



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ. : 2017/2018

# Géométrie et biharmonicité sur l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu de dimension 3

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

**Mahamed Beghdadi<sup>1</sup>**

Sous la direction de

**Pr F. Hathout**

Soutenu le 19/06/2018 devant le jury composé de

<b>Pr G. Djellouli</b>	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Président
<b>Pr F. Hathout</b>	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Encadreur
<b>Dr A. Azzouz</b>	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Examineur
<b>Dr H.M. Dida</b>	Université de Saida - Dr Moulay Tahar	Examineur

---

1. e-mail : mahamedbeghdadi32@gmail.com

# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur, monsieur Dr. HATHOUT Fouzi, pour sa patience, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance durant la réalisation de ce travail.

Je remercie également les membres de jury :

- Djellouli Ghaouti : président
- Azzouz Abdelhalim : examinateur
- Dida Hamou Mohamed : examinateur

D'avoir accepter de lire et d'évaluer ce travail.

Un grand merci adressé au personnel et aux enseignants du département de mathématique.

Comme je remercie ceux qui m'aident de proche ou de loin à concrétisé ce travail.

# Dédicace

Rien n'est plus dur pour tout étudiant que de trouver là où je suis.

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui m'ont donnée la possibilité de poursuivre mes études, pour leurs guides affectueux, pour l'espoir qu'ils me donnent, pour les conseils dans la vie et leurs soutiens durant mes années d'études avec patience, courage et j'espère que je puisse leurs rende le maximum de bonheur qu'ils m'ont offert et que dieu

les bénisse.

A mes sœurs.

A mes frères.

A mes cousins et cousines.

A tous mes amis ainsi qu'à tous mes camarades.

A tous mes chers professeurs durant toutes mes années d'études.

Finalement, à tous ceux qui me sont chères, qu'ils trouvent ici l'expression de mon

Profond respect et ma gratitude.

A tous ce qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce mémoire.

# Table des matières

Introduction . . . . .	3
<b>1 Variété différentiable</b>	<b>5</b>
1.1 Espace et fibré tangent . . . . .	6
1.2 Espace tangent . . . . .	6
1.2.1 Fibré tangent . . . . .	9
1.2.2 Champ de vecteurs . . . . .	9
1.2.3 Crochet de Lie . . . . .	10
<b>2 Courbes paramétrées en dimension 3</b>	<b>12</b>
2.1 Courbes paramétrées . . . . .	12
2.1.1 Courbure . . . . .	15
2.1.2 Torsion . . . . .	16
2.1.3 Courbes particulière (hélice) dans $\mathbb{E}^3$ . . . . .	19
<b>3 Structure Riemannienne de l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu <math>\mathbb{M}_{bcv}^3</math></b>	<b>21</b>
3.1 Espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . . . . .	21
3.2 Connexion . . . . .	24
3.3 Tenseur de courbure . . . . .	26
<b>4 Harmonicité et biharmonicité</b>	<b>29</b>
4.1 Applications harmoniques et biharmoniques . . . . .	29
4.2 Cas des courbes . . . . .	30
4.2.1 Courbes harmoniques . . . . .	31
4.2.2 Courbes biharmoniques . . . . .	31
4.3 Courbes biharmoniques dans $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$ . . . . .	33

4.3.1	Cas d'une courbe hélice . . . . .	35
4.3.2	Courbes hélices biharmoniques dans $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$ . . . . .	35
4.4	Formules explicites des courbes biharmoniques dans $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . . . . .	37
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
	<b>Perspective</b>	<b>49</b>

# Introduction

En 1964, Eelles et Sampson ont défini la notion générale des applications biharmoniques comme une généralisation naturelle des applications harmoniques. Il est évident qu'une application harmonique est une application biharmonique. Par conséquent, l'objectif est de trouver et classer les applications biharmoniques propres, c'est-à-dire les applications biharmoniques non-harmoniques qu'elles sont appelées applications biharmoniques propres.

Comme les courbes sont un cas particulier des applications dans une variété, on focalise notre travail a déterminé les courbes biharmoniques propres dans un espace particulier de variété appelé l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu en dimension 3.

L'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu est un sous espace de  $\mathbb{R}^3$  définit par

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{bcv}^3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{-1}{m} \text{ avec } m \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F = m(x^2 + y^2) + 1 \leq 0 \text{ avec } m \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Il coïncide avec les espaces suivantes suivant les valeurs des constantes  $l$  et  $m$ , qu'on peut les déterminés par :

- Le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_3$  : si  $m = 0$  et  $l \neq 0$  muni de la métrique invariante gauche sur le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_3$ .

- L'espace spécial linéaire complexe  $SU(2)$  : si  $l \neq 0$  et  $m > 0$ ,  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  est localement  $SU(2)$ .
- L'espace spécial linéaire  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  : si  $l \neq 0$  et  $m < 0$ ,  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  est localement  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ .

Notre objectif dans ce travail est d'étudier les propriétés de biharmonicité des courbes et donné leurs formes explicites dans l'espace  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ .

D'autre part, il existe plusieurs résultats de classification sur les courbes biharmoniques dans les variétés riemanniennes. Les courbes biharmoniques du L'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu sont étudiées par Caddeo et Al, qu'ils ont montré que les courbes biharmoniques dans L'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu sont des hélices, c'est-à-dire des courbes avec le quotient de la torsion  $\tau$  par la courbure  $\kappa$  est constant.

Notre mémoire se compose de cequi suit :

Le premier chapitre : On donne quelque définitions et des notions de base (variété différentiable, espace et fibré tangent, champs de vecteurs... ).

Au deuxième chapitre : On définit quelques outils fondamentaux des courbes paramétrées en dimension 3.

Dans le troisième chapitre : On va interpréter l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu de dimension 3 muni d'une structure riemannienne (i.e. nous permet de trouver les formules générales de connexion associée à la métrique riemannienne et le tenseur de courbure de l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu).

Finalement, au quatrième chapitre, on introduit la notion des applications harmoniques et biharmoniques qui sont le but de ce travail, dont On fait un rappel sur les applications harmoniques et biharmoniques dans les variétés riemanniennes et comme cas particulier, on définit les courbes harmoniques et biharmoniques dans des espaces particuliers notamment l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . On caractérise les courbes biharmoniques non géodésiques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . En suite, On démontre que l'ensemble des courbes biharmoniques est inclu dans l'ensemble des courbes hélices dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . A la fin, on donne la forme explicite des courbes biharmoniques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ .

**Notation :** On travail dans la classe  $\mathcal{C}^\infty$ , c'est à dire les variétés, les métriques, les connexions, les cartes seront supposés être lisses.

# Chapitre 1

## Variété différentiable

**Définition 1.1** Soit  $M$  un espace topologique séparé, une carte de  $M$  est le couple  $(U, \phi)$ , où  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $\phi(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$\phi : U \rightarrow \phi(U) \quad \text{est un homéomorphisme.}$$

$n$  est la dimension de  $M$ .

**Définition 1.2** Deux cartes  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  sont dite compatibles si :

$$U \cap V \neq \emptyset \text{ où } \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Sur  $U \cap V$ , les deux systèmes de coordonnées s'écrivent

$$\phi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, \dots, y^n) \rightarrow (x^1 = f^1(y), \dots, x^n = f^n(y))$$

et

$$\psi \circ \phi^{-1} : x = (x^1, \dots, x^n) \rightarrow y = (g^1(x), \dots, g^n(x))$$

**Définition 1.3** Un Atlas  $\mathcal{U}$  de  $M$  est une famille de carte  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  tel que :

- 1)  $M = \cup_{i \in I} U_i$
- 2) Toutes les cartes ont la même dimension  $n$ .
- 3) Toutes les cartes sont compatibles entre eux.

**Définition 1.4** On dit que  $M$  est une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) si  
 1/-  $M$  est une variété topologique ,  
 2/- Il existe un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $M$  tel que pour tous  $i, j$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe  $\mathcal{C}^r$ . On dit alors que l'atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  est de classe  $\mathcal{C}^r$ .  
 $M$  est dite différentiable si  $M$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

## 1.1 Espace et fibré tangent

## 1.2 Espace tangent

Soit  $M$  une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Définition 1.5** On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ ,

$$H(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

pour  $p \in M$ , on définit sur  $H(M)$  une relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } p \in U, \text{ tel que } f|_U = g|_U$$

On note  $\mathcal{C}_p^\infty(M) = H(M) / \sim$  l'ensemble des classes d'équivalences dans  $H(M)$  pour cette relation.

**Définition 1.6** Une dérivation  $v$  est une application linéaire

$$v : \mathcal{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  dans un voisinage de  $m \in \mathbb{R}^n$  et soit  $v \in \mathbb{R}^n$  un vecteur on leur associe la dérivée de  $f$  selon  $v$  en  $m$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(m + tv) - f(m)}{t} = v(f)$$

en coordonnées locales :

$$v(f) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(m)$$

On peut voir l'action de  $v$  comme étant une fonctionnelle (que l'on note encore  $v$ ) de  $f$ , qui vérifie les propriétés de linéarité et de Leibniz :

$$\begin{aligned}v(\lambda f + \mu g) &= \lambda v(f) + \mu v(g) \\v(fg) &= f(m)v(g) + g(m)v(f)\end{aligned}$$

**Définition 1.7** L'espace tangent en  $p$  à  $M$  est l'espace vectoriel des dérivations sur  $C_p^\infty(M)$  noté  $T_p M$

Puisqu'on a un espace vectoriel de dimension fini, il faut déterminé une base.

Soient  $(x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées au voisinage de  $p$ . Une base de  $T_p M$  est donnée par les  $n$  dérivations  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , dont les courbes associées sont les  $\gamma_i$  définies par

$$x^j(\gamma_i(t)) = 0$$

pour  $j \neq i$  et

$$x^i(\gamma_i(t)) = t$$

En particulier, la dimension de  $T_p M$  en tant qu'espace vectoriel est la dimension de  $M$  en tant que variété. Donc tout vecteur  $X(p) \in T_p M$  s'écrit

$$X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

où les  $X^i(p)$  sont des réels.

Cette écriture a l'avantage de suggérer que  $X(p)$  est un vecteur puisqu'il a  $n$  composantes  $(X^1(p), \dots, X^n(p))$ , et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe  $\gamma$  définit ce vecteur, avec bien sûr  $\gamma(0) = p$  alors on a

$$X^i(p) = \left( \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \right)_{t=0}$$

On utilise cette relation, qu'on écrit  $\dot{\gamma}(0) = X(p)$ .

On considère l'effet d'un changement de coordonnées sur les  $n$  nombres  $X^i(p)$  : si on passe des coordonnées  $(x^i)$  aux coordonnées  $(y^j(x^i))$ , alors si

$$X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^i(p) \frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

On a

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) X^i(p)$$

**Proposition 1.8** *L'espace tangent  $T_p M$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  et l'ensemble  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p / i = 1, \dots, n\}$  forme une base de  $T_p M$  en coordonnées locales .*

**Exemple 1.9** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  une courbe sur la sphère unité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = X$ . La courbe satisfait  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$ , alors*

$$\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

*Donc,  $\langle p, X \rangle = 0$ , (i.e) tout vecteur  $X \in T_p \mathbb{S}^n$  est orthogonal à  $p$ . D'autre part, si  $X \neq 0$  tel que  $\langle p, X \rangle = 0$ , alors  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  avec*

$$\gamma : t \rightarrow \cos(t|X|) \cdot p + \sin(t|X|) \cdot \frac{X}{|X|}$$

*est une courbe sur  $\mathbb{S}^n$  avec  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = X$  . par conséquent,*

$$T_p \mathbb{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} / \langle p, X \rangle = 0\}$$

En chaque  $p \in M$ , on définit l'espace tangent .On a alors de considérer une application qui associe à tout point  $p \in M$  un vecteur dans  $T_p M$ . C'est la notion de champ de vecteurs.

## 1.2.1 Fibré tangent

**Définition 1.10** *Le fibré tangent à une variété  $M$  est défini par*

$$TM = \cup_{p \in M} T_p M$$

*et la projection*

$$\begin{aligned} \pi & : TM \rightarrow M \\ V_P & \rightarrow \pi(V_P) = P \end{aligned}$$

*la projection canonique de  $TM$  sur  $M$ .*

On remarque que les ouverts des cartes de  $TM$ , définies ci-dessus, sont les ouverts  $\pi^{-1}(U) \subset TM$ . Alors  $TM$  est une variété différentiable. Un élément de  $TM$  est un couple  $(p, X(p))$  avec  $p \in M$  et  $X(p) \in T_p M$ .

On cherche des coordonnées sur  $TM$ . Soit  $(U, \phi)$  une carte locale sur  $M$ , de coordonnées  $(x^i)$  : Pour  $p \in U$ , et  $X(p) \in T_p M$ , on prend comme coordonnées du couples  $(p, X(p))$  les réels  $(x^1(p), \dots, x^n(p), X^1(p, x), \dots, X^n(p, x))$  où on décompose  $X(p)$  selon  $X(p) = X^i(p, X) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_p M$ . On a donc  $2n$  coordonnées pour caractériser un élément de  $TM$ , cette variété topologique est de dimension  $2n$ .

## 1.2.2 Champ de vecteurs

Champ de vecteurs différentiable (ou champ de vecteurs) sur  $M$  est une application différentiable

$$X : M \rightarrow TM$$

qui, à un point  $p \in M$ , associe un couple formé de  $p$  et d'un vecteur tangent à  $M$  en  $p : (p, X_p)$ . Autrement dit,  $\pi \circ X = Id_M$ . On notera  $H(M)$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur  $M$ .

De même qu'un vecteur tangent en  $p$  définit une dérivation sur l'ensemble des germes  $\mathcal{C}^\infty(p)$ , un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble  $\mathcal{C}^\infty(M)$  des fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{R}$

de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En effet l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ g &\rightarrow X.g \text{ tel que } X.g(p) = X_p.g\end{aligned}$$

définie par un champ de vecteurs  $X$  est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble  $H(M)$  s'identifiera donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .

Si  $U$  est un ouvert de  $M$ , alors  $TU$  est un ouvert de  $TM$ . Si  $X$  est un champ de vecteur sur  $M$ , alors  $X|_U$  est un champ de vecteur sur  $U$

$$\begin{aligned}X &|_U : U \rightarrow TU \\ x &\rightarrow X_x\end{aligned}$$

Soit  $(U, x^1, \dots, x^n)$  une carte locale pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on pose

$$\begin{aligned}\partial_i &: U \rightarrow TU \subset TM \\ x &\rightarrow \partial_{i|x} = \frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned}$$

est un champ de vecteur sur  $U$ . Pour tout  $p \in U$ ,  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  est une base de  $T_pM$  donc  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  est une base locale de champ de vecteur.

### 1.2.3 Crochet de Lie

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X, Y \in H(M)$  est le champ de vecteurs

$$[X, Y] = XY - YX$$

Pour que cette définition soit correcte il faut montrer que  $XY - YX$  est bien un champ de vecteurs, c'est-à-dire une dérivation sur  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . Or la linéarité est évidente et la règle de Leibniz

se déduit du calcul :

$$\begin{aligned}[X, Y].(fg) &= XY.(fg) - YX.(fg) \\ &= fXY.g + gXY.f - fYX.g - gYX.f \\ &= f[X, Y].g + g[X, Y].f .\end{aligned}$$

Le crochet de Lie est :

- Antisymétrique en  $X$  et  $Y$  :

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

- Vérifie l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

# Chapitre 2

## Courbes paramétrées en dimension 3

### 2.1 Courbes paramétrées

On peut définir de deux manières une courbe dans le plan : en la paramétrant

$$\begin{aligned}\gamma & : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\end{aligned}$$

ou par une équation  $f(x, y) = 0$ .

Dans le premier cas le vecteur tangent

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$$

définit une droite et même une droite orientée si et seulement si

$$\gamma'(t) \neq (0, 0);$$

dans le deuxième cas la droite tangente en  $P = (x_0, y_0)$  est définie par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

La droite tangente (non orientée) est bien définie si et seulement si les deux dérivées partielles sont non nulles, et on a la définition suivante :

**Définition 2.1** Un point singulier d'une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un point où

$$\gamma'(t_0) = 0$$

un point singulier d'une courbe  $f(x, y) = 0$  est un point où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par un changement de paramétrisation, si  $\gamma(t)$  définit une courbe paramétrée

$$[a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

soit

$$\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction à valeurs dans l'intervalle  $[a, b]$  alors

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$$

définit une nouvelle courbe paramétrée; c'est en fait la même courbe parcourue à une vitesse différente. Pour les dérivées on a par exemple

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}'(u) &= \varphi'(u)\gamma'(\varphi(u)) \text{ et} \\ \bar{\gamma}''(u) &= \varphi''(u)\gamma'(\varphi(u)) + \varphi'(u)^2\gamma''(\varphi(u)).\end{aligned}$$

Il existe une meilleure paramétrisation; c'est la paramétrisation par la longueur.

**Définition 2.2** Pour mesurer la longueur d'une courbe paramétrée il est naturel de subdiviser l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  et d'introduire la longueur de la ligne polygonale

$$L(a_0, \dots, a_n) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|.$$

On appellera pas de la subdivision la quantité  $\delta = \max_i(a_{i+1} - a_i)$ .

On dit que la courbe  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est rectifiable si la limite suivante, que l'on appellera

longueur de la courbe, existe

$$L := \lim_{\delta \rightarrow 0} L(a_0, \dots, a_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|.$$

**Théorème 2.3** Soit  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  (ou même de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux), alors la courbe est rectifiable et sa longueur est égale à :

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)} dt$$

**Définition 2.4** Une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est régulière en  $t_0$  si  $\gamma$  est dérivable en  $t_0$  et  $\gamma'(t_0) \neq 0$ . Plus généralement, une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $k$ -régulière en  $t_0$  si  $\gamma$  est  $k$  fois dérivable en  $t_0$  et les vecteurs  $\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \dots, \gamma^{(k)}(t_0)$  sont linéairement indépendants.

**Remarque 2.5** Une courbe ne peut être  $k$ -régulière que si  $k \leq n$ . On utilise seulement les notions de régulière et bi-régulière.

Soit une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et régulière, de longueur  $l$ , on peut la reparamétriser par sa longueur. L'application

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$$

définit une bijection croissante  $[a, b] \rightarrow [0, l]$  dont la dérivée  $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$  est strictement positive (c'est ici que l'hypothèse régulière est utilisée).

On peut donc inverser cette fonction et obtenir une fonction dérivable  $t = g(s)$  telle que  $g'(s) = 1/s'(t)$ . Si on pose  $\bar{\gamma} = \gamma \circ g : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$  alors

$$\bar{\gamma}'(s) = g'(s) \gamma'(g(s)) = \frac{\gamma'(t)}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Ainsi  $\bar{\gamma}'(s)$  est unitaire, ce qu'on peut interpréter en disant que la courbe est parcourue avec une vitesse constante égale à 1.

**Définition 2.6** On dit que  $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est paramétrisée par sa longueur si  $\|\gamma'(s)\| = 1$ . Dans ce cas la longueur d'arc paramétrisé par  $[0, s]$  est égale à  $s$ .

### 2.1.1 Courbure

Commençons par étudier le cas d'une courbe paramétrée par sa longueur  $s \mapsto \gamma(s)$ .

Dans ce cas  $T(s) = \gamma'(s)$  est un vecteur unitaire ; on définit  $N(s)$  comme le vecteur normal obtenu par rotation d'angle  $\pi/2$  à partir de  $T(s)$ . En formule, si  $T(s) = (a, b)$ , on pose  $N(s) = (-b, a)$ .

Comme  $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$  on constate que  $2 \langle T(s), T'(s) \rangle = 0$  et donc que  $T'(s)$  est proportionnel à  $N(s)$ , ce qui justifie la définition suivante.

**Définition 2.7** La courbure  $\kappa(s)$  d'une courbe paramétrée par sa longueur est définie par l'équation :

$$T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Si  $\gamma(t)$  définit une courbe paramétrée régulière, sa courbure est naturellement définie comme la courbure de la courbe reparamétrée par sa longueur, c'est-à-dire que si  $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$  et  $\gamma(t) = \gamma_1(s(t))$  on pose  $\kappa(t) = \kappa_1(s(t))$ .

**Remarque 2.8** La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit deux fois dérivable, en suite que la courbe soit régulière au point où l'on veut définir la courbure (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire).

Remarquons que sil'on écrit  $N' = aT + bN$ , on en tire  $b = \langle N, N' \rangle = 0$  et  $a = \langle T, N' \rangle = -\langle N', T \rangle = -\kappa$  d'où

$$T' = \kappa N \text{ et } N' = -\kappa T.$$

On démontrera à titre d'exercice les formules suivantes pour une paramétrisation quelconque  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  :

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

## 2.1.2 Torsion

On supposera ici les courbes paramétrées bi-régulières, i.e.  $\gamma'$  et  $\gamma''$  linéairement indépendants en tout point. Comme pour les courbes planes, si la courbe est paramétrée par sa longueur, le vecteur tangent unitaire est

$$T(s) = \gamma'(s);$$

**Définition 2.9** *Le vecteur normal unitaire (appelé aussi vecteur normal principal) et la courbure sont définis par*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \text{ et } \kappa(s) = \|T'(s)\|.$$

**Remarque 2.10** *On a donc, comme pour les courbes planes*

$$T'(s) = \kappa(s)N(s),$$

*mais ici par définition, la courbure est positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que  $T'$ . En effet, étant donné un vecteur unitaire dans l'espace et une droite orthogonale à ce vecteur, il n'y a aucun moyen de choisir raisonnablement entre les deux vecteurs unitaires de cette droite.*

**Définition 2.11** *On définit ensuite le vecteur unitaire  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  qui complète la paire de vecteur en une base orthonormée directe  $\{T, N, B\}$  appelé trièdre de Frenet.*

*On considère  $B'(s)$ , c'est un vecteur orthogonal à  $B(s)$  mais aussi à  $T(s)$  car*

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$$

*donc  $B'(s)$  est colinéaire avec  $N(s)$  et on peut définir un scalaire appelé la torsion par l'équation*

$$B'(s) = -\tau(s)N(s).$$

*si  $\gamma(t)$  définit une courbe paramétrée birégulière, sa courbure et sa torsion sont définies comme la courbure et la torsion de la courbe reparamétrée par sa longueur, c'est-à-dire que si  $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$  et  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t))$  on pose  $\kappa(t) = \kappa_1(s(t))$  et  $\tau(t) = \tau_1(s(t))$ .*

Certain auteurs définissent la torsion par

$$B'(s) = \tau(s) N(s).$$

**Remarque 2.12** *La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit trois fois dérivable, en suite que la courbe soit bi-régulière au point où l'on veut définir la torsion ( en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire en un point non bi-régulier, on ne peut pas définir le vecteur normal unitaire car  $T'(s) = 0$ ). On observera aussi que la condition de bi-régularité impose que la courbure ne s'annule pas.*

*On calcule maintenant les coordonnées de  $N'$  dans la base  $\{T, N, B\}$ . On écrit pour cela*

$$N' = aT + bN + cB.$$

*On obtient*

$$a = \langle T, N' \rangle = -\langle T', N \rangle = -\kappa,$$

$$b = \langle N, N' \rangle = 0 \text{ et}$$

$$c = \langle B, N' \rangle = -\langle B', N \rangle = \tau,$$

*d'où*

$$N'(s) = -\kappa T(s) + \tau(s) B(s).$$

**Théorème 2.13** *Soient  $g(s)$  et  $h(s)$  deux fonctions différentiables avec  $g(s) > 0$ , il existe une courbe paramétrée (unique à isométrie près) telles que la courbure et la torsion vérifient*

$$\kappa(s) = g(s) \text{ et } \tau(s) = h(s).$$

**Preuve.** L'unicité provient d'un calcul similaire à celui effectué dans le plan. Soit  $\bar{\gamma}(s)$ ,  $\tilde{\gamma}(s)$  ayant même courbure et torsion ; après avoir appliqué une isométrie de l'espace, nous pouvons supposer que  $\bar{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)$ ,  $T_1(0) = T_2(0)$  et  $N_1(0) = N_2(0)$  ; on a alors  $B_1(0) = B_2(0)$ .

On considère la fonction

$$f(s) = \langle T_1(s), T_2(s) \rangle + \langle N_1(s), N_2(s) \rangle + \langle B_1(s), B_2(s) \rangle.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \langle T_1'(s), T_2(s) \rangle + \langle N_1'(s), N_2(s) \rangle \\
&\quad + \langle B_1'(s), B_2(s) \rangle + \langle T_1(s), T_2'(s) \rangle \\
&\quad + \langle N_1(s), N_2'(s) \rangle + \langle B_1(s), B_2'(s) \rangle \\
&= \langle \kappa N_1(s), T_2(s) \rangle + \langle (-\kappa T_1(s) + \tau B_1(s)), N_2(s) \rangle \\
&\quad - \langle \tau B_1(s), B_2(s) \rangle + \langle \kappa T_1(s), N_2(s) \rangle \\
&\quad + \langle N_1, (-\kappa T_2(s) + \tau B_2(s)) \rangle \\
&\quad - \langle \tau B_1(s), N_2(s) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi  $f(s) = f(0) = 3$ , mais  $\langle T_1, T_2 \rangle \leq 1$  avec égalité si et seulement si  $T_1 = T_2$  d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz; on conclut donc que  $\bar{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}'(t)$  et comme  $\bar{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)$  que  $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$ . L'existence est plus délicate. On peut la démontrer (comme dans le plan) dans le cas analytique en observant que  $\gamma^{(n)}(0)$  peut se calculer en terme de  $T(0), N(0), B(0)$  et des dérivées successives de  $\kappa$  et  $\tau$  en 0. Dans le cas général, on peut la démontrer en invoquant un théorème garantissant l'existence de solution d'un système d'équations différentielles.

Le système à résoudre est de dimension 9 et peut s'écrire comme

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B \text{ et } B' = -\tau N. \quad (2.1)$$

■

Soit  $\bar{\gamma}(s)$  la reparamétrisation par sa longueur de la courbe  $\gamma(t)$ , i.e.  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t))$ , alors on a :

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= s'(t) \bar{\gamma}'(s(t)) = s'(t) T_1(s(t)). \\
\gamma''(t) &= s''(t) T_1(s(t)) + s'^2(t) \kappa(s(t)) N_1(s(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma'''(t) &= (s'''(t) - s'^3(t) \kappa(s(t))) T_1(s(t)) + (s''(t) s'(t) + \kappa(s(t))) \\ &\quad + (s'^2(t) \kappa'(s(t))) N_1(s(t)) + s'^3(t) \kappa \tau(s(t)) B_1(s(t)).\end{aligned}$$

On en tire donc

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = s'^3(t) \kappa(s(t)) T_1 \wedge N_1 = s'^3(t) \kappa(t) B_1.$$

En suite  $\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) = s'^6 \kappa(s(t))^2 \tau(s(t))$  d'où les formules :

$$\kappa = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (2.2)$$

$$\tau = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}. \quad (2.3)$$

Et les formules du repère de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_3$ , sont données par

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Courbes particulière (hélice) dans $\mathbb{E}^3$

**Définition 2.14** *L'espace des courbes où leurs vecteur tangent fait un angle fixe avec un vecteur parallel le long de la courbe est appelé l'espace des courbes hélices.*

**Définition 2.15** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire  $T$  (i.e  $\|T\| = 1$ ), alors  $\gamma$  est une coube hélice si pour tous vecteur  $X$  parallel le long de la courbe  $\gamma$  (i.e  $\nabla_t X = 0$ ) on a*

$$\langle T, X \rangle = c \text{ (constante non nulle)}$$

**Théorème 2.16 ( Lancret)** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire  $T$  (i.e  $\|T\| = 1$ ), alors  $\gamma$  est une coube hélice si est seulement si*

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \text{ (constante non nulle )}$$

**Preuve.** Voir [2] . ■

**Exemple 2.17** Soit la courbe donnée par  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , avec  $a, b > 0$ , qu'il est appelée hélice. On trouve

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2} du = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

On suppose que  $a^2 + b^2 = 1$  on peut se ramener à  $s = t$ . Alors

$$T(s) = \gamma'(s) = (-a \sin s, a \cos s, b)$$

$$T'(s) = (-a \cos s, -a \sin s, 0) = -a(\cos s, \sin s, 0),$$

et donc  $\kappa(s) = a$  et  $N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$ .

On en tire

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = (b \sin s, -b \cos s, 0) = -bN(s).$$

La courbure est constante ( $\kappa(s) = a$ ) ainsi que la torsion ( $\tau(s) = b$ ) donc

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{b}{a} \text{ constante non nulle.}$$

Si l'on ne suppose plus  $a^2 + b^2 = 1$  on obtient en général :

$$\kappa(s) = a/\sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tau(s) = b/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

On donne maintenant des formules pour calculer la courbure et la torsion dans le cas d'une paramétrisation quelconque (mais toujours bi-régulière).

# Chapitre 3

## Structure Riemannienne de l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu $\mathbb{M}_{bcv}^3$

Ce chapitre est consacré à l'étude de la structure Riemannienne de l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu en dimension 3, pour plus de détail voir ([1],[1]).

### 3.1 Espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu $\mathbb{M}_{bcv}^3$

L'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  est un sous espace de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{bcv}^3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{-1}{m} \text{ avec } m \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F = m(x^2 + y^2) + 1 \leq 0 \text{ avec } m \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

#### Métrie de $\mathbb{M}_{bcv}^3$

On définit la métrique riemannienne  $ds_{l,m}^2$  de  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  par

$$ds_{l,m}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + m(x^2 + y^2)]^2} + \left(dz + \frac{l}{2} \frac{ydx - xdy}{[1 + m(x^2 + y^2)]}\right)^2 \text{ avec } l, m \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Matriciellement, elle est donnée par

$$ds_{l,m}^2 : \begin{pmatrix} \frac{1}{F} + \frac{L^2}{4F}y^2 & \frac{1}{4}l^2xy & \frac{l}{2}y \\ \frac{1}{4}l^2xy & \frac{1}{F} + \frac{l^2}{4F}x^2 & -\frac{l}{2}x \\ \frac{l}{2}y & -\frac{l}{2}x & F \end{pmatrix}$$

Quand on calcule avec la métrique riemannienne  $ds_{l,m}^2$ , on emploie parfois  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , alors

$$ds_{l,m}^2(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

La métrique de Bianchi-Cartan-Vranceanu s'écrit :

$$ds_{l,m}^2 = \sum_{i=1}^3 \omega^i \otimes \omega^i$$

Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i X_i$  et  $\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i X_i$  dans  $T\mathbb{M}$  est

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

La norme d'un vecteur  $a$  est donnée par

$$\|\vec{a}\| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

La métrique  $ds_{l,m}^2$  est invariante par rapport aux translations à gauche correspondant la multiplication.

On considère la base orthonormale des champs de vecteurs par

$$e_1 = F \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = F \frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.2)$$

en voit clairement qu'ils sont orthogonaux i.e

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta^{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

La base duale est

$$w^1 = \frac{dx}{F}, \quad w^2 = \frac{dy}{F}, \quad w^3 = dz + \frac{l}{2} \frac{ydx - xdy}{F}.$$

et on a

$$w^i(e_j) = \delta^{ij}; \quad i, j = \overline{1, 3}$$

On définit les espaces suivantes :

- Le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_3$  définit par

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- La sphère  $\mathbb{S}^3$  définit par

$$\mathbb{S}^3 = \{u \in \mathbb{R}^4 / u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1\}$$

- L'hyperboloïde  $\mathbb{H}^2$  définit par

$$\mathbb{H}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 / u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = -1, u_3 > 0\}$$

- Le groupe spécial linéaire complexe  $SU(2)$  définit par

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

- Le groupe spécial linéaire  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  est le groupe des matrices réelles  $2 \times 2$  à déterminant égale 1 telle que :

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc = 1 \right\}$$

Les tenseurs de Ricci sont définis par

$$\rho_{11} = \rho_{22} = 4m - \frac{l^2}{2} \quad \rho_{33} = \frac{l^2}{2} \quad (3.3)$$

**Remarque 3.1** 1. si  $l = 0$ , alors  $M$  est le produit d'une surface  $S$  à courbure gaussienne constante  $4m$  et la ligne réelle  $\mathbb{R}$ .

2. si  $\rho_{11} - \rho_{33} = 4m - l^2 = 0$  alors  $M$  a une courbure sectionnelle constante non négative.

3. De la classification de Kowalski [3] nous savons que les courbes principales de Ricci de  $SU(2)$  satisfont

$\rho_{33} > 0, \rho_{11} + \rho_{33} > 0$  et  $\rho_{11} \neq \rho_{33}$ . Ainsi, forme (3.3), si  $l \neq 0$  et  $m > 0$ ,  $M$  est localement  $SU(2)$ .

4. De même si  $l \neq 0$  et  $m < 0$ ,  $M$  est localement  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  tandis que si  $m = 0$  et  $l \neq 0$  on a la métrique invariante gauche sur le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_3$ .

la remarque précédente donne lieu à une belle description géométrique de la métrique  $ds_{l,m}^2$  comme le montre la figure 1

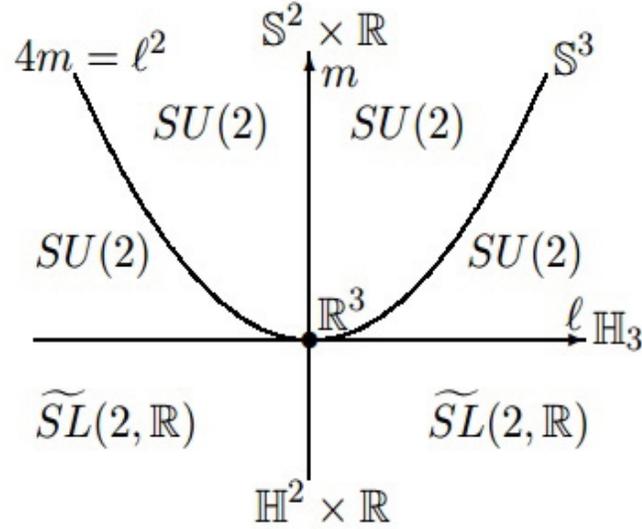


Figure 1

**Remarque 3.2 1.** Si  $l = m = 0$ , l'espace  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  est l'espace euclidien .

2. Si  $l^2 = 4m$  et  $l \neq 0$  alors  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  est localement la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

3. Si  $l = 0$  et  $m < 0$ ,  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  est isométrie à  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  avec la métrique du produit.

4. Si  $m = 0$  et  $l \neq 0$ ,  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  est le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_3$  muni d'une métrique invariante gauche.

A partir de maintenant, nous supposons que  $l^2 \neq 4m$  et  $m \neq 0$ .

## 3.2 Connexion

On détermine la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  associée à la métrique  $ds_{l,m}^2$  par rapport à la base orthonormée invariante à gauche donnée dans par les formules Eq.(3.2).

Premièrement, les crochets de Lie de la base  $(e_i)_{i=1,3}$  sont donnés par la proposition suivante ;

**Proposition 3.3** *Le crochet de Lie des vecteurs  $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$  est*

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= -2mye_1 + 2mx e_2 + le_3 \\ [e_3, e_1] &= [e_3, e_2] = 0.\end{aligned}$$

**Preuve.** On utilise la propriété suivante du crochet de Lie

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

pour le crochet de Lie des vecteurs  $e_1$  et  $e_2$ , on a

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= \left[ F \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}, F \frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \left[ F \frac{\partial}{\partial x}, F \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[ F \frac{\partial}{\partial x}, \frac{lx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] - \left[ \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}, F \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[ \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{lx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= F \left( \frac{\partial}{\partial x} F \right) \frac{\partial}{\partial y} - F \left( \frac{\partial}{\partial y} F \right) \frac{\partial}{\partial x} + F \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{lx}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{lx}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} F \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad - \frac{ly}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} F \right) \frac{\partial}{\partial y} + F \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{ly}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ly}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{lx}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{lx}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{ly}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= 2mx F \frac{\partial}{\partial y} - 2my F \frac{\partial}{\partial x} + Fl \frac{\partial}{\partial z} \\ &= 2mx F \frac{\partial}{\partial y} - 2my F \frac{\partial}{\partial x} + lmx^2 \frac{\partial}{\partial z} + lmy^2 \frac{\partial}{\partial z} + l \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -2my \left( F \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) + 2mx \left( F \frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) + l \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -2mye_1 + 2mx e_2 + le_3\end{aligned}$$

Avec  $F = 1 + m(x^2 + y^2)$

La preuve pour les deux autres crochets est de la même méthode. ■

Les formules de la connexion sont donnés par la proposition suivante ;

**Proposition 3.4** *La connexion de Levi-Civita  $\nabla$  associée à la métrique  $ds_{l,m}^2$  est donnée par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{e_1} e_1 = 2mye_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -2myE_1 + \frac{l}{2}E_3, \\ \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{l}{2}e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = -2mxE_2 - \frac{l}{2}E_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 2mxe_1, \\ \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = \frac{l}{2}e_1, \\ \nabla_{e_3} e_3 = 0, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

**Preuve.** On utilise la formule de Koszul suivante

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \}$$

le calcul par rapport à la base  $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$  donne :

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = -\frac{1}{2} \{ \langle e_k, [e_j, e_i] \rangle + \langle e_i, [e_j, e_k] \rangle + \langle e_j, [e_i, e_k] \rangle \}; \quad i, j, k = \overline{1,3}$$

On fait le calcul seulement pour  $\nabla_{e_1} e_1$ .

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_1, [e_2, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_1, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_1, e_1] \rangle \} = 0 \\ \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_2, [e_1, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_1, e_2] \rangle + \langle e_1, [e_1, e_2] \rangle \} = 2my \\ \langle \nabla_{e_1} e_1, e_3 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_3, [e_1, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_1, e_3] \rangle + \langle e_1, [e_1, e_3] \rangle \} = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\nabla_{e_1} e_1 = 2my e_2$$

Les autres valeurs de la connexion se calculent de la même manière. ■

### 3.3 Tenseur de courbure

On rappelle la définition du tenseur de courbure et coefficients par la définition suivante ;

**Définition 3.5** *Le tenseur de courbure de Riemann sur une variété riemannienne  $(M, g)$  est défini par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

où  $X, Y$  et  $Z$  sont trois champs de vecteurs de  $M$ . Tandis que le champ de tenseur de Riemann-Christoffel est

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

Où  $X, Y, Z, W$  sont des champs de vecteurs lisses sur  $(M, g)$ .

On note par

$$R_{ijk} = R(e_i, e_j)e_k, \quad R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l); \quad i, j, k, l = \overline{1,3}$$

On donne maintenant le tenseur de courbure de Riemann sur  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  par rapport à la base  $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ .

**Proposition 3.6** *Le tenseur de courbure de Riemann sur  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  est donné par les formules suivantes*

$$\begin{cases} R_{121} = 4m - \frac{3}{4}l^2 e_2, \\ R_{131} = \frac{l^2}{4} e_3, \\ R_{232} = \frac{l^2}{4} e_3, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$R_{ijkl} = \begin{cases} 4m - \frac{3}{4}l^2 \text{ si } (ijkl) = (1212) \text{ où } (2121), \\ \frac{l^2}{4} \text{ si } (ijkl) = (1313), (3131), (2323) \text{ où } (3232), \\ 0 \text{ si non.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Les cas qui n'apparaissent pas du tenseurs  $R$  sont nuls.

**Preuve.** Pour calculer le tenseur de courbure de Riemann sur  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  on utilise les formules suivantes

$$\begin{cases} R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, \\ R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} R_{ijk} = R(e_i, e_j)e_k = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k, \\ R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l) = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle \end{cases}; \quad i, j, k, l = \overline{1,3}$$

On fait le calcul pour juste pour les champs de vecteurs  $(e_1, e_3, e_1)$ , on a

$$\begin{aligned}
 R_{131} &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_3} e_1 - \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{[e_1, e_3]} e_1 \\
 &= -\frac{l}{2} \nabla_{e_1} e_2 - 2my \nabla_{e_3} e_2 \\
 &= -\frac{l}{2} (-2mx e_2 - \frac{l}{2} e_3) - 2my (\frac{l}{2} e_1) \\
 &= -l m y e_1 - l m x e_2 + \frac{l^2}{4} e_3. \\
 R_{1313} &= \langle R(e_1, e_3) e_1, e_3 \rangle = \left\langle -l m y e_1 - l m x e_2 + \frac{l^2}{4} e_3, e_2 \right\rangle \\
 &= \frac{l^2}{4}.
 \end{aligned}$$

on fait le même calcul pour les autres tenseurs. ■

# Chapitre 4

## Harmonicité et biharmonicité

On fait un rappel sur les applications harmoniques et biharmoniques dans les variétés riemanniennes et comme cas particulier, on définit les courbes harmoniques et biharmoniques dans des espaces particuliers notamment l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ .

On caractérise les courbes biharmoniques non géodisiques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . On démontre en suite que l'ensemble des courbes biharmoniques est inclu dans l'ensemble des courbes hélices dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ .

A la fin, on donne la forme explicite des courbes biharmoniques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ .

### 4.1 Applications harmoniques et biharmoniques

**Définition 4.1** Soit  $\phi$  une application d'une variété riemannienne compacte  $(M, g)$  à une autre variété riemannienne  $(\bar{M}, \bar{g})$ . On définit la fonction d'énergie par

$$E_1(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|d(\phi)\|^2 v_g.$$

Le point critique de la fonction energie est appelé une application harmonique.

Le cahmp de tension de  $\phi$  est donné par

$$\tau_1(\phi) = \text{trace } \nabla d\phi$$

L'application  $\phi$  est dite biharmonique si elle est un point critique de la bienergie fonctionnelle

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau_1(\phi)\|^2 v_g$$

et le correspondant L'équation d'Euler-Lagrange est donnée par la disparition du champ de tension

$$\tau(\phi) = \text{trace} \nabla d\phi$$

Les applications biharmoniques sont les points critiques de la fonctionnelle bienergie

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 dv_g$$

La première formule de variation du bienergie montrant que l'équation d'Euler-Lagrange pour  $E_2$  est :

$$\tau_2(\phi) = -j(\tau(\phi)) = -\Delta \tau(\phi) - \text{trace} R^N(d\phi, \tau(\phi))d\phi = 0, \quad (4.1)$$

où  $J$  est l'opérateur Jacobi de  $\phi$  et

$$R^N(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

L'équation  $\tau_2(\phi) = 0$ , est appelée l'équation biharmonique Puisque  $J$  est linéaire, toute application harmonique est biharmonique. Par conséquent, l'intérêt principal est de trouver et classer les applications biharmoniques propres, c'est-à-dire les applications biharmoniques non-harmoniques.

## 4.2 Cas des courbes

Comme les courbes sont un cas partuclier des applications, lorsque l'application  $\phi$  est une courbe dans la variété  $(M, g)$ , on la note par la suite cette courbe par  $\gamma$

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$$

Dans ce cas, mettre  $T = \gamma'$  le champ de tension devient

$$\tau(\gamma) = \nabla_T T$$

### 4.2.1 Courbes harmoniques

Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$  une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. On dit que  $\gamma$  est une courbe harmonique dans  $M$  si et seulement si

$$\tau_1(\gamma) = \nabla_T^2 T = 0 \tag{4.2}$$

les seules solutions de l'équation sont les courbes qui vérifient

$$\nabla_T^2 T = 0$$

on a la proposition suivante

**Proposition 4.2** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$  une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc.  $\gamma$  est une courbe harmonique dans  $M$  si et seulement si  $\gamma$  est une géodésique i.e :  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ .*

### 4.2.2 Courbes biharmoniques

L'équation biharmonique d'une courbe se réduit à :

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0. \tag{4.3}$$

On décrit géométriquement l'équation (4.3) :

Les formules de Frenet  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  associé à une courbe  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$  paramétrée par la longueur d'arc, est l'orthonormalisation du 3-uples  $\{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{(k)} d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})\}_{k=0\dots 3}$  décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = d\gamma(\frac{\partial}{\partial t}) \\ \nabla_T T = \kappa N \\ \nabla_T N = -\kappa T + \tau B \\ \nabla_T B = -\tau N \end{array} \right.$$

où les fonctions  $\{\kappa, \tau\}$  sont appelés la courbure et la torsion de la courbe  $\gamma$ . (voir 2.1)

En utilisant les formules de Frenet (2.1), l'équation biharmonique (4.3) se réduit à un système différentiel des courbures de  $\gamma$  comme indiqué par la proposition suivante

**Proposition 4.3** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$ , une courbe paramétrée par la longueur d'arc d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans une variété riemannienne  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Alors  $\gamma$  est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} \kappa' \kappa = 0 \\ \kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \kappa R(T, N, T, N) = 0 \\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' - \kappa R(T, N, T, B) = 0 \end{cases}$$

**Preuve.** D'après les formules de Frenet, l'équation biharmonique de  $\gamma$  est

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa N \\ \nabla_T^2 T &= \nabla_T \nabla_T T = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B) \\ \nabla_T^3 T &= -3\kappa'\kappa T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B \end{aligned}$$

d'autre part

$$R(T, \nabla_T T)T = R(T, \nabla_T T, T, N)N + R(T, \nabla_T T, T, B)B$$

d'où

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= (-3\kappa'\kappa)T + \left( \kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \kappa\frac{l^2}{4} - R(T, \nabla_T T, T, N) \right) N \\ &\quad + (2\kappa'\tau + \kappa\tau' - R(T, \nabla_T T, T, B))B \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} -3\kappa'\kappa = 0 \\ \kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \kappa\frac{l^2}{4} - \kappa R(T, N, T, N) = 0 \\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' - \kappa R(T, N, T, B) = 0 \end{cases}$$

d'où le résultat. ■

Si nous cherchons des solutions biharmoniques appropriées, c'est-à-dire pour des courbes biharmoniques avec  $\kappa \neq 0$ , on a

$$\begin{cases} \kappa = \text{constant} \neq 0 \\ \kappa^2 + \tau^2 = R(T, N, T, N) \\ \tau' = -R(T, N, T, B) \end{cases} \quad (4.4)$$

### 4.3 Courbes biharmoniques dans $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$

Soit  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  la variété de Bianchi-Cartan-Vranceanu de dimension 3 muni de la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  et de tenseur de courbure noté par  $R$  donnés dans (Chapitre 4).

Dans ce qui suit les courbes dans  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  sont supposées non géodésiques.

Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{bcv}^3$  une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc et soit  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  le repère de Frenet associé.

**Théorème 4.4** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{bcv}^3$  une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. Alors  $\gamma$  est une courbe biharmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} k = c, \text{ non nulle constante,} \\ k^2 + \tau^2 = \frac{l^2}{4} - (l^2 - 4m)B_3^2, \\ \tau' = (4m - l^2)N_3B_3. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour la preuve du théorème, on utilise le lemme suivant

**Lemme 4.5** *Les coefficients du tenseur de courbure suivant le repère de Frenet sont*

$$\begin{cases} 1. \langle R(T, N)T, T \rangle = 0 \\ 2. \langle R(T, N)T, N \rangle = \frac{l^2}{4} - (4m - l^2)B_3^2 \\ 3. \langle R(T, N)T, B \rangle = (l^2 - 4m)N_3B_3 \end{cases}$$

$$\langle R(T, N)T, T \rangle = 0$$

**Preuve.** 1. Par définition du tenseur de courbure, on a  $\langle R(T, N)T, T \rangle = R(T, N, T, T) = 0$

2.

$$\begin{aligned}
\langle R(T, N)T, N \rangle &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k N_l R_{ijkl} \\
&= 4m - \frac{3}{4}l^2 ((T_1 N_2)^2 + (T_2 N_1)^2 - 2T_1 N_2 T_2 N_1) \\
&\quad + \frac{l^2}{4} \left( \begin{aligned} &(T_1 N_3)^2 + (T_3 N_1)^2 + (T_2 N_3)^2 \\ &+ (T_3 N_2)^2 - 2T_1 N_3 T_3 N_1 - 2T_2 N_3 T_3 N_2 \end{aligned} \right) \\
&= (4m - \frac{3}{4}l^2) (T_1 N_2 - T_2 N_1)^2 + \frac{l^2}{4} (T_1 N_3 - T_3 N_1)^2 + \frac{l^2}{4} (T_2 N_3 - T_3 N_2)^2 \\
&= (4m - \frac{3}{4}l^2) B_3^2 + \frac{l^2}{4} B_2^2 + \frac{l^2}{4} B_1^2 = 4m B_3^2 - \frac{3}{4}l^2 B_3^2 + \frac{l^2}{4} B_2^2 + \frac{l^2}{4} B_1^2 \\
&= 4m B_3^2 + -l^2 B_3^2 + \frac{l^2}{4} (B_3^2 + B_2^2 + B_1^2) = 4m B_3^2 - l^2 B_3^2 + \frac{l^2}{4} \\
&= \frac{l^2}{4} + (4m - l^2) B_3^2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\langle R(T, N)T, B \rangle &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k B_l R_{ijkl} \\
&= (4m - \frac{3}{4}l^2) (T_1^2 N_2 B_2 + T_2^2 N_1 B_1) \\
&\quad + \frac{l^2}{4} (T_1^2 N_3 B_3 + T_3^2 N_1 B_1 + T_2^2 N_3 B_3 + T_3^2 N_2 B_2) \\
&= (l^2 - 4m) N_3 B_3
\end{aligned}$$

■

**Preuve.** (du théorème 4.4) La condition du biharmonicité est

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = \nabla_T^3 T - \kappa R(T, N)T \\
&= (-3\kappa'\kappa)T + \left( \kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \kappa\frac{l^2}{4} - \kappa(4m - l^2)B_3^2 \right) N \\
&\quad + (2\kappa'\tau + \kappa\tau' + \kappa(l^2 - 4m)N_3 B_3) B.
\end{aligned}$$

et puisque  $(T, N, B)$  est une base orthonormée, alors on a la preuve du théorème ■

### 4.3.1 Cas d'une courbe hélice

**Définition 4.6** *Par analogie avec  $\mathbb{R}^3$  (Théoreme de Lancret [2]), on dit qu'une courbe  $\gamma$  dans une variété riemannienne est une courbe hélice si le quotient de la torsion par la courbure est constant i.e.*

$$\frac{\tau}{\kappa} \text{ est une constante non nulle}$$

Maintenant, pour toute courbe hélice  $\gamma$  dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ , le système (4.5) devient d'après la définition (4.2),

$$\begin{cases} \kappa = c, \text{ constant } \neq 0 \\ \tau = c, \text{ constante } \neq 0 \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{l^2}{4} - (l^2 - 4m)B_3^2, \\ (l^2 - 4m)N_3B_3 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

On remarque que  $B_3$  est également constant d'après (4.6<sub>3</sub>) .

Ainsi, les courbes hélices biharmoniques satisfont

$$\begin{cases} 1. \kappa = c, \text{ constant } \neq 0 \\ 2. \tau \text{ constante } \neq 0 \\ 3. B_3 \text{ constante,} \\ 4. \kappa^2 + \tau^2 = \frac{l^2}{4} - (l^2 - 4m)B_3^2, \\ 5. N_3B_3 = 0 . \end{cases} \quad (4.7)$$

L'équation Eq( 4.5) montre que l'étude des courbes biharmoniques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  se base sur l'étude du comportements des fonctions  $N_3, B_3$  et les constantes  $\kappa, \tau$ .

### 4.3.2 Courbes hélices biharmoniques dans $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$

Les courbes biharmoniques non géodésiques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  sont des courbes hélices donné par le théorème suivant

**Théorème 4.7** *Si  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{bcv}^3$  est une courbe biharmonique paramétrée par longueur d'arc alors  $\gamma$  est une hélice.*

**Preuve.** Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{bcv}^3$  une courbe non géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Alors d'après les équations de Frenet on a :

$$\langle \nabla_T B, e_3 \rangle = \tau N_3.$$

Par les dérivées covariantes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T B, e_3 \rangle &= B_3' + \frac{l}{2} T_1 B_2 - \frac{l}{2} T_2 B_1 \\ &= B_3' + \frac{l}{2} (T_1 B_2 - T_2 B_1) \\ &= B_3' - \frac{l}{2} N_3. \end{aligned}$$

La comparaison des deux équations donne

$$\tau N_3 = B_3' - \frac{l}{2} N_3 \tag{4.8}$$

Supposons maintenant que  $\gamma$  est une courbe biharmonique.

On montre d'abord que  $B_3 \neq 0$ . En effet, si  $B_3 = 0$ . Alors (4.8) implique que

$$N_3 \left( \tau + \frac{l}{2} \right) = 0.$$

Cette dernière équation donne deux possibilités :

Si  $N_3 = 0$ . (et  $B_3 = 0$ ), alors  $T = \pm E_3$  et la courbe  $\gamma$  est une géodésique contradiction avec la supposition.

Si  $(\tau + \frac{l}{2}) = 0$  alors, en utilisant la deuxième équation de Eq.(4.5), nous devons avoir que  $\gamma$  est à nouveau une géodésique ( $\kappa = 0$ ). Donc,  $B_3 \neq 0$ .

La seconde équation de (4.5) donne

$$\begin{aligned} 2\tau\tau' &= -2(l^2 - 4m)B_3B_3' \\ \tau\tau' &= -(l^2 - 4m)B_3B_3' \end{aligned}$$

et, en tenant compte de la troisième équation de (4.5), donne

$$\begin{aligned}
\tau\tau' &= \tau(l^2 - 4m)N_3B_3 \\
\Rightarrow \tau(l^2 - 4m)N_3B_3 &= -(l^2 - 4m)B_3B_3' \\
\Rightarrow \tau(l^2 - 4m)N_3B_3 + (l^2 - 4m)B_3B_3' &= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$B_3(l^2 - 4m)(\tau N_3 + B_3') = 0$$

Ainsi,  $\tau N_3 = -B_3'$  qui donne

$$\tau N_3 = B_3' - \frac{l}{2}N_3$$

et

$$N_3(4\tau + l) = 0$$

et par conséquent  $\tau = \frac{-l}{4}$  est constant. ■

Comme dans les cas précédents, nous avons

**Corollaire 4.8** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Alors  $\gamma$  est une courbe biharmonique propre si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \text{ non nulle constante} \\ \tau \text{ constante} \\ N_3 = 0 \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{l^2}{4} - (l^2 - 4m)B_3^2 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

A partir de maintenant, nous supposons que  $l^2 \neq 4m$  et  $m \neq 0$ . Il s'agit essentiellement du seul cas laissé à étudier selon la remarque (4.9)

## 4.4 Formules explicites des courbes biharmoniques dans

$\mathbb{M}_{bcv}^3$

Dans cette section, on utilise le Corollaire 4.8 pour donner les équations paramétriques explicites de courbes biharmoniques dans l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu  $\mathbb{M}_{bcv}^3$ . On prouve

d'abord le lemme suivant :

**Lemme 4.9** *Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{bcv}^3$  une courbe non-géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Si  $N_3 = 0$ , alors :*

$$T(t) = \sin \alpha_0 \cos \beta(t)e_1 + \sin \alpha_0 \sin \beta(t)e_2 + \cos \alpha_0 e_3 \quad (4.10)$$

où  $\alpha_0 \in (0, \pi)$ .

**Preuve.** Si  $\gamma' = T = T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (T_1' + lT_2T_3 + 2mxT_2^2 - 2myT_1T_2)e_1 \\ &\quad + (T_2' - lT_1T_3 + 2myT_1^2 - 2mxT_1T_2)e_2 \\ &\quad + T_3'e_3 \\ &= kN \end{aligned}$$

il résulte que  $N_3 = 0$ , si et seulement si  $T_3' = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $T_3 = \text{constant}$ . De plus  $T_3 \in (-1, 1)$  et la norme de  $T$  est  $\|T\| = 1$ , il existe une constante  $\alpha_0 \in (0, \pi)$  et une unique telle que  $\cos \alpha_0 = T_3$  et une fonction lisse  $\beta$  telle que

$$T(t) = \sin \alpha_0 \cos \beta(t)e_1 + \sin \alpha_0 \sin \beta(t)e_2 + \cos \alpha_0 e_3.$$

■

A partir de l'expression (4.10) de  $T$  nous sommes prêts à l'étape du résultat principal.

**Théorème 4.10** *Soit  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu avec  $m \neq 0$  et  $l^2 - 4m \neq 0$ . Suppose que*

$$\delta = l^2 + (16m - 5l^2) \sin^2 \alpha_0 \geq 0, \alpha_0 \in (0, \pi)$$

et notons par

$$2\omega_{1,2} = -l \cos \alpha_0 \pm \sqrt{\delta}.$$

les équations paramétriques de toutes les courbes biharmoniques propres de  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$  sont données en trois types suivantes :

**Type 1 :**

$$\begin{cases} x(t) = b \sin \alpha_0 \sin \beta(t) + c \\ y(t) = -b \sin \alpha_0 \cos \beta(t) + d \\ z(t) = \frac{l}{4m} \beta(t) + \frac{1}{4m} [(4m - l^2) \cos \alpha_0 - l\omega_{1,2}]t, \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $\beta$  est une solution non constante de l'ODE suivante :

$$\beta' + 2md \sin \alpha_0 \cos \beta - 2mc \sin \alpha_0 \sin \beta = l \cos \alpha_0 + 2mb \sin^2 \alpha_0 + \omega_{1,2}, \quad (4.12)$$

et les constants satisfont :

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m} \left\{ (l \cos \alpha_0 + \omega_{1,2} - \frac{1}{b}) + mb \sin^2 \alpha_0 \right\}$$

**Type 2 :**

Si  $\beta = \beta_0 = \text{constante}$  et  $\cos \beta_0 \sin \beta_0 \neq 0$ , les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x(t) = x(t) \\ y(t) = x(t) \tan \beta_0 + \alpha \\ z(t) = \frac{1}{4m} [(4m - l^2) \cos \alpha_0 - l\omega_{1,2}]t + b. \end{cases}$$

avec  $b \in \mathbb{R}$

$$\alpha = \frac{\omega_{1,2} + l \cos \alpha_0}{2m \sin \alpha_0 \cos \beta_0}$$

et  $x(t)$  une solution de l'ODE suivante :

$$x'(t) = (1 + m[x^2(t) + (x(t) \tan \beta_0 + \alpha)^2]) \sin \alpha_0 \cos \beta_0 \quad (4.13)$$

**Type 3 :**

Si  $\cos \beta_0 \sin \beta_0 = 0$ , jusqu'à interchenge de  $x$  avec  $y$ ,  $\cos \beta_0 = 0$  et les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 = \mp \frac{\omega_{1,2} + l \cos \alpha_0}{2m \sin \alpha_0} \\ y(t) = y(t) \\ z(t) = \frac{1}{4m} [(4m - l^2) \cos \alpha_0 - l\omega_{1,2}]t + b, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $y(t)$  est une solution de l'ODE suivante :

$$y'(t) = \pm(1 + m[x_0^2 + y^2(t)]) \sin \alpha_0. \quad (4.14)$$

**Preuve.** Soit  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc. La dérivée covariante du champ vectoriel  $T$  du Lemme (4.9)

$$T(t) = \sin \alpha_0 \cos \beta(t)e_1 + \sin \alpha_0 \sin \beta(t)e_2 + \cos \alpha_0 e_3.$$

est

$$\begin{aligned} T_1' &= -\beta'(t) \sin \alpha_0 \sin \beta(t). \\ T_2' &= \beta'(t) \sin \alpha_0 \cos \beta(t). \\ T_3' &= 0. \end{aligned}$$

on utilise les formules de Frenet on a

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (T_1' + lT_2T_3 + 2mxT_2^2 - 2myT_1T_2)e_1 \\ &\quad + (T_2' - lT_1T_3 + 2myT_1^2 - 2mxT_1T_2)e_2 + T_3'e_3 \\ &= \kappa N \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= [-\beta' \sin \alpha_0 \sin \beta - 2my \sin^2 \alpha_0 \cos \beta \sin \beta \\ &\quad + 2mx \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \beta + l \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \sin \beta]e_1 + \\ &\quad [\beta' \sin \alpha_0 \cos \beta + 2my \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \beta - \\ &\quad 2mx \sin^2 \alpha_0 \cos \beta \sin \beta - l \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \beta]e_2 \\ &= \kappa N, \end{aligned}$$

on a

$$\kappa = \|\nabla_T T\|$$

où

$$\kappa = |\beta' + 2my \sin \alpha_0 \cos \beta - 2mx \sin \alpha_0 \sin \beta - l \cos \alpha_0| \sin \alpha_0.$$

on suppose que

$$\omega = \beta' + 2my \sin \alpha_0 \cos \beta - 2mx \sin \alpha_0 \sin \beta - l \cos \alpha_0 > 0. \quad (4.15)$$

alors on a

$$\kappa = \omega \sin \alpha_0 \quad (4.16)$$

et

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\kappa} \nabla_T T \\ &= \frac{1}{\kappa} [-\beta' \sin \alpha_0 \sin \beta - 2my \sin^2 \alpha_0 \cos \beta \cos \beta \sin \beta \\ &\quad + 2mx \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \beta + l \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \sin \beta] e_1 \\ &\quad + [\beta' \sin \alpha_0 \cos \beta + 2my \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \beta - \\ &\quad 2mx \sin^2 \alpha_0 \cos \beta \sin \beta - l \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \beta] e_2 \end{aligned}$$

$$N = -\sin \beta e_1 + \cos \beta e_2.$$

en suite,

$$\begin{aligned} B &= T \wedge N = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & e_3 \\ \sin \alpha_0 \cos \beta & \sin \alpha_0 \sin \beta & \cos \alpha_0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{vmatrix} \\ B &= -\cos \alpha_0 \cos \beta E_1 - \cos \alpha_0 \sin \beta E_2 + \sin \alpha_0 E_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_T B &= [\beta' \cos \alpha_0 \sin \beta + 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \beta \cos \beta - 2mx \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \sin^2 \beta \\ &\quad - \frac{l}{2} \cos^2 \alpha_0 \sin \beta + \frac{l}{2} \sin^2 \alpha_0 \sin \beta] e_1 \\ &\quad + [-\beta' \cos \alpha_0 \cos \beta + 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos^2 \beta + 2mx \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad + \frac{l}{2} \cos^2 \alpha_0 \cos \beta - \frac{l}{2} \sin^2 \alpha_0 \cos \beta] e_2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la torsion géodésique  $\tau$  de  $\gamma$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\tau &= -\langle \nabla_T B, N \rangle = -[(\beta' \cos \alpha_0 \sin \beta + 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \beta \cos \beta \\
&\quad - 2mx \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \sin^2 \beta - \frac{l}{2} \cos^2 \alpha_0 \sin \beta + \frac{l}{2} \sin^2 \alpha_0 \sin \beta) \times (-\sin \beta) \\
&\quad + (-\beta' \cos \alpha_0 \cos \beta - 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos^2 \beta + 2mx \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \beta \cos \beta \\
&\quad + \frac{l}{2} \cos^2 \alpha_0 \cos \beta - \frac{l}{2} \sin^2 \alpha_0 \cos \beta) \times \cos \beta] \\
&= \beta' \cos \alpha_0 - \frac{l}{2} \cos^2 \alpha_0 + \frac{l}{2} \sin^2 \alpha_0 + 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin^2 \beta \cos \beta \\
&\quad - 2mx \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \beta \cos^2 \beta - 2mx \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \sin^3 \beta + 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos^3 \beta \\
&= 2my \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \beta - 2mx \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \beta + \beta' \cos \alpha_0 - l \cos^2 \alpha_0 - \frac{l}{2} \\
&= (\beta' + 2my \sin \alpha_0 \cos \beta - 2mx \sin \alpha_0 \sin \beta - l \cos \alpha_0) \cos \alpha_0 + \frac{l}{2} \\
&= -[(-\beta' - 2my \sin \alpha_0 \cos \beta + 2mx \sin \alpha_0 \sin \beta + l \cos \alpha_0) \cos \alpha_0] - \frac{l}{2} \\
&= -\omega \cos \alpha_0 - \frac{l}{2}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Pour trouver les équations explicites de  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  nous devons intégrer le système  $d\gamma/dt = T$ .

De la matrice de passage de  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  vers  $(e_1, e_2, e_3)$ , on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+2m(x^2+y^2)} & 0 & \frac{ly}{2+2m(x^2+y^2)} \\ 0 & \frac{1}{2+2m(x^2+y^2)} & \frac{-lx}{2+2m(x^2+y^2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{1+m(x^2+y^2)} = \sin \alpha_0 \cos \beta(t) \\ \frac{y'}{1+m(x^2+y^2)} = \sin \alpha_0 \sin \beta(t) \\ z' = \cos \alpha_0 + \frac{l}{2} \sin \alpha_0 (x \sin \beta(t) - y \cos \beta(t)). \end{cases} \tag{4.19}$$

### 1. Forme explicite de Type 1.

On suppose que  $\beta' \neq 0$ , On remplaçons  $\kappa$  et  $\tau$  donnés par Eq. (4.16 et 4.18) dans la quatrième équation du Corollaire 4.8, nous obtenons

$$\beta''(t) = \beta'(t) \frac{2mxx' + 2myy'}{1 + m(x^2 + y^2)}.$$

par l'intégration de la dernière équation on trouve

$$1 + m(x^2 + y^2) = b\beta' \quad , b > 0 \quad (4.20)$$

remplacent (4.20) dans (4.19) et on intègre; on obtient la solution

$$\begin{cases} x(t) = b \sin \alpha_0 \sin \beta(t) + c \\ y(t) = b \sin \alpha_0 \cos \beta(t) + d \\ z(t) = (\cos \alpha_0 + \frac{bl}{2} \sin^2 \alpha_0)t + \frac{l}{2} \int (c \sin \alpha_0 \sin \beta - d \sin \alpha_0 \cos \beta) dt. \end{cases} \quad (4.21)$$

Pour déterminer  $\beta$  on remplace dans (4.5) les valeurs de  $\kappa$ ,  $\tau$  et  $B_3$  sont données en (4.16), (4.18) et (4.17) respectivement. Cela donne

$$\omega^2 + \omega l \cos \alpha_0 + (l^2 - 4m) \sin^2 \alpha_0 = 0 \quad (4.22)$$

Suppose que  $\delta = l^2 + (16m - 5l^2) \sin^2 \alpha_0 \geq 0$ , alors les solutions de (4.22) sont :

$$\omega_{1,2} = \frac{-l \cos \alpha_0 \pm \sqrt{\delta}}{2},$$

qui sont toujours différents de zéro. Puisque nous avons supposé que  $\omega$  est une constante positive, nous devons choisir la racine positive de (4.22). Nous rappelons que si  $\omega$  est négatif, nous obtenons même équation (4.22), donc nous gardons les deux solutions de (4.22). En remplaçant (4.15) les valeurs de  $x$  et  $y$  données en (4.21), on trouve

$$\beta' - 2m(c \sin \alpha_0 \sin \beta - d \sin \alpha_0 \cos \beta) = l \cos \alpha_0 + 2mb \sin^2 \alpha_0 + \omega_{1,2}.$$

Enfin, en prenant en compte l'intégrale de cette dernière équation, la valeur de  $z$  donnée en (4.21) devient celui désiré.

## 2. Forme explicite de Type 2 et 3.

Le cas du type 2 et du type 3 peut être dérivé de la même manière. Nous soulignons que l'ODE (4.13) et (4.14) peut être écrit comme l'équation de Riccati avec des coefficients constants

$$x' = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

ce qui est une équation séparable.

L'ODE (4.12) est de type

$$x' = a \cos x + b \sin x + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

qui peut être réduit à (4.23). Les courbes biharmoniques de type 1, données en (4.11), se trouvent dans le "cylindre rond"

$$S = \{(x, y, z) \in M : (x - c)^2 + (y - d)^2 = b^2 \sin^2 \alpha_0\}$$

et ils sont des géodésiques de  $S$ . La surface  $S$  est invariante par des translations le long de l'axe  $z$ , qui sont des isométries par rapport à la métrique de Bianchi-Cartan-Vranceanu  $ds_{l,m}^2$ . De même, les courbes biharmoniques appropriées de type 2 et de type 3 sont des géodésiques des "cylindres"

$$y = x \tan \beta_0 + a$$

et

$$x = x_0$$

respectivement.

Pour l'affaire  $l^2 = 4m$ ,  $l \neq 0$ , c'est-à-dire le cas de la sphère tridimensionnelle, il était prouvé, dans [1], que les courbes biharmoniques appropriées sont des géodésiques sur le Clifford Torus qui est une surface  $SO(2)$  invariante de  $\mathbb{S}^3$ . ■

**Exemple 4.11 (type2)** *On prend*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ alors } \cos \beta_0 \sin \beta_0 \neq 0 \\ \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \\ b = 0 \\ l = \sqrt{3} \text{ et } m = 1 \end{array} \right.$$

*on a alors*

$$\sigma = \frac{7}{2}$$

alors

$$\omega_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = 0.32304 \text{ pour } +$$

donc

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = 1.5478 \text{ pour } +$$

$x(t)$  est une solution de l'équation

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{2}(1 + x^2(t) + (x(t) + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}})^2) \\ x'(t) &= x^2(t) + \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}x(t) + \frac{17}{16} \pm \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

alors

$$x(t) = \left( \sqrt{\frac{27}{16} \pm \frac{7+2\sqrt{14}}{4\sqrt{2}}} \tan \frac{t+c}{\sqrt{\frac{27}{16} \pm \frac{7+2\sqrt{14}}{4\sqrt{2}}}} \right) + \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

on prend  $c = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \left( \sqrt{\frac{27}{16} \pm \frac{7+2\sqrt{14}}{4\sqrt{2}}} \tan \frac{t}{\sqrt{\frac{27}{16} \pm \frac{7+2\sqrt{14}}{4\sqrt{2}}}} \right) + \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \\ x(t) &= 2.061 \tan \frac{t}{2.061} + 1.4354 \end{aligned}$$

alors la courbe  $\gamma$  est de la forme (Voir figure 2)

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2.061 \tan \frac{t}{2.061} + 1.4354 \\ y(t) = 2.061 \tan \frac{t}{2.061} + 2.9832 \\ z(t) = 3.6896 \times 10^{-2}t. \end{cases}$$

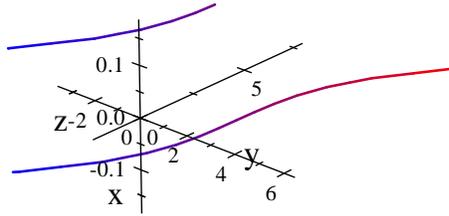


Figure 2

**Exemple 4.12 (type3)** *Si on prend*

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \beta_0 = 0, \\ b = 0, \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \\ l = 3, m = 2 \end{cases}$$

*Donc*

$$\sigma = 1.$$

*et*

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2} = 0.5 \text{ pour } +$$

*Donc*

$$x_0 = \pm \frac{1}{8} = 0.125 \text{ pour } +$$

*alors*

$$z(t) = \pm \frac{3}{16} t = 0.1875 t \text{ pour } +$$

*et*

$$y'(t) = \pm \left( 1 + 2 \left[ \frac{1}{64} + y^2(t) \right] \right)$$

$$y'(t) = \pm (2y^2(t) + 1.0313)$$

où  $y(t)$  est une solution de l'équation

$$y'(t) = \pm(2y^2(t) + 1.0313)$$

donc

$$y(t) = 1.0155 \tan \frac{t}{\sqrt{1.0313}}$$

alors la courbe  $\gamma$  est de la forme (Voir figure 3)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 = 0.125 \\ y(t) = 1.0155 \tan (0.98471 t) \\ z(t) = -0.1875 t \end{cases}$$

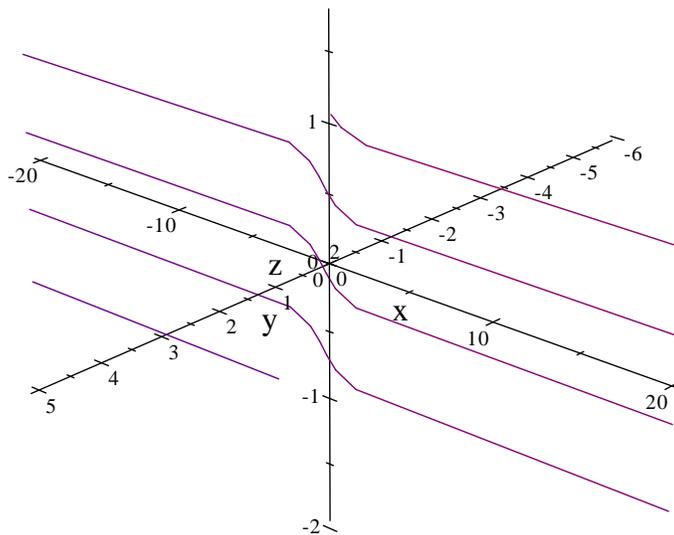


Figure 3

# Conclusion

D'après l'étude des courbes harmoniques et biharmoniques dans  $(\mathbb{M}_{bcv}^3, ds_{l,m}^2)$ , on déduit que les courbes harmoniques dans  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  sont des géodésiques ce qu'ils ne sont pas intéressant dans notre travail. Dans l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu on montre qu'il existe des courbes biharmoniques non géodésiques qui sont des courbes hélices avec des conditions et on donne leurs formes explicites dans l'espace Bianchi-Cartan-Vranceanu de dimension 3.

# Perspective

1. Caractériser les courbes harmoniques et biharmoniques dans des variétés riemanniennes de dimension 3.
2. Etudier les propriétés de biharmonicité des courbes dans l'espace de Bianchi-Cartan-Vranceanu  $\mathbb{M}_{bcv}^3$  au cas Lorentzien
3. Généraliser l'étude de la biharmonicité sur la variété au cas pseudo-Riemannien.

# Bibliographie

- [1] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier Villars, Paris (1946).
- [2] M. Barros, General helices and a theorem Lancret. *Proc.*, 125, 1503 {(1509, (1997)}
- [3] O. Kowalski. Spaces with volume-preserving symmetries and related classes of Riemannian manifolds. *Rend. Sem. Mat. Torino* (1983), 131–159.