

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ: 2017/2018

Sur un processus autorégressif à coefficient aléatoire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse stochastique, statistique du processus
et applications (ASSPA)

par

Razika Berrekia¹

Sous la direction de

Dr. F. Mokhtari

Soutenu le 21/06/2018 devant le jury composé de

Dr. F. Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. F. Mokhtari	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. R. Rouane	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : malek.berrekia@gmail.com

Remerciements

Alhamdulillah au plus gracieux et puissant Allah qui m'a donné la force et la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ici mes sincères remerciements ainsi que ma vive gratitude envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce modeste travail.

Mes sincères remerciements et reconnaissance vont à ma directrice de mémoire *M^{me}Fatiha Mokhtari*, pour sa disponibilité, ses orientations et ses remarques fructueuses, et pour la confiance qu'elle m'a accordé.

Mes sincères remerciements vont à mes parents, pour leur amour continu et leurs prières qui m'ont donné la force de compléter ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à *M^rF.Madani* d'avoir accepté de présider le jury ainsi qu'aux membres du jury qui m'ont honoré en acceptant de juger ce travail.

Un remerciement particulier pour tous mes enseignants.

Résumé

Ce mémoire est dévolue à l'étude de certaines propriétés du processus autorégressif à coefficients aléatoires. Ce dernier qualifie comunément une suite $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ entièrement décrité par ses valeurs passées multipliées par des coefficients aléatoire et perturbé par un bruit blanc. Nous traitons quelques problématiques de l'étude de tel processus : stationnarité, estimation et prévision. On termine ce travail par des simulations réalisés par le langage **R**.

Title : On random coefficient autoregressive process.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of some properties of random autoregressive process. The latter comunetarily qualifies a sequence $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ entirely decremented by its past values multiplied by random coefficients and perturbed by a white noise. We deal with some problems of the study of such process : stationarity, estimation and forecasting. We finish this work by simulations realized by **R** language.

Mots clés : Processus stationnaire, processus autorégressif réel (AR), processus autorégressif à coefficient aléatoire (RCA), estimation, prévision.

Key words : Stationary process, real autoregressive process (AR), random coefficient autoregressive process (RCA), estimation, forecasting.

Table des matières

Introduction	6
1 Processus autorégressifs réels	8
1.1 Généralités sur les processus réels stationnaires du second ordre	8
1.1.1 Définitions	8
1.1.2 Processus stationnaire au sens strict	8
1.1.3 Processus stationnaire d'ordre deux ou faiblement stationnaire	9
1.1.4 Exemples de processus stationnaires	9
1.2 Processus autorégressifs d'ordre un (AR(1))	12
1.2.1 Définition et propriétés	12
1.2.2 Estimation dans un modèle AR(1)	13
1.2.3 Prévission dans un AR(1)	16
1.3 Processus autorégressifs d'ordre p (AR(p))	17
1.3.1 Définition et propriétés	17
1.3.2 Estimation dans un modèle AR(p)	18
1.3.3 Prévission dans un AR(p)	20
2 Processus autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un	21
2.1 Introduction	21
2.2 Définition	21
2.2.1 Existence d'une solution faiblement stationnaire	22
2.2.2 Existence d'une solution strictement stationnaire	24
2.3 Estimation dans un modèle RCA(1)	27
2.3.1 Estimation par la méthode des moindres carrés	27
2.3.2 Consistance de l'estimateur des moindres carrés	29

2.3.3	Estimation par maximum de vraisemblance	31
2.3.4	Consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance	33
2.3.5	Prévision dans un RCA(1)	33
3	Processus autorégressifs à coefficient aléatoires d'ordre P	36
3.1	Préliminaire	36
3.2	Définition	37
3.3	Ecriture d'un RCA(p) sous forme d'un RCA(1)	37
3.4	Conditions de stationnarité	38
3.4.1	Existence d'une solution faiblement stationnaire	43
3.4.2	Existence d'une solution strictement stationnaire	45
3.5	Estimation dans un modèle RCA(p)	46
3.5.1	Estimation par la méthode des moindres carrés	46
3.5.2	Consistance de l'estimateur des moindres carrés	47
3.5.3	Estimation par maximum de vraisemblance	49
3.5.4	Consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance	52
3.6	Prévision dans un RCA(p)	53
3.7	Simulations	54
3.7.1	Simulation d'un modèle RCA(p)	54
3.7.2	Estimation et prévision	61
3.8	Application	62
3.8.1	Application sur des données simulés	62
3.8.2	Application sur la série lh	64
3.9	Conclusion	67
	Bibliographie	68

Introduction

L'étude de l'analyse des séries chronologiques est fondamentale quant à leurs utilisations dans de nombreux domaines tels que l'économie, la finance, l'économétrie, la biologie, ... etc.

Les formulations classiques ne sont pas toujours appropriées pour modéliser ce genre de modèles car les modèles considérés sont généralement linéaires à coefficients constants. Dans la plupart des situations, on ne s'attend pas à ces modèles soient la meilleure classe pour s'adapter à un ensemble de données réelles, même si on fait tacitement l'hypothèse que le modèle linéaire à l'étude est une bonne approximation de la réalité physique. Un certain nombre de facteurs ont conduit à une prise en compte des différentes catégories de modèles non linéaires. Dans certains domaines tels que l'hydrologie, la météorologie et la biologie, les coefficients du modèle sont les résultats de plusieurs processus compliqués et actions de caractère aléatoire, d'où l'intérêt de considérer des modèles à coefficients aléatoires qui constituent une généralisation des modèles à coefficients constants. Andel (1976) a établi des conditions pour la stationnarité faible pour cette classe dans le cas univarié, Nicholls et Quinn (1982) ont généralisé ces résultats au cas multivarié.

Un des exemples des données non linéaire, les données sur le lynx canadien. Moran (1953) a effectué une analyse statistique rigoureuse et un modèle AR(2) a été ajusté aux données. Il a noté que les prédictors à un pas en avant du modèle ajusté n'étaient pas particulièrement bons, il a suggéré en outre que le processus pourrait être mieux représenté par un modèle non linéaire. D'autre part, Tong (1977) a ajusté les données de lynx en utilisant un modèle AR(12). Il a souligné qu'un modèle AR fournit une bonne ap-

proximation mais peut être amélioré par un modèle non linéaire. Plus tard, Nicholls et Quinn (1982) ont montré que les données sur le lynx canadien sont mieux ajustées en utilisant un modèle autorégressif à coefficients aléatoires non linéaires d'ordre deux, RCA(2). Leur conclusion était basée sur l'obtention d'une erreur quadratique plus petites par rapport aux modèles donnés par Moran (1953) et Tong (1977).

L'analyse des modèle non linéaire a connu un intérêt croissant dans la littérature. Récemment des études ont été menées par Sue et al. (2006), Aue (2006), Aue et Horvath (2011), Fink et Kreiss (2013) qui ont également examiné plusieurs autres cas, par exemple, le cas de la non stationnarité, l'instabilité temporelle des paramètres, et l'estimation par les méthodes de bootstrap.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous introduisons certaines notions et définitions importantes sur les processus stationnaires et plus particulièrement les processus autorégressifs réels. Les conditions d'existence d'une solution stationnaire, l'estimation du coefficient de corrélation et la prévision sont aussi présentés dans ce chapitre.

On s'intéresse au deuxième chapitre à l'étude d'un processus autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un RCA(1). Nous commençons par donner quelques concepts importants, un intérêt particulier est porté sur les conditions d'existence d'une solution stationnaire, l'estimation et la prévision de tels processus.

Le chapitre trois est une généralisation du 2^{ème} chapitre à l'ordre p. Il est consacré au traitement des processus autorégressifs à coefficients aléatoires d'ordre p RCA(p). Après avoir donner les conditions de stationnarité et d'existence de la solution pour ce modèle. Nous décrivons quelques méthodes d'estimation du coefficient aléatoire, des résultats sur la consistance de ces estimateurs est fournis. Enfin, nous décrivons les différentes étapes de simulation de tels processus et en utilisant le langage **R**. On termine ce chapitre par une comparaison entre AR(1) et RCA(1) sur les données lh.

Chapitre 1

Processus autorégressifs réels

1.1 Généralités sur les processus réels stationnaires du second ordre

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et d'une fonction $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ représentant l'état du système. Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $X_t(\omega)$, en revanche, pour une évolution particulière du système (i.e à ω fixé) les états successifs sont représentés par la fonction $t \rightarrow X_t(\omega)$ que l'on nomme par abus de langage une trajectoire.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Un processus aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indicé par un ensemble de temps $T \subset \mathbb{R}_+$, est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un certain espace E .*

1.1.2 Processus stationnaire au sens strict

Dans toute la suite on considérera $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et on supposera $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \forall t \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.1.2. *(Stationnarité stricte ou forte)*

On dit que le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est « **strictement stationnaire** » si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \dots, t_k)$, et tout décalage temporel $h \in \mathbb{Z}$, la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ est la même que celle de $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$.

1.1.3 Processus stationnaire d'ordre deux ou faiblement stationnaire

Définition 1.1.3. (Stationnarité faible)

On dit que le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est « **faiblement stationnaire** », (ou stationnaire du second ordre), si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(X_t) = m < \infty$, indépendante de t .
- (ii) $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 = \gamma(0) < \infty$
- (iii) $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t+h}) = \gamma(h)$ (ne dépend que de h)

$\gamma(h)$ est l'**auto-covariance** d'ordre h de X_t .

En résumé, un processus est stationnaire de second ordre si l'ensemble de ses moments sont indépendants du temps.

Remarque 1.1.1. (1) Dans la suite, les processus stationnaires désignent les processus de la définition (1.1.3).

(2) (iii) \Rightarrow (ii) : $h = 0$ et $\gamma(0) = \sigma^2$,

(3) La stationnarité stricte implique la stationnarité faible (la réciproque n'est pas vraie sauf pour les processus Gaussiens).

$$(4) \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}; \mathbb{V} \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \dots & \gamma(t_j - t_i) \\ & \ddots & \vdots \\ & & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

1.1.4 Exemples de processus stationnaires

Exemple 1. (Processus stationnaire)

L'exemple le plus connu de processus stationnaire est le processus bruit blanc (notée \mathcal{BB} , ou White noise), il existe deux sorte de bruit blanc.

(1) $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **bruit blanc faible**, si et seulement si :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma(h) = \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

(2) $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **bruit blanc fort** si et seulement si les ε_t sont i.i.d,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(\varepsilon_t) = \sigma^2.$$

On notera $\varepsilon_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$

Exemple 2. Processus non stationnaire

(1) Soit le processus Y_t indicé par \mathbb{N} à tendance linéaire donné, pour $t \in \mathbb{N}$, par

$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et ε_t forme un bruit blanc. Il est ici bien évident que $\mathbb{E}(Y_t) = a + bt$.

(2) **Marche aléatoire** : Un processus (Y_t) indicé par \mathbb{N} suit une « marche aléatoire » si, pour tout $t \in \mathbb{N}$, il vérifie

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

où Y_0 est arbitraire et $\varepsilon_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$

Pour Y_0 choisie dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendante de ε_t , il est facile de remonter jusqu'à l'expression explicite du processus. Ainsi,

$$Y_t = Y_0 + \sum_{k=1}^t \varepsilon_k$$

ce qui garantit certes une stationnarité en espérance, puisque $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0)$, mais le calcul direct nous montre que $\mathbb{V}(Y_t) = \mathbb{V}(Y_0) + \sigma^2 t$, source de non stationnarité en variance.

Définition 1.1.4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On dit que $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est une transformation qui préserve la mesure \mathbb{P} si :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A).$$

Définition 1.1.5. Un ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$ est dit invariant par rapport à T si $T^{-1}(A) = A$.

Une transformation qui préserve la mesure est dite ergodique si pour tout ensemble invariant A , $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Définition 1.1.6. L'opérateur shift S est défini sur \mathbb{R}^∞ par :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, S(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots) = (\dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots).$$

Remarque 1.1.2. Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire alors le shift S préserve $\mathbb{P}X^{-1}$ la loi de X . En effet :

Soit $A = \prod_{i \in \mathbb{Z}} A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^\infty}$ la tribu borélienne de \mathbb{R}^∞ où $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On a

$$\begin{aligned} S^{-1}(A) &= \{(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid S(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_0, x_1, \dots) \in A\} \\ &= \{(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid (\dots, x_{i-1}, x_i, \dots) \in A\} \\ &= \prod_{i \in \mathbb{Z}} A_{i-1} \end{aligned}$$

Par la stationnarité, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in S^{-1}(A)) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} (X_i \in A_{i-1})\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} (X_{i-1} \in A_{i-1})\right) \\ &= \mathbb{P}(X \in A) \end{aligned}$$

Le processus X est dit ergodique si sous $\mathbb{P}X^{-1}$ le shift S est ergodique.

Le théorème suivant assure la convergence presque sûre de la moyenne d'une suite strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 1.1. (Théorème ergodique) Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ une suite aléatoire strictement stationnaire et ergodique avec $\mathbb{E}(|\xi_1|) < \infty$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = \mathbb{E}(\xi_1) \quad p.s$$

Théorème 1.2. (*Théorème central limite*) Soit (Y_t) une suite de variables aléatoires avec la propriété que Y_t peut être exprimée comme une fonction qui ne dépend pas de t , mesurable par rapport à la σ -tribu \mathcal{A}_t engendrée par la suite de variables aléatoires $(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots)$ qui est strictement stationnaire et ergodique.

De plus, on suppose que $\mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{A}_{t-1}) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_t^2) = c^2 < \infty$. Alors $(c^2 n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n Y_t$ converge en distribution vers une variable normale standard.

1.2 Processus autorégressifs d'ordre un (AR(1))

Un processus autorégressif est un modèle de régression pour séries temporelles dans lequel la série est expliquée par ses valeurs passées plutôt que par d'autres variables. Dans cette section on s'intéresse au processus autorégressif d'ordre un.

1.2.1 Définition et propriétés

Un processus autorégressif d'ordre un (AR(1)) est défini par :

$$X_t = \alpha + \varphi X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\epsilon_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma_\epsilon^2)$

Si $|\varphi| \neq 1$, le processus est stationnaire.

Proposition 1.2.1. Si $X_t \sim AR(1)$ tel que $X_t = \alpha + \varphi X_{t-1} + \epsilon_t$ alors

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\alpha}{1-\varphi}$$

Propriétés des processus AR(1)

On a :

(i) Si $\varphi = \pm 1$, le processus (X_t) n'est pas stationnaire.

(ii) Si $|\varphi| < 1$ alors $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i}$

(iii) Si $|\varphi| > 1$ alors $X_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{-i} \epsilon_{t+i}$

Auto-covariance et équations de Yule-Walker

On suppose que $|\varphi| < 1$. On a

- L'auto-covariance :

$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h})$ pour $h \geq 0$ (car $m = 0$), et

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \epsilon_t$$

Pour $h = 0$:

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \varphi X_t X_{t-1} + X_t \epsilon_t \\ \gamma(0) &= \varphi \gamma(1) + \mathbb{E}(X_t \epsilon_t) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t \epsilon_t) &= \mathbb{E}(\varphi X_{t-1} \epsilon_t) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \\ &= \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(\varphi X_{t-1} \epsilon_t) = 0$, car $\epsilon_t \perp \epsilon_{t-i}, \forall i \geq 1$

$$\gamma(0) = \varphi \gamma(1) + \sigma_\epsilon^2 \quad (1)$$

Pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t-h}) &= \varphi \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-h}) + \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-h})}_{=0} \\ &= \varphi \gamma(h-1) \\ &\vdots \\ \gamma(h) &= \varphi^h \gamma(0) \end{aligned} \quad (2)$$

- Les équations (1) et (2) sont appelées équations de Yule-Walker.

1.2.2 Estimation dans un modèle AR(1)

On va s'intéresser à l'estimation du paramètre autorégressif d'ordre un avec innovations gaussiennes. On considère le modèle

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

On suppose que l'état initial X_0 est une variable gaussienne avec $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et $\mathbb{V}(X_0) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{(1-\varphi^2)}$.

Estimateur des moindres carrés

L'utilisation de la méthode des moindres carrés pour le modèle (1.2) consiste à minimiser la fonction

$$S(\varphi) = \sum_{t=2}^n \epsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n (x_t - \varphi x_{t-1})^2$$

On dérive la fonction $S(\varphi)$ par rapport à φ :

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} = 2 \sum_{t=2}^n (x_t - \varphi x_{t-1})(-x_{t-1}).$$

On trouve :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{t=2}^n (x_t - \varphi x_{t-1})(-x_{t-1}) &= 0 \\ \sum_{t=2}^n (-x_t x_{t-1} + \varphi x_{t-1}^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1} + \varphi \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2 &= 0 \\ \varphi \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2 &= \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1} \end{aligned}$$

On obtient un estimateur de φ appelé l'estimateur des moindres carrés qu'on note $\hat{\varphi}_{MC}$ avec

$$\hat{\varphi}_{MC} = \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}.$$

Le théorème ergodique montre que le numérateur tend presque sûrement vers $\gamma(1) = \varphi \gamma(0)$ et que le dénominateur tend vers $\gamma(0)$. On en déduit que $\hat{\varphi}_{MC} \rightarrow \varphi$ presque sûrement quand $n \rightarrow \infty$.

Estimateur du maximum de vraisemblance

Notons par $L_n(\varphi, x_1, x_2, \dots, x_n)$, la fonction de vraisemblance des variables X_1, X_2, \dots, X_n dans le modèle (1.2), alors

$$\begin{aligned} L_n(\varphi, x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon^2}\right)^{n/2} (1 - \varphi^2)^{n/2} \exp \frac{-1}{2\sigma_\epsilon^2} \left\{ (1 - \varphi^2)x_1^2 + \sum_{t=2}^n (x_t - \varphi x_{t-1})^2 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon^2}\right)^{n/2} (1 - \varphi^2)^{n/2} \exp \frac{-1}{2\sigma_\epsilon^2} \left\{ x_1^2 + x_n^2 + (1 - \varphi^2) \sum_{t=2}^{n-1} x_t^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\varphi \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1} \right\} \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre φ noté par $\hat{\varphi}_{MV}$ ne possède pas une expression analytique. On pose

$$P_1 = x_1^2 + x_n^2$$

$$P_2 = \sum_{t=2}^n x_{t-1} x_t$$

$$P_3 = \sum_{t=2}^{n-1} x_t^2$$

$$\log L_n(\varphi) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\epsilon^2) + \frac{n}{2} \log(1 - \varphi^2) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} (P_1 + (1 + \varphi^2)P_3 - 2\varphi P_2)$$

Les dérivées de $\log L_n(\varphi)$ par rapport à φ et σ_ϵ^2 sont respectivement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L_n}{\partial \varphi} = \frac{-\varphi}{1-\varphi^2} - \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} (\varphi P_3 - P_2), \\ \frac{\partial \log L_n}{\partial \sigma_\epsilon^2} = \frac{-n}{2\sigma_\epsilon^2} + \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4} (P_1 + (1 + \varphi^2)P_3 - 2\varphi P_2). \end{cases}$$

$$\frac{\partial \log L_n}{\partial \sigma_\epsilon^2} = 0 \implies \hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{n} [P_1 + (1 + \varphi^2)P_3 - 2\varphi P_2]$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est solution de l'équation

$$(1 - \varphi^2)(P_2 - \varphi P_3) - \frac{\varphi}{n} (P_1 + (1 + \varphi^2)P_3 - 2\varphi P_2) = 0$$

qui s'écrit

$$g(\varphi) = \varphi^3 - \frac{(n-2)P_2}{(n-1)P_3} \varphi^2 - \frac{P_1 + (n+1)P_3}{(n-1)P_3} \varphi + \frac{nP_2}{(n-1)P_3} = 0$$

On a

$$\lim g(\varphi) = +\infty \quad \text{quand} \quad \varphi \rightarrow \infty$$

$$g(1) = \frac{2P_2 - 2P_3 - P_1}{(n-1)P_3} < 0$$

$$g(-1) = \frac{2P_2 + 2P_3 + P_1}{(n-1)P_3} > 0$$

$$\lim g(\varphi) = -\infty \quad \text{quand} \quad \varphi \rightarrow -\infty$$

d'où l'équation $g(\varphi) = 0$ possède trois solutions φ_1^* , φ_2^* , φ_3^* vérifiant :

$$\varphi_1^* < -1 < \varphi_2^* < 1 < \varphi_3^*$$

L'estimateur $\hat{\varphi}_{MV} = \varphi_2^*$ est l'unique solution entre -1 et $+1$. Les valeurs numériques de $\hat{\varphi}_{MV}$ seront calculées en localisant le zéro de la fonction $\frac{\partial \log L_n}{\partial \varphi}$.

1.2.3 Prévision dans un AR(1)

Etant donnée une série stationnaire (X_t) , observée entre 1 et T , on cherche à faire de la prévision à horizon h , et donc à prévoir X_{T+1}, \dots, X_{T+h} . On suppose que l'on a le modèle :

$$X_t = \alpha + \phi X_{t-1} + \epsilon_t$$

La prévision à horizon 1, faite à la date T , s'écrit

$$X_{T+1}^* = \text{EL}(X_{T+1} | \underline{X}_T) = \alpha + \phi X_T$$

Où $\text{EL}(X_{T+1} | \underline{X}_T)$ est la projection orthogonale de X_{T+1} sur le sous espace vectoriel engendré par (X_T, X_{T-1}, \dots) .

Et de façon similaire

$$X_{T+2}^* = \alpha + \phi X_{T+1}^* = \alpha + \phi(\alpha + \phi X_T) = \alpha(1 + \phi) + \phi^2 X_T$$

De façon plus générale, on obtient récursivement la prévision à horizon h , X_{T+h}^* de la forme

$$X_{T+h}^* = \alpha + \varphi X_{T+h-1}^* = \alpha(1 + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{h-1}) + \varphi^h X_T$$

On peut noter que quand $h \rightarrow \infty$, X_{T+h}^* tend vers $\alpha/(1 - \varphi)$ la moyenne du processus X_t .

1.3 Processus autorégressifs d'ordre p (AR(p))

1.3.1 Définition et propriétés

On appelle processus autorégressif d'ordre p , noté $AR(p)$, un processus stationnaire (X_t) vérifiant une relation du type

$$X_t = \alpha + \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \epsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}$$

avec $\varphi_p \neq 0$ et $\epsilon_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Auto-covariance et équations de Yule-Walker

- L'auto-covariance :

Pour $h \geq 0$, $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h})$ car $m=0$ et

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

Donc

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \varphi_1 X_t X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_t X_{t-p} + X_t \epsilon_t \\ \gamma(0) &= \varphi_1 \gamma(1) + \dots + \varphi_p \gamma(p) + \mathbb{E}(X_t \epsilon_t) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t \epsilon_t) &= \mathbb{E}((\varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p}) \epsilon_t) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \\ &= \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

$\mathbb{E}((\varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p})\epsilon_t) = 0$, car $\epsilon_t \perp \epsilon_{t-i}$, $\forall i \geq 1$

$$\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \dots + \varphi_p \gamma(p) + \sigma_\epsilon^2$$

Si $h > 0$, on procède de la même façon :

$$\begin{aligned} X_t X_{t-h} &= \varphi_1 X_{t-1} X_{t-h} + \dots + \varphi_p X_{t-p} X_{t-h} + \epsilon_t X_{t-h} \\ \gamma(h) &= \varphi_1 \gamma(h-1) + \dots + \varphi_p \gamma(h-p) + \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-h})}_{=0} \end{aligned}$$

- Ces dernières équations sont appelées équations de Yule-Walker. Pour $h > 0$, les $\gamma(h)$ vérifient une relation de récurrence d'ordre p . Les équations de Yule-Walker pour $h = 1, \dots, p$ peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma(p-1) & & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(p) \end{pmatrix}$$

Ces équations permettent de donner une estimation préliminaire de $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p$ en fonction de $\hat{\gamma}(1), \dots, \hat{\gamma}(p)$.

1.3.2 Estimation dans un modèle AR(p)

On s'intéresse dans cette section à l'estimation des paramètres d'un autorégressif d'ordre p .

Estimation par la méthode des moindres carrés

Un modèle $AR(p)$ s'écrit

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t \\ &= Z_t' \beta + \epsilon_t \end{aligned}$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc, $Z_t' = (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})$ et $\beta' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$. L'estimation des paramètres du modèle $X_t = Z_t' \beta + \epsilon_t$ par la méthode des moindres carrés est donnée par

$$\hat{\beta} = (Z_t Z_t')^{-1} Z_t X_t \text{ et } \hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n (X_t - Z_t' \hat{\beta})^2.$$

Il est toutefois possible de montrer le résultat suivant,

Proposition 1.3.1. *Si les racines du polynôme caractéristique (racines de $\phi(z) = 0$) sont à l'extérieur du disque unité alors ,*

$$\hat{\beta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_\epsilon^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_\epsilon^2$$

et de plus

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma_\epsilon^2 V), \quad \text{où } V = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Z_t Z_t'$$

Estimation par maximum de vraisemblance

Pour déterminer la vraisemblance, il est nécessaire de supposer connue la loi des erreurs. On suppose que les erreurs sont normalement distribuées. Les erreurs étant normalement distribuées et indépendantes (le processus (ϵ_t) est, par hypothèse un bruit blanc), le vecteur $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ est un vecteur gaussien. Les composantes du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)'$ étant obtenues par combinaisons linéaires des composantes du vecteur ϵ , X sera un vecteur gaussien $X \sim N(0, \sigma_\epsilon^2 \Omega)$.

$$L(X = (X_1, \dots, X_n)', \phi, \sigma_\epsilon^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\epsilon^2)^{n/2}} \frac{1}{(\det \Omega)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} X' \Omega^{-1} X\right),$$

La log-vraisemblance est alors donnée par :

$$\log L(X, \phi, \sigma_\epsilon^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \sigma_\epsilon^2 - \frac{1}{2} \log |\det \Omega| - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} X' \Omega^{-1} X$$

Le problème est que cette log-vraisemblance est difficile à calculer et donc à maximiser à cause de $(\det \Omega)$ et de Ω^{-1} (matrice $n \times n$). De plus, il faut se donner des valeurs préliminaires pour les paramètres, puisque la maximisation de la log-vraisemblance utilise des algorithmes de maximisation itératifs.

1.3.3 Prévision dans un AR(p)

Le modèle s'écrit ,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

La prévision optimale à la date $T + 1$, faite à la date T est

$$X_{T+1}^* = EL(X_{T+1}|X_T, X_{T-1}, \dots)$$

Aussi,

$$X_{T+1}^* = \phi_1 X_T + \dots + \phi_p X_{T-p}$$

De façon analogue,

$X_{T+h}^* = \phi_1 X_{T+h-1} + \dots + \phi_p X_{T+h-p} + \epsilon_{T+h}$, et donc $X_{T+h}^* = EL(X_{T+h}|X_T, X_{T-1}, \dots)$ est donné, de façon récursive par

$$X_{T+h}^* = \begin{cases} \phi_{1.T} X_{T+h-1}^* + \dots + \phi_{h-1.T} X_{T+1}^* + \phi_h X_T + \dots + \phi_p X_{T+h-p} & \text{pour } h \leq p \\ \phi_{1.T} X_{T+h-1}^* + \dots + \phi_{p.T} X_{T+h-p}^* & \text{pour } h > p \end{cases}$$

Chapitre 2

Processus autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un

2.1 Introduction

L'observation de certaines séries chronologiques provenant du monde économique et financier (par exemple, des taux d'échanges, des taux d'actions et des indices, ...) montre des caractéristiques spécifiques qui ne sont pas théoriquement prises en compte dans la modélisation linéaire. Parmi les modèles non linéaires, pour modéliser ce genre de données de séries chronologiques, les processus autorégressifs à coefficients aléatoires d'ordre un noté RCA(1), où le coefficient φ n'est pas une constante mais une variable aléatoire.

2.2 Définition

Définition 2.2.1. *Un processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit autorégressif à coefficient aléatoire RCA(1), s'il vérifie l'équation suivante :*

$$X_t = \alpha + \phi_t X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

$$\text{Si } \alpha = 0, \text{ on a } X_t = \phi_t X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Où (ϕ_t, ϵ_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) non nécessairement Gaussiennes avec

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\phi_t) &= \phi \\ \mathbb{E}(\epsilon_t) &= 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{V}(\phi_t) &= \sigma_\phi^2 \\ \mathbb{V}(\epsilon_t) &= \sigma_\epsilon^2 \\ \text{Cov}(\epsilon_t, \phi_t) &= \sigma_{\phi\epsilon} \end{cases}$$

Cependant des cas particuliers s'en déduisent :

1) Pour $\sigma_\phi^2 = \mathbb{V}(\phi_t) = 0$, on retrouve le modèle autorégressif d'ordre 1 (AR(1)) de paramètre ϕ

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

2) Si $\phi_t = \phi + \theta\epsilon_t$ et $\sigma_{\phi\theta} = \theta\sigma_\epsilon^2$, alors

$$X_t = (\phi + \theta\epsilon_t)X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

C'est le modèle Markovien bilinéaire de paramètre ϕ noté ($MBL(\phi)$).

2.2.1 Existence d'une solution faiblement stationnaire

La stationnarité du modèle (2.2) est donnée par les conditions induites par le théorème suivant :

Théorème 2.1. [6](S.Y.Hwang et I.V.Basawa 1993) Si

$$\mathbb{E}(\phi_t^2) < 1$$

c'est à dire

$$\phi^2 + \sigma_\phi^2 < 1 \quad (1)$$

alors le processus (2.2) admet une unique solution stationnaire ergodique dans L^2 donnée par :

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i} \right) \epsilon_{t-j} \quad (2.5)$$

Hwang et Basawa (1993), démontrent ce théorème en se référant à Nicholls and Quinn (1982) et Breiman (1968) (p105).

Ils notent d'abord que (2.5) satisfait l'équation (2.2) et que X_t dans (2.5) est stationnaire et ergodique.

Démonstration 1. *En réécrivant le modèle (2.5) sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
X_t &= \phi_t X_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \phi_t (\phi_{t-1} X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&= \phi_t \phi_{t-1} X_{t-2} + \phi_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \phi_t \phi_{t-1} (\phi_{t-2} X_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \phi_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \phi_t \phi_{t-1} \phi_{t-2} X_{t-3} + \phi_t \phi_{t-1} \epsilon_{t-2} + \phi_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&\vdots \\
&= \prod_{j=0}^{p-1} \phi_{t-j} X_{t-p} + \sum_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i} \epsilon_{t-j} \right) + \epsilon_t
\end{aligned}$$

et d'après B. Tchebychev, lorsque $p \rightarrow \infty$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left\{ \left| \prod_{j=0}^{p-1} \phi_{t-j} X_{t-p} \right| > \epsilon \right\} &\leq \frac{\mathbb{E} \left(\prod_{j=0}^{p-1} \phi_{t-j} X_{t-p} \right)^2}{\epsilon^2} \\
&\leq \frac{\prod_{j=0}^{p-1} \mathbb{E}(\phi_{t-j}^2) \mathbb{E}(X_{t-p}^2)}{\epsilon^2} \\
&\leq \frac{(\sigma_\phi^2 + \phi^2)^p \mathbb{E}(X_{t-p}^2)}{\epsilon^2} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

car

$$\mathbb{E}(X_{t-p}^2) < \infty$$

et

$$\sigma_\phi^2 + \phi^2 < 1.$$

Il en résulte que X_t est stationnaire et ergodique si la condition (1) $(\sigma_\phi^2 + \phi^2 < 1)$ est satisfaite.

2.2.2 Existence d'une solution strictement stationnaire

On commence par énoncer le résultat de Billingsley (1995), qui sera utilisé dans la démonstration du théorème (2.2).

Lemme 2.2.1. *Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique. Considère un processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ avec $Y_t = \Phi(\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$, où Φ est mesurable. Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est strictement stationnaire et ergodique, en particulier, si les X_t sont indépendants et identiquement distribués, alors Y est strictement stationnaire et ergodique.*

Quinn (1982) a étudié l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique pour les modèles bilinéaires, définis par l'équation

$$X_t = aX_{t-1} + b\epsilon_t X_{t-1} + \epsilon_t$$

Où (ϵ_t) est une suite de variables aléatoires strictement stationnaire et ergodique.

Il a montré que la condition $(\mathbb{E}(\ln |a + b\epsilon_t|) \leq 0)$ est nécessaire et suffisante pour l'existence de cette solution. Les mêmes arguments sont appliqués à un modèle RCA(1) donne :

Théorème 2.2. [13] *Considérons le modèle (2.2) où $\{(\phi_t, \epsilon_t)\}$ est une suite de vecteurs aléatoires strictement stationnaire et ergodique avec*

$$\mathbb{E} |\ln |\epsilon_t|| < \infty \text{ et } \mathbb{E} |\ln |\phi_t|| < \infty$$

De plus, si $\mathbb{E}(\ln |\phi_t|) < 0$ alors il existe une solution $\{X_t\}$ strictement stationnaire et ergodique pour l'équation (2.2), et telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, X_t est mesurable par rapport à $\mathcal{A}_t = \sigma(\{(\phi_s, \epsilon_s), s \leq t\})$.

Démonstration 2. *Supposons que*

$$\mathbb{E}(\ln |\phi_t|) = d < 0.$$

On définit la suite $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ par :

$$T_0 = \epsilon_t \text{ et } T_j = \prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i} \epsilon_{t-j}, \text{ pour } j \geq 1$$

Soit $S_r = \sum_{j=0}^r T_j$ on a :

$$\begin{aligned} \ln |T_j| &= \ln \prod_{i=0}^{j-1} |\phi_{t-i}| |\epsilon_{t-j}| \\ &= \ln |\epsilon_{t-j}| + \sum_{i=0}^{j-1} \ln |\phi_{t-i}| \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{j} \ln |T_j| = \frac{1}{j} \ln |\epsilon_{t-j}| + \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \ln |\phi_{t-i}|$$

Par le théorème ergodique, on obtient

$$\frac{1}{j} \ln |T_j| \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(\ln |\phi_t|)$$

soit

$$|T_j|^{1/j} \xrightarrow{p.s} \exp(\mathbb{E}(\ln |\phi_t|)) = \exp(d) < 1$$

On prend maintenant toutes les réalisations (T_j^*) pour lesquelles la convergence ci-dessus est vérifiée. Puis on donne $\delta > 0$, tel que $\delta + d < \rho < 1$ pour quelque ρ , on peut trouver R_δ tel que $|T_j^*| < \rho^j$ pour $j > R_\delta$.

D'où $\sum_{j=0}^r |T_j^*|$ converge et par conséquent $S_r = \sum_{j=0}^r T_j$ converge presque sûrement quand $r \rightarrow \infty$.

On pose :

$$\begin{aligned} Y_t^* &= \lim_{r \rightarrow \infty} S_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (\epsilon_t + \sum_{j=1}^r T_j) \\ &= \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i} \epsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Il est évident que Y_t^* est une solution \mathcal{A}_t mesurable pour l'équation (2.2). De plus par hypothèse $\{(\epsilon_t, \phi_t)\}$ est une suite de vecteurs strictement stationnaire et ergodique et par le lemme (2.2.1) on conclut que (Y_t^*) est strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 2.3. [18] Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un RCA(1) défini par la relation (2.2) Si les (ϕ_t, ϵ_t) ont des distributions normales, alors une condition suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique est :

$$\ln(\sigma_\phi^2) < \zeta + \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{1 - \exp(-\lambda(1 - \omega^2))}{1 - \omega^2} d\omega \quad (2.2.1)$$

où $\zeta \approx 0,57721$, ζ est la constante d'Euler, et $\lambda = \frac{\phi^2}{2\sigma_\phi^2}$.

Démonstration 3. Il est clair que $((e_t, \phi_t), t \in \mathbb{Z})$ est une suite strictement stationnaire et ergodique. Il est facile de voir que

$$\mathbb{E} | \ln | \epsilon_t || < \infty \text{ et } \mathbb{E} | \ln | \phi_t || < \infty$$

Afin de faire appel au théorème ergodique, on doit montrer que

$$\mathbb{E}(\ln | \phi_t |) = \mathbb{E}(\ln | \phi + \sigma_\phi v_t |) < 0$$

où $v_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

On considère deux cas :

1) Si $\phi = 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln | \phi_t |) &= \mathbb{E}(\ln | \sigma_\phi v_t |) \\ &= \ln | \sigma_\phi | + \mathbb{E}(\ln | v_t |) \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sigma_\phi^2) + \mathbb{E}(\ln | v_t |) \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sigma_\phi^2) - \frac{1}{2}(\zeta + \ln 2) \\ &< 0 \end{aligned}$$

2) Si $\phi \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln | \phi_t |) &= \mathbb{E}(\ln | \phi + \sigma_\phi v_t |) \\ &= \mathbb{E}(\ln(| \phi | | 1 + \frac{\sigma_\phi}{\phi} v_t |)) \\ &= \ln | \phi | + \mathbb{E}(\ln(| 1 + \frac{\sigma_\phi}{\phi} v_t |)) \\ &= \frac{1}{2} \ln | \phi^2 | + \mathbb{E}(\ln(| 1 + Z |)) \end{aligned}$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_\phi^2}{\phi^2})$

En utilisant l'évaluation de $\mathbb{E}(\ln | 1 + Z |)$, dans [13], on obtient

$$\mathbb{E}(\ln | \phi_t |) < 0 \Leftrightarrow \ln(\sigma_\phi^2) < \zeta + \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{1 - \exp(-\lambda(1 - \omega^2))}{1 - \omega^2}$$

Equations de Yule-Walker pour un RCA(1)

Sous les conditions du théorème (2.1). On a

$$\begin{aligned}\gamma(0) = \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1} X_t) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_t) \\ &= \mathbb{E}(\phi_t^2) \mathbb{E}(X_{t-1}^2) + \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1} \epsilon_t) + \sigma_\epsilon^2 \\ &= (\phi^2 + \sigma_\phi^2) \gamma(0) + \sigma_\epsilon^2\end{aligned}$$

Car on a par l'indépendance de ϕ_t et X_t et le fait que $\epsilon_t \perp \epsilon_{t-i}, \forall i \geq 1$:

$$\mathbb{E}(\phi_t X_{t-1} \epsilon_t) = \phi \mathbb{E}(X_{t-1} \epsilon_t) = 0$$

$$\text{et } \mathbb{E}(X_t \epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$$

D'où

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{(1 - \phi^2 - \sigma_\phi^2)}$$

pour $h > 0$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_{t-h}) &= \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1} X_{t-h}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-h}) \\ &= \mathbb{E}(\phi_t) \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-h}) \\ \gamma(h) &= \phi \gamma(h-1)\end{aligned}$$

par récurrence on trouve que

$$\gamma(h) = \phi^h \gamma(0)$$

2.3 Estimation dans un modèle RCA(1)

Il y a plusieurs méthodes pour estimer les paramètres d'un modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un. Dans ce travail on expose deux méthodes, la méthode des moindres carrés et celle du maximum de vraisemblance.

2.3.1 Estimation par la méthode des moindres carrés

Nicholls et Quinn (1981) considèrent l'échantillon X_0, X_1, \dots, X_n du modèle (2.2). L'estimateur des moindres carrés noté $\hat{\phi}_{MC}$ du paramètre ϕ tel que $\phi = \mathbb{E}(\phi_t)$ est obtenu en minimisant l'équation des erreurs.

Soit $\mathcal{A}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ la tribu engendrée par le processus X_t jusqu'à l'instant t on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t/\mathcal{A}_{t-1}) &= \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1} + \epsilon_t/\mathcal{A}_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1}/\mathcal{A}_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t/\mathcal{A}_{t-1})\end{aligned}$$

comme ϕ_t et ϵ_t sont indépendantes de \mathcal{A}_{t-1} et X_{t-1} est \mathcal{A}_{t-1} -mesurable alors

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{A}_{t-1}) = \phi X_{t-1}$$

Soit $u_t = X_t - \phi X_{t-1}$. Il en découle :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u_t/\mathcal{A}_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t - \phi X_{t-1}/\mathcal{A}_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}(X_t/\mathcal{A}_{t-1}) - \phi X_{t-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u_t^2/\mathcal{A}_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t^2/\mathcal{A}_{t-1}) + \phi^2 X_{t-1}^2 - 2\phi X_{t-1} \mathbb{E}(X_t/\mathcal{A}_{t-1}) \\ &= X_{t-1}^2(\sigma_\phi^2 + \phi^2) + \sigma_\epsilon^2 + \phi^2 X_{t-1}^2 - 2\phi^2 X_{t-1}^2 \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2\end{aligned}$$

on a

$$\sum_{t=1}^n u_t^2 = \sum_{t=1}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2$$

En dérivant cette fonction par rapport à ϕ , on a

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n u_t^2}{\partial \phi} = -2 \sum_{t=1}^n (X_t - \phi X_{t-1}) X_{t-1}$$

par la suite, on a

$$\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1} - \sum_{t=1}^n \phi X_{t-1} X_{t-1} = 0$$

d'où le résultat :

$$\hat{\phi}_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \quad (2.6)$$

On forme le résidu $\hat{u}_t = X_t - \hat{\phi}X_{t-1}$. On peut obtenir les estimations de σ_ϕ^2 et σ_ϵ^2 . C'est équivalent à minimiser

$l(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\phi^2) = \sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2 - (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2))^2$ par rapport aux paramètres σ_ϕ^2 et σ_ϵ^2 respectivement. On a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\phi^2} l(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\phi^2) = -2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 (\hat{u}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2) = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\epsilon^2} l(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\phi^2) = -2 \sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\phi^2 &= \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \hat{u}_t^2 - \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \sigma_\epsilon^2}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^4} \\ \hat{\sigma}_\epsilon^2 &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 - n^{-1} \hat{\sigma}_\phi^2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Soit

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 - \hat{\sigma}_\phi^2 \bar{z}$$

Où $\bar{z} = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2$.

2.3.2 Consistance de l'estimateur des moindres carrés

On constate, moyennant le théorème ergodique, $\hat{\phi}_{MC}$ est un estimateur consistant, car

$$\hat{\phi}_{MC} \rightarrow \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \phi$$

presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour déterminer la loi asymptotique de $\hat{\phi}_{MC}$, on ajoute la condition suivante

$$\mathbb{E}(X_t^4) < \infty \quad (2)$$

(ϵ_t, ϕ_t) sont indépendantes identiquement distribuées (iid) ce qui implique que le processus X_t est Markovien, donc il suffit que le moment d'ordre quatre de ϕ_t soit inférieur à un ($\mathbb{E}(\phi_t^4) < 1$) pour que le moment d'ordre quatre de X_t existe ($\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$), d'où le théorème suivant :

Théorème 2.4. [10] *Nicholls et Quinn (1981)* Lorsque $n \rightarrow +\infty$ et sous les conditions $(\sigma_\phi^2 + \phi^2 < 1)$ et $(\mathbb{E}(X_t^4) < \infty)$

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_{MC} - \phi) \xrightarrow{L} N(0, v^2)$$

Où

$$v^2 = (\sigma_\epsilon^2 \mathbb{E}(X_0^2) + 2\sigma_{\phi\epsilon} \mathbb{E}(X_0^3) + \sigma_\phi^2 \mathbb{E}(X_0^4)) / \gamma(0)^2$$

Démonstration 4. Pour démontrer ce résultat, on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{MC} - \phi &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{n} - \phi \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1} - \phi \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (\phi_t X_{t-1} + \epsilon_t - \phi X_{t-1}) X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} (\tilde{\phi}_t X_{t-1} + \epsilon_t)}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}. \end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}_t = \phi_t - \phi, t \in \mathbb{Z}.$$

On note que la loi de $\tilde{\phi}_t$ dépend de ϕ .

Si $(X_{t-1}(\tilde{\phi}_t X_{t-1} + \epsilon_t))$ est stationnaire et ergodique, d'après le théorème central limite (CTL)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_{t-1}(\tilde{\phi}_t X_{t-1} + \epsilon_t) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, v^2 \gamma(0)^2) \quad (2.7)$$

et d'après le théorème ergodique

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \rightarrow \gamma(0) \quad p.s \quad (2.8)$$

de (2.7) et (2.8) le résultat s'ensuit.

2.3.3 Estimation par maximum de vraisemblance

Dans cette section on considère les hypothèses suivantes :

H1 : $\sigma_\epsilon^2 \geq \delta_1 > 0$ et $\sigma_\phi^2 \geq \delta_2 > 0$.

H2 : $(\phi, \sigma_\phi^2) \in D$ où D est un ensemble fermé contenu dans la région de la stationnarité stricte et de l'ergodicité donnée par l'inégalité (2.2.1).

Les hypothèses H1 et H2 sont imposées afin que l'ensemble des paramètres du modèle RCA(1), $\Theta = \{(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2; (\phi, \sigma_\phi^2) \in D, \sigma_\epsilon^2 \geq \delta_1, \sigma_\phi^2 \geq \delta_2)\}$ soit compact.

Considérons l'échantillon (X_0, X_1, \dots, X_n) à partir d'un modèle RCA(1), X_t est strictement stationnaire, ergodique et \mathcal{A}_t mesurable et satisfait l'équation (2.2), on fixe un X_0 , et on dérive la fonction de vraisemblance en supposant la normalité de ϕ_t et ϵ_t .

Il est facile de voir que :

$$\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}) = \phi X_{t-1}$$

et

$$\mathbb{V}(X_t | X_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2$$

Ici la fonction de vraisemblance conditionnelle par rapport à X_0 a la forme

suivante :

$$\begin{aligned}
 f_n(X_1, \dots, X_n | X_0) &= \prod_{t=1}^n f(X_t | X_{t-1}) \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{t=1}^n \left\{ (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(X_t - \phi X_{t-1})^2}{2(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2)}\right) \right\} \\
 &= L_n(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 \tilde{l}_n(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2) &= -\frac{2}{n} \ln(L_n(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2)) - \ln(2\pi) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi X_{t-1})^2}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2 X_{t-1}^2}
 \end{aligned}$$

Il est plus pratique de minimiser $\tilde{l}_n(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2)$ que de maximiser $L_n(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2)$. Pour cela on pose $\tau = \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_\epsilon^2}$, et on donne la fonction \bar{l}_n qui dépend de τ .

$$\begin{aligned}
 \bar{l}_n(\phi, \tau, \sigma_\epsilon^2) &= \tilde{l}_n(\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2) \\
 &= \ln \sigma_\epsilon^2 + n^{-1} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau X_{t-1}^2) + \sigma_\epsilon^{-2} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi X_{t-1})^2}{1 + \tau X_{t-1}^2}
 \end{aligned}$$

En dérivant par rapport aux paramètres ϕ et σ_ϵ^2 respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{l}_n(\phi, \tau, \sigma_\epsilon^2) &= -2\sigma_\epsilon^{-2} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}(X_t - \phi X_{t-1})}{1 + \tau X_{t-1}^2} \\
 \frac{\partial}{\partial \sigma_\epsilon^2} \bar{l}_n(\phi, \tau, \sigma_\epsilon^2) &= \sigma_\epsilon^{-2} - \sigma_\epsilon^{-4} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi X_{t-1})^2}{1 + \tau X_{t-1}^2}
 \end{aligned}$$

On trouve

$$\phi(\tau) = \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{X_t X_{t-1}}{1 + \tau X_{t-1}^2} \right\} \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}^2}{1 + \tau X_{t-1}^2} \right\}^{-1}$$

et

$$\sigma_\epsilon^2(\tau) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi(\tau) X_{t-1})^2}{1 + \tau X_{t-1}^2}$$

2.3.4 Consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance 83

L'estimateur du maximum de vraisemblance de ϕ, σ_ϵ^2 et σ_ϕ^2 , peut être obtenu en calculant $\hat{\tau}$.

On peut considérer le minimum de la fonction suivante :

$$l_n(\tau) = \inf_{\sigma_\epsilon^2} \bar{l}_n(\phi, \tau, \sigma_\epsilon^2) - 1$$

Calculons $\inf_{\sigma_\epsilon^2} \bar{l}_n(\phi, \tau, \sigma_\epsilon^2)$, on obtient

$$\inf_{\sigma_\epsilon^2} \bar{l}_n(\phi, \tau, \sigma_\epsilon^2) = \ln(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{\phi}(\tau)X_{t-1})^2}{1 + \tau X_{t-1}^2}) + n^{-1} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau X_{t-1}^2) + 1$$

Donc

$$l_n(\tau) = \ln(\hat{\sigma}_\epsilon^2(\tau)) + n^{-1} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau X_{t-1}^2)$$

$\hat{\tau}$ est obtenu en minimisant la fonction ci-dessus.

Donc $\hat{\phi}_{MV} = \phi(\hat{\tau})$, $\hat{\sigma}_{\epsilon, MV}^2 = \sigma_\epsilon^2(\hat{\tau})$ et $\hat{\sigma}_{\phi, MV}^2 = \hat{\sigma}_{\epsilon, MV}^2 \hat{\tau}$.

2.3.4 Consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Théorème 2.5. [18] Soit $l_n(\phi, \tau)$ minimisé sur Θ^* en $\phi = \hat{\phi}_{MV}$ et $\tau = \hat{\tau}$ où Θ^* est l'image de Θ par l'application continue $T : \theta \rightarrow \pi$. Soit $\hat{\theta}_{MV} = (\hat{\phi}_{MV}, \hat{\tau})'$. Alors $\hat{\theta}_{MV}$ converge presque sûrement vers $\theta = (\phi, \tau)'$ à condition que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta^*)$. De plus $\hat{\sigma}_{\phi, MV}^2$ et $\hat{\sigma}_{\epsilon, MV}^2$ convergent presque sûrement vers σ_ϕ^2 et σ_ϵ^2 .

2.3.5 Prédiction dans un RCA(1)

Supposons qu'à l'instant T on a T+1 observations X_0, X_1, \dots, X_T , et que les paramètres de $\theta = (\phi, \sigma_\phi^2, \sigma_\epsilon^2)'$ sont connus.

Le meilleur prédicteur est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t+1} &= \mathbb{E}(X_{t+1}|X_t) \\ &= \mathbb{E}(\phi X_t + \epsilon_{t+1}|X_t) \\ &= \phi X_t \end{aligned}$$

La variance conditionnelle est donnée par :

$$\begin{aligned} v_{t+1|t} &= \mathbb{V}(X_{t+1}|X_t) \\ &= \mathbb{V}(\phi X_t + \epsilon_{t+1}|X_t) \\ &= \sigma_\phi^2 X_t^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Proposition 2.3.1. [18] Pour $j \geq 2$ le prédicteur à erreur quadratique minimale a la forme suivante :

$$\hat{X}_{t+j} = \phi^j X_t \text{ pour } \phi < 1$$

Et la variance conditionnelle de l'erreur de prévision est donnée par :

$$v_{t+j|t} = \eta^{j-1} v_{t+1|t} + \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=1}^{j-1} \eta^{k-1} + \sigma_\phi^2 \sum_{k=1}^{j-1} \eta^{k-1} \hat{X}_{t+j-k}^2$$

où $\eta = \phi^2 + \sigma_\phi^2$ est le paramètre de stationnarité.

Démonstration 5. 1) Pour $j \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t+j} &= \mathbb{E}(X_{t+j}|X_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t+j}|X_{t+j-1})|X_t) \\ &= \mathbb{E}(X_{t+j-1}\phi|X_t) \\ &= \phi \hat{X}_{t+j-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\hat{X}_{t+j} = \phi^j \hat{X}_t$$

2) Pour la j^{eme} étape la variance conditionnelle de l'erreur de prévision est donnée par :

$$\begin{aligned} v_{t+j|t} &= \text{Var}(X_{t+j}|X_t) \\ &= \mathbb{E}(X_{t+j}^2|X_t) - \mathbb{E}^2(X_{t+j}|X_t) \\ &= (\sigma_\phi^2 + \phi^2)\mathbb{E}(X_{t+j-1}^2|X_t) + \sigma_\epsilon^2 + 2\phi\mathbb{E}(X_{t+j-1}\epsilon_{t+j}|X_t) - (\phi\mathbb{E}(X_{t+j-1}|X_t))^2 \\ &= (\sigma_\phi^2 + \phi^2)\mathbb{E}(X_{t+j-1}^2|X_t) + \sigma_\epsilon^2 - \phi^2\mathbb{E}^2(X_{t+j-1}|X_t) \\ &= (\sigma_\phi^2 + \phi^2)\text{Var}(X_{t+j-1}|X_t) + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\phi^2\mathbb{E}^2(X_{t+j-1}|X_t) \\ &= \eta v_{t+j-1|t} + \sigma_\phi^2 \hat{X}_{t+j-1}^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

où $\eta = \phi^2 + \sigma_\phi^2$ est le paramètre de stationnarité. L'évaluation de $v_{t+j|t}$ donne

$$\begin{aligned}
 v_{t+j|t} &= \eta v_{t+j-1|t} + \sigma_\phi^2 \hat{X}_{t+j-1}^2 + \sigma_\epsilon^2 \\
 &= \eta(\eta v_{t+j-2|t} + \sigma_\phi^2 \hat{X}_{t+j-2}^2 + \sigma_\epsilon^2) + \sigma_\phi^2 \hat{X}_{t+j-1}^2 + \sigma_\epsilon^2 \\
 &\quad \vdots \\
 &= \eta^{j-1} v_{t+1|t} + \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=1}^{j-1} \eta^{k-1} + \sigma_\phi^2 \sum_{k=1}^{j-1} \eta^{k-1} \hat{X}_{t+j-k}^2
 \end{aligned}$$

Chapitre 3

Processus autorégressifs à coefficient aléatoires d'ordre P

3.1 Préliminaire

Définition 3.1.1. (*Produit de Kronecker*)

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de dimension $n \times p$ et $m \times q$ respectivement, la matrice de dimension $mn \times pq$ définie par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{np}B \end{pmatrix}$$

est appelé produit de Kronecker des matrices A et B .

Définition 3.1.2. L'opérateur Vec génère un vecteur colonne d'une matrice A en empilant les vecteurs colonnes de la matrice A l'une sur l'autre de gauche à droite.

Théorème 3.1. [11] Soient A, B, C et D quatre matrices on a alors :

- 1) $Vec(ABC) = (C' \otimes A)Vec(B)$.
- 2) $Tr(AB) = (Vec(B'))'Vec(A) = (Vec(B))'Vec(A')$.
- 3) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
- 4) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$.

Définition 3.1.3. Soit A une matrice symétrique de dimension $n \times n$, alors l'opérateur $Vech(A)$ définit un vecteur de dimension $(n(n+1)/2) \times 1$ qui est obtenu de A en empilant de gauche à droite ses parties des colonnes sur et au-dessous du diagonal principal, l'une sur l'autre dans l'ordre.

Théorème 3.2. [11] Ils existent deux matrices K_n et H_n de dimension $(n(n+1)/2) \times n^2$, tel que

$$Vech(A) = H_n Vec(A), \quad \text{et} \quad Vec(A) = K_n' Vech(A)$$

pour toute matrice A de dimension $n \times n$, et $H_n K_n' = I_{n(n+1)/2}$.

3.2 Définition

Définition 3.2.1. Un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre p , noté $RCA(p)$ est défini par :

$$X_t = \sum_{i=1}^p (\phi_i + \phi_{it}) X_{t-i} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

On suppose que :

- (i) $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ_ϵ^2 .
- (ii) Les $\phi_i, i = 1, \dots, p$ sont des constantes.
- (iii) Soit $\phi_t = (\phi_{1t}, \dots, \phi_{pt})$, $(\phi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires centrés indépendantes, telle que $\mathbb{E}(\phi_t \otimes \phi_t) = C$. De plus ϕ_t et ϵ_t sont supposées indépendantes.

3.3 Ecriture d'un RCA(p) sous forme d'un RCA(1)

La relation (3.1) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\underline{X}_t = (M + \Phi_t) \underline{X}_{t-1} + \underline{\epsilon}_t \quad (3.2)$$

tels que

$$M = \begin{pmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_p \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_t = \begin{pmatrix} \phi_{1t} & \dots & \phi_{pt} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Où $\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})'$, $\underline{\epsilon}_t = (\epsilon_t, 0, \dots, 0)'$

$\mathbb{E}(\underline{\epsilon}_t \underline{\epsilon}_t') = \sigma_\epsilon^2 J = \Omega$, $\mathbb{E}(\Phi_t \otimes \Phi_t') = \mathcal{C}$.

M , Φ_t et Ω sont des matrices carrées d'ordre p et \underline{X}_t , $\underline{\epsilon}_t$ sont des vecteurs de dimension $p \times 1$.

3.4 Conditions de stationnarité

On suppose que les conditions (i) – (iii) sont vérifiées ainsi que la condition :

(iv) Il n'existe aucun vecteur constant non nul Z tel que $Z'X_t$ est purement déterministe, c'est-à-dire, qu'il est déterminé exactement comme une fonction linéaire de $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$.

Les conditions de stationnarité pour un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre p , ont été étudiées par Andel (1976).

Théorème 3.3. [1] *La série X_1, \dots, X_T est stationnaire si et seulement si*

$$\text{Var}(X_1, \dots, X_p) = \text{Var}(X_2, \dots, X_{p+1}) \quad (3.3)$$

Démonstration 6. *La nécessité de la condition (3.3) est claire. On doit prouver sa suffisance. D'abord, on remarque que (3.3) implique (3.4)*

$$\text{Var}(X_1, \dots, X_h) = \text{Var}(X_2, \dots, X_{h+1}), \quad h = p, p+1, \dots, T-1 \quad (3.4)$$

Pour $h = p$, la formule (3.4) est vérifiée selon notre hypothèse. On suppose que (3.4) est vérifiée pour $h-1$, où $p < h < T-1$. Alors (3.4) sera vérifiée pour h , si on montre que

$$\text{Cov}(X_{h+1}, X_{j+1}) = \text{Cov}(X_h, X_j) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, h \quad (3.5)$$

On considère d'abord le cas $j = 1, 2, \dots, h - 1$. En multipliant (3.1) pour $t = h + 1$ et pour $t = h$ par X_{j+1} et X_j respectivement, puis en prenant l'espérance on obtient

$$\text{Cov}(X_{h+1}, X_{j+1}) = \sum_{k=1}^p \phi_k \text{Cov}(X_{h+1-k}, X_{j+1}) + \mathbb{E}(\epsilon_{h+1} X_{j+1}) \quad (3.6)$$

$$\text{Cov}(X_h, X_j) = \sum_{k=1}^p \phi_k \text{Cov}(X_{h-k}, X_j) + \mathbb{E}(\epsilon_h X_j) \quad (3.7)$$

Sous l'hypothèse que (3.4) est vérifiée pour $h - 1$ il vient que $\text{Cov}(X_{h+1}, X_{j+1}) = \text{Cov}(X_{h-k}, X_j)$ pour $k = 1, 2, \dots, p$. En outre, on a $\mathbb{E}(\epsilon_{h+1} X_{j+1}) = \mathbb{E}(\epsilon_h X_j) = 0$, d'après l'indépendance et la nullité de la moyenne. On voit clairement que les côtés droits de (3.6) et (3.7) sont les mêmes et (3.5) est prouvé pour $j < h$. Soit $j = h$. Analogiquement on obtient

$$\mathbb{E}(X_{h+1}^2) = \sum_{k=1}^p \mathbb{E}(b_{kh+1} X_{h+1} X_{h+1-k}) + \mathbb{E}(X_{h+1} \epsilon_{h+1}) \quad (3.8)$$

où $b_{it} = \phi_{it} + \phi_i$ et $\Delta = (\delta_{ij})$, la matrice de la variance de (b_{1t}, \dots, b_{pt}) .

$$\mathbb{E}(X_h^2) = \sum_{k=1}^p \mathbb{E}(b_{kh} X_h X_{h-k}) + \mathbb{E}(X_h \epsilon_h) \quad (3.9)$$

De (3.1) on a

$$\mathbb{E}(X_t \epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 \text{ pour } t = p + 1, \dots, T$$

$$\mathbb{E}(b_{it} X_t X_{t-s}) = \sum_{j=1}^p \mathbb{E}(b_{it} b_{jt}) \mathbb{E}(X_{t-j} X_{t-s}) \quad (3.10)$$

$$= \sum_{j=1}^p (\delta_{ij} + \phi_i \phi_j) \text{Cov}(X_{t-j}, X_{t-s}) \quad (3.11)$$

pour $t = p + 1, \dots, T$, $s = 1, 2, \dots, t - 1$. Cela donne pour $k = 1, 2, \dots, p$

$$\mathbb{E}(b_{kh+1} X_{h+1} X_{h+1-k}) = \sum_{j=1}^p (\delta_{kj} + \phi_k \phi_j) \text{Cov}(X_{h+1-j}, X_{h+1-k}) \quad (3.12)$$

$$\mathbb{E}(b_{kh} X_h X_{h-k}) = \sum_{j=1}^p (\delta_{kj} + \phi_k \phi_j) \text{Cov}(X_{h-j}, X_{h-k}). \quad (3.13)$$

Puisque on suppose $Cov(X_{h+1-j}, X_{h+1-k}) = Cov(X_{h-j}, X_{h-k})$ pour $k = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, p$, alors (3.8) et (3.9) impliquent $\mathbb{E}(X_{h+1}^2) = \mathbb{E}(X_h^2)$.

C'est la formule (3.5) quand $j = h$. Ainsi, la formule (3.4) est également prouvée. En posant $h = T - 1$ on voit que X_1, \dots, X_T est stationnaire.

Théorème 3.4. [1] On note $B = (b_{ij}) = Var(X_1, \dots, X_p)'$. Alors la formule (3.3) est vérifiée si et seulement si B satisfait la condition

$$B = MBM' + (\sigma_\epsilon^2 + Tr\Delta^*B)J \quad (3.14)$$

Où $\Delta^* = Var(\phi_{1t}, \dots, \phi_{pt})'$.

Démonstration 7. On pose

$$M_t = \begin{pmatrix} b_{1t} & \dots & b_{pt} \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M + \Phi_t$$

pour $t = p + 1, \dots, T$. D'après (3.2)

$$\underline{X}_{p+1} = M_{p+1}\underline{X}_p + \underline{\epsilon}_{p+1}$$

En prenant la variance des deux côtés, on obtient

$$Var(X_2, \dots, X_{p+1})' = MBM' + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \delta_{p+1-j, p+1-k} b_{kj} J + \sigma_\epsilon^2 J.$$

Et puisque

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \delta_{p+1-j, p+1-k} b_{kj} = Tr\Delta^*B$$

le théorème est donc démontré.

Théorème 3.5. [1] Si la condition suivante est vérifiée

$$z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_p \neq 0 \quad \text{pour } |z| \geq 1 \quad (3.15)$$

alors il existe une solution unique de l'équation

$$B^* = MB^*M' + \Omega \quad (3.16)$$

et cette solution est une matrice définie positive et explicitement donnée par

$$B^* = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \Omega M'^k \quad (3.17)$$

Démonstration 8. Sachant que $z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_p$ est le polynôme caractéristique de la matrice M , alors si la condition (3.3) est vérifiée, ceci implique que les valeurs propres de la matrice M se trouvent à l'intérieur du cercle unité. En introduisant l'opérateur Vec on obtient

$$Vec(B^*) = M^{\otimes 2} Vec(B^*) + Vec(\Omega)$$

où la matrice $M^{\otimes 2}$ est de dimension $p^2 \times p^2$. Sachant que les valeurs propres de $M^{\otimes 2}$ sont de la forme $\lambda_i \lambda_j$ où λ_i et λ_j sont celles de la matrice M , et $|\lambda_i| < 1$ pour tout i , il résulte que les valeurs propres de $M^{\otimes 2}$ sont à l'intérieur du cercle unité, alors $(I_{p^2} - M^{\otimes 2})$ est inversible, par conséquent l'équation (3.6) admet une solution donnée par

$$Vec(B^*) = (I_{p^2} - M^{\otimes 2})^{-1} Vec(\Omega)$$

En développant la matrice $(I_{p^2} - M^{\otimes 2})^{-1}$ en séries on obtient

$$\begin{aligned} Vec(B^*) &= (I_{p^2} - M^{\otimes 2})^{-1} Vec(\Omega) \\ &= (I_p^{\otimes 2} + M^{\otimes 2} + M^{\otimes 4} + \dots) Vec(\Omega) \\ &= I_p^{\otimes 2} Vec(\Omega) + M^{\otimes 2} Vec(\Omega) + M^{\otimes 4} Vec(\Omega) + \dots \\ &= Vec(I_p \Omega I_p) + Vec(M \Omega M') + Vec(M^2 \Omega M'^2) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Vec(M^k \Omega M'^k) = Vec\left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \Omega M'^k\right) \end{aligned}$$

$$d'où B^* = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \Omega M'^k.$$

Théorème 3.6. [1] On suppose que

$$z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_p \neq 0 \quad \text{pour } |z| \geq 1 \quad (3.18)$$

si la condition suivante est vérifiée

$$1 - \sigma_\epsilon^{-2}(Tr \Delta^* B^*) > 0 \quad (3.19)$$

alors (3.14) admet une solution unique, définie positive donnée par

$$B = (1 - \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B^*))^{-1}B^* \quad (3.20)$$

Démonstration 9. Selon le théorème (3.5) toute solution de l'équation (3.14) doit satisfaire la relation

$$B = (1 + \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B))B^* \quad (3.21)$$

on voit que la solution B a une forme

$$B = uB^* \quad (3.22)$$

où u est un nombre réel. En insérant la forme (3.22) dans (3.21) on obtient une condition

$$u(1 - \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B^*)) = 1 \quad (3.23)$$

Si $1 - \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B^*) = 0$ alors il n'y a pas de solution.

Si $1 - \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B^*) \neq 0$, alors

$$B = (1 - \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B^*))^{-1}B^* \quad (3.24)$$

est une solution de (3.14), qui est unique au vu de (3.22) et (3.23). Cependant, la matrice B donnée en (3.24) est définie positive si et seulement si $1 - \sigma_\epsilon^{-2}(\text{Tr}\Delta^*B^*) > 0$.

Toutes ces assertions donnent le résultat suivant.

Théorème 3.7. [1] La série X_1, \dots, X_n d'ordre p est stationnaire si et seulement si toutes les racines de l'équation $z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_p = 0$ sont dans le cercle unitaire et la matrice de variance $B = \text{Var}(X_1, \dots, X_p)'$ est donnée par la formule (3.20).

Corollaire 3.4.1. Il existe une unique solution stationnaire \mathcal{A}_t -mesurable pour (3.1) si et seulement si M a toutes ses valeurs propres dans le cercle d'unité et $C\Lambda < 1$, où Λ est la dernière colonne de $(I - M \otimes M)^{-1}$.

Remarque 3.4.1. *En supposant les hypothèses (i) – (iv) sont vérifiées et sous les conditions du corollaire (3.4.1), on a les résultats suivants :*

1) Soient $\sigma_\epsilon^2 \neq 0$ et $\Sigma = \mathbb{E}(\phi'_t \phi_t)$, il est clair que

$$Vec(\Sigma) = \mathbb{E}(\phi'_t \otimes \phi_t) = (\mathbb{E}(\phi_t \otimes \phi_t))' = C'$$

2) Soit W une matrice d'ordre $p \times p$ tel que $\Lambda = Vec(W)$, alors la condition $C\Lambda < 1$ peut être remplacé par $Tr(\Sigma W)$ car

$$C\Lambda = (Vec(\Sigma))'Vec(W) = Tr(\Sigma W)$$

3.4.1 Existence d'une solution faiblement stationnaire

On essaye maintenant de donner les conditions d'existence d'une solution stationnaire d'équation (3.1).

Soit \mathcal{A}_t : σ -Algèbre engendrée par $\{(\epsilon_s), (\phi_s); s < t\}$.

Dans une tentative de trouver une solution \mathcal{A}_t -mesurable de l'équation (3.1), il est avantageux d'obtenir un développement pour X_t en termes de fonctions mesurables sur \mathcal{A}_t en itérant l'équation (3.2).

On pose : $S_{t,r} = \prod_{k=0}^r (M + \Phi_{t-k})$; $R_{t,r} = S_{t,r} \underline{X_{t-r-1}}$, on obtient

$$\begin{aligned} \underline{X_t} &= (M + \Phi_t)((M + \Phi_{t-1})\underline{X_{t-2}} + \underline{\epsilon_{t-1}}) + \underline{\epsilon_t} \\ &= \underline{\epsilon_t} + (M + \Phi_t)\underline{\epsilon_{t-1}} + (M + \Phi_t)(M + \Phi_{t-1})\underline{X_{t-2}} \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j=0}^r \prod_{k=0}^{j-1} (M + \Phi_{t-k})\underline{\epsilon_{t-j}} + \prod_{k=0}^r (M + \Phi_{t-k})\underline{X_{t-r-1}} \\ &= \sum_{j=0}^r S_{t,j-1}\underline{\epsilon_{t-j}} + R_{t,r} \end{aligned}$$

On note que $\mathbb{E}(\underline{\epsilon}_{t-j} \underline{\epsilon}_{t-j}') = 0$ pour $i \neq j$, alors on a

$$\begin{aligned}
\text{Vec}\mathbb{E}((\underline{X}_t - R_{t,r})(\underline{X}_t - R_{t,r})') &= \text{Vec}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^r S_{t,j-1} \underline{\epsilon}_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^r S_{t,j-1} \underline{\epsilon}_{t-j}\right)'\right) \\
&= \text{Vec}\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^r S_{t,j-1} \underline{\epsilon}_{t-j} \underline{\epsilon}_{t-j}' S_{t,j-1}'\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^r (S_{t,j-1} \otimes S_{t,j-1}') \text{Vec}(\underline{\epsilon}_{t-j} \underline{\epsilon}_{t-j}')\right) \\
&= \mathbb{E}\sum_{j=0}^r \left(\prod_{k=0}^{j-1} ((M + \Phi_{t-k}) \otimes (M + \Phi_{t-k})) \text{Vec}(\underline{\epsilon}_{t-j} \underline{\epsilon}_{t-j}')\right) \\
&= \sum_{j=0}^r (M \otimes M + \mathcal{C})^j \text{Vec}(\Omega)
\end{aligned}$$

Théorème 3.8. [11] Afin qu'il existe une solution stationnaire unique \mathcal{A}_t -mesurable de l'équation (3.2), vérifiant (i) – (iv), il est nécessaire que

$$\sum_{j=1}^r (M \otimes M + \mathcal{C})^j \text{Vec}(J \otimes \sigma_\epsilon^2)$$

converge lorsque $r \rightarrow \infty$, et suffisant que cela se produit avec la matrice définie positive H telle que

$$\text{Vec}(H) = \text{Vec}(\Omega) + \mathcal{C} \sum_{j=1}^{\infty} (M \otimes M + \mathcal{C})^j \text{Vec}(\Omega)$$

Si $(M \otimes M + \mathcal{C})$ n'a pas une valeur propre unitaire, alors cette dernière condition est à la fois nécessaire et suffisante, et il existe une solution stationnaire unique, donnée par

$$\underline{X}_t = \underline{\epsilon}_t + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} (M + \Phi_{t-k})^j \underline{\epsilon}_{t-j}$$

Démonstration 10. Voir [11]

3.4.2 Existence d'une solution strictement stationnaire

On suppose dans cette section que les (ϵ_t) et (ϕ_t) sont deux suites de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées donc elles sont strictement stationnaires et ergodiques, il est possible d'inférer des propriétés plus fortes pour la solution \mathcal{A}_t -mesurable, (X_t) de l'équation (3.1).

Théorème 3.9. [11] *On suppose que les suites (ϵ_t) et (ϕ_t) vérifient les conditions (i) et (iii) et qu'elles sont identiquement distribuées. S'il existe une unique solution (X_t) stationnaire au second d'ordre \mathcal{A}_t -mesurable de l'équation (3.1), alors cette solution est aussi strictement stationnaire et ergodique.*

Démonstration 11. *L'unique solution stationnaire au second d'ordre et \mathcal{A}_t -mesurable, X_t de l'équation (3.1) donnée par*

$$\underline{X}_t = \underline{\epsilon}_t + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} (M + \Phi_{t-k})^j \underline{\epsilon}_{t-j}$$

est une limite en moyenne quadratique, par conséquent en probabilité d'une suite de variables aléatoires \mathcal{A}_t -mesurables, comme la solution a la même forme fonctionnelle pour chaque t , \underline{X}_t doit être strictement stationnaire, par conséquent X_t l'est aussi. Sachant que (ϕ_t, ϵ_t) est une suite iid alors elle est ergodique.

Ainsi que la σ -Algèbre \mathcal{G}_t engendrée par X_t, X_{t-1}, \dots est incluse dans \mathcal{A}_t , si X_t est une suite de variables aléatoires \mathcal{A}_t -mesurables.

Soient \mathcal{G} et \mathcal{A} les petites σ -Algèbres contenant respectivement $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_t$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t$, il résulte que $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ et X_t est ergodique.

Les résultats de cette section, ne couvrent pas complètement le cas où $(M \otimes M + \mathcal{C})$ a une valeur propre unitaire. Cela est dû à l'absence éventuelle de l'unicité de la solution, et le fait que $(I - M \otimes M - \mathcal{C})$ n'est pas inversible.

Si $\sum_{k=0}^j (M \otimes M + \mathcal{C})^k \text{Vec}(\Omega)$ converge lorsque $j \rightarrow \infty$, il existe une solution stationnaire et \mathcal{A}_t -mesurable de (3.1), quelles que soient les valeurs propres de $(M \otimes M + \mathcal{C})$. Il peut, cependant, qu'ils existent d'autres solutions stationnaires si $(M \otimes M + \mathcal{C})$ a une valeur propre unitaire.

3.5 Estimation dans un modèle RCA(p)

Dans cette section on fait l'inférence statistique dans la classe de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires par l'application de certaines méthodes usuelles d'estimation, et on montre ensuite la consistance des estimateurs obtenus .

3.5.1 Estimation par la méthode des moindres carrés

En supposant que les hypothèses (i) – (iv) sont vérifiées et sous les conditions du théorème (3.8) et du corollaire (3.4.1).

Procédure d'estimation

Sachant que la matrice Σ est symétrique, alors on a besoin d'estimer seulement $\gamma = \text{Vech}(\Sigma)$. D'abord on va estimer les paramètres ϕ_1, \dots, ϕ_p . Le modèle (3.1) devient

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \left(\sum_{i=1}^p \phi_{it} X_{t-i} + \epsilon_t \right)$$

ou bien

$$X_t = \phi' \underline{X}_{t-1} + u_t \quad (3.1.1)$$

où $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ et $u_t = \phi_t \underline{X}_{t-1} + \epsilon_t$.

Soit \mathcal{A}_t est la σ -tribu engendré par $((\epsilon_t, \phi_t), (\epsilon_{t-1}, \phi_{t-1}), \dots)$, on a

$$\mathbb{E}(u_t | \mathcal{A}_{t-1}) = \mathbb{E}(\phi_t) \underline{X}_{t-1} + \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$$

Puisque ϕ_t et ϵ_t sont indépendantes de $((\epsilon_{t-1}, \phi_{t-1}), (\epsilon_{t-2}, \phi_{t-2}), \dots)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_t^2 | \mathcal{A}_{t-1}) &= \mathbb{E}(\epsilon_t^2) + 2\mathbb{E}(\epsilon_t \phi_t \underline{X}_{t-1} | \mathcal{A}_{t-1}) \\ &+ \mathbb{E}((\phi_t \underline{X}_{t-1})^2 | \mathcal{A}_{t-1}) \\ &= \sigma_\epsilon^2 + 2\mathbb{E}(\epsilon_t) \mathbb{E}(\phi_t \underline{X}_{t-1} | \mathcal{A}_{t-1}) \\ &+ \mathbb{E}(\underline{X}_{t-1}' \phi_t' \phi_t \underline{X}_{t-1} | \mathcal{A}_{t-1}) \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \underline{X}_{t-1}' \mathbb{E}(\phi_t' \phi_t) \underline{X}_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_\epsilon^2 + \underline{X}_{t-1}' \Sigma \underline{X}_{t-1} \\
&= \sigma_\epsilon^2 + (\underline{X}_{t-1}' \otimes \underline{X}_{t-1}') \text{Vec}(\Sigma) \\
&= \sigma_\epsilon^2 + (\text{Vec}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}'))' K_p' \text{Vech}(\Sigma)
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(u_t^2 | \mathcal{A}_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 + \underline{z}_t' \gamma = \sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t \quad (3.1.2)$$

où $\gamma = \text{Vech}(\Sigma)$ et $\underline{z}_t = (K_p \text{Vec}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}'))$.

Etant données les observations (X_0, \dots, X_{p-1}) on obtient l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_{MC}$ de ϕ en minimisant $\sum_{t=1}^n u_t^2$ par rapport à ϕ dans la relation (3.1.1), alors on a

$$\hat{\phi}_{MC} = \left\{ \sum_{t=1}^n \underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^n \underline{X}_{t-1} X_t \quad (3.1.3)$$

D'après la relation (3.1.1) on a : $\hat{u}_t = X_t - \hat{\phi}_{MC}' \underline{X}_{t-1}$, $t = 1, \dots, n$.

Soit $\eta_t = u_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \underline{z}_t' \gamma$, alors les estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ de γ et σ_ϵ^2 sont obtenus en minimisant $\sum_{t=1}^n \eta_t^2$ par rapport γ et σ_ϵ^2 , et on a

$$\hat{\gamma} = \left\{ \sum_{t=1}^n (\underline{z}_t - \bar{z})(\underline{z}_t - \bar{z})' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 (\underline{z}_t - \bar{z}) \quad (3.1.4)$$

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 - \hat{\gamma}' \bar{z} \quad (3.1.5)$$

3.5.2 Consistance de l'estimateur des moindres carrés

On va établir la consistance des estimateurs $\hat{\phi}_{MC}$, $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}_\epsilon^2$, alors il est convenable d'abord d'obtenir les propriétés asymptotiques concernant l'estimateur $\hat{\phi}_{MC}$, ensuite celles des $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ car ces estimateurs sont obtenus en dérivant \hat{u}_t .

Théorème 3.10. [11] Soit (X_t) un processus RCA(p) strictement stationnaire \mathcal{A}_t -mesurable satisfaisant l'équation (3.1) et soit $\hat{\phi}_{MC}$ donné par la relation (3.1.3) alors sous les conditions (i) – (iv), l'estimateur $\hat{\phi}_{MC}$ converge

presque sûrement vers ϕ . Si $\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$ alors lorsque $n \rightarrow \infty$ $\sqrt{n}(\hat{\phi}_{MC} - \phi)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\sigma_\epsilon^2 V^{-1} + V^{-1} \mathbb{E}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}' \gamma' \underline{z}_t) V^{-1}$$

où : $V = \mathbb{E}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}')$

Maintenant, pour étudier le comportement asymptotique des estimateurs $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ on a besoin de remplacer \hat{u}_t par u_t dans les relations (3.1.4) et (3.1.5) on obtient

$$\hat{\gamma} = \left\{ \sum_{t=1}^n (\underline{z}_t - \bar{z})(\underline{z}_t - \bar{z})' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^n u_t^2 (\underline{z}_t - \bar{z})$$

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n u_t^2 - \hat{\gamma}' \bar{z}$$

Lemme 3.5.1. [11] $(\hat{\gamma} - \gamma)$ et $(\hat{\sigma}_\epsilon^2 - \sigma_\epsilon^2)$ convergent presque sûrement vers zéro si :

$$\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$$

tandis que $\sqrt{n}(\hat{\gamma} - \gamma)$ et $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_\epsilon^2 - \sigma_\epsilon^2)$ convergent en probabilité vers zéro.

Théorème 3.11. [11] Soit (X_t) un processus RCA(p) strictement stationnaire \mathcal{A}_t -mesurable vérifiant l'équation (3.1), sous les conditions (i) – (iv), $\hat{K} = (\hat{\phi}'_{MC}, \hat{\gamma}', \hat{\sigma}_\epsilon^2)'$ converge presque sûrement vers $K = (\phi', \gamma', \sigma_\epsilon^2)'$ si $\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$. De plus si $\mathbb{E}(X_t^8) < \infty$, alors $n^{1/2}(\hat{K} - K)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance Ω donnée par

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega'_{12} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega'_{13} & \Omega'_{23} & \Omega_{33} \end{pmatrix}$$

où $i, j = 1, 2, 3$, et Ω_{ij} est une matrice de dimension $p(i) \times p(j)$ avec $p(1) = p, p(2) = p(p+1)/2$ et $p(3) = 1$, tels que

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \sigma_\epsilon^2 V^{-1} + V^{-1} \mathbb{E}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}' \gamma' \underline{z}_t) V^{-1} \\ \Omega_{12} &= V^{-1} \mathbb{E}(\underline{X}_{t-1} (\underline{z}_t - \mathbb{E}(\underline{z}_t))' u_t^3) R^{-1} \\ \Omega_{13} &= V^{-1} \mathbb{E}(\underline{X}_{t-1} (\mathbf{I} - (\underline{z}_t - \mathbb{E}(\underline{z}_t))' R^{-1} \mathbb{E}(\underline{z}_t)) u_t^3) \\ \Omega_{22} &= R^{-1} \mathbb{E}((\underline{z}_t - \mathbb{E}(\underline{z}_t)) (\underline{z}_t - \mathbb{E}(\underline{z}_t))' (u_t^4 - (\sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t)^2)) R^{-1} \\ \Omega_{23} &= R^{-1} \mathbb{E}((\underline{z}_t - \mathbb{E}(\underline{z}_t)) (u_t^4 - (\sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t)^2)) - \Omega_{22} \mathbb{E}(\underline{z}_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{33} &= \mathbb{E}(u_t^4 - (\sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t)^2) \\ &\quad - 2\mathbb{E}(u_t^4 - (\sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t)^2)\mathbb{E}(\underline{z}_t')\mathbf{R}^{-1}(\underline{z}_t - \mathbb{E}(\underline{z}_t)) + \mathbb{E}(\underline{z}_t')\Omega_{22}\mathbb{E}(\underline{z}_t)\end{aligned}$$

Corollaire 3.5.2.1. *On obtient l'estimateur $\hat{\Omega}$ de la matrice de covariance Ω lorsque on remplace les moments théoriques par ceux empiriques dans les sous-matrices Ω_{ij} et en posant*

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &= X_t - \hat{\phi}'_{MC} X_{t-1} \\ \hat{V} &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}' \\ \hat{\gamma} &= n^{-1} \sum_{t=1}^n (\underline{z}_t - \bar{z})(\underline{z}_t - \bar{z})'\end{aligned}$$

ce qui implique la consistance forte de cet estimateur.

3.5.3 Estimation par maximum de vraisemblance

Dans cette section on s'intéresse à trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un processus RCA(p) strictement stationnaire satisfaisant l'équation (3.1). On suppose que les conditions (i) – (iv) sont vérifiées et que :

(v) $\mathbb{E}(\epsilon_t^4) < \infty$ et $\mathbb{E}(\phi_t^4) < \infty$.

(vi) Si $\sigma_\epsilon^2 = 0$ ou Σ avait une valeur propre nulle on suppose que $\sigma_\epsilon^2 \geq \delta_1 > 0$, tandis que la plus petite valeur propre de Σ est bornée inférieurement par δ_2 où δ_1 et δ_2 peuvent être pris aussi petits que possible.

Procédure de l'estimation

On se donne l'ensemble d'observations (X_1, \dots, X_n) du processus, puis on dérive la fonction de vraisemblance conditionnellement à (X_0, \dots, X_{p-1}) . Soit $f(X_t, \dots, X_{t-s+1} | \mathcal{F}_{t-s})$, la densité de X_t, \dots, X_{t-s+1} en se donnant l'événement $\mathcal{F}_{t-s} \in \mathcal{A}_{t-s}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \underline{X}_{t-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^p (\phi_k + \phi_{kt}) X_{t-k} + \epsilon_t | \underline{X}_{t-1}\right) \\ &= \phi' \underline{X}_{t-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_t|X_{t-1}) &= \mathbb{E}\left(\left(\phi X_{t-1} + \epsilon_t\right)^2 | X_{t-1}\right) \\ &= \underline{X}_{t-1}' \underline{\Sigma} \underline{X}_{t-1} + \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t\end{aligned}$$

où $\gamma = \text{Vech}(\underline{\Sigma})$, $\underline{z}_t = (K_p \text{Vec}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}'))$ alors

$$\begin{aligned}f(X_1, \dots, X_n | X_0, \dots, X_{p-1}) &= \prod_{t=1}^n f(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{t=1}^n \left\{ (\sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(X_t - \phi' \underline{X}_{t-1})^2}{\gamma' \underline{z}_t + \sigma_\epsilon^2}\right) \right\} \\ &= L_n(\phi, \gamma, \sigma_\epsilon^2)\end{aligned}$$

Il convient de considérer, au lieu de la maximisation de $L_n(\phi, \gamma, \sigma_\epsilon^2)$, la minimisation de la fonction

$$\begin{aligned}\tilde{l}_n(\phi, \gamma, \sigma_\epsilon^2) &= -\frac{2}{n} \ln\{L_n(\phi, \gamma, \sigma_\epsilon^2)\} - \ln(2\pi) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\gamma' \underline{z}_t + \sigma_\epsilon^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi' \underline{X}_{t-1})^2}{\sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t}\end{aligned}$$

La fonction $\tilde{l}_n(\phi, \gamma, \sigma_\epsilon^2)$ est non linéaire en σ_ϵ^2 et γ .

On pose : $r = \frac{\gamma}{\sigma_\epsilon^2}$ donc $\bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) = \tilde{l}_n(\phi, \gamma, \sigma_\epsilon^2)$, alors on a

$$\bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) = \ln(\sigma_\epsilon^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + r' \underline{z}_t) + \sigma_\epsilon^{-2} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi' \underline{X}_{t-1})^2}{1 + r' \underline{z}_t}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} \bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) &= -2\sigma_\epsilon^{-2} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi' \underline{X}_{t-1}) \underline{X}_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_\epsilon^2} \bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) &= \sigma_\epsilon^{-2} - \sigma_\epsilon^{-4} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi' \underline{X}_{t-1})^2}{1 + r' \underline{z}_t}\end{aligned}$$

On a $\frac{\partial}{\partial \phi} \bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) = 0$ uniquement pour

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{X_t \underline{X}_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1} \underline{X}_{t-1}'}{1 + r' \underline{z}_t} \phi$$

alors l'estimateur de ϕ est donné par

$$\phi_n(r) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1} X_{t-1}'}{1 + r' z_t} \right\}^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{X_t X_{t-1}}{1 + r' z_t}$$

Ainsi on a : $\frac{\partial}{\partial(\phi', \sigma_\epsilon^2)'} \bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) = 0$ uniquement lorsque

$$\sigma_{\epsilon, n}^2(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi'_n(r) X_{t-1})^2}{1 + r' z_t}$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\phi}_n$, $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}_{\epsilon, n}^2$ sont obtenus en calculant \hat{r}_n qui minimise la fonction

$$l_n^* = \ln(\sigma_{\epsilon, n}^2(r)) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + r' z_t)$$

Alors les estimateurs $\hat{\phi}_n$, $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}_{\epsilon, n}^2$ sont donnés par :

$$\hat{\phi}_n = \phi_n(\hat{r}_n), \quad \hat{\sigma}_{\epsilon, n}^2 = \sigma_{\epsilon, n}^2(\hat{r}_n) \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_n = \hat{\sigma}_{\epsilon, n}^2 \hat{r}_n$$

Par conséquent, on doit minimiser la fonction en ϕ et r ,

$$\begin{aligned} l_n(\phi, r) &= \inf_{\sigma_\epsilon^2} \bar{l}_n(\phi, r, \sigma_\epsilon^2) - 1 & (3.1.9) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + r' z_t) + \ln \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi' X_{t-1})^2}{1 + r' z_t} \right\} \end{aligned}$$

La dernière équation vient directement de (3.1.9).

Alors les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\phi}_n$, $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}_n^2$ sont définis par

$$\begin{aligned} \hat{l}_n(\hat{\phi}_n, \hat{r}_n) &= \inf_{(\phi', r')' \in \Theta} l_n(\phi, r), \\ \hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{\phi}'_n(r) X_{t-1})^2}{1 + \hat{r}'_n z_t} \\ \hat{\gamma}_n &= \hat{\sigma}_{\epsilon, n}^2 \hat{r}_n \end{aligned}$$

3.5.4 Consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Soit Θ l'ensemble de tous les vecteurs (ϕ', r') dans lequel on minimise $l_n(\phi, r)$ dépend de trois nombres $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ sont arbitrairement petits, avec ϕ et r ont respectivement p et $p(p+1)/2$ composantes satisfont les conditions suivantes :

- 1) ϕ est tel que les valeurs propres de la matrice M ont des modules inférieurs ou égaux à $(1 - \delta_3)$.
- 2) Soit R une matrice carrée symétrique dont $r = Vech(R)$, alors R a des valeurs propres strictement positives qui sont toutes supérieures ou égaux à δ_4 .
- 3) $(Vec(R))'W \leq \delta_5$ où W est la dernière colonne de la matrice $(I - M \otimes M)^{-1}$.

Pour montrer la consistance forte des estimateurs du maximum de vraisemblance on exigera que Θ soit compact afin que plusieurs résultats de l'analyse réelle peuvent être utilisés. En particulier on aura besoin de savoir que toute fonction continue sur Θ atteint ses bornes dans Θ et l'équicontinuité et la convergence uniforme sont équivalentes dans Θ .

Maintenant, on suppose que $\theta_0 = (\phi'_0, r'_0)'$ est la vraie valeur de θ .

Théorème 3.12. [11] Soit $l_n(\phi, r)$ minimisé sur Θ à $\phi = \hat{\phi}_n, r = \hat{r}_n$ et soit $\hat{\theta}_n = (\hat{\phi}'_n, \hat{r}'_n)'$. Alors $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ_0 ce qui montre que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.

Théorème 3.13. [11] Soit (X_t) un processus RCA(p) strictement stationnaire \mathcal{A}_t -mesurable, sous les suppositions (i)–(vi), alors $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $I^{-1}JI^{-1}$.

Si (ϵ_t) et (ϕ_t) sont conjointement normales alors la matrice de covariance se réduit à $2I^{-1}$. Les matrices I et J sont données par :

$$I = \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I'_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{\partial \phi \partial \phi'} = 2\mathbb{E}(\lambda_0^{-1} \underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}') \\
I_{12} &= \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{\partial \phi \partial \gamma'} = 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(u_{0t} | \mathcal{A}_{t-1}) \underline{X}_{t-1} \underline{z}_t') = 0 \\
I_{13} &= \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{\partial \phi \partial \sigma_\epsilon^2} = 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(u_{0t} | \mathcal{A}_{t-1}) \lambda_0^{-2} \underline{X}_{t-1}) = 0 \\
I_{22} &= \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{\partial \gamma \partial \gamma'} = \mathbb{E}(\lambda_0^{-2} \underline{z}_t \underline{z}_t') \\
I_{23} &= \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{\partial \gamma \partial \sigma_\epsilon^2} = \mathbb{E}(\lambda_0^{-2} \underline{z}_t) \\
I_{33} &= \frac{\partial^2 \tilde{l}(\theta_0)}{(\partial \sigma_\epsilon^2)^2} = \mathbb{E}(\lambda_0^{-2}) \text{ où } \mathbb{E}(u_{0t} | \mathcal{A}_{t-1}) = \lambda_0.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J'_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J'_{13} & J'_{23} & J_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
J_{11} &= 4\mathbb{E}(\mathbb{E}(u_{0t}^2 | \mathcal{A}_{t-1}) \lambda_0^{-2} \underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}') = 4\mathbb{E}(\underline{X}_{t-1} \underline{X}_{t-1}' \lambda_0^{-1}) \\
J_{12} &= 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(u_{0t} \eta_t | \mathcal{A}_{t-1}) \lambda_0^{-3} \underline{X}_{t-1} \underline{z}_t') = 2\mathbb{E}(u_{0t}^3 \lambda_0^{-3} \underline{X}_{t-1} \underline{z}_t') \\
J_{13} &= 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(u_{0t} \eta_t | \mathcal{A}_{t-1}) \lambda_0^{-3} \underline{X}_{t-1}) = 2\mathbb{E}(u_{0t}^3 \lambda_0^{-3} \underline{X}_{t-1}) \\
J_{22} &= \mathbb{E}(\eta_t^2 \lambda_0^{-4} \underline{z}_t \underline{z}_t'), \quad J_{23} = \mathbb{E}(\eta_t^2 \lambda_0^{-4} \underline{z}_t), \quad J_{33} = \mathbb{E}(\eta_t^2 \lambda_0^{-4}).
\end{aligned}$$

3.6 Prévision dans un RCA(p)

On voit d'après (3.1) que, pour un processus autorégressif à coefficient aléatoire $\{X_t\}$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{A}_{t-1}) = \phi' \underline{X}_{t-1} = \hat{X}_t$, disons donc que le meilleur prédicteur, au sens des moindres carrés de (X_t) sachant $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ est un prédicteur linéaire.

Le principe des moindres carrés, cependant, peut ne pas être un principe approprié dans ce cas, puisque la nature non-linéaire de (3.1) empêcherait habituellement le processus (X_t) d'être Gaussien, ou même proche d'un Gaussien.

Dans une tentative d'exploiter cette non-linéarité, on utilise le fait que

$$\mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{A}_{t-1}) = (\phi' \underline{X}_{t-1})^2 + \sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t$$

Donc un prédicteur naturel de $\{X_t\}$ sachant $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ est

$$X_t^* = \text{sgn}(\phi' \underline{X}_{t-1}) ((\phi' \underline{X}_{t-1})^2 + \sigma_\epsilon^2 + \gamma' \underline{z}_t)^{1/2}$$

où

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

3.7 Simulations

Afin de comparer les processus autorégressifs réels avec des processus autorégressifs à coefficients aléatoires. On a écrit quelques codes en utilisant le langage **R** version 2.10.1 (c'est un logiciel libre disponible sur le site : <https://cran.r-project.org>.) tout en respectant les conditions de stationnarité du processus.

3.7.1 Simulation d'un modèle RCA(p)

On utilise le principe de simulation donnée dans [11] pour générer des autorégressions à coefficients aléatoires, où les deux suites de variables aléatoires ϵ_t et ϕ_t sont supposées normalement distribuées. les démarches sont les suivantes :

- 1) Spécifier les valeurs propres réelles et complexes $\{\lambda_i; i = 1, \dots, p\}$ de la matrice M , qui doivent toutes avoir des modules inférieurs à l'unité.
- 2) Calculer les paramètres $\{\phi_i; i = 1, \dots, p\}$ de

$$\prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i$$

De là, calculer la matrice carrée W où $\text{Vec}(W)$ est la dernière colonne de $(I - M \otimes M)^{-1}$.

- 3) Prendre une matrice définie positive Σ^* et calculer $\text{tr}(\Sigma^* W)$.

Maintenant, afin de garantir la stationnarité de second ordre, on doit avoir

$$1 > (\text{Vec} \Sigma)^' \text{Vec}(W) = \text{tr}(\Sigma W)$$

de sorte que si nous spécifions la valeur de $\rho = \text{Tr}(\Sigma W)$ nécessaire, alors $\Sigma = \Sigma^*(\rho / \text{tr}(\Sigma^* W))$ vérifie $\rho = \text{tr}(\Sigma W)$. Il suffit donc de définir Σ^* .

4) Calculer la matrice triangulaire inférieure L qui a une diagonale positive et pour laquelle $LL' = \Sigma$.

5) Générer un vecteur $(w_1, w_2, \dots, w_{p+1})'$ de nombres aléatoires normalement distribués.

En spécifiant $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$, on prend $\epsilon_t = \sigma_\epsilon w_1$ et $B_t' = L(w_1, w_2, \dots, w_{p+1})'$.

Alors ϵ_t et ϕ_t seront théoriquement indépendants, auront des moyennes nulles et auront $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$ et $\mathbb{E}(\phi_t' \phi_t) = LL' = \Sigma$.

6) Calculer

$$X_t = \sum_{i=1}^p (\phi_i + \phi_{it}) X_{t-i} + \epsilon_t \text{ où } X_t = 0$$

pour $t < 0$.

7) Répétez les étapes 5 et 6 $(N + 200)$ fois où N est la taille de l'échantillon désirée et ignorez les 200 premières valeurs produites. Ceci permet à X_t d'atteindre un équilibre puisque, sous (vi) , X_t est stable.

Simulation d'un modèle RCA(2)

Code 3.1 :

```
MTI<-function(lmd1,lmd2,Y,r,sge){
fi1<-lmd1+lmd2
fi2<-lmd1*lmd2
M<-matrix(c(0,fi2,1,fi1),nrow=2)
D<-matrix(c(1,0,0,(-fi2)^2,0,1,(-fi2),(-fi1*fi2),0,(-fi2),
1,(-fi2*fi1),-1,-fi1,-fi1,1-fi1^2),nrow=4)
R<-solve(D)
W<-matrix(R[,4],nrow=2)
S<-Y%*%W
c<-sum(diag(S))
K<-Y*(r/c)
L<-chol(K)
X<-rep(0,1200)
w<-rnorm(3)
X[1]<-w[1]*sge
w<-rnorm(3)
```

```

B<-L%%w[2:3]
X[2]<-(fi1+B[1])*X[1]+sge*w[1] for(i in 3:1200){
w<-rnorm(3)
B=L%%w[2:3]
X[i]=(fi1+B[1])*X[i-1]+(fi2+B[2])*X[i-2]+sge*w[1]
}
return(X)
}

```

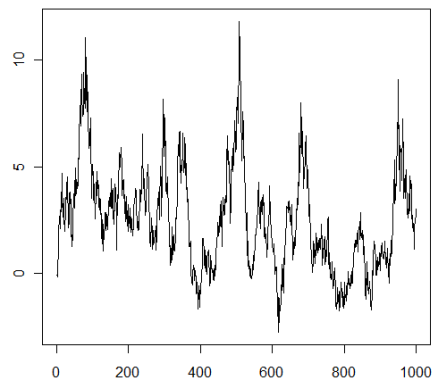


Figure 3.1 : RCA(2) ($\phi_1 = 1/2$, $\phi_2 = 1/3$, $\sigma_\epsilon = 0.5$).

Simulation d'un modèle RCA(1)

Code 3.2 :

```

smltn<-function(fi,sge,sgf){
x<-rep(0,1200)
e<-rnorm(1200,0,sge)
ft<-rnorm(1200,fi,sgf)
x[1]<-e[1]
x[2]<-(ft[2])*x[1]+e[2]
for( i in 3:1200)
x[i]<-(ft[i])*x[i-1]+e[i]
return(x)
}
X=smltn(fi,sge,sgf)

```



```
X1=X[200:1200]
plot.ts(X1)
```

```
# Les fonctions utilisées pour tracer le Graphe de l'ACF :
plot.ts(x) # Pour tracer le graphe.
acf(x) # Pour tracer le corrélogramme.
```

Les figures ci-dessous (3.2), (3.3), (3.5), (3.6), (3.7) et (3.9) représentent les simulations des trajectoires d'un RCA(1), pour des valeurs différentes des paramètres $(\phi, \sigma_\epsilon, \sigma_\phi)$.

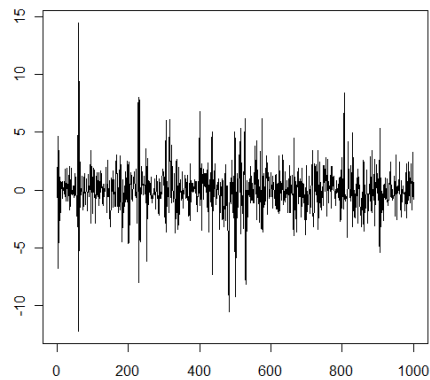


Figure 3.2 : RCA(1) ($\phi = 0, \sigma_\epsilon = 1, \sigma_\phi = 0.9$).

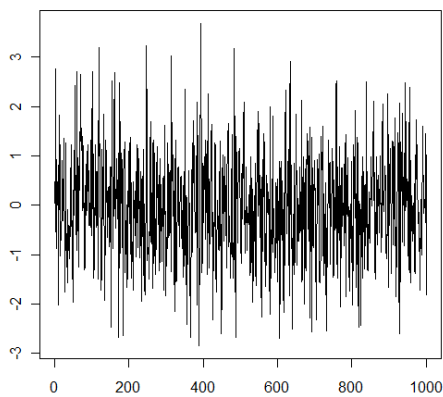


Figure 3.3 : RCA(1) ($\phi = 0.2, \sigma_\epsilon = 1, \sigma_\phi = 0.2$).

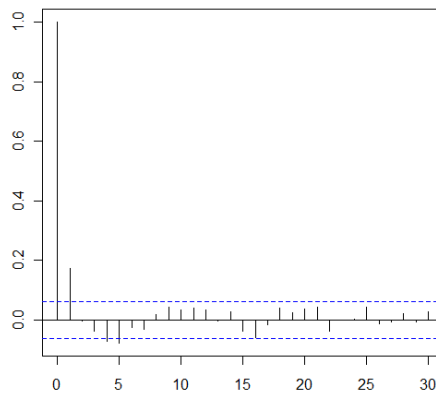


Figure 3.4 : ACF d'un RCA(1) plus proche de la stationnarité.

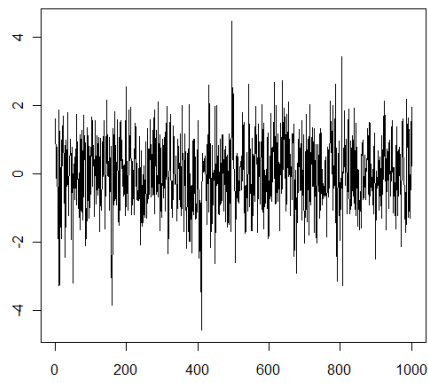


Figure 3.5 : RCA(1) ($\phi = 0.2$, $\sigma_\epsilon = 1$, $\sigma_\phi = 0.4$).

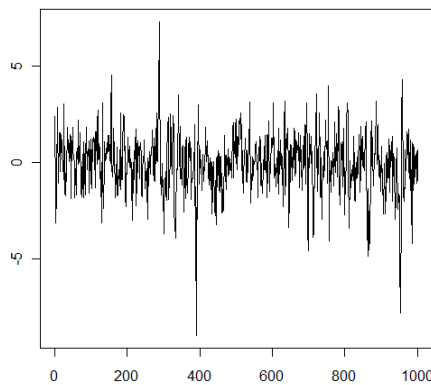


Figure 3.6 : RCA(1) ($\phi = 0.5$, $\sigma_\epsilon = 1$, $\sigma_\phi = 0.5$).

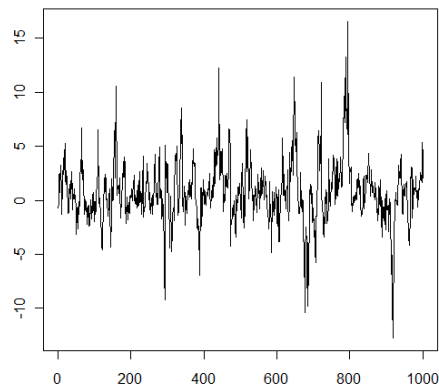


Figure 3.7 : RCA(1) ($\phi = 0.8$, $\sigma_\epsilon = 1$, $\sigma_\phi = 0.5$).

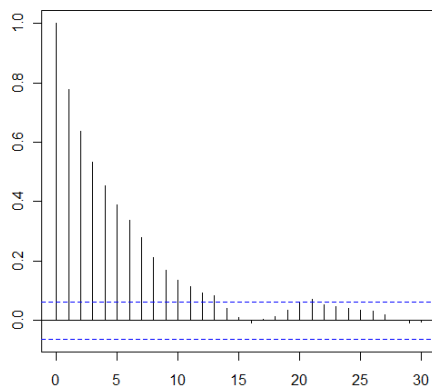


Figure 3.8 : ACF d'un RCA(1) qui est plus proche de la non stationnarité.

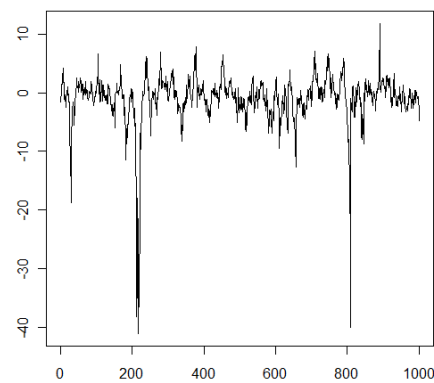


Figure 3.9 : RCA(1) ($\phi = 0.9$, $\sigma_\epsilon = 1$, $\sigma_\phi = 0.4$).

Simulation d'un modèle AR(1) :

Code 3.3 :

```
X<-arima.sim(n =1200 , list(ar =0.2),sd =1);X
X1<-X[200:1200];X1
plot(X1)
```

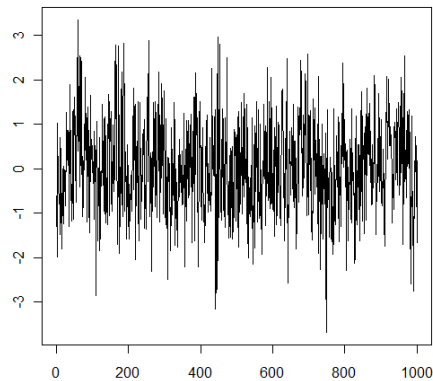


Figure 3.10 : AR(1) ($\phi = 0.2, \sigma_\phi = 1$).

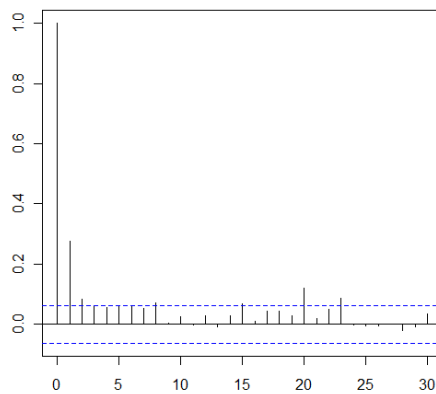


Figure 3.11 : ACF d'un AR(1).

Commentaires

1) Il existe une similarité entre les modèles RCA et les modèles AR, de sorte que l'ARC est obtenue en ajoutant une perturbation additive aléatoire aux coefficients AR ordinaires. Pour une illustration plus claire de ces similitudes, voir la figure (3.3) et (3.10) respectivement.

À partir de la figure (3.10), on peut voir qu'il n'y a pas de fluctuation significative tout au long de la série du processus AR(1). Le processus semble n'avoir aucun changement systématique de la moyenne et de la variance. D'autre part, le comportement maximal de l'ARC(1) dans la figure (3.3) est

significativement différent de l'AR(1). Il est clair que la perturbation aléatoire additive a provoqué quelques sauts d'amplitude dans la série. Les figures (3.4) et (3.11) donnent des diagrammes de fonction d'autocorrélation (ACF). En regardant les points qui s'éteignent rapidement, les deux séries semblent être stationnaires.

2) Pour une analyse graphique plus poussée des RCA(1), la figure (3.2) présente la série chronologique pour une valeur plus grande $\sigma_\phi^2 = 0,9$. Il est clair que lorsque la variance de ϕ_t augmente, des sauts d'amplitude plus importants peuvent être observés dans l'ensemble des données.

3) Pour la stationnarité d'un RCA(1), il est noté au deuxième chapitre que la condition de stationnarité $\phi^2 + \sigma_\phi^2 < 1$ doit être satisfaite. La figure (3.7) est le tracé du processus RCA(1) avec $\phi = 0,8$ et $\sigma_\phi = 0,5$. Si ϕ est relativement grand par rapport à σ_ϕ^2 , $\phi^2 + \sigma_\phi^2$ sera plus proche de l'unité (c'est-à-dire proche de la limite de stationnarité). Ainsi, de grandes valeurs de (X_t) sont attendues et sont généralement associées à la non-stationnarité. Si ϕ n'est pas relativement grand par rapport à σ_ϕ^2 , on s'attend à ce que les valeurs de (X_t) ressemblent à des réalisations d'un processus autorégressif à coefficient constant. La figure (3.8) donne l'ACF correspondant à la série de la figure (3.7). On peut voir que les points s'éteignent lentement. Cela est vrai puisque la condition de stationnarité est proche de l'unité.

3.7.2 Estimation et prévision

Estimation des paramètres d'un modèle RCA(1) :

Code 3.4 :

```
EST<-function(x){
n<-length(x)
eMC<-rep(0,n)
z<-rep(0,n-1)
y<-x[2:n];y{
y1<-x[1:(n-1)];y1
z<-(y1)^2;z
fiMC<-sum(y*y1)/sum(z)
eMC<-y-fiMC*y1
```

```

sgfMC<-sum((eMC^2)*(z-mean(z)))/sum((z-mean(z))^2)
sgeMC<-mean(eMC^2)-sgfMC*mean(z)
return( f=list(fiMC=fiMC,eMC=eMC,sgfMC=sgfMC,sgeMC=sgeMC))
}
attach(EST(x))

```

Prévision dans un RCA(1) :

Code 3.5 :

```

Pvn<-function(x,m){
n<-length(x)
xhat<-rep(0,n)
for(i in (n-m):n)
xhat[i]=sign(fiMC*x[i-1])*sqrt((fiMC*x[i-1])^2+sgeMC+sgfMC*(x[i-1]^2))
return(xhat[(n-m):n])
}

```

L'erreur de prévision :

```
er<-sqrt(sum((xhat-x[(n-m):n])^2));er
```

3.8 Application

3.8.1 Application sur des données simulés

On simule un modèle RCA(1) avec les paramètres ($\phi = 0.4$, $\sigma_\epsilon = 1$, $\sigma_\phi = 0.5$).

Les estimateurs des paramètres ϕ , σ_ϵ et σ_ϕ sont donnée par :

```

v<-smltn(0.4,1,0.5);v
$fiMC #  $\hat{\phi}$ 
[1] 0.3747417
$sgfMC #  $\hat{\sigma}_\phi$ 
[1] 0.2151102
$sgeMC #  $\hat{\sigma}_\epsilon$ 
[1] 1.055747
w<-EST(v);w
attach(w)

```

Pour les prévisions de la série chronologique précédente on trouve les résul-

tats suivants :

```
q<-Pvn(v,10);q
```

```
[1] -1.228068 -1.075708 -1.233122 -1.227935 -1.985401 -1.381845 -1.078419
[8] -1.657152 -1.956398 -1.541231  1.029453
```

#L'erreur quadratique est donnée par :

```
erv.rca1<-sqrt(sum((q-v[1190:1200])^2));erv.rca1
```

```
[1] 3.053644
```

On modélise les données précédentes v par AR(1) on trouve les résultats suivants :

```
v.ar1<-arima(v, order = c(1, 0, 0));v.ar1
```

Call:

```
arima(x = v, order = c(1, 0, 0))
```

Coefficients:

```
      ar1  intercept
      0.2652    0.0574
s.e.  0.0278    0.1232
```

sigma² estimated as 9.847: log likelihood = -3075.07, aic = 6156.14

```
v.prvn<- predict(v.ar1, 11); v.prvn
```

```
$pred
```

Time Series:

Start = 1201

End = 1211

Frequency = 1

```
[1] 0.47849448 0.16906793 0.08702296 0.06526859 0.05950039 0.05797094
[7] 0.05756540 0.05745787 0.05742936 0.05742180 0.05741980
```

\$se

Time Series:

Start = 1201

End = 1211

Frequency = 1

```
[1] 3.138017 3.246453 3.253941 3.254466 3.254503 3.254506 3.254506 3.254506
```

```
[9] 3.254506 3.254506 3.254506
#L'erreur quadratique est donnée par :
erv.ar1<-sqrt(sum((v.prvn$pred-v[1190:1200])^2));erv.ar1
[1] 6.424372
```

On trouve que l'erreur quadratique moyenne de la modélisation par le modèle autorégressif réel est supérieur à celle par le modèle autorégressif à coefficient aléatoire ($\text{erv.ar1} > \text{erv.rca1}$), donc dans notre cas simulé la modélisation par coefficient aléatoire est bien meilleure que par un coefficient constant.

3.8.2 Application sur la série lh

On a choisi les données lh qui présente l'hormone lutéinisante dans les échantillons du sang.

1) Modélisation des données lh par un modèle AR(1) :

```
X<-lh
lh.ar1<-arima(X, order = c(1, 0, 0));lh.ar1
Call:
arima(x = X, order = c(1, 0, 0))

Coefficients:
      ar1  intercept
    0.4930    2.2512
s.e.  0.1359    0.1204
sigma^2 estimated as 0.1526:  log likelihood = -18.82,  aic = 43.64

lh.fore<-predict(lh.ar1,9)
$pred
Time Series:
Start = 40
End = 48
Frequency = 1
[1] 2.176672 2.214469 2.233103 2.242289 2.246818 2.249050 2.250151 2.250693
```



```
[9] 2.250961
```

```
$se
```

```
Time Series:
```

```
Start = 40
```

```
End = 48
```

```
Frequency = 1
```

```
[1] 0.3906475 0.4355381 0.4457657 0.4482160 0.4488095 0.4489536 0.4489887
```

```
[8] 0.4489972 0.4489992
```

```
Y<-lh.fore$pred
```

```
p1<-as.numeric(Y)
```

```
[1] 2.176672 2.214469 2.233103 2.242289 2.246818 2.249050 2.250151 2.250693
```

```
[9] 2.250961
```

```
#L'erreur quadratique est donnée par :
```

```
er1<-sqrt(sum((lh[40:48]-p1)^2));er1
```

```
[1] 2.776143
```

2) Modélisation des données lh par un modèle RCA(1) :

```
estlh<-EST(X);estlh
```

```
$fiMC
```

```
[1] 0.9836385 #  $\hat{\phi}$ 
```

```
$eMC
```

```
[1] 0.03926763 0.03926763 -0.16073237 -0.06400467 -0.56564083 0.82454227
```

```
[7] 0.03763148 0.23763148 -0.45909622 -0.06727698 -0.16891313 0.52781457
```

```
[13] -0.36400467 1.42945072 0.05235684 -0.44764316 -0.45582392 0.03599533
```

```
[19] -0.26400467 0.03108687 -0.06891313 0.92945072 0.34417608 -0.65091547
```

```
[25] -0.26236852 0.03272302 0.93272302 0.04744838 -0.15255162 0.04417608
```

```
[31] -0.35582392 0.33763148 -0.15746007 -0.56073237 -0.07054928 -0.17218543
```

```
[37] -0.07545773 0.72290612 1.23435917 0.25399299 0.05726529 -0.34273471
```

```
[43] -0.44927931 -0.45746007 1.33435917 -0.34437086 -0.05091547
```

```
$sgfMC #  $\hat{\sigma}_\phi$ 
```

```
[1] -0.04675481
```

```
$sgeMC #  $\hat{\sigma}_\epsilon$ 
[1] 0.5322673
attach(estlh)
p2<-Pvn(X,8)
[1] 2.146273 3.303493 3.498095 3.498095 3.109232 2.625566 2.146273 3.400755
[9] 3.012250
# L'erreur quadratique est donnée par :
er2<-sqrt(sum((lh[40:48]-p2)^2));er2
[1] 2.400531
```

On trouve que l'erreur quadratique moyenne de la modélisation par le modèle autorégressif réel est supérieur à celle par le modèle autorégressif à coefficient aléatoire ($er1 > er2$), donc dans notre cas la modélisation par coefficient aléatoire est bien meilleure que par un coefficient constant.

3.9 Conclusion

La modélisation classique des séries chronologiques n'est pas toujours appropriée pour modéliser toutes les données temporelles, notamment dans certains domaines, par exemple en biologie, où ils existent des perturbations aléatoires, ainsi qu'en finance où la présence de l'hétéroscédasticité, ce qui exige l'émergence d'autres formes de modèles tels que les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (RCA).

Dans ce travail, nous sommes proposés de présenter un aperçu sommaire de quelques propriétés du processus autorégressif à coefficient aléatoire en commençant par la présentation de sa forme particulière c'est à dire, modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un (RCA(1)) qui a un très grand nombre de propriétés intéressantes puis sa forme générale d'ordre p (RCA(p)).

En étudiant certaines propriétés probabilistes des modèles RCA(1) et RCA(p) selon le modèle proposé et les conditions imposées sur les coefficients du modèle. Ainsi nous avons fait l'inférence statistique dans cette classe de modèles en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaire, la méthode du maximum de vraisemblance, afin d'obtenir des bonnes propriétés de ces estimateurs, comme la consistance.

Plusieurs recherches scientifiques ont été faites dans cette classe de modèles au cours des quarante dernières années, pour modéliser un grand nombre de données des séries chronologiques. Ce type de modélisation est encore l'objet des recherches approfondies de nombreux chercheurs où on peut aborder ce sujet de nombreux aspects, notamment l'inférence statistique dans cette classe de modèles, en trouvant d'autres méthodes statistiques plus performantes telles que l'utilisation des méthodes d'estimation non paramétriques. Une généralisation de ces processus au cas Hilbertien, où le coefficient de la représentation est un opérateur aléatoire est aussi un sujet de recherche intéressant.

Bibliographie

- [1] Andel, J. (1976) : Autoregressive series with random parameters, *Mathematische Operationsforschung und Statistik : A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 7(5) : 735-741.
- [2] Aue, A., Horvath, L., Steinebach, J. (2006) : Estimation in Random Coefficient Autoregressive Models. *Journal of Time Series Analysis*. 27 (1) : 61-76.
- [3] Billingsley, P. (1961) : The lindeberg-levy theorem for martingales. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(5) : 788-792.
- [4] Fink, T., Kreiss, J.P., (2013) : Bootstrap for Random Coefficient Autoregressive Models. *Journal of Time Series Analysis* 34 (6), pp : 646-667.
- [5] Hwang, S. Y, and Basawa, I. V. I.v. (1993) : Asymptotic optimal inference For a class of nonlinear time series models, *Stoch.Proc.Applications* ,46 : 91-113.
- [6] Hwang, S.Y, and Basawa, I.v. (1993) : Asymptotic inference for a generalized first order random coefficient autoregressive process.
- [7] Hwang, S.Y, and Basawa, I.v.(1998) : Parameter estimation for generalized random coefficient autoregressive processes. *Journal of Statistical Planning and Inference* 68 : 323-337.
- [8] Moran, P. A. P. (1953) : "The statistical analysis of the Canadian lynx cycle. II. Synchronization and meteorology". *Australian Journal of Zoology*. 1 : 163-173 ; 291-298.
- [9] Nicholls, D.F. and Quinn, B.G. (1980) : The estimation of random coefficient autoregressive models. I. *Journal of time series analysis*, 1(1) : 37-46.

-
- [10] Nicholls, D.F. and Quinn, B.G (1981) : The estimation of random coefficient autoregressive models. II. *Journal of time series analysis*, 2 : 185-203.
- [11] Nicholls, D.F, and Quinn, B.G. (1982) : *Random Coefficient Autoregressive Models : An Introduction*. In *Lecture notes in statistics*. Springer.
- [12] Quinn, B.G. (1980) : *Fixed and random coefficient Time series*. Unpublished Ph.D. thesis, Australian National University.
- [13] Quinn, B.G. (1982) : A note on the existence of strictly stationary solutions to bilinear equations. *Journal of Time Series Analysis*, 3(4) : 249-252.
- [14] Schick, A. (1996) : \sqrt{n} -Consistent Estimation in a Random Coefficient Autoregressive Model. *Austral. J. Statist.*, 38(2) : 155-160.
- [15] Tong, H. (1977a) : Some comments on the Canadian lynx data (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A* 140 : 432-436 and 448-468.
- [16] Tong, H. (1981) : A note on a Markov Bilinear Stochastic Process in discrete time, *Jour of Times series Analysis*, 2 : 279-284.
- [17] Tong, H. (1990) : *Non-linear Time Series : A Dynamical System Approach*. Oxford : Oxford University Press.
- [18] Wang, D. (2003) : *Frequentist and bayesian analysis of random coefficient autoregressive models*.