) (\frac{\partial}{\partial x_i})_x$,

où les $X_i(x)$ sont des réels. Cette écriture a l'avantage de suggérer que $X(x)$ est un vecteur puisqu'il a n composantes $X_1(x), \dots, X_n(x)$, et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe définit ce vecteur, avec bien sûr $\gamma(0) = x$, alors nous avons

Proposition 1.1.2. *L'espace tangent $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n et l'ensemble $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_{x^i} / i = 1, \dots, n\}$ forme une base de $T_x M$ en coordonnées locales.*

Exemple 1.1.3. *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ une courbe sur la sphère unité dans \mathbb{R}^{n+1} tel que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. La courbe satisfait à $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$, alors $\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$. Donc, $\langle x, X \rangle = 0$, (c-à-d) tout vecteur tangent $X \in T_x \mathbb{S}^n$ est orthogonal à x . D'autre part, si $X \neq 0$ tel que $\langle x, X \rangle = 0$, alors $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$ avec $\gamma : t \mapsto \cos(t|X|).x + \sin(t|X|).\frac{X}{|X|}$ est une courbe sur \mathbb{S}^n avec $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. Par conséquent,*

$$T_x \mathbb{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, X \rangle = 0\}$$

1.1.2 Application Tangente

Définition 1.1.14. *Soient M^m et N^n deux variétés différentiables et soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ . L'application tangente de f au point p est l'application linéaire $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ définie par : $(f_* v)g = v(g \circ f), \forall g \in C^\infty(f(p)), v \in T_p M$. On peut écrire aussi $T_p f$ ou f_{*p} .*

Remarques 1.1.3.

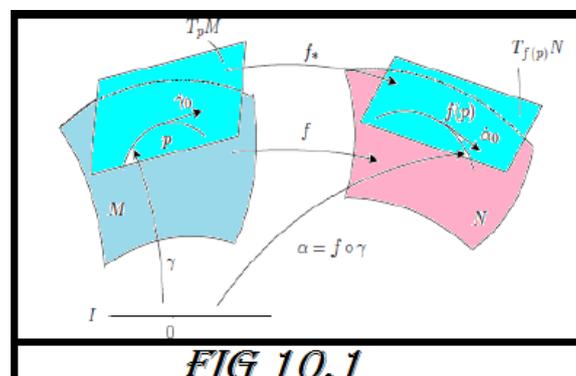
1. f_*v est un vecteur tangent au point $f(p)$ pour tout $v \in T_pM$ et l'application f_* est linéaire.
2. Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$, alors $f_*p = f'(p)$ (avec l'identification canonique $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$).
3. Soient M, N et L trois variétés différentiables et $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow L$ deux applications de classe C^∞ , alors $(g \circ f)_*p = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$, pour tout $p \in M$.
4. L'interprétation de l'application tangente en utilisant les courbes : soient $v \in T_pM$ et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de classe C^∞ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}_0 = v$.

Proposition 1.1.3. On définit une application $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ et $\alpha = f \circ \gamma : I \rightarrow N$; alors $f_*v = \dot{\alpha}_0$. Soit $x = (x^1, \dots, x^m)$ les coordonnées locales de $p \in M^m$ et $y = (y^1, \dots, y^n)$ les coordonnées locales de $f(p) \in N^n$. La matrice de $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ par rapport à les bases $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p, i = 1, \dots, m$ et $(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}, j = 1, \dots, n$, est

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \sum_{i=1}^n f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)}, 1 \leq j \leq m.$$

Ainsi, on obtient la matrice (a_{ij}) dont la dimension est $n \times m$:

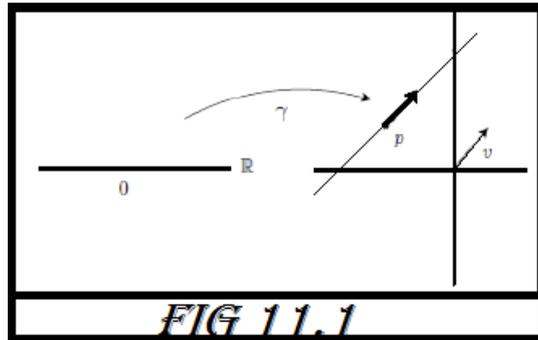
$a_{ij} = f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p y^i = \frac{\partial}{\partial x^j} (y^i \circ f)$, cela s'appelle la matrice jacobienne de f au point p (par rapport à des bases données), elle est de même que la matrice de l'application linéaire $g = y \circ f \circ x^{-1}$ par rapport aux bases standards de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . (voir fig 10.1)



Proposition 1.1.4. Soit $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ et $p \in M$. Alors f est un difféomorphisme locale au point p si et seulement si $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est un isomorphisme.

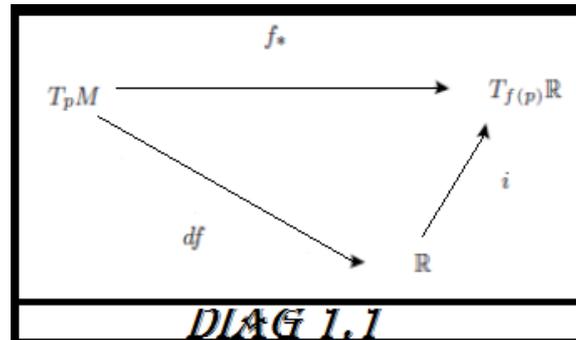
Exemples 1.1.3.

1. L'espace tangent d'un espace vectoriel de dimension n . Soit V un espace vectoriel (réel) de dimension n . Rappelons que tout isomorphisme (linéaire) $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit la même C^∞ -structure sur V , ainsi nous pouvons identifier V et $T_p V$ de façon naturelle pour tout $p \in V$, i.e. si $p \in V$.
 , alors il existe un isomorphisme canonique $i : V \rightarrow T_x V$. En effet; soit $v \in V$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$, $\gamma(t) = x + tv$ et on pose $i(v) = \dot{\gamma}(0)$ (voir fig 11.1)



2. Si $V = \mathbb{R}^n$, alors $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
3. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $p \in M$, on définit la différentielle de f par $df : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $dfv = vf$, $v \in T_p M$, on peut la désigner aussi par df_p par l'isomorphisme, $i : \mathbb{R} \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ on obtient $df = i^{-1} \circ f_*$, nous identifions $df = f_*$. (voir le diagramme 1.1)
4. L'espace tangent de variété produit : Soient M et N deux variétés différentiables et $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$, $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ deux projections. En utilisant ces projections on peut identifier $T_{(p,q)}(M \times N)$ et $T_p M \oplus T_q N$ d'une façon naturelle; on définit un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \tau : T_{(p,q)}(M \times N) &\longrightarrow T_p M \oplus T_q N \\ v &\longmapsto \tau v = \underbrace{\pi_{1*} v}_{\in T_p M} + \underbrace{\pi_{2*} v}_{\in T_q N} \end{aligned}$$

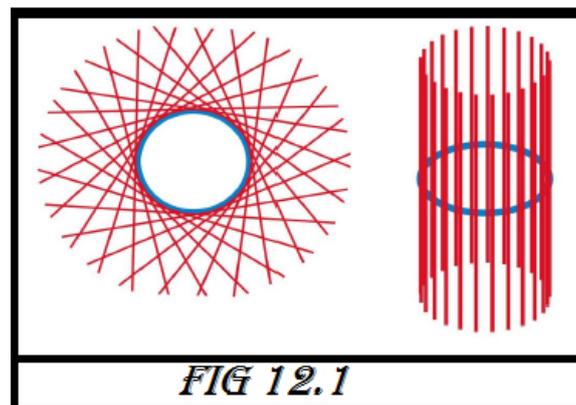


1.2 Fibré Tangent

Sur une variété, la notion de dérivation garde un sens. Dans ces conditions, on aimerait bien avoir un résultat analogue à celui obtenu pour les dérivations ponctuelles : une dérivation sur une variété M devrait pouvoir nous permettre d'associer à chaque point x de M un vecteur tangent X_x de $T_x M$. Pour ce faire, nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs tangents est lui-même une variété d'une façon naturelle.

Définition 1.2.1. Soit M une variété différentiable. On définit le fibré tangent TM de M comme l'union disjointe de tous les espaces tangents de M . (voir fig 12.1)

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$



Les points de TM sont les couples (x, v) où $x \in M$ et $v \in T_x M$ et $\pi : TM \rightarrow M$ la projection $\pi(x, v) = x$. Pour le moment, TM est la somme ensembliste des différents espaces vectoriels tangents à M , sans aucune topologie. Pour

chaque carte (U, φ) , l'application

$$\Phi : (x, \xi) \mapsto (\varphi(x), T_x\varphi(\xi))$$

est une bijection de TU sur $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Un atlas $\{(U, \varphi)\}_{i \in I}$ de M étant donné, on munit TM d'une topologie en imposant les conditions suivantes :

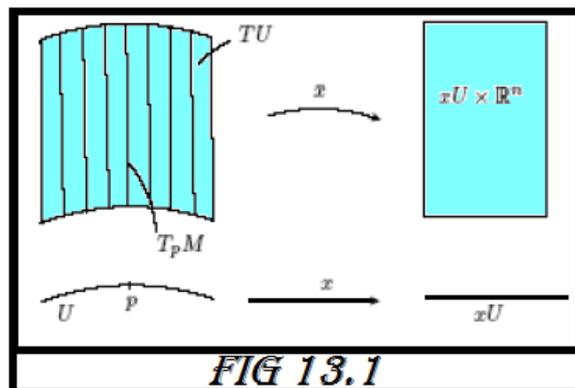
a/ TU_i sont des ouverts de TM .

b/ Les applications Φ_i sont des homeomorphismes.

Autrement dit, $\Omega \subset TM$ est ouvert si et seulement si $\Phi_i(\Omega \cap TU_i)$ est, pour tout i , un ouvert de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Pour voir que ces conditions sont cohérentes, on remarque que, d'après la définition même de l'espace tangent, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application

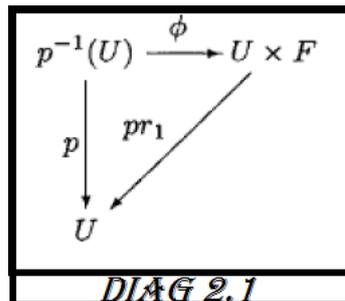
$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ (y, v) &\mapsto ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_x(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, et même un difféomorphisme. On a donc défini une topologie sur TM qui en fait une variété topologique munie de l'atlas $(TU_i, \Phi_i)_{i \in I}$. Cet atlas étant lisse, TM est une variété lisse de dimension $2 \dim M$ (si M est une variété C^p avec $p > 0$, alors TM est une variété C^{p-1}). Cette variété s'appelle le fibré tangent à M . Le fibré tangent TM a une structure canonique d'une variété différentiable. (Voir fig 13.1)



Soit M une variété différentiable de dimension n , le fibré tangent TM de M est muni de la topologie naturelle et d'une structure de variété lisse de dimension $2n$ telle que la projection $\pi : TM \rightarrow M$ est lisse.

Proposition 1.2.1. Soient E, B, F trois variétés. Une application lisse p de E dans B est une fibration (de base B , de fibre type F et d'espace total E) si pour tout $x \in B$, il existe un ouvert U contenant x et un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que le diagramme 2.1 soit commutatif. On appelle espace fibré le quadruplet (E, p, B, F) . La projection canonique p de TM sur M est une fibration.



Preuve

Il suffit d'introduire l'application

$$\begin{aligned} \psi_i : p^{-1}(U) = TU_i &\rightarrow U_i \times \mathbb{R} \\ \xi_x &\mapsto (x, T_x \varphi(\xi)) \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. Un fibré vectoriel réel sur une variété B est un espace fibré (E, p, B, F) tel que :

- a/ la fibre type F et les fibres $p^{-1}(b)$, $b \in B$, sont des espaces vectoriels réels ;
- b/ pour toute trivialisatoin locale φ , la restriction de φ à $p^{-1}(b)$ (qui envoie $p^{-1}(b)$ dans $\{b\} \times F$), induit un isomorphisme d'espaces vectoriels sur F . La fibre $p^{-1}(b)$ est notée E_b .

Remarque 1.2.1. la restriction de ψ_i à la fibre $T_x M$ de x est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $T_x M$ sur \mathbb{R}^n .

Remarque 1.2.2. Le fibré tangent est difféomorphe localement à un produit : $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (qu'on appelle une trivialisatoin locale). En général TM n'est pas globalement trivial, c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de difféomorphisme de TM dans $M \times \mathbb{R}^n$ linéaire le long des fibres.

Exemples 1.2.1.

1. Le fibré tangent à \mathbb{R}^n admet une trivialisat on globale
 $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via l'identificat on canonique $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.
2. Le fibré tangent au cercle \mathbb{S}^1 admet une trivialisat on globale car il est diff eomorphe au cylindre : $T\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. En revanche le fibré tangent $T\mathbb{S}^2$ n'admet pas de trivialisat on globale.

1.2.1 Champs de Vecteurs

Jusqu'à maintenant nous avons vu les notions d'espaces et de vecteurs tangents en un point, qui correspondent aux mouvements infinitésimaux à partir d'une configuration donnée. En considérant toutes les configurations possibles, nous sommes maintenant en mesure de définir des mouvements sur toute la variété : ces mouvements vont être introduits comme des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles. Du point de vue des espaces de configurations, cela signifie que l'on caractérise les mouvements par la donnée en tout point de la vitesse. L'outil principal sera ainsi la notion de champ de vitesse ou de champ de vecteurs : il s'agit d'une application assignant à chaque point x de la variété un vecteur X_x de l'espace tangent.

Définition 1.2.3. *Un champ de vecteurs différentiable (ou champ de vecteurs) sur M est une application différentiable $X : M \rightarrow TM$ qui, à un point $x \in M$, associe un couple formé de x et d'un vecteur tangent à M en x : $X(x) = (x, X_x)$. Autrement dit, $\pi \circ X = id_M$. On notera $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M .*

De même qu'un vecteur tangent en x définit une dérivation sur l'ensemble des germes $C^\infty(x)$, un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions de M dans \mathbb{R} de classe C^∞ . En effet, l'application

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ g &\mapsto X(g) \quad \text{tel que } X(g) : x \mapsto X(g)(x) = X_x(g) \end{aligned}$$

définie par un champ de vecteurs X est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ s'identifiera donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur $C^\infty(M)$.

Exemple 1.2.1. (Champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n). En la base naturelle de $T_x\mathbb{R}^n$, tout champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n s'écrit comme $X(x) = (x, \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x)$ où X^i est une fonction différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . En particulier, pour $i = 1, \dots, n$, l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : x \mapsto \left(x, \frac{\partial}{\partial x^i} |_x \right)$$

est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n .

En tant que dérivation, ce champ de vecteurs est la dérivée partielle par rapport à x^i , c'est-à-dire l'application $g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}$. On pourra réécrire le champ de vecteurs X comme la dérivation

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} : g \rightarrow \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

Un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n peut aussi être considéré comme une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en l'identifiant à $x \mapsto (X^1(x), \dots, X^n(x))$.

Considérons une carte (U, φ) de M , avec $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$. Sur le domaine U de la carte, tout champ de vecteurs X sur M s'écrit

$$X : x \in U \mapsto \left(x; \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x \right)$$

où $X^i = X(x^i) \in C^\infty(M)$.

En particulier, comme U est lui-même une variété, l'application de U sur $\pi^{-1}(U)$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = d\varphi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi : x \mapsto \left(x, \frac{\partial}{\partial x^i} |_x \right) \subset T_x M = T_x U$$

définit un champ de vecteurs sur U . On l'appelle champ de coordonnées.

Proposition 1.2.2. Les champs de vecteurs sur M sont les dérivations de $C^\infty(M)$ à valeurs dans $C^\infty(M)$, i.e.

$$X(M) \simeq \mathcal{D}(C^\infty(M), C^\infty(M)).$$

Exemple 1.2.2. (*Champs de vecteurs sur les sphères*)

1. Sur $\mathbb{S}^1 = \{e^{it}\}$, tout champ de vecteurs est de la forme $X_t = f(t)\frac{d}{dt}$, avec $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$,
2. Sur $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, tout champ de vecteurs est de la forme

$$X_{(x,y,z)} = f(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + h(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$$

avec $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ telles que $xf(x, y, z) + yg(x, y, z) + zh(x, y, z) = 0$.

1.2.2 Crochets et Algèbre de Lie

Définition 1.2.4. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une opération bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ qu'on appelle crochet de Lie, qui a les propriétés suivantes :

1. le crochet est antisymétriques : $[a, b] = -[b, a]$, pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$;
2. le crochet satisfait l'identité de Jacobi :

$$[[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] = 0$$

pour tout $a, b, c \in \mathfrak{g}$.

Par conséquent, on a

Corollaire 1.2.1. Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}(M)$ forment une algèbre de Lie, avec le crochet

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M)$$

qui vaut en coordonnées locales,

$$[X, Y]_{|v} = \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Preuve

Le crochet de Lie sur $\mathfrak{X}(M)$ est induit par le crochet de Lie naturel sur les dérivations $\mathcal{D}(C^\infty(M), C^\infty(M))$, donné par $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Proposition 1.2.3. *Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$; et $f, g \in C^\infty(M)$, alors,*

1. $[a, a] = 0$, pour tout $a \in \mathfrak{g}$;
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
3. l'identité de Leibniz : $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] = [X, [Y, Z]]$,
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Lemme 1.2.1. *Soient (U, φ) , $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, une carte et $\{\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, i = 1, \dots, n\}$, les cootdonnées de champ de vecteur correspond, alors*

$$[\partial_i, \partial_j] = 0, \forall i, j.$$

Exemple 1.2.3. *Dans \mathbb{R}^n , avec $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$, on a $XY \cdot g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^1 \partial x^2}$.*

Il est cependant possible de définir un champ de vecteurs à partir du produit.

Définition 1.2.5. *Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ est le champ de vecteurs*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Pour que cette définition soit correcte il faut montrer que $XY - YX$ est bien un champ de vecteurs, c'est-à-dire une dérivation sur $C^\infty(M)$. Or la linéarité est évidente et la règle de Leibniz se déduit du calcul de proposition(1.2.3) :

$$\begin{aligned} [X, Y] \cdot (fg) &= XY \cdot (fg) - YX \cdot (fg) \\ &= fXY \cdot g + gXY \cdot f - fYX \cdot g - gYX \cdot f \\ &= f[X, Y] \cdot g + g[X, Y] \cdot f. \end{aligned}$$

En coordonnées locales, un champ de vecteurs étant donné sous la forme

$X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, les composantes du crochet de Lie $[X, Y](x)$ sont

$$[X, Y]^i(x) = \sum_{j=1}^n \left(X^j(x) \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x) - Y^j(x) \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right) = X \cdot Y^i(x) - Y \cdot X^i(x).$$

Matriciellement, en notée $JX(x) = (\frac{\partial X^l}{\partial x^j}(x))$ la matrice jacobienne du vecteur des composantes de X , on obtient

$$\begin{pmatrix} [X, Y]^1(x) \\ \vdots \\ [X, Y]^n(x) \end{pmatrix} = JY(x) \begin{pmatrix} X^1(x) \\ \vdots \\ X^n(x) \end{pmatrix} - JX(x) \begin{pmatrix} Y^1(x) \\ \vdots \\ Y^n(x) \end{pmatrix}$$

Exemples 1.2.2.

1. Si $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors $[X, Y] = 0$. Plus généralement si X et Y sont constants dans un système des coordonnées, c'est-à-dire $X^1(x), \dots, X^n(x)$ et $Y^1(x), \dots, Y^n(x)$ sont tous constants, alors $[X, Y] = 0$ sur le domaine des coordonnées.
2. Dans \mathbb{R}^n , considérons des champs de vecteurs linéaires, c'est-à-dire que, dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}$, ils s'écrivent matriciellement comme $X(x) = Ax$ et $Y(x) = Bx, x \in \mathbb{R}^n$ tel que A et B étant des matrices $(n \times n)$ à coefficients constants. Le crochet de Lie de ces champs de vecteurs s'écrit alors

$$[X, Y](x) = JY(x)X(x) - JX(x)Y(x) = (BA - AB)x.$$

1.3 Connexions Linéaires

Nous allons introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété M . Cette structure nous permettra de définir une nouvelle dérivation, la dérivation covariante. Cette dérivation agira sur les champs de vecteurs, en général.

Définition 1.3.1. Une connexion linéaire sur M est une application ∇

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

2. $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
3. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$
4. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$

Définition 1.3.2. Soit ∇ une connexion sur M et (U, φ) une carte sur M de coordonnées locales (x_1, x_2, \dots, x_n) . On définit une fonction différentiable $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelé symboles de Christoffel. En général,

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ est la dérivée covariante associée à la connexion linéaire ∇ .

Exemples 1.3.1.

1. Une connexion affine est une sorte de dérivée directionnelle de champs de vecteurs sur une variété. Imaginez un champ de vecteurs V sur \mathbb{R}^n (qui est une application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Prenez un point et choisissez un vecteur tangent $X \in T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

On note par $\nabla_X V$ la dérivée covariante de V en p dans la direction X . on écrit $X = a^i \frac{d}{dx^i}$. Alors

$$\nabla_X V = a^i \frac{dV}{dx^i} \in T_p \mathbb{R}^n$$

2. On peut voir la connexion canonique sur \mathbb{R}^n comme

$\nabla_X Y = X(Y^j) \frac{d}{dx^i} = X^i \frac{dY^j}{dx^i} \frac{d}{dx^i}$. les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de la connexion par rapport à la base $\frac{d}{dx^i}$ sont identiquement nuls.

1.4 Géodésiques

L'idée générale derrière le concept de géodésique est la généralisation des lignes droites de l'espace euclidien aux variétés Riemanniennes. Une géodésique sera constamment paramétrée, par une courbe lisse sur la variété, c'est localement la courbe la plus courte reliant deux points. Ils sont d'une grande importance dans l'approfondissement de la géométrie Riemannienne, ainsi que dans la physique théorique, en particulier la relativité générale, où ils sont les trajectoires d'objets test se déplaçant dans une géométrie d'espace temps non triviale.

Dans \mathbb{R}^n usuel, les géodésiques sont précisément les droites, c'est-à-dire les courbes d'accélération nulle. Pour une variété plongée dans un espace euclidien ambiant, on pourrait envisager de calculer l'accélération d'une courbe $\gamma(t)$ comme on le fait d'habitude, et de projeter orthogonalement ce vecteur sur l'espace tangent à M en $\gamma(t)$. Mais pour une variété quelconque, il va nous falloir trouver un moyen de définir l'accélération d'une courbe, de manière entièrement intrinsèque.

Par ailleurs, dériver deux fois les coordonnées ne fonctionne pas, car il n'est justement pas possible d'interpréter cette double dérivation indépendamment du choix du système de coordonnées, comme on voudrait le faire. On introduit, donc, un nouveau type d'opérateur, les connexions, qui serviront ensuite à définir les notions de dérivée covariante d'un champ de vecteurs selon une courbe, une géodésique et un transport parallèle.

1.4.1 Transport Parallèle

Dérivation d'un champ de vecteur sur une courbe paramétrée

Cette dérivée covariante permet de définir une dérivation covariante le long d'une courbe dans M , elle nous donnera une interprétation géométrique de la connexion. Pour cela, soit donné un champ de vecteurs $Y(t)$ le long d'une courbe γ . c'est-à-dire que $Y(t)$ n'est défini qu'au dessus des points $\gamma(t)$ de M . Alors la dérivation covariante de $Y(t)$ le long de γ , notée $\frac{D}{dt}Y$, est par définition

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y(t)$$

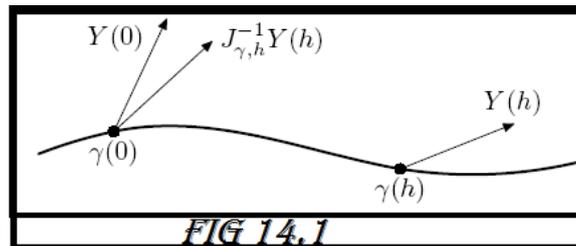
C'est une dérivation le long d'un paramètre t . On remarque que la donnée de la dérivation covariante le long de toute courbe est équivalente à la donnée de la connexion linéaire ∇ , puisque tout vecteur est tangent à au moins une courbe.

Nous dirons que le champ $Y(t)$ est parallèle le long de γ si pour tout t , $\frac{DY}{dt}(t) = 0$. Pour une condition initiale $Y(0) \in T_{\gamma(0)}M$ donnée, il existe un unique champ de vecteurs $Y(t)$ parallèle le long de γ qui admet cette valeur en $t = 0$. Ceci définit alors une application

$$J_{\gamma,h} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(h)}M$$

qui à $Y(0)$ associe $Y(h)$ où le champ $Y(t)$ est l'unique solution ci-dessus, de valeur initiale $Y(0)$. Cette application est linéaire et inversible, elle porte le nom de transport parallèle le long de γ . (voir fig 14.1)

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (J_{\gamma,h}^{-1}Y(t+h) - Y(t))$$



Définition 1.4.1. *Un champ de vecteurs le long de la courbe γ est une application V de classe C^∞ de I dans TM , telle que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout t dans I . On note $\mathfrak{F}(\gamma)$ l'espace des champs de vecteurs le long de γ .*

Lemme 1.4.1. *Pour toute courbe γ , ∇ détermine un unique opérateur :*

$$D_t : \mathfrak{F}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{F}(\gamma) \tag{1.1}$$

possédant les propriétés suivantes :

1. **\mathbb{R} -linéarité à droite** D_t est \mathbb{R} -linéaire,
2. **Leibnitz-linéarité à droite** Pour tout $f \in C^\infty(I)$, $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$.
3. **Compatibilité avec ∇** : $D_tV = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}V$

Définition 1.4.2. (*Champ de vecteur parallèle*). On dit d'un champ de vecteurs le long d'une courbe γ est parallèle le long de γ si

$$D_t V = \frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} V = 0.$$

Théorème 1.4.1. (*Transport parallèle*). Soit $\gamma : I \rightarrow M$, $t_0 \in I$, $X \in T_{\gamma(t_0)}M$. Il existe un unique champ de vecteurs V le long de γ parallèle le long de γ tel que $V(t_0) = X$.

Preuve

En reprenant la formule :

$$D_t V(t_0) = \sum_k (\dot{V}^k(t_0) + \sum_i \sum_j V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma_{\dot{A}}^k(\gamma(t_0))) \partial_k \quad (1.2)$$

la condition de parallélisme de V s'écrit :

$$\forall k, \dot{V}^k(t_0) + \sum_i \sum_j V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma_{\dot{A}}^k(\gamma(t_0)) = 0.$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle d'ordre linéaire : le théorème de Cauchy- Lipschitz permet de conclure. Pour l'unicité on remarque qu'un tel opérateur dépend seulement localement des valeurs de γ . On fixe donc t_0 dans I et on se place sur un voisinage de $\gamma(t_0)$ pour lequel on dispose d'une base locale de l'espace tangent en chaque point : $\{E_i\}$ de sections associées $\{\partial_i\}$. Dans cette base un champ de vecteurs V quelconque s'écrit :

$$V(t) = \sum_i V^i \partial_i$$

En développant à l'aide des propriétés de D_t et en utilisant le fait que les ∂_i sont des vecteurs extensibles on obtient la formule [1.2], pour l'existence il suffit de montrer que cette formule définit bien un opérateur possédant les propriétés voulues.

Maintenant que l'on sait dériver le long d'une courbe algébrique on peut revenir à notre motivation initiale : l'étude des géodésiques.

Définition 1.4.3. On appelle géodésique toute courbe γ telle que $D_t\dot{\gamma}$ est nul, ce que l'on note souvent

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0. \quad (1.3)$$

Le théorème principal concernant les géodésiques est le suivant :

Théorème 1.4.2. (Existence et Unicité des géodésiques). Soient $p \in M$, $X \in T_pM$, $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant t_0 et une géodésique $\gamma : I \rightarrow M$ telle que $\dot{\gamma}(t_0) = X$. De plus deux telles géodésiques définies respectivement sur des intervalles I et I' contenant t_0 sont égales sur leur domaine de définition commun ($I \cap I'$).

Preuve

Localement on dispose de la formule 1.2 pour un champ de vecteurs quelconque V . En remplaçant V par $\dot{\gamma}$ la condition $D_t\dot{\gamma} = 0$ donne l'équation différentielle d'ordre 2 en $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$:

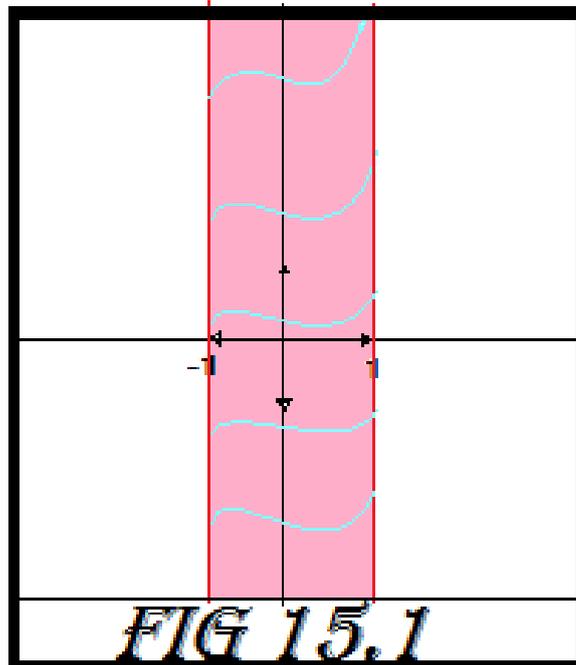
$$\forall k, \ddot{\gamma}^k + \sum_i \sum_j \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0. \quad (1.4)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne l'existence et l'unicité de solutions locales pour de telles équations (ODE) permet de conclure.

Remarque 1.4.1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne permet donc pas de disposer de géodésiques définies pour tout temps. Ainsi, sur la bande $(M =]-1, +1[\times \mathbb{R}, g_{\text{eucl}})$ munie de la métrique Euclidienne canonique g_{eucl} , on pourra montrer que la courbe

$$\gamma : t \in]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[\rightarrow (t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})$$

est une géodésique (au sens de la connexion métrique associée) de vitesse unitaire qui ne peut être prolongée : les bords du domaine sont atteints. (voir fig 15.1)



Si l'on veut des géodésiques qui vont à l'infini "pour de vrai", il suffit de considérer le changement de coordonnées

$$\begin{aligned} \varphi : (N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \varphi^* g_{eucl}) &\rightarrow (M =] - 1, +1[\times \mathbb{R}, g_{eucl}) \\ (x, y) &\mapsto (2 \arctan(x) / \pi, y) \end{aligned}$$

et de munir $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la métrique pull-back $\varphi^* g_{eucl}$. La courbe $\varphi^{-1} \circ \gamma :] - \sqrt{2}, +\sqrt{2}[\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc}] - \sqrt{2}, +\sqrt{2}[& \xrightarrow{\gamma} & M =] - 1, +1[\times \mathbb{R} \\ & \searrow & \uparrow \varphi \\ & & N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}$$

est alors une géodésique pour la connexion associée, qui explose à l'infini aux deux bornes de l'intervalle de définition on sait en effet que φ est une isométrie entre $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \varphi^* g_{eucl})$ et $(] - 1, +1[\times \mathbb{R}, g_{eucl})$.

Chapitre 2

Variété Riemannienne

Soient V_1, V_2, \dots, V_k et W des espaces vectoriels, soit F une application de $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$. On dit que l'application F est k -linéaire ou (multilinéaire) si elle est linéaire sur chaque variable c-à-d

$$F(v_1, \dots, \alpha v_{i_1} + \beta v_{i_2}, \dots, v_k) = \alpha F(v_1, \dots, v_{i_1}, \dots, v_k) + \beta F(v_1, \dots, v_{i_2}, \dots, v_k)$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $i = 1, \dots, k$. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} , l'application $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ est appelé un covecteur, l'ensemble des covecteurs est appelé le dual de V noté V^* .

On va considérer que $\langle \omega, v \rangle = \langle v, \omega \rangle = \omega(v) \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $\omega \in V^*$.

Proposition 2.0.1. *Si (v_1, \dots, v_n) est une base de V espace vectoriel de dimension n , alors (w^1, \dots, w^n) est une base de V^* et on a $w^j(v_i) = \delta_{ij}$. En particulier, $\dim V = \dim V^*$.*

2.1 Notions de Tenseur

Définitions 2.1.1.

1. Un k -tenseur covariant sur V est une application k -linéaire $V^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $V^k = \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ fois}}$. On note $T^k(V)$ l'ensemble des tenseurs k -covariants sur V

2. Un l -tenseur contravariant est une application linéaire sur $V^{*l} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $T_l(V)$ l'ensemble des tenseurs l -contravariant sur V
3. Un k -tenseur covariant et l -tenseur contravariant est une application $(k+l)$ -linéaire sur $V^k \times V^{*l} \rightarrow \mathbb{R}$.
un tenseur de type (k, l) est k -covariant et l -contravariant. On note $T_l^k(V)$ l'ensemble des tenseurs de type (k, l) .
4. Par convention $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. Le produit tensoriel de deux tenseurs $F \in T_l^k(V)$ et $G \in T_q^p(V)$ est le tenseur noté $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_k, \dots, v_{k+p}, w^1, \dots, w^l, \dots, w^{l+q}) = F(v_1, \dots, v_k, w^1, \dots, w^l)G(v_{k+1}, \dots, v_{k+p}, w^{l+1}, \dots, w^{l+q})$$

Lemme 2.1.1. Si (v_1, \dots, v_n) est la base de V et $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ la base duale correspondante à V (i.e. $\omega^i(v_j) = \delta_j^i$), alors le tenseur

$$w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_k} \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q}, \quad 1 \leq j_p, \quad i_q \leq n$$

forme une base de $T_l^k(V)$. Par conséquent, $\dim T_l^k(V) = n^{k+l}$ Tenseurs sur une variété

Définition 2.1.2. Pour tout $p \in M$, définissons l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)}M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_s \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_r$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)}M$ est un tenseur de type (s, r) au dessus de p . Dans une base associée à des coordonnées (x_i) au voisinage de p , il s'écrit

$$T|_p = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

2.1.1 Métrique Riemannienne

Définition 2.1.3. On appelle métrique Riemannienne de classe C^p sur M la donnée pour tout $m \in M$ d'un produit scalaire g_m (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur $T_m M$ dépendant de façon C^p de m (i.e. pour toute carte (U, φ) de classe C^{p+1} sur M , on suppose que la fonction $m \mapsto g_m(\frac{\partial}{\partial x_i}(m), \frac{\partial}{\partial x_j}(m)) = g_{ij}(m)$ est C^p de U dans \mathbb{R} . Les coefficients de la matrice $g_{ij}(m)$ sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (U, φ) .

Définition 2.1.4. On appelle variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.

Exemple 2.1.1. sur $M = \mathbb{R}$ on pose $g(m) = h(m)dx^2$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est une fonction C^p et dx^2 est la forme quadratique sur $\mathbb{R} \simeq T_m \mathbb{R}$ définie par $dx^2(u, u) = u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors g est une métrique Riemannienne C^p sur \mathbb{R} (on construit ainsi toutes les métriques possibles sur \mathbb{R}).

Remarque 2.1.1. Si $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs sur M , alors on a

$$g_m(X(m), Y(m)) = \sum_i g_{ij}(m) X_i(m) Y_j(m)$$

Exemple 2.1.2. Si (U, x) une carte sur M , alors $\partial_1, \dots, \partial_n$ forme une base pour $T_p M$ sa base duale est $dx_{j,j=1,\dots,n}$, alors la métrique g est donnée par

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

2.1.2 Isométrie

Définition 2.1.5. Soit $f : M \rightarrow (N, h)$ un difféomorphisme local sur M et h une métrique sur N . On définit une métrique $g = f^*h$ sur M , appelée métrique tirée en arrière de h par f , en posant, pour tout $(u, v) \in T_m M$

$$(f^*h)_m(u, v) = h(d_m f(u), d_m f(v))$$

Définition 2.1.6. $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une isométrie (resp. une isométrie locale) si seulement si f est un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local) et $g = f^*h$.

Exemple 2.1.3. $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ est localement isométrique, mais pas isométrique.

2.1.3 Tenseur de torsion

Définition 2.1.7. Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M . Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$ -bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} T : \Gamma^1(TM) \times \Gamma^1(TM) &\longrightarrow \Gamma^1(TM) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$.

Remarques 2.1.1.

1. T est un champ de tenseur de type $(1, 2)$,
2. $T(X, Y) = -T(Y, X)$ pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$ (T est antisymétrique)
3. La connexion ∇ est dite sans torsion si $T \equiv 0$ (i.e) pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$:
 $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
4. Pour tout $x \in M$, le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectoriel

$$\begin{aligned} T_x : T_x M \times T_x M &\longrightarrow T_x M \\ (v, w) &\longmapsto (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x \end{aligned}$$

où $X, Y \in \Gamma^1(TM)$, tel que $X_x = v$ et $Y_x = w$ indépendamment du choix de X et Y .

2.2 Connexion de Levi-Civita

Théorème 2.2.1. *Sur toute variété Riemannienne (M^n, g) , il existe une unique connexion linéaire ∇ telle que pour tout $(X, Y, Z) \in \mathfrak{X}(M)^3$ on a*

$$\begin{aligned} 1/\nabla_X Y &= \nabla_Y X + [X, Y], & \text{torsion libre}(T \equiv 0) \\ 2/Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), & \text{compatibilité avec } g \end{aligned}$$

∇ est appelée connexion de Levi-Civita de la métrique g .

Preuve

Unicité : Si une telle connexion existe, on a

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + 2g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

parce que

$$\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z], \quad \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z], \quad \nabla_X Y + \nabla_Y X = [X, Y] + 2 \nabla_Y X.$$

On a donc

$$g(Z, \nabla_X Y) = \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [X, Y])] \quad (2.1)$$

ce qui prouve que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.

Existence : L'identité 2.1 implique qu'il y'a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coefficients de matrice de g

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

de cette expression suit la définition des Γ_{ij}^k en termes des g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) g^{lk}.$$

Calculs en coordonnées locales

Soit (U, φ) une carte sur M et (g_{ij}) les coefficients de la métrique g dans la carte on définit sur $\varphi(U)$ des fonctions

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right)$$

où les coefficients g^{ij} sont ceux de la matrice $(g_{ij})^{-1}$. On a alors $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Les fonctions Γ_{ij}^k sont appelées les symboles de Christoffel de la métrique g dans la carte (U, φ) .

Remarques 2.2.1.

1. Pour tout (i, j, k) , on a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.
2. $(\nabla_X Y)(m)$ ne dépend que des $\Gamma_{ij}^k(m)$, de $X(m)$ et de la connaissance de Y le long d'une courbe γ de M vérifiant $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = X(m)$.

Exemples 2.2.1.

1. On définit une connexion linéaire $\bar{\nabla}$ sur \mathbb{R} en posant

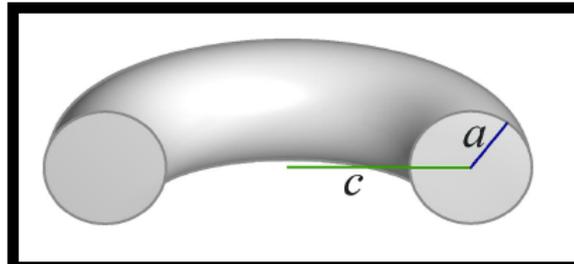
$\bar{\nabla}_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j$, où $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$. Cette connexion vérifie

$$1/\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = \sum_{i,j=1}^n (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) e_j = [X, Y],$$

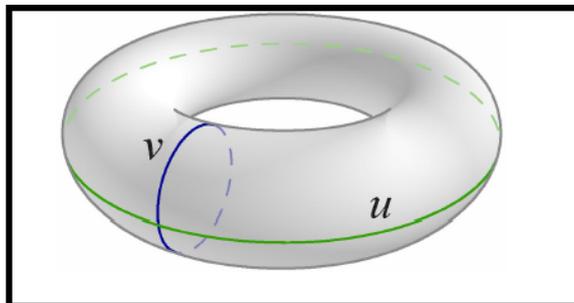
$$\begin{aligned} 2/ Z.g_{\mathbb{R}^n}(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^n (Z_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} Y_j - Z_i X_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}) \\ &= g_{\mathbb{R}^n}(\bar{\nabla}_Z X, Y) + g_{\mathbb{R}^n}(X, \bar{\nabla}_Z Y) \end{aligned}$$

2. Si $M = \mathbb{R}^n$ et $g = g_{\mathbb{R}^n}$, alors dans la carte $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ on a $g_{ij} = \delta_{ij}$ et donc $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tout (i, j, k) . La connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ est donc $\bar{\nabla}$.

Exemple 2.2.1. (Le tore) : Notre modèle d'un tore a un rayon majeur c et un rayon mineur a . Nous considérons seulement le tore annulaire, pour quel $c > a$



Nous utilisons un système de coordonnées u, v pour lequel les plans de constante u traversent l'axe du tore



Nous paramétrons la surface X par

$$X(u, v) = \begin{cases} x = (c + a \cos v) \cos u \\ y = (c + a \cos v) \sin u \\ z = a \sin v \end{cases}$$

Nous commençons par calculer

1/la métrique induite : Soit $g_{eu} = dx^2 + dy^2 + dz^2$ la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} dx = -(c + a \cos v) \sin u du - a \cos u \sin v dv \\ dy = (c + a \cos v) \cos u du - a \sin u \sin v dv \\ dz = 0 du + a \cos v dv \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx^2 = (-(c + a \cos v) \sin u)^2 du^2 + (-a \cos u \sin v)^2 dv^2 \\ dy^2 = ((c + a \cos v) \cos u)^2 du^2 + (-a \sin u \sin v)^2 dv^2 \\ dz^2 = 0 du^2 + (a \cos v)^2 dv^2 \end{cases}$$

Alors, $g_{eu} = (c+a \cos v)^2 du^2 + a^2 dv^2$. La matrice et son inverse sont données par $g_{ij} =$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c+a \cos v)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}; \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(c+a \cos v)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix},$$

les dérivées partielles sont : $g_{ij,u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $g_{ij,v} = \begin{bmatrix} -2a \cos v(c+a \cos v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2/ les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{uu}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(g_{uu,u} + g_{uu,u} - g_{uu,u}) + g^{uv}(g_{vu,u} + g_{vu,u} - g_{uu,v})]$$

$$\Gamma_{uu}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(0 + 0 - 0) + 0(g_{vu,u} + g_{vu,u} - g_{uu,v})]$$

$$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{vv}^v = 0$$

$$\Gamma_{uv}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(g_{uv,u} + g_{uu,v} - g_{uv,u}) + g^{uv}(g_{vv,u} + g_{vv,u} - g_{uv,v})]$$

$$\Gamma_{uv}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(0 + g_{uu,v} - 0) + 0(g_{vv,u} + g_{vv,u} - g_{uv,v})]$$

$$\Gamma_{uv}^u = -\frac{a \sin v}{(c + a \cos v)}$$

$$\Gamma_{vu}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(g_{uu,v} + g_{uv,u} - g_{vu,u}) + g^{uv}(g_{vu,v} + g_{vv,u} - g_{vu,v})]$$

$$\Gamma_{vu}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(g_{uu,v} + 0 - 0) + 0(g_{vu,v} + g_{vv,u} - g_{vu,v})]$$

$$\Gamma_{vu}^u = \Gamma_{uv}^u = -\frac{a \sin v}{(c + a \cos v)}$$

$$\Gamma_{vv}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(g_{uv,v} + g_{uv,v} - g_{vv,u}) + g^{uv}(g_{vv,v} + g_{vv,v} - g_{vv,v})]$$

$$\Gamma_{vv}^u = \frac{1}{2} [g^{uu}(0 + 0 - 0) + 0(g_{vv,v} + g_{vv,v} - g_{vv,v})]$$

$$\Gamma_{vv}^u = 0$$

$$\Gamma_{uu}^v = \frac{1}{2} [0(g_{uu,u} + g_{uu,u} - g_{uu,u}) + g^{vv}(0 + 0 - g_{uu,v})]$$

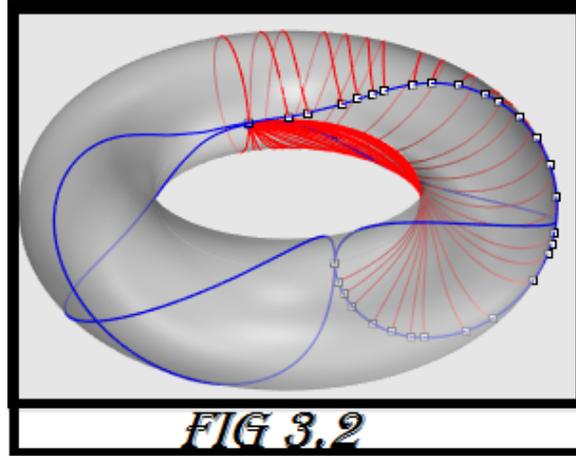
$$\Gamma_{uu}^v = \frac{1}{a} \sin v (c + a \cos v)$$

$$\Gamma_{uv}^v = \frac{1}{2} [g^{vv}(g_{uv,u} + g_{uu,v} - g_{uv,u}) + g^{vv}(g_{vv,u} + g_{vv,u} - g_{uv,v})]$$

$$\Gamma_{uv}^v = \frac{1}{2} [0(g_{uv,u} + g_{uu,v} - g_{uv,u}) + g^{vv}(0 + 0 - 0)]$$

$$\Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = 0$$

3/la géodésique :(voir fig 3.2)



$$\ddot{X}_k + \Gamma_{ij}^k \dot{X}_i \dot{X}_j = 0$$

$$\begin{cases} \text{pour } k = u \text{ on a } \ddot{X}_u + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^u \dot{X}_i \dot{X}_j = \ddot{X}_u + \Gamma_{uv}^u \dot{X}_u \dot{X}_v + \Gamma_{vu}^u \dot{X}_v \dot{X}_u = 0, \\ \text{pour } k = v \text{ on a } \ddot{X}_v + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^v \dot{X}_i \dot{X}_j = \ddot{X}_v + \Gamma_{uu}^v \dot{X}_u \dot{X}_u = 0, \end{cases}$$

Alors

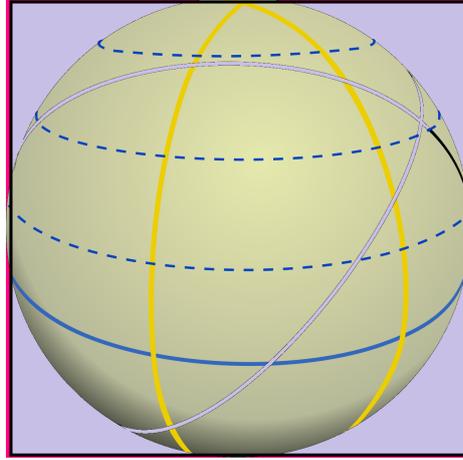
$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\Gamma_{uv}^u \dot{u}\dot{v} = \ddot{u} - \frac{2a \sin v}{c+a \cos v} \dot{u}\dot{v} = 0, \\ \ddot{v} + \Gamma_{uu}^v \dot{u}^2 = \ddot{v} + \frac{1}{a} \sin v (c + a \cos v) \dot{u}^2 = 0, \end{cases}$$

La solution du système est :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{c^{st}}{(c + a \cos v)^2} \\ \dot{v} &= \pm \sqrt{-\frac{c^{st^2}}{a^2(c + a \cos v)^2} + l} \end{aligned}$$

C'est la solution générale de l'équation géodésique. Pour trouver des géodésiques réelles, nous devons trouver un paramétrage de la vitesse unitaire de la courbe définie par \dot{u} et \dot{v}

Exemple 2.2.2. (la sphère S^2)



Nous paramétrons la surface X par

$$X(u, v) = \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Calculons dx, dy et dz en termes de $dr, d\theta$ et $d\varphi$ nous obtenons

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.2)$$

Le long de la sphère $r \equiv 1$ et donc $dr \equiv 0$. Ainsi, l'équation 2.2 devient

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Nous avons, dans les composantes de la matrice et son inverse sont donnée

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

2/ les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}[g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{12}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})]$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}[(0 + 0 - 0) + 0(0 + 0 - 0)]$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}[g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{21,1}) + g^{12}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2})]$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}[1(0 + 0 - 0) + 0(0 + 2 \cos 1 \sin 1 - 0)]$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}[g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{12}(g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,2})]$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}[1(0 + 0 - 2 \cos 1 \sin 1) + 0(0 + 0 - 0)]$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\cos \theta \sin \theta$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}[g^{21}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{22}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})]$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}[g^{21}(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}) + g^{22}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2})]$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}[0(0 + 0 - 0) + \frac{1}{\sin^2 \theta}(0 + 2 \cos \theta \sin \theta - 0)]$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

donc on a les Γ_{ij}^k sont nuls sauf $\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$ et $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

3/la géodésique : $\ddot{X}_k + \Gamma_{ij}^k \dot{X}_i \dot{X}_j = 0$, les équations à résoudre sont maintenant,

$$\begin{cases} \frac{du^\theta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\theta u^\alpha u^\beta = 0, \\ \frac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\varphi u^\alpha u^\beta = 0, \end{cases} .$$

En élargissant la première, il n'y a qu'un seul terme de connexion non-nul,

$$\begin{cases} \frac{du^\theta}{d\tau} + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta u^\varphi u^\varphi = 0, \\ \frac{du^\theta}{d\tau} - (u^\varphi)^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \end{cases} .$$

Pour la seconde,

$$\begin{cases} \frac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\varphi u^\alpha u^\beta = 0, \\ \frac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi u^\varphi u^\theta + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi u^\theta u^\varphi = 0, \end{cases} .$$

$$\frac{du^\varphi}{d\tau} + 2u^\varphi u^\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

Laisser les conditions initiales être $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$, $u_0^\varphi = 1$; $u_0^\theta = 0$. Comme chaque point et chaque direction de la sphère sont équivalents, il n'y a pas de perte de généralité dans ce choix. Ensuite, nous avons d'abord

$$\left(\frac{du^\theta}{d\tau}\right)_0 = (u_0^\varphi)^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0$$

et u^θ ne change pas. Pour l'équation φ , il s'ensuit que

$$\frac{du^\varphi}{d\tau} = -2u^\varphi u^\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

donc u^φ est également constante et le vecteur de vitesse est $u^i = (0, 1)$. Intégrer pour trouver la courbe,

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 1, \end{cases}$$

alors $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ est $\varphi = \varphi_0 + \tau = \tau$. La courbe est donc l'équateur,

$$(\theta, \varphi) = (0, \tau)$$

Nous pouvons caractériser l'équateur comme l'intersection du plan unique normal à la surface, contenant le vecteur de vitesse initiale. Un tel plan passe toujours par le centre de la sphère, donc toutes les géodésiques sont donné par de grands cercles.

Définition 2.2.1. (Tenseur de courbure)

Soit M une variété muni d'une connexion linéaire ∇ . On définit le tenseur de courbure, $R : \Gamma^1(TM) \times \Gamma^1(TM) \times \Gamma^1(TM) \rightarrow \Gamma^1(TM)$, associé à ∇ par : pour tout $X, Y, V \in \Gamma^1(TM)$, on a

$$R(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]} V$$

1. La courbure R est $C^\infty(M) - 3$ linéaire
2. $R(X, Y)V = -R(Y, X)V$ pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$ et $V \in \Gamma^1(TM)$ (antisymétrie)

Définition 2.2.2. Sur une variété Riemannienne (M, g) , le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne.

Le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des symboles de Christoffel :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \partial_l$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \{\Gamma_{im}^1 \Gamma_{jk}^{tm} - \Gamma_{jm}^1 \Gamma_{ik}^t\},$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale de champs de vecteurs sur M .

Proposition 2.2.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :

1. R est un champ de tenseurs de type $(3, 1)$.
2. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.
3. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.
4. R vérifie l'identité de Bianchi algébrique
 $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.
5. R vérifie l'identité de Bianchi différentielle, pour $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma^1(TM)$

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

Chapitre 3

3-Variétés Lorentziennes de Walker

3.1 Métriques semi-Riemanniennes

Définition 3.1.1. *Un tenseur métrique ou métrique semi-Riemannienne sur M ¹, est une famille des applications $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ ($x \in M$), telle que :*

1. *Pour tout $x \in M$, g_x est une forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée.*
2. *Si $X, Y \in \Gamma^1(TM)$, la fonction $g(X, Y)(x) = g_x(X_x, Y_x)$ est différentiable.*
3. *L'indice de g est constant, et noté $\text{Ind}M$, c'est-à-dire :*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in M, \text{Ind}(T_x M) = p \text{ (par rapport } g_x).$$

Définition 3.1.2. *Une variété semi-Riemannienne est un couple (M, g) , où M est une variété différentiable de dimension n et g est un tenseur métrique sur M .*

Remarque 3.1.1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, alors :*

- $0 \leq \text{Ind}M \leq \dim M$.
- Si $\text{Ind}M = 0$, (M, g) est dite variété Riemannienne,
- Si $p = 1$ et $\dim M \geq 2$, (M, g) est dite variété de Lorentz ou variété Lorentzienne.

Définition 3.1.3. *Étant donnée une carte (U, φ) de (M, g) avec les champs de bases $\partial_1, \dots, \partial_n$ associé, on appelle composantes du tenseur métrique les $n \times n$ fonctions g_{ij}*

1. Soit M une variété différentiable de dimension n .

définies par $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Localement, si M est munie d'un système de coordonnées locales (x_i) , alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Exemple 3.1.1. L'espace Euclidien \mathbb{R}^n muni de la métrique :

$$g = -dx_1^2 - \dots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \dots + dx_n^2,$$

noté \mathbb{R}_p^n , est une variété semi-Riemannienne, et $\text{Ind}\mathbb{R}_p^n = p$. Soit $\epsilon_i = g(\partial_i, \partial_i)$, alors :

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{si } i = 1, p; \\ +1, & \text{si } i = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

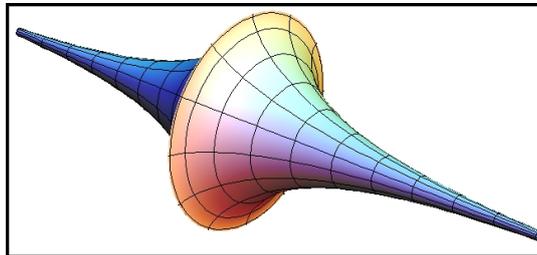
Pour $n \geq 2$, L'espace \mathbb{R}_1^n est appelé espace de Minkowski, et si $n = 4$, \mathbb{R}_1^4 est dite espace-temps de Minkowski. Les composantes de la métrique g sont données par $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_j$, c'est-à-dire :

$$g = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\epsilon_j dx_i \otimes dx_j.$$

Définition 3.1.4. Soit $n \geq 2$ et $0 \leq p \leq n$.

1. La pseudo-sphère de \mathbb{R}_p^{n+1} est définie par :

$$S_p^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\sum_{i=1}^p x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2 = 1\}.$$



2. Le pseudo-hyperbolique de \mathbb{R}_{p+1}^{n+1} est définie par :

$$\mathbb{H}_p^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 + \sum_{i=p+2}^{n+1} x_i^2 = -1\}.$$

Exemple 3.1.2. *Sur la pseudo-sphère :*

$$S_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

de \mathbb{R}_1^3 , on considère la paramétrisation :

$$\begin{cases} x_1 = \sinh \alpha \\ x_2 = \cosh \alpha \sin \beta \\ x_3 = \cosh \alpha \cos \beta. \end{cases}$$

La métrique $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ de \mathbb{R}_1^3 induit sur S_1^2 une métrique semi-Riemannienne h , soit ∂_α et ∂_β les champs de vecteurs de bases associé à cette paramétrisation, les composantes de la métrique h sont données par :

$$h_{11} = g(\partial_\alpha, \partial_\alpha) = -1, \quad h_{12} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0, \quad h_{22} = g(\partial_\beta, \partial_\beta) = \cosh^2 \alpha,$$

c'est-à-dire $h = -d\alpha^2 + \cosh^2 \alpha d\beta^2$.

Si on considère une nouvelle paramétrisation dans S_1^2

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sqrt{t^2 + 1} \cos \theta \\ x_3 = \sqrt{t^2 + 1} \sin \theta, \end{cases}$$

alors la métrique h associée à cette dernière paramétrisation est donnée par :

$$h = \frac{-1}{t^2 + 1} dt^2 + (t^2 + 1) d\theta^2$$

Exemple 3.1.3. *On considère sur la pseudo-sphère :*

$$S_1^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

de \mathbb{R}_1^4 , la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \sinh \alpha \\ x_2 = \cosh \alpha \sin \beta \\ x_3 = \cosh \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ x_4 = \cosh \alpha \cos \beta \cos \gamma. \end{cases}$$

\mathbb{R}_1^4 induit sur S_1^3 une métrique semi-Riemannienne h , donnée par :

$$h = -d\alpha^2 + \cosh^2 \alpha d\beta^2 + \cosh^2 \alpha \cos^2 \beta d\gamma^2$$

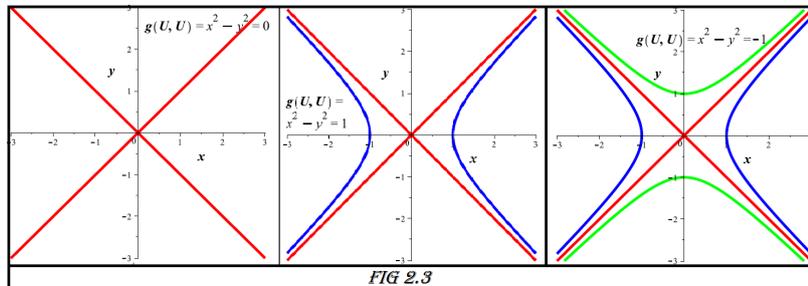
3.1.1 Variétés Lorentziennes

Définition 3.1.5. Une variété Lorentzienne est une variété différentiable M , munie d'une métrique Lorentzienne g (g est $C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique et non-dégénérée de signature $(-, +, \dots, +)$ c'est-à-dire $\text{Ind}M = 1$).

Définition 3.1.6. Un vecteur tangent v à (M, g) en p est :

1. de type espace si $g(v, v) > 0$ ou $v = 0$,
2. nul si $g(v, v) = 0$ et $v \neq 0$,
3. de type temps si $g(v, v) < 0$.

Exemple 3.1.4. Soit $R_1^2 = (R^2, g = dx^2 - dy^2)$ et soit $v = (x, y) \in T_p R_1^2 (p \in R^2)$, alors $g(v, v) = x^2 - y^2$ (le signe \pm varie)[voir fig 2.3]



Exemple 3.1.5. Soit $\mathbb{R}_1^3 = (R^3, g = -dx^2 + dy^2 + dz^2)$, et soit $v = (x, y, z) \in T_p \mathbb{R}_1^3 (p \in R^3)$, alors les vecteurs tangents de type espace, nul et type temps sont présentés comme suit :(voir fig 3.3)

$$\begin{aligned} g(v, v) = 0 &\iff -x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ &\iff x^2 = y^2 + z^2 \\ &\iff x = \pm \sqrt{y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

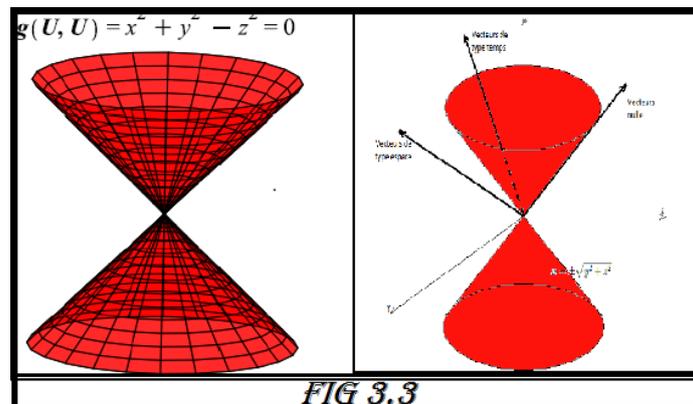


FIG 3.3

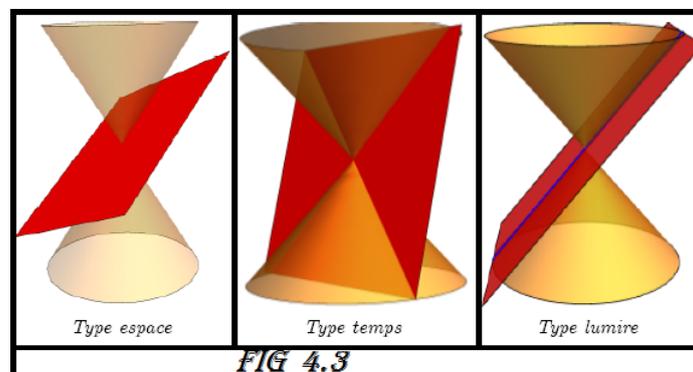


FIG 4.3

Définition 3.1.7. Une variété Lorentzienne (M, g) est dite temps-orientable s'il existe un champ de vecteurs $X \in \Gamma^1(TM)$ de type-temps, c'est-à-dire :

$$g(X_x, X_x) < 0, \forall x \in M.$$

(voir fig 4.3)

Exemples 3.1.1.

1. \mathbb{R}_1^n est une variété Lorentzienne temps-orientable, avec :

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad g = -dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2.$$

2. La pseudo-sphère S_1^n de \mathbb{R}_1^{n+1} est une variété Lorentzienne temps-orientable.

Exemple 3.1.6. Soit $M = \mathbb{R}_p^n$ avec $g = -dx_1^2 - \dots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \dots + dx_n^2$, alors :

$$g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_j, \quad \epsilon_j = \begin{cases} -1, & 1 \leq j \leq p; \\ +1, & p+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Remarquant que les fonctions g_{ij} sont constantes, d'après la définition de coefficients de Christoffel, on a $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$.

Exemple 3.1.7. L'espace euclidien $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \delta)$ où δ désigne la métrique Euclidienne

$$\delta = \delta_{ij}dx^i dx^j = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2$$

est une variété Riemannienne.

Définition 3.1.8. Soient (M, g) une variété Lorentzienne, $p \in M$ et $X \in T_p M$. Alors on dit que X est

- (1) un vecteur de type espace si $g(X, X) > 0$,
- (2) un vecteur de type temps si $g(X, X) < 0$,
- (3) un vecteur nul ou de type lumière si $g(X, X) = 0$.

3.1.2 Espace de Minkowski \mathbb{E}_1^3

Définition 3.1.9. L'espace de Lorentz-Minkowski de dimension 3 est un espace métrique $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ où la métrique \langle, \rangle est

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3, \quad u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

qui est appelé la métrique lorentzienne de dimension 3.

Nous utilisons également la terminologie de l'espace de Minkowski et la métrique de Minkowski de se référer l'espace et la métrique, respectivement. La métrique lorentzienne est une métrique non-dégénérée d'indice 1. L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 prend également en charge la métrique euclidienne, qui seront désignés par \langle, \rangle_e . On écrit l'espace euclidien à 3 dimensions $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_e)$ est un l'espace de Lorentz-Minkowski

Définition 3.1.10. Un vecteur $v \in \mathbb{E}_1^3$ est dit :

1. vecteur de type espace si $\langle v, v \rangle_1 > 0$ ou $v = 0$,

2. vecteur de type temps si $\langle v, v \rangle_1 < 0$
3. vecteur de type lumière si $\langle v, v \rangle_1 = 0$ et $v \neq 0$.

Le cône lumière de E_1^3 est l'ensemble de tous les vecteurs lumière de E_1^3

$$C = \{(x, y, z) \in E_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

L'ensemble des vecteurs de type temps est

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in E_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

Les deux composantes \mathcal{T} et C sont connexes.

Définition 3.1.11. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un sous-espace vectoriel, on a la métrique induite \langle, \rangle_U telle que

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle, u, v \in U$$

On a trois types de La métrique de U :

1. La métrique est définie positive alors U est appelé type espace.
2. La métrique a l'indice 1 alors U est dit de type temps.
3. La métrique est dégénéré alors U est appelé lumière.

Le caractère causal d'un vecteur ou un sous-espace est la propriété d'être de type espace, type lumière ou type temps. On a quelques caractérisations et propriétés de la causalité d'un sous-espace de E_1^3

Proposition 3.1.1. Soit U un sous-espace vectoriel de E_1^3 , on a

1. $\dim(U^\perp) = 3 - \dim(U)$.
2. $(U^\perp)^\perp = U$.
3. si U est non dégénéré, alors U^\perp est un sous-espace non dégénéré.
4. U est de type temps (resp. de type espace, lumière) si et seulement si U^\perp est de type espace (resp. de type temps, lumière).
5. Si v est de type temps ou de type espace alors $E_1^3 = \text{span}v \oplus \text{span}v^\perp$

En comparant avec l'espace euclidien E^3 l'existence de vecteurs lumière et type temps donnent les propriétés suivantes :

Proposition 3.1.2. *Soient $u, v \in E_1^3$, alors on a :*

1. *Si u, v deux vecteurs lumière sont linéairement indépendants si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$.*
2. *Si u et v sont deux vecteurs de type temps ou lumière avec $\langle u, v \rangle = 0$ alors ils sont des vecteurs lumière.*
3. *Si u et v sont deux vecteurs de type temps alors $\langle u, v \rangle \neq 0$.*
4. *Si U est un sous-espace lumière alors $\dim(U \cap U^\perp) = 1$.*

Proposition 3.1.3. *Soit P un plan vectoriel de E_1^3 . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *P est un sous-espace de type temps.*
2. *P contient deux vecteurs de type lumière linéairement indépendants.*
3. *P contient un vecteur de type temps.*

Proposition 3.1.4. *Soit U un sous-espace vectoriel de E_1^3 . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *U est un sous-espace lumière.*
2. *U contient un vecteur lumière mais pas un type temps*
3. *$U \cap C = L - \{0\}$ et L un sous espace vectoriel de $\dim L = 1$.*

Proposition 3.1.5. *Soit P un plan vectoriel E_1^3 . On note par \vec{n}_e le vecteur orthogonal par rapport à la métrique euclidienne. Alors P est un plan de type espace (resp. temps, lumière) si et seulement si \vec{n}_e est un type temps (resp. de type espace, lumière).*

Preuve

$$\text{Si } P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

alors \vec{n}_e est proportionnelle le vecteur (a, b, c) . On écrit P comme

$$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - (-c)z = 0 = \text{Span}(a, b, -c)^\perp$$

Le caractère causal de $(a, b, -c)$ est le même que \vec{n}_e et proposition 3.1.1 prouve le résultat.

On définit la norme (ou module) d'un vecteur

Définition 3.1.12. Soit $u \in E_1^3$, la norme de u est

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

Le vecteur u est appelé unitaire si : $\|u\| = 1$.

Proposition 3.1.6. Si $P = \text{Span } v^\perp$ est un plan de type espace, alors

$$\|v\|_e \geq \|v\|$$

Preuve

Il suffit que $\|v\| = 1$. On suppose $\vec{n}_e = (a, b, c)$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$v = \pm \frac{(a, b, -c)}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}$$

La norme euclidienne $|v|_e$ est

$$|v|_e^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{1}{c^2 - a^2 - b^2} \geq 1$$

Car $c^2 - a^2 - b^2 = 1 - 2(a^2 + b^2) \leq 1$

Définition 3.1.13. Soient $u, v \in E_1^3$ le produit vectoriel Lorentzienne de u et v est l'unique vecteur désigné par $u \times v$ qui satisfait

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) \tag{3.1}$$

où $\det(u, v, w)$ est le facteur déterminant de la matrice obtenue en plaçant des colonnes les coordonnées des trois vecteurs u, v et w par rapport à B_u .

La bilinéarité de la métrique assure l'existence et l'unicité de ce vecteur $u \times v$. En prenant 3.1 chacun des vecteurs E_i de B_u , nous obtenons l'expression de $u \times v$ en coordonnées par rapport à B_u

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Par conséquent, si on note $u \times_e v$ le produit vectoriel euclidien, alors $u \times v$ est le reflet de $u \times_e v$ par rapport au plan d'équation $z = 0$.

Définition 3.1.14. Notons que si u et v sont deux vecteurs non dégénérées, alors $B = u, v, u \times v$ est une base de E_1^3 . Mais contrairement à l'espace euclidien, le caractère causal de u et v détermine si la base est ou non orienté positivement. Exactement, si u, v sont de type espace, alors $u \times v$ est de type temps et B est orienté négativement parce que $\det(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle < 0$.

Si u et v ont un caractère causal différent, alors B est orienté positivement. La norme de u dans E_1^3 est noté par $\|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Les vecteurs u et v sont orthogonaux si $\langle u, v \rangle_1 = 0$.

3.1.3 Courbes dans l'espace de Minkowski

Dans cette partie, nous développons la théorie du trièdre de Frenet pour les courbes en E_1^3 . Une courbe (lisse) est une application différentiable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ où I est un intervalle ouvert. Nous disons aussi que α est une courbe paramétrée. Une courbe est dite régulière si $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Théorie locale des courbes

Soit $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ une courbe régulière. Si $t \in I$, l'espace tangent $T_t I$ s'identifie avec \mathbb{R} et la carte différentielle $(d\alpha)_t : T_t I \cong \mathbb{R} \rightarrow T_{\alpha(t)} E_1^3 \cong \mathbb{R}^3$ est

$$(d\alpha)_t(s) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \alpha(t + su) = s \cdot \alpha'(t).$$

Ainsi la carte linéaire $(d\alpha)_t$ est une homothétie de \mathbb{R} à \mathbb{R}^3 donnée par $t \rightarrow s \cdot \alpha'(t)$. Ici nous identifions $(d\alpha)_t$ par $\alpha'(t)$, ou en d'autres termes, si $\partial/\partial t$ est le vecteur tangent unitaire sur $T_t I$, alors

$$(d\alpha)_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \alpha'(t).$$

Nous dotons maintenant \mathbb{R}^3 de la métrique lorentzienne \langle, \rangle . Sur I nous considérons la métrique induite de E_1^3 par la carte α qui convertit

$$\alpha : (I, \alpha^*\langle, \rangle) \rightarrow E_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$$

ou si nous prenons la base $\partial/\partial t$ dans $T_t I$,

$$\alpha^*\langle, \rangle_t\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle.$$

Pour classer la variété $(I, \alpha^*\langle, \rangle)$ et comme I est une variété unidimensionnelle, nous devons connaître le signe de $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$. Ainsi

1. si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle > 0$, $(I, \alpha^*\langle, \rangle)$ est une variété riemannienne.
2. si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle < 0$, $(I, \alpha^*\langle, \rangle)$ est une variété lorentzienne, c'est-à-dire que la métrique induite est non dégénérée avec l'indice 1.
3. si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, $(I, \alpha^*\langle, \rangle)$ est une variété dégénérée. Cette classification justifie la définition suivante.

Définition 3.1.15. Une courbe α dans E_1^3 est dite de type espace (resp. type temps, lumière) en t si $\alpha'(t)$ est un vecteur de type espace (resp. type temps, lumière). La courbe α est de type espace (resp. type temps, lumière) si elle est de type espace (resp. type temps, lumière) pour tout $t \in I$.

En particulier, une courbe de type temps ou lumière est régulière. Nous rappelons qu'une courbe en E_1^3 peut ne pas être de l'un des types ci-dessus. Cependant, la condition de type espace (ou type temps) est une propriété ouverte, c'est-à-dire que si α est de type espace (ou type temps) si à $t_0 \in I$, il existe un intervalle $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ autour de t_0 où α est de type espace (ou type temps) : si à $t_0 \in I$ on a $\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle \neq 0$, la continuité assure l'existence d'un intervalle autour de t_0 où $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$ a le même signe qu'à $t = t_0$.

Exemple 3.1.8. 1/nous considérons la courbe

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3, \alpha(t) = (\cosh(t), \frac{t^2}{2}, \sinh(t))$$

avec

$$\alpha'(t) = (\sinh(t), t, \cosh(t))$$

α est une courbe régulière et $\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = t^2 - 1$ la courbe de type temps dans l'intervalle $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, est de type espace dans l'intervalle $(-1, 1)$ et lumière sur $\{-1, 1\}$,

Exemples 3.1.2.

2/Considérons des courbes planes, c'est-à-dire des courbes incluses dans un plan affine de \mathbb{R}^3 et nous étudions son caractère causal :

a/ La droite $\alpha(t) = p + tv, p, v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$. Cette courbe a le même caractère causal que le vecteur v .

b/ Le cercle $\alpha(t) = r(\cos t, \sin t, 0)$ est une courbe de type espace incluse dans un plan de type espace de l'équation $z = 0$.

c/ L'hyperbole $\alpha(t) = r(0, \sin ht, \cos ht)$ est une courbe de type espace dans un plan de type temps de l'équation $x = 0$.

d/ L'hyperbole $\alpha(t) = r(0, \cos ht, \sin ht)$ est une courbe de type temps dans un plan de type temps de l'équation $x = 0$.

e/ La parabole $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ est une courbe de type espace du plan lumière de l'équation. $y - z = 0$

Exemples 3.1.3. 3/On considère les courbes spatiales.

a/ L'hélice $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, ht), h \neq 0$, de rayon $r > 0$ et de pas $2\pi h$. Cette courbe est incluse dans le cylindre de l'équation $x^2 + y^2 = r^2$. Si $r^2 > h^2$ (resp. $r^2 - h^2 < 0, r^2 = h^2$), α est une courbe de type espace (resp. de type temps, lumière).

b/ Soit $\alpha(t) = (ht, r \sinh t, r \cosh t), h \neq 0, r > 0$. cette courbe est de type espace et incluse dans le hyperbolique cylinder de l'équation $y^2 - z^2 = -r^2$.

c/ Soit $\alpha(t) = (ht, r \cosh t, r \sinh t), h \neq 0, r > 0$. Ici si $h^2 - r^2 > 0$ (resp. $< 0, = 0$), est une courbe de type espace (resp. de type temps, lumière). De plus, la courbe α est incluse dans l'hyperbolique cylinder de l'équation $y^2 - z^2 = r^2$

3.2 Variété de Walker

Dans ce section, nous donnons la définition d'une variété de Walker et d'une variété stricte de Walker. Ensuite, nous étudions leurs connexions et leurs tenseurs de courbure. Soit M une variété semi-Riemannienne et $T(M) = V_1 \oplus V_2$ où V_1 et V_2 sont des sous-groupes lisses, appelés distributions. Ceci définit deux projections complémentaires π_1 et π_2 de $T(M)$ sur V_1 et V_2 . On dit que V_1 est une distribution parallèle si $\nabla\pi_1 = 0$. De manière équivalente, cela signifie que si X_1 est un champ de vecteur lisse prenant des valeurs dans V_1 , alors ∇X_1 prend également des valeurs dans V_1 . Dans le cadre de Riemann, nous pouvons prendre $V_2 = V_1^\perp$ pour être le complément orthogonal de V_1 et ensuite V_2 est à nouveau parallèle. Si M est semi-riemannien, alors $V_1 \cap V_2$ n'est pas forcément trivial. On dit que V_1 est une distribution parallèle nulle si V_1 est parallèle et si la métrique induite sur V_1 s'annule identiquement. Une variété est appelée une variété de Walker si elle admet une distribution parallèle nulle et elle est appelée une variété strictement Walker si cette distribution est engendrée par un vecteur nul [16, 21].

Définition 3.2.1. Une Variété de Walker de dimension 3, (M, g_f) est une variété Lorentzienne de dimension 3 admettant un champ de ligne parallèle dégénéré avec les coordonnées locales (x, y, z) où le tenseur métrique est exprimé

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \text{avec l'inverse} \quad g_f^{-1} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour certaines fonctions différentiables $f(x, y, z)$ définies sur la variété M et $\epsilon = \pm 1$. Tout au long de ce travail nous prendrons $\epsilon = -1$. Notez que la variété de Walker (M, g_f) a la signature $(2, 1)$ si $\epsilon = 1$ et $(1, 2)$ si $\epsilon = -1$ et est Lorentzienne dans les deux cas. Dans ce manuscrit M est supposé être une variété de Walker en trois dimensions.

3.2.1 Produit vectoriel

Nous avons défini le produit vectoriel lorentzien. Nous allons maintenant définir le produit vectoriel pour le cas particulier, c'est-à-dire que la métrique est une métrique

de Walker g_f . Soient $u, v \in M$. Le produit vectoriel de u et v , $u \times v$, est le vecteur unique satisfaisant

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.1.1)$$

où $w \in E_1, E_2, E_3$. Nous obtenons le vecteur de produit comme :

$$u \times v = (u_1v_2 - u_2v_1 - (u_2v_3 - u_3v_2)f, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_3 - u_3v_2). \quad (3.1.2)$$

Maintenant, nous pouvons construire un cadre orthonormé sur (M, g_f) .

soit $u = (0, 1, 0)$ et $v = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{|f|}})$. Alors $u \times v = (-\sqrt{f}, 0, \frac{1}{\sqrt{f}})$.

3.2.2 Connexions de Levi-Civita

Proposition 3.2.1. *Nous pouvons calculer les symboles de Christoffel en utilisant la formule suivante :*

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (3.2)$$

Où

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (1 \leq i, j < n) \quad (3.3)$$

et nous trouvons les symboles de Christoffel non-zéro possibles d'une métrique de Walker g_f comme suit,

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}f_x, \\ \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}f_y, \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}(f_z + f f_x), \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}f_y, \\ \Gamma_{33}^3 &= -\frac{1}{2}f_x.\end{aligned}$$

Preuve

En utilisant 3.2, nous établissons les symboles de Christoffel comme suit.

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{1l} \left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{13} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial z} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{1l} \left(\frac{\partial g_{3l}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x} + \frac{\partial g_{11}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{13} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x} + \frac{\partial g_{13}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} f_x.\end{aligned}$$

De même, nous pouvons calculer tous les composants Γ_{jk}^i des symboles de Christoffel et trouver comme indiqué ci-dessus. Maintenant, comme nous connaissons les symboles de Christoffel, nous pouvons calculer les composants de la connexion Levi-Civita.

Théorème 3.2.1. *Les composantes non nulles possibles de la connexion Levi-Civita de toute métrique g_f sont :*

$$\nabla_{\partial_x} \partial_z = \frac{1}{2} f_x \partial_x$$

$$\nabla_{\partial_y} \partial_z = \frac{1}{2} f_y \partial_x$$

$$\nabla_{\partial_z} \partial_z = \frac{1}{2} (f f_x + f_z) \partial_x + \frac{1}{2} f_y \partial_y - \frac{1}{2} f_x \partial_z.$$

Preuve

Après un calcul simple en utilisant 3.3 et la proposition (3.2.1),

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} \partial_x &= \sum_k \Gamma_{11}^k \partial_k \\ &= \Gamma_{11}^1 \partial_x + \Gamma_{11}^2 \partial_y + \Gamma_{11}^3 \partial_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} \partial_z &= \sum_k \Gamma_{13}^k \partial_k \\ &= \Gamma_{13}^1 \partial_x + \Gamma_{13}^2 \partial_y + \Gamma_{13}^3 \partial_z \\ &= \frac{1}{2} f_x \partial_x. \end{aligned}$$

De même, nous pouvons trouver tous les composants $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ de la connexion Levi-Civita de g_f comme indiqué ci-dessus .

3.2.3 Géodésique sur les Variétés de Walker

Remarque 3.2.1. Dans ce qui suit, nous discuterons les courbes géodésiques d'une 3-variété de Walker en mettant l'accent sur les courbes à composante constante ou linéaire .

Rappelons qu'une courbe γ dans M est dite de type temps(respectivement type espace, type lumière) à t si $\gamma'(t)$ est un vecteur de type temps (respectivement de type espace, de type lumière) pour tous $t \in I$. [5]

Exemple 3.2.1. Considérez les courbes de plan dans (M, g_f) , L'hyperbole $\gamma(t) = r(\cosh t, \sinh t, 0)$ est un courbe de type temps, trouvant dans le plan de la lumière défini par $z = 0$.

Preuve

Soit $\gamma'(t) = r(\sinh t, \cosh t, 0)$.

Nous calculons :

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle r \sinh t \partial x + r \cosh t \partial y, r \sinh t \partial x + r \cosh t \partial y \rangle = r^2 \sinh^2 t \langle \partial x, \partial x \rangle + r^2 \sinh t \cosh t \langle \partial x, \partial y \rangle + r^2 \cosh t \sinh t \langle \partial y, \partial x \rangle + r^2 \cosh^2 t \langle \partial y, \partial y \rangle$$
 Avec

$$\begin{cases} g(\partial x, \partial x) = 2dx(\partial x)dz(\partial x) - dy(\partial x)dy(\partial x) + fdz(\partial x)dz(\partial x) = 0 \\ g(\partial x, \partial y) = 2dx(\partial x)dz(\partial y) - dy(\partial x)dy(\partial y) + fdz(\partial x)dz(\partial y) = 0 \\ g(\partial y, \partial x) = 2dx(\partial y)dz(\partial x) - dy(\partial y)dy(\partial x) + fdz(\partial y)dz(\partial x) = 0 \\ g(\partial y, \partial y) = -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = -r^2 \cosh^2 t$$

Ce qui est négatif pour tout $t \in R$. Par conséquent, l'hyperbole γ est de type temps. La métrique induite sur le plan $z = 0$ est $g_f|_{z=0} = -y$, donc elle est dégénérée. Par conséquent, le plan représenté par $z = 0$ est un plan de type lumière et la courbe γ se trouve là-dessus

La géométrie euclidienne n'a pas de courbure et donc une ligne droite est le plus court chemin entre deux points de la géométrie euclidienne. Cependant, en Relativité Générale, l'espace est courbé par la masse. Une géodésique est la notion de droite

à l'espace courbe, de sorte qu'une géodésique est (localement) le plus court chemin entre les points de l'espace.

Rappelons qu'une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ sur une variété semi-Riemannienne M est appelée géodésique si $\gamma'(t) = \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) = 0$.

Corollaire 3.2.1. *Soit $\gamma(t)$ être une courbe définie sur $U \subset M$ avec les fonctions de coordonnées $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$. γ est une géodésique de M si et seulement si ses fonctions de coordonnées γ_k satisfont*

$$\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} = 0$$

pour $k = 1, 2, 3$. Il s'ensuit que les équations géodésiques d'une variété tridimensionnelle de **Walker** (M, g_f) sont

1. $\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + f_x \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + f_y \frac{d\gamma_2}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + \frac{1}{2}(ff_x + f_z) \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
2. $\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \frac{1}{2}f_y \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
3. $\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \frac{1}{2}f_x \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
4. $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \begin{cases} < 0, & \gamma \text{ est de type temps} \\ 0, & \gamma \text{ est de type lumière} \\ > 0, & \gamma \text{ est de type espace} \end{cases}$

Pour un f arbitraire,

(i) Si nous avons une courbe avec γ_1 constante, la courbe $\gamma(t) = (c, \gamma_2, \gamma_3)$ satisfait aux équations suivantes : γ est une géodésique sur M

1. $f_y \frac{d\gamma_2}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + \frac{1}{2}(ff_x + f_z) \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
2. $\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \frac{1}{2}f_y \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
3. $\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \frac{1}{2}f_x \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$

$$4. \langle \gamma', \gamma' \rangle = -\left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + f \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = \begin{cases} < 0, & \gamma \text{ est de type temps} \\ 0, & \gamma \text{ est de type lumière} \\ > 0, & \gamma \text{ est de type espace} \end{cases}$$

(ii) Si nous avons une courbe avec γ_2 constante, la courbe $\gamma(t) = (\gamma_1, c, \gamma_3)$ satisfait aux équations suivantes : γ est une géodésique sur M

1. $\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + f_x \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + \frac{1}{2}(f f_x + f_z) \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
2. $\frac{1}{2} f_y \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
3. $\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \frac{1}{2} f_x \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0,$
4. $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 2 \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + f \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = \begin{cases} < 0, & \gamma \text{ est de type temps} \\ 0, & \gamma \text{ est de type lumière} \\ > 0, & \gamma \text{ est de type espace} \end{cases}$

Notez que, si $\frac{d\gamma_3}{dt} \neq 0$, alors il résulte de (2) que $f_y = 0$ et ainsi $f = f(x, z)$.

(iii) Si nous avons une courbe avec γ_3 constante, la courbe $\gamma(t)$ satisfait aux équations suivantes : γ est une géodésique sur M

1. $\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} = 0,$
2. $\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} = 0,$
3. $\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = 0.$

la courbe est de la forme : $\gamma = (\alpha_1 t + \alpha_2, b_1 t + b_2, c)$.

4. $\langle \gamma', \gamma' \rangle = -b_1^2 = \begin{cases} < 0, & \gamma \text{ est de type temps} \\ 0, & \gamma \text{ est de type lumière} \end{cases}$

$\gamma(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2, b_1 t + b_2, c)$ est une géodésique de type temps $b_1 \neq 0$. si

$b_1 = 0$, $\gamma(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2, b_2, c)$ est une géodésique de type lumière dans M .

Corollaire 3.2.2. *Toute droite $\gamma(t) = p + tv$ avec $p, v \in M$ et $v = (v_1, v_2, 0)$ est une géodésique dans la variété (M, g_f) avec un f arbitraire et son caractère causal est le même que v .*

Preuve

Soit $\gamma(t) = p + tv$ et $v = (v_1, v_2, 0)$.

$$\gamma' = v = (v_1, v_2, 0).$$

Donc γ a le même caractère causal que v . De plus, $\gamma(t)$ vérifie les équations géodésiques pour tout f .

Corollaire 3.2.3. *Soit (M, g_f) une variété de **Walker**. S'il existe une courbe géodésique de la forme $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), c_1t + c_2)$ dans M où $c_1 \neq 0$, alors M est strictement une variété de **Walker**. De plus, si γ_2 est également linéaire par rapport à t , alors $f = f(z)$.*

Preuve

Soit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), c_1t + c_2)$ soit une géodésique dans M , où $c_1 \neq 0$. Alors γ vérifie les équations géodésiques :

$$\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + c_1 f_x \frac{d\gamma_1}{dt} + c_1 f_y \frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{1}{2} c_1^2 (f f_x + f_z) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \frac{1}{2} c_1^2 f_y = 0 \quad (3.5)$$

$$- \frac{1}{2} c_1^2 f_x = 0 \quad (3.6)$$

Puisque $c_1 \neq 0$, $f_x = 0$ suivi de 3.6. Ainsi, $f = f(y, z)$, c'est-à-dire que M est strictement une variété de **Walker**.

Pour la seconde partie, soit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), b_1t + b_2, c_1t + c_2)$. Alors $\gamma' = (\gamma_1'(t), b_1, c_1)$ et les équations géodésiques deviennent :

$$\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + c_1 f_x \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{1}{2} c_1^2 (f f_x + f_z) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2} c_1^2 f_y = 0 \quad (3.8)$$

$$- \frac{1}{2} c_1^2 f_x = 0 \quad (3.9)$$

Il résulte de 3.8 et 3.9 que ; $f_x = f_y = 0$. Donc $f = f(z)$.

Pour la troisième partie, soit $\gamma(t) = (a_1t + a_2, b_1t + b_2, c_1t + c_2)$. Alors $\gamma' = (a_1, b_1, c_1)$ et les équations géodésiques deviennent :

$$c_1 f_x a_1 + \frac{1}{2} c_1^2 (f f_x + f_z) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{2} c_1^2 f_y = 0 \quad (3.11)$$

$$-\frac{1}{2} c_1^2 f_x = 0 \quad (3.12)$$

Il résulte de 3.10, 3.11 et 3.12 que ; $f_x = f_y = f_z = 0$. Donc $f = 0$.

Conclusion

- 1/ Toute droite avec une troisième composante constante est une géodésique sur une variété de Walker dont la causalité dépend de sa seconde composante.
- 2/ L'existence d'une géodésique dans une variété de Walker avec une troisième composante linéaire implique que la variété est stricte.

Perspective

Etude des équations de surfaces minimales sur les variétés de Walker en trois dimensions, avec un intérêt particulier sur les surfaces qui sont représentées par le graphe d'une fonction lisse.

Bibliographie

- [1] A. M. Cherif Géométrie semi-Riemannienne Cours M2 – 2015, Université de Mascara. [http://www.cu-relizane.dz/ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif Polyco-pierFinal.pdf](http://www.cu-relizane.dz/ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif%20Polyco-pierFinal.pdf)
- [2] A. G. Walker, "Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 1, no. 1, pp. 69, 79, 1950.
- [3] B. O'Neill, "Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1983.
- [4] CNAM UE MVA210Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle ; Cours 12 ; Initiation à la géométrie Riemannienne 1 et 2. <http://maths.cnam.fr/IMG/pdf/tenseurcr12.pdf>.
- [5] E. Aubry, Introduction à la géométrie Riemannienne 2008. <https://math.unice.fr/eau-bry/Enseignement/M2/CoursM2.pdf>.
- [6] Erzana Berani, Minimal surfaces on three-dimensional Walker manifolds, June 2017. <http://repository.bilkent.edu.tr/bitstream/handle/11693/33360/thesis.pdf?sequence=1>.
- [7] E. Garcia-Rio, A. H. Badali, and R. Vazquez-Lorenzo, "Lorentzian three manifolds with special curvature operators, Classical and Quantum Gravity, vol. 25, no. 1, p. 015003, 2008.
- [8] J. Beem, P. Ehrlich, and K. Easley, "Global Lorentzian geometry, second edition," Chapman et Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, Taylor et Francis, 1996.
- [9] Jean Feydy, Introduction à la Géométrie Riemannienne par l'étude des Espaces de Formes. http://www.math.ens.fr/feydy/Teaching/geometrie_riemannienne_espaces_de_formes.pdf.

- [10] G. Calvaruso et B. De Leo, "Ricci solitons on Lorentzian Walker three manifolds, *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 132, no. 3, pp. 269,293, 2010.
- [11] G. Calvaruso et J. V. der Veken, "Parallel surfaces in Lorentzian threemanifolds admitting a parallel null vector field, *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 32, p. 325207, 2010.
- [12] L. Godinho and J. Natário, "An introduction to Riemannian geometry : with applications to mechanics and relativity, *Universitext*, Springer International Publishing, 2014.
- [13] Loring W. Tu, *An Introduction to Manifolds(Second Edition)* .<http://im0.p.lodz.pl/~kubarski/AnalizaIV/Wyklady/L-Tu-1441973990.pdf>.
- [14] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, et R. Vázquez-Lorenzo, "The geometry of Walker Manifolds, *Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics*, vol. 2, pp. 1,179, jan 2009.
- [15] M. Chaichi, E. Garcia-Rio, et M. E. Vazquez-Abal, "Three-dimensional Lorentz manifolds admitting a parallel null vector field, *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 38, no. 4, p. 841, 2005.33.
- [16] M. Nadja khah et M. Jafari, "Some general new Einstein **Walker** manifolds" *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2013, no. 3, p. 8, 2013.
- [17] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*.[http://www.math.uni.lodz.pl/maczar/ggk/doCarmo,Diferential Geometry of Curvesand Surfaces.pdf](http://www.math.uni.lodz.pl/maczar/ggk/doCarmo,Diferential%20Geometry%20of%20Curves%20and%20Surfaces.pdf).
- [18] M. P. do Carmo, "Differential geometry of curves and surfaces, *PrenticeHall*, 1976.
- [19] M. Djaa, *Introduction à la géométrie Riemannienne et l'Analyse Harmonique, Géométrie Différentielle Master M1 et M2*, Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane. file :<:///C:/Users/hamou-math/Documents/geodesic-Bakrou/PolycopeMasterHarmonic1-2.pdf>
- [20] M. Nadja khah et M. Jafari, "Some general new Einstein Walker manifolds, " *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2013, no. 3, p. 8, 2013.

-
- [21] R. Lopez, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, International Electronic Journal of Geometry, vol. 7, pp. 44,107, 2014
- [22] Sigmundur Gudmundsson, An Introduction to Riemannian Geometry, Lund University. <http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/Riemann.pdf>.
- [23] Sabrina Walker, Lorentzian Geometries on Lie Algebras, Longwood University, December 7, 2016. <https://fr.slideshare.net/LU-OSR/lorentzian-geometries-on-lie-algebras-sabrina-c-walker>.
- [24] Thierry Masson Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions. <http://science.thilucmic.fr/TELECHARGEMENTS/LECTURES/coursgeodiff-2x1.pdf>.
- [25] Yger A., Henaut A, Elements de géométrie Niveau M1-Ellipses Marketing (2004).