République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Approximation et interpolation complexe

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géometrie différentielle

par

Korichi Hamza[1]

Sous la direction de

Mr K. Djerfi

Soutenue le 20/06/2018 devant le jury composé de

F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
B. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : : hamzakorichi174@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce travail à la mémoire de ma chère mère.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercie mon "dieu" qui nous à donner le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer notre reconnaissance à notre directeur de mémoire monsieur "**K**. **D**jerfi", pour la confiance qu'il j'ai témoignée en je accueille au sein de son laboratoire et de j'ai propose ce sujet de mémoire dont les cours et les travaux ont été pour moi une source d'inspiration.

je remercie vivement les membres jurys : madame **F. Z**. **M**ostefai, monsieur **B. O**uakkas, monsieur **S. A**bbes d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

Saida ; 09 Juin 2018.

Table des matières

Introduction

La théorie d'interpolation est une branche importante en analyse et en analyse mathématique appliquée, on trouve des applications de cette théorie aussi dans d'autres domaines de mathématiques pures telles que dans la géométrie différentielle, notamment en géométrie des variétés complexes.

L'idée principale des techniques d'interpolation (et approximation) et de chercher une fonction ayant des valeurs données (des zéros par exemple) sur une partie finie du domaine de définition. La façon la plus naturelle est de chercher cette fonction d'interpolation dans une classe qui est dense relativement à la topologie des fonctions définie sur le domaine en question.

Les exemples classiques connus sont les exemples d'interpolation polynomiale, notamment par les polynômes liés aux fonctions spéciales (polynômes de ***Tchebychev***, polynômes de ***Legendre***, polynômes de ***Laguerre***...).

Cette question devient plus difficile dans le cas où l'ensemble des points d'interpolations est dénombrable infini. Ici on utilise des techniques de produits infinis pour définir la fonction d'interpolation.

Dans ce mémoire on travaille sur l'interpolation complexe. Pour l'espace des fonctions à valeurs complexes, deux classes de fonctions sont les plus intéressent :

-La classe des fonctions holomorphes (analytiques d'après le théorème de ***Cauchy***),

-La classe des fonctions méromorphes.

On s'intéresse donc à résoudre le problème d'interpolation par ces deux classes de fonctions.

Un autre problème lié à la question précédente est l'interpolation par des fonctions harmoniques. Ce problème est en fait une autre version du problème de Dirichlet dans le plan.

La difficulté rencontrée dans cette dernière question provient du fait que les zéros des fonctions harmoniques ne sont pas isolés telles que dans le cas des fonctions analytiques, cette difficulté sera résolue en utilisant la formule de ***Jensen***.

On s'intéresse par suite au cas multidimensionnelle, on cherche à résoudre le problème d'interpolation pour une fonction définie sur un domaine de $\mathbb{C}^n$ (un polydisque) à valeurs complexes par des fonctions holomorphes, méromorphes et par des fonctions pluriharmoniques.

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et propriétés des fonctions holomorphes et harmoniques.

Dans le deuxième chapitre on répond à la question d'interpolation par des fonctions holomorphes, méromorphes (théorème de ***Mittag-Leffler***), on traite aussi le cas harmonique (conditions de ***Blaschke***).

Le troisième chapitre traite le multidimensionnelle, on présente un survol de la théorie des fonctions analytiques et méromorphes à plusieurs variables complexes, on présente notamment un aperçu sur la théorie de ***Cauchy*** dans ce cas, puis on pose la problème d'interpolation sous forme des problèmes classiques de ***Cousin*** et ***Poincaré***. La résolution de ces problèmes est présentée respectivement dans les théorèmes 2.3.3 et 2.3.4.

Le quatrième chapitre et consacré au problème d'interpolation et approximation (simultanées). On présente au début du chapitre une brève introduction au espaces préhilbertiens (et de ***Hilbert***). Un théorème classique sur l'interpolation et l'approximation simultanées sera appliqué dans le cas ou X=$\mathbb{C}^n$.

Chapitre 1

1.1 Introduction

Avant d'introduire le concept d'interpolation par des fonctions holomorphes et des fonctions harmoniques, nous ferons un survol rapide de quelques propriétés importantes de ces deux types de fonctions.

1.2 Fonction holomorphes

On rappelle quelques propriétés des fonctions holomorphes d'une variable complexe, pour plus de détails, on peut se référer à [20]. Nous écrirons $\overline{B}(a, r)$ pour désigner la fermeture de la boule ouverte centrée en a et de rayon r, c'est-à-dire $\overline{B}(a, r) = \{x :\| x - a \|\leq r\}$. De façon générale nous écrirons $\overline{E}$ pour désigner la fermeture d'un ensemble E. Nous écrirons $\partial B(a, r)$ pour désigner la frontiére de la boule ouverte centrée en a et de rayon r, c'est-à-dire $\partial B(a, r) = \{x :\| x - a \|= r\}$. De façon générale, nous écrirons ∂E pour désigner la frontiére d'un ensemble E.

Définition 1.2.1. *On dit que Ω est un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$ si Ω est un ensemble connexe et ouvert dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.2.1. *Sera supposée suivant l'utilité et le contexte ultérieurement.*

Définition 1.2.2. *Un domaine Ω de $\mathbb{C}$ est simplement connexe si son complémentaire n'admet pas de composante connexe bornée. Cela est équivalent à dire que dans Ω, tout chemin fermé est homotope à un point.*

Exemple 1.2.1. $\mathbb{C}^*$ *est un domaine mulitplement connexe.*

Définition 1.2.3. *Une fonction complexe f définie au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dite dérivable en z_0 si pour $z \neq z_0$*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Nous la noterons $f'(z_0)$ et l'appellerons la dérivée de f en z_0.

Une fonction complexe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω. Nous noterons une fonction f holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ par $f \in H(\Omega)$. Si une fonction complexe est holomorphe dans $\mathbb{C}$, nous dirons que la fonction est entière. Une fonction complexe f est holomorphe dans Ω si et seulement si elle est analytique dans Ω c'est-à-dire localement développable en série entière.
Il nous sera utile de savoir à quoi ressemble l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe.

Exemples 1.2.1.
•***1)*** *La fonction* $z \longrightarrow \overline{z}$ *n'est pas holomorphe en ancun domaine de* $\mathbb{C}$*.*
•***2)*** *La fonction* $z \longrightarrow z^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$*.*

Le résultat suivant nous dit que pour toute fonction holomorphe, non identiquement nulle dans un domaine, l'ensemble des zéros est dénombrable.

Définition 1.2.4. $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$ *est dit l'ensemble des zéros de la fonction* f *dans* Ω*.*

Définition 1.2.5. *Un point* $a \in \mathbb{C}$ *est dit zéro d'ordre* m *de la fonction* f *si* f *est holomorphe en* a *et ses* $m-1$ *premières dérivées s'annulent en* a*, mais* $f^{(m)}(a) \neq 0$*.*
Toutes les fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ *peuvent s'écrire à l'aide de deux fonctions à valeurs réelles, disons* u *et* v *tel que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

ou $z = x + iy$*. Cette relation nous sera trés utile car tout résultat (théorème) sur* f *sera également un résultat sur les fonction* u *et* v*. Un théorème trés important de l'analyse complexe lie les fonction* u *et* v *par certaines conditions lorsque* $f \in H(\Omega)$*, ce sont les condition (equationde* ***Cauchy-Riemann****).*
Nous écrirons $C^n(\Omega)$ *pour désigner l'ensemble des fonction n-fois continument différentiable dans* Ω*.*

Théorème 1.2.1. *Soit une fonction complexe* $f = u + iv$ *définie sur* Ω*,* u*,* $v \in C^1(\Omega)$*. Alors* $f \in H(\Omega)$ *si et seulement si les équation de* ***Cauchy-Riemann***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont vérifiées pour tout $z = x + iy \in \Omega$*.*

Nous écrirons parfois les dérivées partielles sous cette forme plus compact,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x.$$

Les équation de ***Cauchy-Riemann*** s'écriront donc de la façon suivante,

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x.$$

Théorème 1.2.2. *(de **Cauchy**). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U. Alors l'intégrale sur tout contour complexe $\gamma \subset\ U$ s'annule ;*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Beaucoup de résultats suivent du théoréme de ***Cauchy***, dont la formule intégrale de ***Cauchy***. la formule intégrale de ***Cauchy*** est un point central de l'analyse complexe. Elle dit qu'une fonction holomorphe définie sur un disque est complétement déterminée par ses valeurs sur le bord du disque. elle peut égalment étre utillisée pour trouver une représentation intégrale de toutes les dérivées de la fonction.
Supposons U un sous-ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U,et $D = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ complétement inclus dans U. Soit C le cercle formé par le bord de D et orienté dans le sens direct. Alors nous avons, pour tout a à l'intérieur de D :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Nous pouvons remplacer le cercle C par n'importe quelle courbe fermée rectifiable dans U que ne s'intersecte pas et qui est orientée dans le sense anti-horaire. Nous pouvons déduire de cette formule que f doit étre infiniment et continuement différentiable, avec

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Remarquons que si $|f(z)| \leq M$ pour tout z $\in C$, alors les dérivées de $f(z)$ évaluées en a sont aussi bornées. L'intégrale est bornée par $\frac{M}{r^{n+1}}$ et la longueur du cercle C est $2\pi r$. Nous avons donc,

$$|f^n(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n! M}{r^n}.$$

Théorème 1.2.3. *(Principe des zéros isolés) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ou Ω est un domaine et $f \in H(\Omega)$.*
posons

$$Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$$

Alors, ou bien $Z(f) = \Omega$, ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Dans ce dernier cas, à chaque $a \in Z(f)$ correspond un entier positif unique $m = m(a)$ tel que

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega) \tag{1.1}$$

ou $g \in H(\Omega)$ et $g(a) \neq 0$.

Preuve. Soit A, l'ensemble de tous les point d'accumulation de $Z(f)$ dans Ω. Comme f est continue, $A \subset Z(f)$. Fixons $a \in Z(f)$, et prenons $r > 0$ de sorte que la boule centrée en a et de rayon r, $B(a,r) \subset \Omega$. Comme f est analytique, on peut l'exprimer en série entière,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\propto} c_n (z-a)^n \qquad (z \in B(a,r)). \tag{1.2}$$

Il y a seulement deux possibilités. Ou bien tous les c_n sont nuls, auquel cas $B(a,r) \subset A$ et a est un point intérieur de A, ou bien il y a un plus petite entier m (nécessairement positif, puisque$f(a) = 0$) tel que $c_m \neq 0$. Dans ce cas, définissons

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & (z \in \Omega - a) \\ c_m & (z = a) \end{cases}$$

Ainsi, 1.1 est vrai. Il est clair que $g \in H(\Omega - a)$, mais 1.2 indique

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z-a)^k \qquad (z \in B(a,r))$$

. D'où $g \in H(B(a,r))$, et donc $g \in H(\Omega)$. En outre , $g(a) \neq 0$ et la continuité de g montre qu'il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas. Ainsi d'après 1.1 a est un point isolé de $Z(f)$ si $a \in A$ c'est nécessairement le premier cas qui se produit, c'est-à-dire que tous les c_n sont nuls dans la représentation en série de $f(z)$, donc A est ouvert. si $B = \Omega - A$, il est clair d'aprés la définition de A comme ensemble de points d'accumulation, que B est ouvert. En sorte que Ω est la réunion des ouverts disjoints A et B. Comme Ω est connexe, ou bien $A = \Omega$, auquel cas $Z(f) = \Omega$, ou bien $A = \emptyset$. ∎

Une derniére propriété importante est connue sous le nom du théoréme ou principe du maximum.

Théorème 1.2.4. *(principe du maximum). Soient Ω un domaine, $f \in H(\Omega)$ et $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$ où $r > 0$. Alors*

$$|f(a)| \leq \max_{\theta} |f(a + re^{i\theta})|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si f constante sur Ω.

1.3 Fonctions harmoniques

Cette section rappelle quelques propriétés des fonctions harmoniques à n variables réelles, pour plus de détails, on peut se référer à [2].

Définition 1.3.1. *Soit u une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ou complexes et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors u est dite harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0. \tag{1.3}$$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et soit une fonction complexe $f \in H(\Omega)$. Alors il existe $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tel que $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ ou $z = x+iy$, $z \in \Omega$. Nous savons que la fonction $u(x,y)$ est liée à $v(x,y)$ par les équations de ***Cauchy-Riemann*** :

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x.$$

Si nous dérivons par rapport à x la première équation de ***Cauchy-Riemann***, nous obtenons :

$$u_{xx} = v_{yx}.$$

Comme u et v sont des fonctions analytiques, nous pouvons changer l'ordre des dérivées partielles :

$$u_{xx} = v_{xy}.$$

Par la deuxième équation de ***Cauchy-Riemann***, nous pouvons remplacer v_{xy} par $-u_{yy}$, nous obtenons donc l'équation suivante :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

qui est l'équation de Laplace en dimensions deux. Nous arrivons à la conclusion que la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique. Nous pouvons montrer de la même façon que la partie imaginaire d'une fonction holomorphe est également harmonique. De plus, toute fonction harmonique à dimensions deux est localement la partie réelle où imaginaire d'une fonction holomorphe. Cette relation entre les deux types de fonctions est celle qui nous permettra d'établir un corollaire d'interpolation sur les fonctions harmoniques suite à l'obtention d'un théorème d'interpolation par des fonctions holomorphes. Il faut tenir compte de certaines différences entre les fonctions holomorphes et les fonctions harmoniques. Il faut faire attention à certaine détails lorsque l'on a un théorème sur les fonctions holomorphes et que l'on veut en déduire un corollaire sur les fonctions harmoniques. Une de ces différences porte sur les zéros de ces deux types de fonctions. Nous avons établi dans la section précédente que toute fonction d'une variable complexe non identiquement nulle et holomorphe dans un domaine possède un ensemble de zéros isolés, donc les zéros sont dénombrable. Par contre, l'ensemble des zéros des fonction harmoniques à n ($n \geq 2$) variable réelles ne sont jamais isolés. Le théorème suivante nous servira à prouver ce résultat.

Théorème 1.3.1. *[17] (propriété de la valeur moyenne).*
Si u et harmonique dans $\overline{B}(a,r) \subset \mathbb{R}^n$, alors u est égal à la valeur moyenne de u sur $\partial B(a,r)$. Plus précisément,

$$u(a) = \int_{\partial B} u(a + r\zeta) d\sigma(\zeta) \tag{1.4}$$

ou σ est la mesure de surface normalisée tel que $\sigma(\partial B) = 1$.

Corollaire 1.3.1. *Les zéros des fonctions harmoniques à valeurs réelles définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ne sont jamais isolés.*

Preuve. Supposons u harmonique et à valeurs réelles dans $\Omega, a \in \Omega$ et $u(a) = 0$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$. Par le théorème de la valeur moyenne 1.4, la moyenne de u sur $\partial B(a,r)$ est égale à 0. Alors, soit u est identiquement nulle sur $B(a,r)$ ou bien u prend des valeurs positives et négatives sur $\partial B(a,r)$. Dans ce cas, la connexité de $\partial B(a,r)$ et la continuité de u implique que u a un zéro sur $\partial B(a,r)$ par la propriété de la valeur intérmédiaire.
Si f est une fonction holomorphe à une variable complexe, alors ses parties réelles et imaginaires sont harmoniques à 2 variables réelles. Les zéros des fonctions réelles et imaginaires de f sont représentés par deux courbes différentes, donc l'ensemble des zérons de f est l'intersection des zéros de u et v, les fonctions réelles et imaginaire de f. Remarquons que le corollaire 1.3.1 est faux pour $n = 1$, car la solution générale de l'équation de Laplace en une dimension est une droite et la droite n'a qu'un seul zéro possible.
Tout comme pour les fonction holomorphes, les fonctions harmoniques possèdent leur version du principe du maximum. ∎

Exemple 1.3.1. *(Zéros des fonctions harmoniques)*
$U(x,y) = \log(x^2 + y^2)$. $(\Omega = \mathbb{C}^*)$,

$$\begin{aligned} Z(U) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\{(0,0)\} \ / \ U(x,y) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \mathcal{S}^1 \end{aligned}$$

Théorème 1.3.2. *(principe du maximum). Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω *un domaine simplement connexe, u harmonique et à valeurs réelles sur* Ω . *S'il existe un* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $\mid u(x) \mid \leq \mid u(x_0) \mid$ *pour tout* $x \in \Omega$, *alors u est constante.*

Les propriétés des fonctions holomorphes et harmoniques présentées dans ce chapitre nous seront utiles plus loins. Quoique ces fonctions possèdent d'autres propriétés intéressantes, nous nous limiterons à celles-ci.

Chapitre 2

Interpolation par des fonctions holomorphes d'une variable complexe

Pour nous, interpoler sera de trouver une fonction qui a des valeurs données en des points donnés. plus précisément, ce chapitre a pour but de donner le résultat suivant : soit Ω un domaine quelconque de $\mathbb{C}$; nous pouvons choisir arbitrairement un sous-ensemble $A \subset \Omega$, tel que A ne possède pas de points d'accumulation dans Ω et trouver une fonction $f \in H(\Omega)$ tel que f et un nombre fini de ses dérivées possèdent des valeurs données à l'avance en chaque point de A. Ensuite nous analyserons l'analogue du résultat pour les fonction harmoniques. Pour l'instant, nous considérerons le probléme simplifié de trouver une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que les zéros de f sont les points de A. La solution nous est donnée par le théorème de ***Weierstrass***. Nous savons par le théorème 1.2.3 que les zéros d'une fonction holomorphe (non constante) dans un domaine Ω sont isolés, c'est-à-dire que $Z(f)$ ne possède pas de point d'accumulation dans Ω. Le théorème de ***Weierstrass*** dit de plus que tout ensemble $A \subset \Omega$ qui ne possède pas de point d'accumulation dans Ω est le $Z(f)$ d'une fonction $f \in H(\Omega)$.

2.1 Produits infinis

Voici l'énnoncé du théorème de factorisation de ***Weierstrass***.

Théorème 2.1.1. *(**Weierstrass**, interpolation holomorphe simple (à l'ordre* 1*))*
Soit $\Omega \subsetneq \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \Omega$ ouvert. Soit $A \subset \Omega$, ne possédant pas de point d'accumulation dans Ω. Alors il existe $f \in H(\Omega)$ dont les seuls zéros sont les éléments de A et f possède un zéro d'ordre 1 en $\alpha \in A$.

Pour construire une telle fonction, choisissons en premier lieu un ensemble $A \subset \Omega$ telle que $A = \alpha_n$. Nous construirons ensuite des fonctions $f_n \in H(\Omega)$ tel que f_n a un seul zéro en α_n précisémentet nous considérerons la limite du produit de ces fonctions lorsque n tend vers l'infini :

$$p_n = f_1 f_2 \cdots f_n.$$

Nous commencerons donc à étudier les produits finis et la convergence des produits infinis.

Lemme 2.1.1. *Pour des nombres complexes $u_1, u_2, \cdots, u_N$, si l'on définis*

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n) \qquad P_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+\mid u_n \mid),$$

alors on a

$$P_N^* \leq e^{\sum_{n=1}^{N}|u_n|} \tag{2.1}$$

et

$$\mid P_N - 1 \mid \leq P_N^* - 1. \tag{2.2}$$

Preuve. Pour prouver 2.1 il suffit de remarquer que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Donc,pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq 1 + x$, en remplaçant x par $\mid u_1 \mid, \mid u_2 \mid, \cdots, \mid u_N \mid$ on a :

$$\begin{aligned} e^{|u_1|} &\geq 1+\mid u_1 \mid \\ e^{|u_2|} &\geq 1+\mid u_2 \mid \\ &\vdots \\ e^{|u_N|} &\geq 1+\mid u_N \mid \end{aligned}$$

En multipliant ces termes on obtient : $e^{\sum_{n=1}^{N}|u_n|} \geq \prod_{n=1}^{N}(1+\mid u_n \mid) = p_N^*$ Alors 2.1 est vérifiée. Pour montrer 2.2 nous procédons par induction Pour $N = 1$,on a bien

$$\mid P_1 - 1 \mid = \mid u_1 \mid = P_1^* - 1.$$

Ensuite, pour$k = 1, 2 \cdots, N-1$, on a

$$P_{k+1} - 1 = P_k(1 + u_{k+1}) - 1 = (P_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1}.$$

Si 2.2 a lieu avec k à la place de N on a

$$\begin{aligned} \mid P_{k+1} - 1 \mid &= \mid (P_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1} \mid \\ &\leq (P_k^* - 1)(1+ \mid u_{k+1} \mid) + \mid u_{k+1} \mid = P_{k+1}^* - 1. \end{aligned}$$

Donc 2.2 est vérifié ■

Nous aurons besoin plus tard du résultat combiné de 2.1 et 2.2,c'est-à-dire

$$\mid P_N - 1 \mid \leq e^{\sum_{n=1}^{N} |u_n|} - 1. \tag{2.3}$$

Définition 2.1.1. *Soit (u_j) une suite de nombres complexes. Le produit infini*

$$u_1.u_2 \cdots u_k \cdots = \prod_{j=1}^{\infty} u_j$$

est dit convergent si, à partir d'un certain indice m,aucun u_j ne s'annule pour $j > m$ et

$$\lim_{n\to\infty} (u_{m+1}.u_{m+2} \cdots u_n)$$

existe et possède une valeur finie différente de zéro. Si nous appelons cette limite U_m, alors

$$U = u_1 \cdot u_2 \cdots u_m \cdot U_m,$$

est la valeur du produit infini.

Théorème 2.1.2. *Soit $(f_n)_{n\in N}$, $f_n \in H(\Omega)$ pour tout $n \in\in \mathbb{N}$. On suppose que f_n ne soit pas identiquement nulle sur une quelconque composante connexe de Ω et de plus que la suite*

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid 1 - f_n(z) \mid \tag{2.4}$$

converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω. Alors le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{2.5}$$

converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω ; donc $f \in H(\Omega)$.

Preuve. Soit $K \subset \Omega$. Posons, pour nous placer dans les condition du lemme précédent, $u_n(s) = f_n(s) - 1$, donc $\mid u_n(s) \mid = \mid 1 - f_n(s) \mid$ et $f_n(s) = 1 + u_n(s)$. On a par hypothèse que

$$\sum \mid 1 - f_n(s) \mid = \sum \mid u_n(s) \mid$$

converge uniformément sur K. Alors $\sum \mid u_n(s) \mid$ est borné sur K. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n>N_0} \mid u_n(s) \mid < \epsilon.$$

Prenons $\epsilon \leq 1$. Soit

$$P_N(s) = \prod_{n=1}^{N} f_n(s) = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n(s)),$$

le $N-$iéme produit partiel, ou N est un entier. Montrons que $P_N(s)$ est une suite de ***Cauchy***.

Remarquons que le lemme précédent établit l'existence d'une constante $C < \infty$ tel que $\mid P_N(s) \mid < C$ pour tout $s \in K$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$. Soit $M > N > N_0$, avec M entier, alors

$$\mid P_M(s) - P_N(s) \mid = \left| P_N(s) \left[\prod_{n=N+1}^{M} (1 + u_n(s)) - 1 \right] \right| \leq \mid P_N(s) \mid (e^\epsilon - 1).$$

La dernière inégalité provient de l'équation 2.4. De plus nous avons pour $e^\epsilon - 1$,

$$\begin{aligned} e^\epsilon = 1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots \ &\Rightarrow \ e^\epsilon - 1 = \epsilon + \epsilon \left(\frac{\epsilon}{2!} + \frac{\epsilon^2}{3!} + \frac{\epsilon^3}{4!} + \cdots \right) \\ &\Rightarrow \ e^\epsilon - 1 \leq \epsilon + \epsilon \underbrace{\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2^2} + \frac{\epsilon^3}{2^3} + \cdots \right)}_{\leq 1} \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$\mid P_M(s) - P_N(s) \mid \leq 2C\epsilon.$$

Donc $P_N(s)$ est une suite de ***Cauchy*** définie dans un compacte K ; ainsi la suite converge. De plus, C ne dépend que de K, alors la suite $P_N(s)$ converge uniformément sur K. ■

Théorème 2.1.3. *Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $0 \leq u_n < 1$ pour tout n alors on dispose de l'équivalence suivante,*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

Preuve. La suffisance de la condition provient directement du théorème précédent en posant $f_n = 1 - u_n$. Pour la nécéssité, remarquons d'abord que si $p = \lim_{N \to \infty} p_N$, où $p_N = \prod_{n=1}^{N} (1 - u_n)$, alors

$$p \ \leq p_N \leq exp(-u_1 - u_2 \cdots - u_N)$$

et si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$ la dernière expression converge vers 0 lorsque N tend vers l'infini. ■

2.2 Facteurs élémentaires

Définition 2.2.1. *Soit p un entier, posons*

$$E_p(z) = \begin{cases} (1-z), & si\ p = 0, \\ (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdot+\frac{z^p}{p}}, & si\ p \geq 1. \end{cases}$$

Ces fonctions sont connues sous le nom de ***facteurs élémentaires****.*

L'unique zéro de $E_p(z)$ est en $z = 1$ et est un zéro d'ordre 1. Il nous est possible de considérer le produit $\prod\limits_p E_p(z)$. Cependant, il nous faut faire attention au produit infini de ces fonctions, car il peut ne pas converger. Par exemple, selon la définition 2.1.1, ce produit ne converge pas en $z = 1$. Le lemme suivant nous permettra de considérer un produit infini de facteurs élémentaires à l'intérieur de la boule unité.

Lemme 2.2.1. *Pour $|z| \leq 1$ et $p = 0, 1, 2, \cdots$ on a*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \tag{2.6}$$

Preuve. Pour $p = 0$, nous avons $|1 - E_0(z)| = |1 - (1 - z)| = |z|$, donc 2.6 est vrai. Pour $p \geq 1$, remarquons que :

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= -e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}} + (1-z)\underbrace{(1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-1})}_{\frac{(1-z^p)}{(1-z)}} e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}}. \\ &= -e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}} + (1-z^p)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}} \\ &= -z^p e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}}. \end{aligned}$$

Comme $E_p(z)$ est entière, on peut exprimer E_p en série

$$E_p(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j.$$

Comme $E_p(0) = 1$, on a $a_0 = 1$. On dérive la série et on obtient, en comparant avec le calcul de $E_p'(z)$ fait plus haut, que $a_1 = a_2 = \cdot, = a_p = 0$ et $a_j \leq 0$ pour $j > p$. Donc $|a_j| = -a_j$, car

$$E_p'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j Z^{j-1} = -z^p e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^P}{p}} = -z^p \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

où $b_k \geq 0$ pour tout k, car les termes devant les différentes puissances de z dans $e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^P}{p}}$ sont tous positifs. Remarquons aussi que

$$E_p(1) = 0 = 1 + \sum_{j>p} a_j.$$

Donc,

$$\sum_{j>p} a_j = -\sum_{j>p} |a_j| = -1.$$

Maintenant observons que

$$|1 - E_p(z)| = |E_p(z) - 1| = \left|1 + \sum_{j>p} a_i z^j - 1\right| = \left|\sum_{j>p} a_j z^j\right| \leq \sum_{j>p} |a_j||z^j|.$$

On retire $|z|^{p+1}$ de la somme et on obtient avec $|z| \leq 1$

$$|1 \;- E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \sum_{j>p} |a_j||z^{j-(p+1)}| \leq |z|^{p+1} \sum_{j>p} |a_j| = |z|^{p+1}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Ce lemme nous permet de considérer le produit infini de facteurs élémentaires dans la boule unité. En effet, si K est un compact de la boule unité alors $|z| < 1$ dans K. Par le théorème 2.1.2, comme nous avons que

$$\sum_{p=1}^{\infty} |1 - E_p(z)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |z|^{p+1} \quad (z \in K)$$

converge uniformement sur K, alors le produit infini

$$f(z) = \prod_{p=1}^{\infty} E_p(z)$$

converge uniformément sur K.

2.3 Théorème de *Weierstrass* et de *Mittag-Leffler*

2.3.1 Théorème de *Weierstrass*

Maintenant que nous connaissons les produits infinis et les facteurs élémentaires, nous sommes prêts à démontrer le théorème de ***Weierstrass***.

Théorème 2.3.1. *(**Weierstrass**) Soit $\Omega \subsetneq \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, Ω ouvert. Soit $A \subset \Omega$, ne possédant pas de point d'accumulation dans Ω. À chaque point $\alpha \in A$ on associe un entier non négatif $m(\alpha)$. Alors il existe $f \in H(\Omega)$ dont les seuls zéros sont les éléments de A et f possède un zéro d'ordre $m(\alpha)$ en $\alpha \in A$.*

Preuve. Sans perte de généralité, supposons $\infty \in \Omega$, $\infty \notin A$. Sinon une transformation homographique nous placerait dans cette situation. Alors $\overline{\mathbb{C}} - \Omega$ est compact et ∞ n'est pas un point d'accumulation dans l'ouvert Ω. Supposons A infini. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont dans A et chaque élément de A est écrit $m(\alpha)$ fois. À chaque $\alpha_n \in A$ on associe $\beta_n \in \overline{\mathbb{C}} - \Omega$ tel que $|\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n - \beta|$ pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{C}} - \Omega$; ce qui est possible car $\overline{\mathbb{C}} - \Omega$ est compact. Donc $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0$, car autrement A aurait un point d'accumulation dans 1'ouvert Ω. Alors

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

possède les propriétés désirées. En effet, posons $r_n = 2|\alpha_n - \beta_n|$ et soit K un compact de Ω. Puisque, lorsque n tend vers l'infini, r_n tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|z - \beta_n| > r_n$ pour tout $z \in K$ et tout $n > N$. Alors

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| = \frac{r_n}{2|z - \beta_n|} \leq \frac{1}{2}.$$

Par le lemme 2.2.1 nous avons

$$\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (z \in K,\ n \geq N),$$

ce qui implique

$$\sum_{n\geq N}\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \leq \sum_{n\geq N}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \infty.$$

Comme $E_n(z)$ est entière, les termes pour $n < N$ sont bornées dans K. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right|$$

converge uniformément sur K. Donc, par le théorème 2.1.2

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

converge uniformément sur K. K étant un compact quelconque de Ω, alors le produit converge uniformément sur les compacts de Ω.

Si A est fini, le produit fini est également et évidement convergeant. ∎

Nous pouvons obtenir un résultat semblable au théorème de ***Weierstrass*** pour les fonctions harmoniques à dimensions 2 réelles. Cependant, par le corollaire 1.3.1

les zéros des fonctions harmoniques à dimensions 2 réelles ne sont jamais isolés, alors il est impossible de formuler l'analogue du théorème de ***Weierstrass*** pour les fonction harmoniques de la même façon : nous ne pouvons affirmer que les éléments de l'ensemble A sont les seuls zéros de notre fonction harmonique. Nous avons défini l'ordre des zéros pour les fonctions holomorphes d'une variable. Pour définir l'ordre des zéros des fonctions analytiques à plusieurs variables il nous faut savoir ce qu'est un développement homogène.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, c'est-à-dire que tous les α_i sont des entiers non négatifs. Soit $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Supposons que

$$f(x_1, \ \ldots, \ x_n) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}, \ \ldots, \ x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha x^\alpha$$

dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Pour $s = 0, 1, 2, \ \ldots$, soit $F_s(x)$ la somme des termes $c_\alpha x^\alpha$ pour laquelle $|\alpha| = s$. Alors $F_s(x)$ est un polynôme homogène de degré s, ce qui veut dire que

$$F_s(\lambda x) = \lambda^s F_s(x) \ (x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \ \in \mathbb{R}).$$

La série de puissance de f peut maintenant être écrite de la forme suivante

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(x).$$

Ceci est le développement homogène de f.

Définition 2.3.1. *Si f est une fonction analytique telle que décrite plus haut et non identiquement nulle dans le voisinage dans lequel est définie sa série de puissance alors il existe un plus petit $s = s(f)$ tel que F_s n'est pas un polynôme nul. On dit que ce $s(f)$ est l'ordre du zéro l'origine. Si $s(f) = 0$, alors f n'a pas de zéro a l'origine.*

Bien entendu cette définition est valide pour un développement en série dans un voisinage d'un autre point que 0.

*Voici maintenant l'énoncé du théorème de **Weierstrass** pour les fonctions harmoniques.*

Corollaire 2.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega$ ouvert. Soit $A \subset \Omega$, ne possédant pas de point d'accumulation dans Ω. À chaque point $\alpha \in A$ on associe un entier non négatif $m(\alpha)$. Alors il existe u harmonique dans Ω tel que tous les éléments de A sont des zéros de u et possédant un zéro d'ordre $m(\alpha)$ en $\alpha \in A$.*

Preuve. Par le théoréme 2.3.1 il existe une fonction $f \in H(\Omega)$ tel que les seuls zéros sont les éléments de A et possédant un zéro d'ordre $m(\alpha)$ en $\alpha \in A$. Posons

$\alpha = (x_0,\ y_0)$, alors si $f(x_0,\ y_0) = u(x_0,\ y_0) + iv(x_0,\ y_0) = 0$, il faut que $u(x_0,\ y_0) = v(x_0, y_0) = 0$, Le point α étant quelconque, alors tous les éléments de A sont des zéros de u et v, deux fonctions harmoniques. ∎

2.3.2 Théorème de *Mittag-Leffler*

Définition 2.3.2. *Une fonction est méromorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ s'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ tel que*

(1) A n'a pas de point d'accumulation dans Ω ;

(2) $f \in H(\Omega - A)$;

(3) Chaque point de A est un pôle pour f.

Les fonctions méromorphes dans un domaine Ω sont d'éveloppables en série de Laurent autour de $z_0 \in \Omega$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z\ - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z - z_0)^{-j}.$$

Nous appelons la série $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z\ - z_0)^{-j}$, la partie principale de f en z_0. Un pôle est dit d'ordre m si tous les a_{-j} sont nuls pour $j > m$ et $a_{-j} \neq 0$. Il est naturel de se poser la question suivante : peut-on choisir un sous-ensemble $A \subset \Omega$ sans point d'accumulation dans Ω et trouver une fonction $f \in H(\Omega - A)$ et méromorphe sur Ω, avec des parties principales prescrites en chaque point de A ? La réponse est affirmative et ce résultat est connu sous le nom du théorème de ***Mittag-Leffler*** ce théorème ne sera pas démontré mais la preuve est présentée dans de nombreux livres d'analyse dont [18].

Théorème 2.3.2. *(**Mittag-Leffler**) Soient Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$, $A \subset \Omega$, A n'ayant aucun point d'accumulation dans Ω. Supposons qu'à chaque $\alpha \in A$ on ait associé un entier positif $m(\alpha)$ et une fonction rationnelle*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z - \alpha)^{-j}.$$

Il existe une fonction méromorphe f sur Ω telle qu en chaque point $\alpha \in A$ la partie principale soit P_α et f n'a aucun autre pôle dans Ω.

2.4 Théorème d'interpolation

2.4.1 Interpolation par des fonctions holomorphes

Nous avons maintenant tous les outils pour prouver un théorème d'interpolation par des fonctions holomorphes.

Théorème 2.4.1. *(Interpolation holomorphe à l'ordre n) Soit $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, Ω ouvert. Soit $A \subset \Omega$, ne possédant pas de point d'accumulation dans Ω. À chaque point $\alpha \in A$ on associe un entier non négatif $m(\alpha)$ et, pour $0 \leq n \leq m(\alpha)$, des $\omega_{n,\alpha} \in \mathbb{C}$. Alors il existe $f \in H(\Omega)$ tel que*

$$f^{(n)}(\alpha) = n!\omega_{n,\alpha} \quad \alpha \in A,\ 0 \leq n \ \leq m(\alpha).$$

Preuve. Avec le théorème 2.3.1 on construit $g \in H(\Omega)$ dont les seuls zéros sont dans A et de sorte que g ait un zéro de multiplicité $m(\alpha)+1$ en chaque $\alpha \in A$.

On prétend qu'il est possible d'associe à chaque $\alpha \in A$ un P_α de la forme

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)+1} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j},$$

tel que $g(z)P_\alpha(z)$ possède un développement convergent en série dans un disque centré en α

$$g(z)P_\alpha(z) = \omega_{0,\alpha} + \omega_{1,\alpha}(z-\alpha) + \cdots + \omega_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)} + \cdots \tag{2.7}$$

Nous connaissons le développement pour $g(z)$

$$g(z) = b_1(z \ -\alpha)^{m(\alpha)+1} + b_2(z-\alpha)^{m(\alpha)+2} + \cdots$$

Mais nous ne connaissons pas la valeur des coefficients $c_{j,\alpha}$ de $P_\alpha(z)$ développé en série

$$P_\alpha(z) = c_{i,\alpha}(z-\alpha)^{-1} + c_{2,\alpha}(z-\alpha)^{-2} + \cdots + c_{m(\alpha)+1,\alpha}(z-\alpha)^{-m(\alpha)-1}$$

En multipliant les deux séries nous obtenons

$$g(z)P_\alpha(z) = (b_1+b_2(z-\alpha)+\cdots)\left(c_{m(\alpha)+1,\alpha} + c_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha) + \cdots + c_{1,\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)}\right) \tag{2.8}$$

En comparant les puissance entre 2.7 et 2.8, on résout pour les coefficients $c_{j,\alpha}$ pour chaque P_α. Maintenant que l'on connait la fonction $P_\alpha(z)$ pour chaque $\alpha \in A$, le théorème de ***Mittag-Leffler*** 2.3.2 nous assure l'existence d'une fonction h méromorphe sur Ω dont les parties principales sont précisément ces P_α. Alors, si l'on considère la fonction $f = gh$, on obtient une fonction ayant les propriétés requises, et $f \in H(\Omega)$ car f a localement un développement en série de puissance dans Ω. ■

2.4.2 Interpolation par des fonctions harmoniques

Tout comme nous avons fait avec le théoréme de ***Weierstrass***, appliquons le théoréme d'interpolation aux fonctions harmoniques.

Corollaire 2.4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω ouvert. Soit $A \subset \Omega$, ne possédant pas de point d'accumulation dans Ω. À chaque point $\alpha \in A$ on associe un entier non négatif $m(\alpha)$ et, pour $0 \leq n = k + j \leq m(\alpha)$, $k,\ j \in \mathbb{N}$, des $c_{n,j,\alpha} \in \mathbb{R}$. Alors il existe u harmonique telle que*

$$\frac{\partial^n u(\alpha)}{\partial x^k \partial y^j} = n! c_{n,j,\alpha} \quad \alpha \in A,\ 0 \leq n \leq m(\alpha),$$

et l'on peut imposer 2 conditions pour un $n \neq 0$; une pour j pair et une pour j impair.

Preuve. On suppose $f \in H(\Omega)$ telle que $Re(f) = u$, f' existe

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} \quad (z \in \Omega).$$

où $z = x+iy, \triangle z = \triangle x + i \triangle y$. Nous pouvons nous approcher du point z de n'importe quelle direction, posons $\triangle y = 0$, de plus si l'on remplace $f(z)$ par
$u(x,\ y) + iv(x,\ y)$ nous obtenons

$$f'(z) = \lim_{\triangle x \longrightarrow 0} \frac{u(x + \triangle x, y) - u(x, y) + i(v(x + \triangle x, y) - v(x, y))}{\triangle x} \tag{2.9}$$

Ceci est

$$f\prime(z) = u_x(x,\ y) + iv_x(x,\ y).$$

Maintenant si nous remplacons u par u_x et v par v_x dans 2.9 nous obtenons que $f^{(2)}(z) = u_{xx}(x,\ y) + iv_{xx}(x,\ y)$. En généralisant le résultat à la n-ième dérivée nous avons que

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x,\ y)\ + i \frac{\partial^n}{\partial x^n} v(x,\ y).$$

Par le théorème 2.4.1 nous pouvons construire une fonction holomorphe avec les conditions $f^{(n)}(\alpha) = n! \omega_{n,\alpha},\ \alpha \in A,\ 0 \leq n \leq m(\alpha)$. Posons $\alpha = (x_0,\ y_0)$. $\omega_{n,\alpha}$ est un nombre complexe et a donc une partie réelle $a_{n,\alpha}$ et une partie imaginaire $b_{n,\alpha}$, ce qui nous permet d'écrire l'égalité suivante

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x_0,\ y_0) + i \frac{\partial^n}{\partial x^n} v(x_0 y_0) = n! a_{n,\alpha} + in! b_{n,\alpha} \tag{2.10}$$

Donc, trouver une fonction harmonique u dans Ω en imposant la condition

$\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x_0,\ y_0) = n!c_{n,0,\alpha}$ est le même problème que de trouver une fonction holomorphe dans Ω avec la condition $a_{n,\alpha} = c_{n,0,\alpha}$. Ici, rien n'a été imposé sur la partie imaginaire de $\omega_{n,\alpha}$. Par le théorème 2.4.1 nous trouvons cette fonction holomorphe dont la partie réelle est une fonction harmonique qui satisfait les conditions désirées.

Considérons maintenant la condition mixte $\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^j}u(\alpha) = n!c_{n,j,\alpha}$. Nous pourrons éliminer les dérivées partielles par rapport à y avec l'intervention des équations de ***Cauchy-Riemann*** dans $\mathbb{C}$:

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x$$

car, comme u et v sont analytiques on peut changer l'ordre des dérivées partielles.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^j}u &= u_{\underbrace{x\cdots x}_{k}\underbrace{y\cdots y}_{j}} \\
&= -v_{\underbrace{x\cdots x}_{k+1}\underbrace{y\cdots y}_{j-1}} \\
&= -u_{\underbrace{x\cdots x}_{k+2}\underbrace{y\cdots y}_{j-2}} \\
&= v_{\underbrace{x\cdots x}_{k+3}\underbrace{y\cdots y}_{j-3}} \\
&= u_{\underbrace{x\cdots x}_{k+4}\underbrace{y\cdots y}_{j-4}} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

On trouve les conditions imposées sur la fonction f du théorème 2.4.1 avec l'équation 2.7 :

$$\begin{array}{lll}
\text{si } j \equiv 0\ mod4 & alors & a_{n,\alpha} = c_{n,j,\alpha} \\
\text{si } j \equiv 1\ mod4 & alors & b_{n,\alpha} = -c_{n,j,\alpha} \\
\text{si } j \equiv 2\ mod4 & alors & a_{n,\alpha} = -c_{n,j,\alpha} \\
\text{si } j \equiv 3\ mod4 & alors & b_{n,\alpha} = c_{n,j,\alpha}
\end{array}$$

Comme on ne peut pas imposer 2 conditions différentes sur la partie réelle $(a_{n,\alpha})$ ou sur la partie imaginaire $(b_{n,\alpha})$ de $\omega_{n,\alpha}$, nous sommes limités à 2 conditions : une sur $a_{n,\alpha}$, avec j pair, et une sur $b_{n,\alpha}$, avec j impair. Et par le théorème 2.4.1 on construit f holomorphe sur Ω, on prend la fonction u, la partie reélle de f, et on a une fonction harmonique dans Ω qui satisfait les conditions. ■

Remarquons qu'il est impossible d'obtenir un théorème d'interpolation semblable au corollaire 2.4.1 avec la possibilité d'imposer des valeurs à plus de deux dérivées d'ordre n. Car, comme les fonctions harmoniques à deux variables sont la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction holomorpbe dans $\mathbb{C}$, si l'on impose plus que deux conditions en un point sur les dérivées d'ordre n à la fonction harmonique, il y aura une contradiction sur les valeurs de la $n$ième dérivés de la fonction holomorphe évaluée en ce point.

2.5 Formule de *Jensen*

Rappelons-nous que le théorème de factorisation de ***Weierstrass*** nous dit que tout sous-ensemble A d'un domaine Ω de $\mathbb{C}$ ne possédant pas de points d'accumulation dans Ω est l'ensemble des zéros pour au moins une fonction holomorphe dans Ω. Le théorème de ***Weierstrass*** nous indique donc que la localisation des zéros n'est limitée par aucune autre condition que l'absence de point d'accumulation dans Ω. Nous verrons que la situation est différente si nous voulons caractériser l'ensemble des zéros des fonctions holomorphes définies par des conditions de croissances. Dans ces situations, lensemble des zéros doit satisfaire certaines conditions quantitatives. La plupart de ces théorèmes reposent sur la formule de ***Jensen***.

Nous aurons besoin d'un résultat préliminaire avant de démontrer la formule de ***Jensen***.

Lemme 2.5.1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0.$

Preuve. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1\}$. Puisque $1 - z \neq 0$ sur Ω, et puisque Ω est simplement connexe, il existe une fonction $h \in H(\Omega)$ telle que, pour tout z dans Ω, on ait

$$e^{h(z)} = 1 - z.$$

Cette fonction h est déterminée de façon unique si l'on impose $h(0) = 0$. Puisque $\Re(1-z) > 0$ sur Ω, on a

$$\Re h(z) = \log|1-z|, \ |\mathcal{I}m h(z)| < \frac{\pi}{2} \quad (z \in \Omega) \tag{2.11}$$

Pour δ assez petit, on définit le chemin Γ

$$\Gamma(t) = e^{it} \qquad (\delta \le t \le 2\pi - \delta),$$

et γ l'arc de cercle dont le centre est 1 et qui va de $e^{i\delta}$ à $e^{-i\delta}$ tout en restant dans le disque unité. Comme le contour $\Gamma - \gamma$ est un contour fermé (dans le sens anti-horraire) et que $\frac{h(z)}{z}$ est holomorphe à l'intérieur, nous avons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma-\gamma} h(z)\frac{dz}{z} = 0.$$

Dans ce cas,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\log\left|1-e^{i\theta}\right|d\theta=\Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h(z)\frac{dz}{z}\right]=\Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h(z)\frac{dz}{z}\right] \tag{2.12}$$

La dernière égalité provient du théorème de ***Cauchy***. La longeur de γ est moindre que $\pi\delta$, de sorte que 2.11 assure que la valeur absolue de la dernière intégrale dans 2.12 est inférieure à $C\delta\log\left(\frac{1}{\delta}\right)$, pour une certaine constante C. Ceci procure le résultat si l'on fait tendre δ vers 0. ∎

Théorème 2.5.1. *(Formule de **Jensen**) Soient $\Omega=B(0,\ R)\subset\mathbb{C}$ et $f\in H(\Omega)$ tel que $f(0)\neq 0$. Prenons r tel que $0<r<R$ et on note $\alpha_1,\cdots,\ \alpha_N$ les zéros de f appartenant à $\overline{B}(0,\ r)$ rangés avec leur ordre de multiplicité. On a*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}. \tag{2.13}$$

L'hypothèse de $f(0)\neq 0$ n'est pas embêtante, car si f a un zéro d'ordre k en 0, il suffit d'appliquer cette formule à $\dfrac{f(z)}{z^k}$.

Preuve. Numérotons les points α_j de sorte que $\alpha_1,\cdots,\ \alpha_m$ appartiennent à $B(0,r)$ et que $|\alpha_{m+1}|=\cdots=|\alpha_N|=r$. Remarquons qu'il est possible d'avoir $m=N$ ou $m=0$. Définissons

$$g(z)=f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\overline{\alpha}_n z}{r(\alpha_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-z} \tag{2.14}$$

La fonction g est holomorphe et n'a pas de zéro dans le disque $B=B(0,\ r+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon>0$, de sorte que $\log|g|$ est une fonction harmonique sur B et ainsi par la propriété de la valeur moyenne

$$\log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta \tag{2.15}$$

Grâce à 2.14, on a

$$|g(0)|=|f(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_n|} \tag{2.16}$$

Pour $1\leq n\leq m$, les facteurs de 2.14 ont un module égale à 1 si $|z|=r$. Si $\alpha_n=re^{i\theta_n}$, pour $m<n\leq N$, il s'ensuit que

$$\log|g(re^{i\theta})|=\log\left|f(re^{i\theta})\right|-\sum_{n=m+1}^{N}\log\left|1\ -e^{i(\theta-\theta_n)}\right|.$$

Le lemme 2.5.1 montre alors que l'intégrale dans 2.15 ne change pas si l'on remplace g par f. Par comparaison avec 2.16 il vient 2.13. ■

Soit f une fonction entière. On définit

$$M(r) = \sup_{\theta} |f(re^{i\theta})|$$

avec $0 < r < \infty$. Soit $n(r)$ le nombre, incluant les multiplicités, de zéros de f appartenant à $\overline{B}(0,\ r)$. De plus, supposons $f(0) = 1$; alors nous avons par la formule de ***Jensen***

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} &= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(2re^{i\theta})|d\theta\right\} \\ &\leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log M(2r)d\theta\right\} \\ &= M(2r).\end{aligned}$$

De plus, comme $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$, nous avons

$$\prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq 2^{n(r)}.$$

Nous obtenons donc l'inégalité suivante

$$2^{n(r)} \leq M(2r),$$

ou bien

$$n(r)\log 2 \leq \log M(2r).$$

Cette équation indique que la rapidité de croissance du nombre de zéro de f selon r est controlée par la croissance de $M(r)$. Entre autre une fonction avec beaucoup de zéros doit croître rapidement.

2.6 Condition de *Blaschke*

Avec la formule de ***Jensen***, il est possible de déterminer les conditions que doivent satisfaire les zéros des fonctions non constantes, holomorphes et bornées dans le disque unité, nous noterons cette famille de fonctions par H^∞.

Théorème 2.6.1. *Soit $\mathcal{A} \subset B(0,\ 1) \subset \mathbb{C}$, ne possédant pas de point d'accumulation dans $B(0,\ 1)$. À chaque point $\alpha \in \mathcal{A}$ on associe un entier non négatif $m(\alpha)$. Alors* *il existe $f \in H^\infty$ telle que les seuls zéros sont les éléments de $\mathcal{A}$ et possédant un zéro d'ordre $m(\alpha_n)$ en $\alpha_n \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty$.*

Preuve. Montrons d'abord que la condition est suffisante.

Supposons alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty$. Posons

$$b(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}. \tag{2.17}$$

Montrons que $b(z) \in H^\infty$ et ne possède pas d'autres zeros que les points α_n (outre l'origine si $k > 0$). Cette fonction b est appelée produit de ***Blaschke***. On notera que certains des α_n peuvent être répétés, ce qui fournit un zero multiple pour b en ce point. On notera aussi que chaque facteur du produit de ***Blaschke*** a une valeur absolue égale à 1 sur le bord du disque unité. Pour $|z| \leq r$, le $n$ième terme de la série,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right|$$

vaut

$$\left|\frac{\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1-\overline{\alpha}_n z)\alpha_n}\right|(1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}\left(1\ -|\alpha_n|\right).$$

Grâce au théorème 2.1.2 $b \in H(B(0,\ 1))$ et b n'a pas d'autre zéros que ceux prescrits. Puisque chaque facteur de 2.17 a une valeur absolue inférieure à 1 dans le disque unité, on en déduit que $|b(z)| < 1$.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons une fonction $f \in H^\infty$. Si f possède un zéro d'ordre m à l'origine et l'on pose $g(z) = z^{-m}f(z)$, la fonction $g \in H^\infty$, et elle possède les mêmes zéros que f, l'origine mise à part. On peut donc supposer sans perdre de généralité que $f(0) \neq 0$. Soit $n(r)$ le nombre des zéros de f dans $\overline{B}(0,r)$. Fixons k et choisissons $r < 1$ de sorte que $n(r) > k$. Alors la formule de ***Jensen***

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}$$

implique

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{k}\frac{r}{|\alpha_n|} \leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\} \tag{2.18}$$

L'hypothèse $f \in H^\infty$ équivault à l'existence d'une constante $C < \infty$ qui borne le membre de droite dans 2.18, pour tout r entre 0 et 1. On déduit

$$\prod_{n=1}^{k} |\alpha_n| \geq C^{-1}|f(0)|r^k.$$

L'inégalité demeure vraie pour tout k lorsque $r \to 1$. De là

$$\prod_{n=1}^{k} |\alpha_n| \geq C^{-1}|f(0)| > 0 \tag{2.19}$$

Le théorème 2.1.3 montre que 2.19 implique que $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) < \infty$. ■

La condition de ***Blaschke*** implique qu'une fonction $f \in H^\infty$ ne peut prendre "trop souvent" la même valeur. Si (α_j) est un ensemble de point dans le disque unité tel que $f(\alpha_j) = c$ pour $c \in \mathbb{C}$, alors la condition de ***Blaschke*** doit être respecté car l'ensemble (α_j) sera un ensemble de zéro pour la fonction $g \in H^\infty$ définie par $g(z) = f(z) - c$. Il est donc encore possible de faire de l'interpolation sur un ensemble de point discret pour les fonction dans H^∞, mais il ne faut pas interpoler " trop souvent" sur les mêmes valeurs.

La prochaine étape consistera à généraliser les résultats de ce chapitre à plusieurs dimensions complexes.

Chapitre 3

Interpolation par des fonctions holomorphes à plusieurs variables complexes

Les buts visés dans ce chapitre sont, en premier lieu, de prouver un théorème d'interpolation semblable au théoréme 2.4.1 pour les fonction holomorphes définies dans des domaines de $\mathbb{C}^n$, et par la suite de caractériser les zéros des fonctions holomorphes bornées dans un produit cartésien de disque unité (ce qui est appelé un polydisque).

Nous généraliserons d'abord le théorème de ***Mittag-Leffler*** ainsi que le théorème de factorisation de ***Weierstrass*** dans $\mathbb{C}^n$. La généralisation de ces théorèmes fût un probléme important dans le développement de l'analyse à plusieurs dimensions complexes, ces problèmes portent les noms de problème de ***Cousin*** I (***Mittag-Leffler***) et problème de ***Cousin*** II (***Weierstrass***). Ces problèmes sont maintenant résolus et nous exposerons les solutions dans ce chapitre.

Comme la théorie des fonctions à plusieurs variables complexes n'est pas une branche des mathématiques aussi bien connue que la topologie générale ou la théorie de la mesure, nous exposerons brièvement son développement.

La théorie des fonctions de plusieurs variables complexes est la branche des mathématiques qui traite des fonctions $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ de n-tuples de nombres complexes. Comme dans l'analyse complexe à une dimension, les fonctions holomorphes à dimensions n complexes sont solutions aux équations de ***Cauchy Riemann*** à dimensions n. Beaucoup d'exemples de telles fonctions étaient connus dans les mathématiques XIX^e siècle : les fonctions abéliennes et quelque séries hypergéometriques. Mais, c'est dans les années 1930 qu'une théorie générale a commencé à émerger, avec les travaux de Hartogs et de Kiyoshi Oka. Hartogs a prouvé quelques résultats fondamentaux. Entre autre, il a montré que les fonctions holomorphes à dimensions n complexes ne peuvent avoir de singularité isolée. Vers le millieu du XX^e siècle, suite à des travaux importants en France, dans le séminaire de Henri Cartan, et en Allemagne avec Grauert et Remmert, l'image de la théorie a changé rapidement. Plusieurs problèmes ont été clarifiés, en particulier celui du prolongement analytique. Pour tout domaine

$D \subset \mathbb{C}$ nous pouvons trouver une fonction qui ne se prolongera pas analytiquement au-delà de la frontière ; cela est faux pour $n > 1$. Dans $\mathbb{C}^n$, les domaines qui ont cette caractéristique sont appelés domaines d'holomorphie.

3.1 Fonctions holomorphes et méromorphes

Pour une étude plus complète des propriétés des fonctions holomoprhes à plusieurs variables complexe vous pouvez vous référer à [17] ou [20].

Introduisons des opérateurs différentiels partiels

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Définition 3.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}^n$, D ouvert. Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe dans D si $f \in C^1(D)$ et f satisfait le systéme d'équations différentiels partiels (équations de* ***Cauchy-Riemann****)*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.1}$$

Soit une fonction holomorphe $f(z)$, alors elle peut être représentée par

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

où $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont les parties réelles et imaginaire de $f(z)$; $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$. En appliquant les équations de ***Cauchy-Riemann****, nous obtenons*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \cdots, n).$$

Ce système n'est rien d'autre que les équations de ***Cauchy-Riemann*** *d'une variable appliquées à chaque variable. Donc une fonction est holomorphe si et seulement si elle est holomorphe en chaque variable. En dérivant ces équations par rapport à x_k et y_k nous voyons que la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ satisfont le système d'équations différentiels partiels du second degré suivant :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial y_k} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial y_j} = 0.$$

Une fonction $\varphi(x, y)$ qui satisfait ce système d'équation est dite pluriharmonique si u et v satisfont ces équations, nous appelons la fonction v le conjugé pluriharmonique de la fonction u. Remarquons que le cas particulier où $k = j$ dans la première *équation implique qu'une fonction pluriharmonique à $2n$ variables est également une fonction harmonique à $2n$ variables.*

Un domaine D est dit domaine d'holomorphie s'il existe une fonction holomorphe f dans D tel que f ne peut être prolongée analytiquement à aucun point frontière de D. En particulier, f ne peut être prolongée analytiquement à un domaine contenant D. Tout domaine de $\mathbb{C}$ est un domaine d'holomorphie, mais il existe des domaines dans $\mathbb{C}^n$ qui ne sont pas des domaines d'holomorphie. Les domaines d'holomorphie joueront un rôle important dans la suite, car nous verrons plus tard que la généralisation du théorème de Mittag-Leffier à plusieurs dimensions complexes sera toujours possible dans des domaines d'holomorphie.

Comme dans le cas d'une variable complexe nous noterons les fonctions holomorphes dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$ par $f \in H(D)$. Nous dénotons le polydisque

$$\mathbb{D}^n = \{z : |z_j| < |a_j|, \quad j = 1, \cdots, n\}$$

. Le borde de $\mathbb{D}^n$, noté $\partial\mathbb{D}^n$ et définie par :

$$\partial\mathbb{D}^n = \{z : |z_j| = |a_j|, \quad j = 1, \cdots, n\}$$

Lorsque les a_j seront tous égaux à 1, nous dirons que c'est le polydisque unité. Tous comme dans $\mathbb{C}$, nous avons la formule intégrale de ***Cauchy*** dans $\mathbb{C}^n$.

Exemples 3.1.1.

- $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot \overline{z_2}$ *n'est holomorphe sur aucun ouvert de* $\mathbb{C}^2$
- $f(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$
- *Contrairement au fonctions à une seul variable les zéros des fonctions holomorphes à plusieurx variables peuvent être non isolés. Exemple* $f(z_1, z_2) = \sin(z_1 z_2)$

Théorème 3.1.1. *Soit f holomorphe dans le polydisque unité fermé $\overline{\mathbb{D}^n}$. Alors,*

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_n|=1} \cdots \int_{|\zeta_1|=1} \frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

pour tout $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{D}^n$.

Preuve. Par induction sur la dimension n. Pour $n = 1$ c'est l'intégrale classique de ***Cauchy***. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour la dimension $n-1$. fixons un point $z = (z_1, \cdots, z_n)$ dans le polydisque unité. Comme $f(z)$ est holomorphe en z_1 nous avons (provenant du cas d'une variable)

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \tag{3.2}$$

Maintenant, $f(\zeta_1, \cdots, z_n)$ est une fonction holomorphe à $n-1$ variables complexes $(z_2, \cdots, z_n)$ sur le polydisque unité fermé $\mathbb{D}^n$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Il s'en suit de l'hypothèse d'induction que

$$f(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\zeta_n|=1} \cdots \int_{|\zeta_2|=1} \frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_2 \cdots d\zeta_n$$

.

Il suffit maintenant de substituer cette équation dans 3.2 pour obtenir une intégrale itérée et comme $f(z)$ est continue dans le polydisque on peut changer l'ordre d'intégration pour obtenir l'intégrale désirée. ■

Pour fin de simplification, introduisons une notation multi-indexée. Notons un élément $(z_1, \cdots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ par z. Notons également $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, le produit

$$(\zeta - z) = (\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)$$

et

$$d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Avec cette notation, nous pouvons réécrire la formule intégrale de ***Cauchy*** de la manière simplifiée suivante,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial \mathbb{D}}^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Il existe également un analogue dans $\mathbb{C}^n$ à la formule des dérivées de ***Cauchy*** dans $\mathbb{C}$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, où α_j est un entier non négatif. Assimilons la notation suivante, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ et $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. Nous dénotons les dérivées par rapport a des variables réelles

$$\frac{\partial^{|\beta|+|\gamma|} f}{\partial x^\beta \partial y^\gamma} = \frac{\partial^{|\beta|+|\gamma| f}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n} \partial y_1^{\gamma_1} \cdots \partial y_n^{\gamma_n}}$$

et par rapport aux variables complexes

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}}.$$

Comme pour les fonctions holomorphes d'une dimension, si la fonction holomorphe est bornée au voisinage d'un point $a \in \mathrm{D}^n$ alors ses dérivées le sont également.

Les fonctions méromorphes d'une variable complexe sont peuvent être définies comme étant le quotient de deux fonctions holomorphes. En plusieurs variables cette définition est trop restrictive, nous dirons plutôt que les fonctions méromorphes à plusieurs variables complexes sont localement le quotient de deux fonctions holomorphes.

Définition 3.1.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}^n$. Une fonction g sur D est dite méromorphe si pour tout point $p \in D$ il existe un voisinage U_p et des fonctions retativement premières $h_p(z), k_p(z)$ holomorphes dans U_p tel que pour tout $p, q \in D$ avec $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ nous avons*

$$k_p(z)h_q(z) = k_q(z)h_p(z) \quad \textit{dans } U_p \cap U_q$$

et $g(z) = \frac{h_p(z)}{k_p(z)}$ dans U_p.

Nous dirons alors

$$g(p) = \begin{cases} \frac{h(p)}{k(p)}, & k(p) \neq 0, \\ \infty, & k'(p) = 0,\ h(p) \neq 0, \\ \frac{0}{0}, & k(p) = 0,\ h(p) = 0. \end{cases}$$

Le point p est dit point d'holomorphie dans le premier cas, un pôle dans le second cas et un point d'indétermination dans le troisième cas. Nous noterons l'ensemble des fonctions méromorphes dans un domaine D par $M(D)$.

En une variable complexe les zéros des fonctions holomorphes sont isolés, ce qui n'est pas le cas pour les fonctions holomorphes à plusieurs variables complexes. Nous avons toujours l'équivalence entre fonctions holomorphes et analytiques de plusieurs variables complexes. Pour montrer ceci, il faut étudier les séries multiples.

3.2 Séries Mutiples

Comme pour les séries simples, l'expression suivante

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha, \qquad b_\alpha \in \mathbb{C},$$

a deux signification dépendant du contexte. La première signification est seulement l'expression formelle que l'on appelle une série multiple. La deuxième signification est la somme de cette série lorsqu'elle existe. Bien sur, nous devons maintenant définir ce que nous entendons par la somme d'une série multiple. Si $n > 1$ alors $\mathbb{N}^n$ n'a pas d'ordre naturel, donc il n'y a aucune façon canonique de considérer $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha$ comme

une suite de sommes partielles comme dans le cas
$n = 1$. L'ambiguité est évitée si l'on considère les séries absolument convergentes. La série multiple $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha$ est dite absolument convergente si

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |b_\alpha| = \sup\left\{\sum_{\alpha\in\Lambda} |b_\alpha| : \Lambda fini\right\} < \infty$$

Le théoréme de ***Cauchy*** sur les séries multiples affirme que la convergence absolue de $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha$ est une condition nécessaire et suffisante pour que tout arrangement de $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha$ en une série ordinaire

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{\sigma(j)},$$

Où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ est une application bijective, converge dans le sens usuel vers une limite $L \in \mathbb{C}$ qui est indépendante de σ. Le nombre L est appelé la limite ou la somme de la série multiple et nous écrivons

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha = L.$$

En particulier si la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha$ converge absolument alors sa limite peut être calculée en considérant l'expansion homogène

$$L = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha\right)$$

De plus, pour toute permutation τ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ la série itérée

$$\sum_{\alpha_\tau(n)=0}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{\alpha_\tau(1)=0}^{\infty} b_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\right)\cdots\right)$$

converge également vers L. Dans l'autre sens, si $b_\alpha \geq 0$, la convergence de toutes les séries itérées implique la convergence de la série multiple $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha$.

Théorème 3.2.1. *(**Weierstrass** M-test). Soit f_n une suite de fonctions définies sur un ensemble E et M_n une suite de constantes. Si $|f_n| \leq M_n$ et $\sum M_n$ converge alors $\sum f_n$ converge absolument et uniformément.*

Nous pouvons maintenant montrer que toutes les fonctions holomorphes sont analytiques.

Théorème 3.2.2. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et soit $a \in \Omega$. Alors f peut être représentée par une série de puissance absolument convergente dans un voisinage de a :*

$$f(z) \ = \sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha.$$

C'est la série de Taylor de f, c'est-à-dire que

$$c_\alpha = \frac{f^{(\alpha)}(\alpha)}{\alpha!}.$$

La représentation de f par sa série de Taylor est valide dans tout polydisque centré en a et contenu dans Ω.

Preuve. Considérons un polydisque

$$\mathbb{D}^n(a,r) = \{z;\ |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1, \cdots, n\},$$

lequel, par simplicité nous dénoterons par $\mathbb{D}$, tel que la fermeture est comprise dans Ω. Par la formule intégrale de ***Cauchy***,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

et par le lemme précédent, nous pouvons écrire

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z-a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{\alpha \geq 0} \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - a} \right)^\alpha$$

La convergence est uniforme sur $\partial\mathbb{D} \times K$ pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{D}$. En intégrant terme à terme, nous avons

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\alpha+1}} d\zeta \right) (z-a)^\alpha = \sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha.$$

La convergence est uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Par la formule de ***Cauchy*** pour les dérivées, $c_\alpha = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}$.

Nous avons supposé que la fermeture du polydisque est comprise dans Ω, mais tout polydisque inclus dans Ω peut être écrit comme une réunion d'une suite croissante de polydisques avec le même centre telle que la fermeture est comprise dans Ω. La fonction f est représentée par ses séries de Taylor centréss en a pour chacun des polydisques dans la suite, alors la représentation est valable sur la réunion des polydisques. ∎

Nous venons de montrer que toutes les fonctions holomorphes sont analytiques. Pour prouver que toutes les fonctions analytiques sont holomorphes nous avons besoin du théorème d'Abel.

Théorème 3.2.3. *(Abel). Si la série de puissance $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha$ converge en a et si $a_j \neq 0,\ j = 1, \cdots ,\ n$, alors ta série converge absolument et uniformément sur tous les sous-ensembles compacts du polydisque*

$$\mathbb{D}\ = \{z : |z_j| < |a_j|,\ j = 1, \cdots n\}.$$

Preuve. Comme la série de puissance $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha$ converge en a, il s'en suit que les termes de la série sont bornés. Alors, $|c_\alpha z^\alpha| < M$ pour tout α. Fixons $0 < r_j < |a_j|,\ j = 1, \cdots ,\ n$, et supposons $|z_j| \leq r_j,\ j = 1,\ n$. Alors,

$$\begin{aligned} |c_\alpha z^\alpha| = |c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}| &= |c_\alpha a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}| \cdot \left| \left(\frac{z_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \right| \\ &\leq M \left|\frac{r_1}{a_1}\right|^{\alpha_1} \cdots \left|\frac{r_n}{a_n}\right|^{\alpha_n} = M\rho_j^\alpha, \end{aligned}$$

Où $\rho_j < 1,\ j = 1, \cdots , n$. Comme $\sum \rho_j$ converge, la série de puissance converge absolument et uniformément sur le polydisque fermé $z_j < r_j,\ j = 1, \cdots , n$, par le théorème du M-Test de ***Weierstrass***. Comme tout sous-ensemble compact d'un polydisque ouvert $\mathbb{D} = \{z : z_j < a_j,\ j = 1, \cdots , n\}$ est contenu dans la fermeture de ce polydisque, la preuve est complète. ■

Nous pouvons maintenant montrer le résultat espéré.

Théorème 3.2.4. *Sur un ensemble ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, une fonction est holomorphe si et seulement si elle est analytique.*

Preuve. Nous avons déjà montré que si elle est holomorphe, alors elle est analytique. Inversement, supposons f analytique sur Ω. Montrons que f est holomorphe en chaque point de Ω. Soit $a \in \Omega$ et soit $\mathbb{D}$ un polydisque contenant a et contenu dans Ω, tel que f peut être représenté par une série de puissance dans Ω. Nous avons vu que la série de puissance converge uniformément sur les sous- ensembles compacts de Ω. En particulier, soit Q un polydisque contenant a et tel que sa fermeture est incluse dans $\mathbb{D}$. Alors, la série de puissance converge uniformément sur Q et comme les termes sont des polynômes, ils sont holomorphes.

Alors f est la limite uniforme de fonctions holomorphes sur Q, donc f est holomorphes. Comme f est holomorphe sur un voisinage de tout point de Ω, alors f est holomorphe sur Ω. ■

Nous aurons besoin plus tard d'un théorème connu sous le nom du théorème de préparation de ***Weierstrass***. Pour la preuve du théorème, vous pouvez vous référer *á* [19] page 9 à 12. Remarquons d'abord que la définition de l'ordre des zéros des fonctions analytiques donnée au chapitre 2 est également valable pour les fonctions holomorphes complexes. Voir définition 2.3.1.

Théorème 3.2.5. *(préparation de **Weierstrass**). Supposons $n > 1$ et $z = (z',\ z_n)$ où $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ Si f est une fonction holomorphes dans un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et si $f(0,\ z_n)$ possède un zéro d'ordre k (k étant un entier positif) en $z_n = 0$. alors il existe*

(1) un polydisque $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ centré en 0 ;
(2) une fonction $h \in H(\mathbb{D}^n)$ ne possédant pas de zéro dans $\mathbb{D}^n$;
(3) des fonctions $b_1, \cdots,\ b_k \in H(\mathbb{D}^n)$ dépendantent uniquement de z' ;
tels que pour $z \in \mathbb{D}^n$

$$f(z) = \left[z_n^k + b_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + b_k(z')\right] h(z).$$

Cette représentation est unique et $b_i(0) = 0$.

3.3 Problèmes de *Cousin* et de *Poincaré*

3.3.1 Problème de *Cousin I*

Tournons-nous à présent vers le problème de généraliser le théorème de ***Mittag-Leffler*** à dimensions n complexes. Nous voulons reformuler le théorème de ***Mittag-Leffler*** à plusieurs variables complexes. La difficulté principale est que lensemble des pôles n'est plus discret, donc on ne peut plus simplement prescrire des points et les parties principales des séries de Laurent. Alors nous formulons le problème de la façon suivante.

Problème de *Cousin* I. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ et soit $U_i,\ i \in I$ un recouvrement d'ouvert de D. Supposons que les fonctions méromorphes $m_i \in M(U_i)$ satisfont

$$h_{ij} = m_i - m_j \in H(U_i \cap U_j) \quad (\forall i,\ j \in I) \tag{3.3}$$

trouver une fonction $m \in M(D)$ telle que

$$h_i = m - m_i \in H(U_i) \quad (\forall i \in I).$$

Nous appelons $(m_i,\ U_i)$ une distribution de ***Cousin*** I pour D. Remarquons que les h_{ij} sont anti-symétriques par rapport aux indices et que dans chaque intersection triple $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ elles satisfont

$$h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0. \tag{3.4}$$

C'est pourquoi nous lui donnons également le nom de problème de ***Cousin*** additif. Toutes collections de fonctions $h_{ij} \in H(U_{ij})$ qui sont anti-symétriques par rapport aux indices et qui satisfont l'équation 3.4 dans les intersections triples U_{ijk} est appelées un cocycle holomorphe pour un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ du domaine. Si ces fonctions sont reliées à la distribution de ***Cousin*** I par la relation 3.3, alors le cocycle $\{h_{ij}\}$ est dit correspondre au problème de ***Cousin*** $\{m_i\}$. Finalement un cocycle holomorphe est une cofrontière si pour tout $i \in I$, il existe des fonctions $h_i \in H(U_i)$ tel que dans chaque intersection U_{ij} nous avons

$$h_{ij} = h_j - h_i.$$

Nous sommes maintenant prêts à formuler les conditions pour qu'il existe toujours une solution au problème de ***Cousin*** I.

Théorème 3.3.1. *Pour que le problème de* ***Cousin*** $\{m_i\}$ *ait une solution pour un recouvrement donné* $\mathcal{U}$ *du domaine* D *il est nécessaire et suffisant que les cocycles holomorphes* $\{h_{ij}\}$ *correspondant au problème soient des cofrontières.*

Preuve. S'il existe une solution au problème, alors il existe une fonction $m \in M(D)$ tel que $h_i = m - m_i \in H(U_i)$. Alors,

$$h_{ij} = m_i - m_j = m - m_j - (m - m_i) = h_j - h_i,$$

et on a bien que le cocycle est une cofrontière.

Inversement, supposons que les cocycles holomorphes $\{h_{ij}\}$ correspondant au problème de ***Cousin*** soit des cofrontières. Alors il existe des fonctions $h_i \in H(U_i)$ tel que dans chaque intersection U_{ij} nous avons $h_{ij} = h_j - h_i$, c'est-à-dire, que $m_i - m_j = h_j - h_i$ ou

$$m_i + h_i = m_j + h_j \qquad (\forall i,\ j \in I).$$

Alors, les fonctions $m_i + h_i$ sont méromorphes dans U_i et ne dépendent pas du choix du voisinage U_i. Donc, il y a une fonction m globalement méromorphe sur D qui correspond à $m_i + h_i$ dans tout voisinage U_i ce qui résout le problème de ***Cousin*** I.
■

Nous pouvons reformuler le théoréme précédent. Pour un recouvrement donné $\mathcal{U}$ du domaine D, les cocycles holomorphes h_{ij} peuvent être additionnés entre eux ; sous cette opération, cet ensemble forme un groupe que nous appelons groupe de cocycles holomorphes et que nous dénotons par $Z^1(\mathcal{U}, H)$. Dans ce groupe, il y a le sous-groupe des cofrontiéres $B^1(\mathcal{U}, H)$. Le groupe quotient

$$C^1(\mathcal{U}, H) = Z^1(\mathcal{U}, H)/B^1(\mathcal{U}, H)$$

est appelé le (premier) groupe de cohomologie pour le recouvrement $\mathcal{U}$ du domaine D à coefficients holomorphes. Les éléments de $C^1(\mathcal{U}, H)$ sont les classes de cocycles holomorphiques cohomologiques. La trivialité de ce groupe dit que pour ce recouvrement $\mathcal{U}$, les cocycles sont les cofrontières, alors le théoréme précédent peut être reformulé de la façon suivante.

Théorème 3.3.2. *Une condition nécessaire et suffisant pour que le problème de **Cousin** I $\{m_i\}$ ait une solution pour un recouvrement donné $\mathcal{U}$ est la trivialité du premier groupe cohomologique avec coefficients holomorphes :*

$$C^1(\mathcal{U},\ H) = 0.$$

En particulier, le problème de ***Cousin*** I est toujours résoluble dans les domaines d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$. De plus, dans $\mathbb{C}^2$, si dans un domaine tout problème de ***Cousin*** I est résoluble, alors ce domaine est un domaine d'holomorphie. Ceci n'est plus vrai pour $\mathbb{C}^n, n \geq 3$. Voir [17].

Dans la littérature mathématique, ces groupes cohomologiques sont dénoté avec la lettre H plutôt qu'avec la lettre C. Comme nous avons utilisé la lettre H pour signifier l'ensemble des fonctions holomorphes, ce changement était nécessaire afin d'éviter la confusion sur la signification du H.

3.3.2 Probléme de *Cousin II*

Pour ce qui est de la généralisation du théorème de ***Weierstrass***, nous avons la même difficulté : les zéros des fonctions holomorphes à plusieurs variables complexe ne sont pas isolés. Nous devons formuler la généralisation du problème sous une forme analogue à ce que nous avons fait pour le problème de ***Cousin*** I. Dénotons par $H^*(U)$ l'ensemble des fonction $f \in H(U)$ qui sont inversibles ; $f \in H^*(U)$ si et seulement si $f \in H(U)$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

Problème de *Cousin* II. Soit un recouvrement d'ouverts $U_i,\ i \in I$, d'un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ et soit des fonctions holomorphes $f_i \in H(U_i)$, non identiquement nulles sur toutes composantes de U_i telle que

$$h_{ij} = f_i f_j^{-1} \in H^*(U_i \cap U_j) \quad (\forall i,\ j \in I);$$

trouver une fonction holomorphe globale $f \in H(D)$ telle que

$$h_i = f f_i^{-1} \in H^*(U_i) \quad (\forall i \in\ I).$$

Nous appelons $(f_i,\ U_i)$ une distribution de ***Cousin*** II pour D. Remarquons que les fonctions h_{ij} satisfont les conditions suivantes

$$h_{ij}h_{ji} = 1,\ h_{ij}h_{jk}h_{ki} = 1,$$

ce qui est un analogue multiplicatif à la condition 3.4. L'ensemble de ces fonctions pour un recouvrement donné, est appelé un cocycle multiplicatif. Les cocycles multiplicatifs forment un groupe sous la multiplication que nous dénotons par $Z^1(\mathcal{U},\ H^*)$. Un cocycle multiplicatif dit une cofrontière multilicative si pour tout $i \in I$, il existe des fonctions $h_i \in H^*(U_i)$ tel que dans chaque intersection U_{ij} nous avons

$$h_{ij} = \frac{h_j}{h_i}.$$

L'ensemble des cofrontières multiplicatives est un sous-groupe de $Z^1(\mathcal{U}, H^*)$ que nous dénotons par $B^1(\mathcal{U},\ H^*)$. Le groupe quotient

$$C^1(\mathcal{U},\ H^*) = Z^1(\mathcal{U},\ H^*)/B^1(\mathcal{U},\ H^*)$$

est appelé le premier groupe de cohomologie pour le recouvrement $\mathcal{U}$ avec coefficient dans H^*. Comme pour le problème de ***Cousin*** I, la trivialité de ce groupe

implique que tout probleme de ***Cousin*** II possède une solution pour ce recouvre ment.

Théorème 3.3.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de **Cousin** II $\{f_i\}$ ait une solution pour un recouvrement donné $\mathcal{U}$ est la trivialité du premier groupe cohomologique avec coefficients dans H^* :*

$$C^1(\mathcal{U},\ H^*) = 0.$$

Avec une étude plus approfondie des groupes cohomologiques nous constaterions que la condition $C^1(\mathcal{U},\ H^*) = 0$ est équivalente à

$$C^1(\mathcal{U},\ H)\ = C^2(\mathcal{U},\ \mathbb{Z})\ = 0,$$

où $C^1(\mathcal{U},\ H)$ est le même groupe cohomologique traité dans le cas du problème de ***Cousin*** I et $C^2(\mathcal{U},\ \mathbb{Z})$ est le deuxième groupe de cohomologie à coefficients entiers. Remarquons que si le problème de ***Cousin*** II est toujours résoluble dans un domaine D alors le problème de ***Cousin*** I est également toujours résoluble dans ce domaine. Nous nommerons l'ensemble des domaine de $\mathbb{C}^n$ où les problèmes de ***Cousin*** II sont toujours résolubles par $\mathbb{S}_n$. En particulier, dans tout domaine d'holomorphie homéomorphe au polydisque, le problème de ***Cousin*** II est toujours résoluble. Le problème de ***Cousin*** II est également toujours résoluble sur les surfaces de ***Riemann*** non compactes. Voir [17] page 96 et [?] page 176.

3.3.3 Problème de *Poincaré*

Le problèms de ***Cousin*** II est étroitement relié au problème de ***Poincaré***. Nous avons vu précédement que les fonctions méromorphes à plusieurs variables complexes sont définies comme étant localement le quotient de deux fonctions holomorphes. Le problème de ***Poincaré*** consiste à représenter une fonction méromorphe donnée, définie dans un domaine D, par un quotient de deux fonctions holomorphes définies dans D (globalement).

Problème de Poincar. Soit $g(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine D. Trouver 2 fonctions holomorphes $h(z)$ et $k(z)$ dans D tel que $h(z)$ et $k(z)$ sont relativement premiéres à chaque point $p \in D$ et satisfont $g(z) = \frac{h(z)}{k(z)}$ dans D.

Dans quels types de domaines peut-on représenter les fonction méromorphes par un quotient de deux fonctions holomorphes ? Le théorème suivant nous indique que si le problème de ***Cousin*** II est toujours résolubte dans un domaine D, alors le problème de ***Poincaré*** l'est aussi. Ce problème ne jouera pas un rôle dans la suite du mémoire. Cependant il représente une application importante du problème de ***Cousin*** II.

Théorème 3.3.4. *Soit D un domaine dans $\mathbb{C}^n$. Si le problème de **Cousin** II est soluble pour toute distribution de **Cousin** II dans D, alors le problème de **Poincaré** est toujours soluble dans D.*

Preuve. Soit $g(z)$ une fonction méromorphe dans D. Par définition, pour tout $p \in D$, il existe un voisinage U_p de p dans D et des fonctions holomorphes relativement premières en p, $h_p(z)$, $k_p(z)$ dans U_p qui satisfont

$$k_p(z)h_q(z) = k_q(z)h_p(z) \qquad dans U_p \cap U_q$$

et $g(z) = \frac{h_p(z)}{k_p(z)}$ dans U_p. La collection $(k_p,\ U_p)_p$ définit une distribution de ***Cousin*** II dans D. Comme nous supposons qu'il existe une solution du problème de ***Cousin*** II dans D, il existe une fonction holomorphe $k(z)$ dans D tel que $\frac{k(z)}{k_p(z)} \in H^*(U_p)$. Si on définit la fonction $h(z) = g(z)k(z)$, alors $h(z)$ est une fonction holomorphe dans D De plus, comme les fonctions $h_p(z)$ et $k_p(z)$ sont relativement premières à chaque point p, il s'en suit que les fonctions $h(z)$ et $k(z)$ sont aussi relativement premières à chaque point $p \in D$. Alors

$$g(z) = \frac{h(z)}{k(z)}$$

est une solution du problème de ***Poincaré***. ∎

Donc, si $D \in \mathbb{S}_n$, alors les problèmes de ***Cousin*** I et II ainsi que le problème de ***Poincaré*** sont résolubles.

3.4 Interpolation par des fonction holomorphes

3.4.1 Interpolation par des fonctions holomorphes

Théorème 3.4.1. *Soit $\Omega \in \mathbb{S}_m$ et $A \subset \Omega \subset \mathbb{C}^m$, ne possédant pas de point d'accumulation dans Ω. À chaque point $\alpha \in A$ on associe un entier non négatif*

$m(\alpha)$ et des $\omega_{n,\alpha} \in \mathbb{C}$ aux multi-indices n, pour $0 \leq |n| \leq m(\alpha)$ ou $|n| = n_1 + \cdots + n_m$. Alors il existe $f \in H(\Omega)$ tel que

$$f^{(n)}(\alpha) = n!\omega_{n,\alpha} \qquad \alpha \in A, 0 \leq |n| \leq m(\alpha).$$

Preuve. Commençon par prouver le résultat pour un cas particulier. Nous supposons que $\Omega = \mathbb{C}$ et que les éléments de A sont ordonnés en une suite strictement croissante de nombres positifs $\{\alpha_j\}$. Pour $j = 1, 2, \cdots$ choisissons r_j tel que $\alpha_j < r_j < \alpha_{j+1}$ et notons D_j le disque fermé, centré à l'origine et de rayon r_j. Soit $D_0 = \emptyset$. Nous pouvons construire par induction une suite de fonctions entières $\{f_j\}$ telle que

(1) $\sup_{z \in D_j} |f_j(z)| < \dfrac{1}{2^j}$;
(2) f_j a un zéro d'ordre au moins $m(\alpha_k)$ en α_k, pour $k < j$;
(3) $f^{(n)}(\alpha_j) = n!\omega_{n,\alpha_j}$ pour $0 \leq n \leq \alpha_j$.

Alors, $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ possède les propriétés désirés. La structure de la preuve pour le cas générale est identique. ∎

Remarquons que le théorème précédent est vrai pour l'espace complexe $\mathbb{C}^n$ car $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie.

Rappelons nous que nous avions appliqué aux fonctions harmoniques l'équivalent en une dimension complexe de ce théorème d'interpolation. Dû aux équations de ***Cauchy-Riemann***, nous étions soumis à certaines restrictions pour l'interpolation sur des fonctions harmoniques. évidemment, en plusieurs variables complexes, nous appliquerons le théorème d'interpolation sur les fonctions pluriharmoniques.

3.4.2 Interpolation par des fonctions pluriharmoniques

Corollaire 3.4.1. *Soient Ω un domaine d'holomorphie et $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{2m}$, ne possédant pas de point d'accumulntion dans Ω. À chaque point $\alpha \in A$ on associe un entier non négatif $m(\alpha)$ et des mutti-indices n, et pour $0 \leq |n| \leq m(\alpha)$ ou*

$|n| = n_1 + \cdots + n_{2m}$, des $\omega_{n,\alpha} \in \mathbb{C}$. Alors il existe u plurihamonique tel que

$$\frac{\partial^{|n|} u(\alpha)}{\partial x^k \partial y^j} = n! c_{n,\alpha} \quad \alpha \in A,\ 0 \leq |n| \leq m(\alpha),\ x,\ y \in \mathbb{R}^m,\ k,\ j \in \mathbb{N}^m$$

,

et l'on peut imposer 2 conditions pour un $|n| \neq 0$; une pour $|j|$ pair et une pour $|j|$ impair.

Preuve. D'abord, comme f est holomorphe dans Ω. nous pouvons dériver au point z dans n'importe quelle direction, en particulier dans la direction des x. En généralisant le résultat à la n-ième dérivée nous avons que

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} u(x, y) \ + i \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} v(x,\ y).$$

Par le théorème 3.4.1 nous pouvons construire une fonction holomorphe avec les conditions $f^{(n)}(\alpha) = n! w_{n,\alpha},\ \alpha \in A,\ 0 \leq |n| \leq m(\alpha)$. Posons $\alpha = (x_0,\ y_0)$. Le $w_{n,\alpha}$ est un nombre complexe et a donc une partie réelle $a_{n,\alpha}$ et une partie imaginaire $b_{n,\alpha}$, ce qui nous permet d'écrire l'égalité suivante

$$\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} v(x_0, y_0) = n! a_n + i n! b_n . (3.4.1)$$

Donc, trouver une fonction pluriharmonique u dans Ω en imposant la condition $\frac{\partial^{|\tau\iota|}}{\partial x^n} u(x_0, y_0) = n! c_{n,\alpha}$ est le même problème que de trouver une fonction holomorphe dans Ω avec la condition $a_{n,\alpha} = c_{n,\alpha}$. Ici, rien n'a été imposé sur la partie imaginaire de $w_{n,\alpha}$. Par le théorème 3.4.1 nous trouvons cette fonction holomorphe dont la partie réelle est une fonction pluriharmonique qui satisfait les conditions désirées.

Considérons maintenant la condition mixte $\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^k \partial \varphi} u(\alpha) = n! c_{n,\alpha}$. Nous pour rons ramener ces dérivées partielles par rapport à x uniquement par les équations de ***Cauchy-Riemann*** dans $\mathbb{C}^m$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_i},\ \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}\ (i = 1, \cdots,\ m).$$

Comme u et v sont analytiques on peut changer l'ordre des dérivées partielles.

$$\frac{\partial^{/n/}}{\partial_{x^k \partial_{y^j}}}$$

On trouve les conditions imposées sur la fonction f du théorème 3.4.1 avec l'équation (3.4.1)

$$si |j| \equiv 0 \qquad mod 4 \qquad alors a_{n,\alpha} = c_{n,\alpha}$$

$$si|j| \equiv 1 \qquad mod4 \qquad alorsb_{n,\alpha} = -c_{m,\alpha}$$

$$si|j| \equiv 2 \qquad mod4 \qquad alorsa_{n,\alpha} = -c_{n,\alpha}$$

$$si|j| \equiv 3 \qquad mod4 \qquad alorsb_{n,\alpha} = c_{rt,\alpha}$$

.

Comme on ne peut pas imposer 2 conditions différentes sur la partie réelle ($a_{n,\alpha}$) ou sur la partie imaginaire ($b_{n,\alpha}$) de $w_{n,\alpha}$, nous sommes limités à deux conditions : une sur $a_{n,\alpha}$, avec |j| pair, et une sur $b_{n,\alpha}$ avec |j| impair. Par le théorème 3.4.1 on construit f holomorphe sur Ω, on prend la fonction u, la partie reélle de f, et on a une fonction pluriharmonique dans Ω qui satisfait les conditions. ∎

Remarquons qu'il est impossible d 'obtenir un théorème d'interpolation sem blable à celui obtenu pour les fonctions pluriharmoniques avec la possibilité d'imposer des valeurs à plus de deux dérivées d'ordre $|n|$. Comme les fonctions pluri harmoniques sont localement la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^m$, si l'on impose plus que deux conditions en un point sur les dérivées d'ordre n à la fonction pluriharmonique, il y aura une contradiction sur les valeurs de la nième dérivée de la fonction holomorphe évaluée en ce point. Remarquons également qu'avec ce corollaire nous généralisons le corollaire obtenu au chapitre 2 sur les fonctions harmoniques à deux variables aux fonctionsns har moniques à $2n$ variables car les fonctions pluriharmoniques sont également des fonctions harmoniques. Cependant, il semble qu'il serait possible d'obtenir un résultat d'interpolation par des fonctions qui permettrait l'interpolation sur un plus grand nombre de dérivée an chaque point, car notre théorème d'interpolation est en fait par des fonctions pluriharmoniques, qui est un ensemble de fonctions plus restrictive que l'ensemble des fonctions harmoniques.

Etudions à présent ensemble des zéros des fonctions holomorphes bornées dans le polydisque unité.

3.5 Les zéros des fonctions holomorphes bornées

Supposons que E soit un sous-ensemble du polydi s que unit $\mathbb{D}^n$. Quelles conditions sont nécessaires et suffisantes pour que E soit l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}^n$. Si $n = 1$, le problème est résolu. Voir théorème 2.6.1. La cas d'une variable mène à une condition nécessaire pour le cas général variables et il est concevable que cette condition nécessaire soit également suffisante.

Définition 3.5.1. *Une applica tion $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ est dite holomorphe si chacune de ses composantes $f_1, \ f_2, \cdots , \ f_m$ est holomorphe.*

Théorème 3.5.1. *Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ et $E = Z(f)$. Si pour toute application holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}^n$ l'on définit*

$$Y = \varphi^{-1}(E \ \cap \varphi(\mathbb{D})),$$

alors soit $Y = \mathbb{D}$ ou Y est un ensemble dénombrable $\{\lambda_j\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\lambda_j|) < \infty.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $fo\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ et que Y correspond aux zéros de $fo\varphi$, c'est-- dire $Y = Z(f \circ \varphi)$. Donc si la fonction $f \circ \varphi$ n'est pas identiquement nulle, ses zéros doivent satisfaire la condition de ***Blaschke*** en une variable. ∎

Il existe une généralisation de la condition de ***Blaschke*** en plusieurs variables. Cependant elle est moins intéressantes car elle s'avère de ne pas être suffisante pour qu'un ensemble E soit les zéros d'une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}^n$. Pour des contres-exemples voir [3].

Avant d'énoncer le théorème qui généralise la condition de ***Blaschke***, nous devons définir la mesure de Hausdorff et la fonction de multiplicité d'une fonction holomorphe. Car le volume en dimensions n de ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sera donné en fonction de la mesure de Hausdorff.

Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X muni d'une distance d. Soit $\delta(A)$ le diamètre de A,

$$\delta(A) = \sup\{d(x, \ y) : x, y \in \ A\}.$$

Si $A \neq \emptyset$ alors $[\delta(A)]^0 = 1$, et $[\delta(\phi)]^0 = 0$. Pour $p \geq 0, \epsilon > 0$ nous déiinissons

$$H_p(A; \epsilon) = \inf \sum_{n=1}^{\infty}[\delta(A_n)]^p : A \subseteqq \cup_{n=1}^{\infty} A_n et \delta(A_n) < \epsilon,$$

et

$$H_p(A) = \lim_{\epsilon \to 0^+} C_p H_p(A; \epsilon),$$

où $C_p = \pi^{p/2} \oint (2^p \Gamma(p/2 + 1))$. H_p est la p-mesure de Hausdorff. Cette mesure comprend le concept de longueur ($p = 1$),d'aire ($p = 2$), de volume ($p = 3$) d'ensemble de $\mathbb{R}^n$. En particulier, si $p = n$, la n-mesure de Hausdorff n'est rien d'autre que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pour tout point $a \in \Omega$ nous definissons la multiplicité $\mu(a)$ de f par ce qui suit : Si $f \equiv 0$ alors $\mu(a) = \infty$. Si $f \not\equiv 0$, alors f a une expansion en série dans un voisinage de a de la forme

$$f(z) = f_m(z-a) + f_{m+1}(z-a) \ + \cdots$$

où f_j est un polynôme homogène de degré j et $f_j \not\equiv 0$. Alors nous définissons $\mu(a) = m$.

Théorème 3.5.2. *Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$, $f \not\equiv 0$ et $|f| \leq 1$. Soit μ la fonction de multiplicité de f. Alors*

$$\int_0^1 dr \int_{\overline{\mathbb{D}^n}(r)} \mu(z) dH_{2n}(z) < \infty.$$

Dans le cas ou $n = 1$, cette intégrale devient

$$\int_0^1 dr \int_{\overline{\mathbb{D}^n(r)}} \mu(z) dH_2(z) = \int_0^1 n(r) dr = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\lambda_j|) < \infty,$$

*où $n(r)$ est le nombre de termes dans la suite de zéros $\{\lambda_j\}$ tels que $|\lambda_j| \leq r$; ce qui est bien sur la condition de **Blaschke** à une dimension.*

Concentrons nous maintenant sur une condition suffisante pour qu'un en- semble E soit les zéros d'une fonction holomorphe borné dans $\mathbb{D}^n$. Nous débutons cette étude avec un lemme à une variable.

Lemme 3.5.1. *Si $0 < r < 1$, il existe $B = B(r) < \infty$ avec la propriété suivante : si $Q = \{\lambda : r < |\lambda| < 1\}$ et*

$$h(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \lambda^m, \qquad h_1(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m \lambda^m \qquad (\lambda \in Q)$$

alors

$$\|\Re h_1\|_Q \leq B(r) \|\Re h\|_Q,$$

où la norme $\|\cdot\|_Q$ est le supremum sur Q.

Preuve. Soit $u = \Re h$ et supposons que $|u| \leq 1$ dans Q. Alors $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ sont bornées sur le cercle $\Gamma = \{\lambda : |\lambda|^2 = r\}$. Soit $B_1(r)$ la borne supérieure de $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$. Alors nous aurons l'inégalité suivante sur Γ

$$|h'| = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq 2B_1(r).$$

Les points sur Γ sont représentés par $\lambda = r^{1/2}e^{i\theta}$ pour $0 \leq \theta < 2\pi$. Le $m-1$-ième coefficient de $h'(r^{1/2}e^{i\theta})$ est $m.c_m r^{(m-1)/2}$ et

$$\left| c_m r^{(m-1)/2} \right| \leq 2B_1(r).$$

Nous obtenons l'inégalité suivante

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m| r^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m| r^m \cdot |m.c_m r^{(m-1)/2}|}{|m.c_m r^{(m-1)/2}|} \leq 2B_1(r) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{(m+1)/2}}{m} = B_2(r)$$

Posons $M = \sup_Q |u| = \|\Re h\|_Q$. Si $\lambda \in Q$ et $|\lambda|$ est prêt du cercle de rayon r, nous avons

$$\left| \frac{\Re h_1(\lambda)}{M} \right| = \left| \frac{u(\lambda) - \Re c_0 - \Re \sum_{m=1}^{\infty} c_m \lambda^m}{M} \right| \leq \left| \frac{u(\lambda)}{M} \right| + \left| \frac{\Re c_0}{M} \right| + \left| \frac{\Re \sum_{m=1}^{\infty} c_m \lambda^m}{M} \right|$$

Remarquons que $\left|\frac{u}{M}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{\Re c_0}{M}\right| \leq 1$. De plus

$$\left| \Re \sum_{m=1}^{\infty} c_m \lambda^m \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_m \lambda^m| \leq B_2(r).$$

Donc nous avons

$$\left| \frac{\Re h_1(\lambda)}{M} \right| \leq 1 + 1 + \frac{B_2(r)}{M} = B.$$

Nous pouvons multiplier par $\|\frac{\Re h}{M}\|_Q$ à droite de léquation car $\|\frac{\Re h}{M}\|_Q = 1$. Comme $h_1 \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$ le résultat découle du principe du maximum.

$$\left\| \frac{\Re h_1}{M} \right\|_Q \leq B(r) \quad \left\| \frac{\Re h}{M} \right\|_Q$$

Comme la structure de la norme permet de simplifier les M, nous obtenons le résultat généralisé. ■

Maintenant, soit Q^n l'ensemble qui consiste en n fois le produit cartésien de l'anneau Q tel que décrit au lemme précédent. Toute fonction holomorphe h dans Q^n peut être rspréséntée par une série absolument convergentes

$$h(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad (z \in Q^n).$$

Soit $\pi_j h$ la série obtenu à partir de cette série en remplaçant c_k par 0 lorsque $k_j \geq 0$. Nous pouvons géneralisé facilement le lemme précédent de la façon suivante

Lemme 3.5.2. *Soit $\pi_j h$, Q^n et B tel que définit plus haut, alors*

$$\|\Re \pi_j h\|_{Q^n} \leq B(r)\|\Re h\|_{Q^n}.$$

Preuve. Il est suffisant de prouver le résultat pour $j = 1$. écrivons h de la forme

$$h(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(z_2, \cdots, z_n) z_1^m$$

et appliquons le lemme précédent en conservant, $z_2, \cdots, z_n$ fixés. ■

Nous aurons également besoin d'un théorème concernant les contours fermés sur $\partial\mathbb{D}^n$. Un contour fermé dans un espace topologique X est une application continue $\alpha : [0,1] \to X$ tel que $\alpha(0) = \alpha(1)$ Nous écrirons $\alpha \sim \beta$ pour dire que α et β sont homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue

$$h \ : \ [0,1] \times [0,1] \to X$$

tel que

$$h(s,0) = \alpha(s), \ h(s,1) = \beta(s), \ h(0,t) = h(1,t)$$

pour tout $s, \ t \in [0,1]$. Nous pouvons définir le produit de deux contours fermés ayant le même point de départ par

$$(\alpha \star \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq 1/2; \\ \beta(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Théorème 3.5.3. *Si Γ est un contour fermé sur $\partial\mathbb{D}^n$ alors il existe des entiers $k_1, \cdots, \ k_n$ tels que*

$$\Gamma \sim (k_1\gamma_1) \star (k_2\gamma_2) \star \cdots \star (k_n\gamma_n)$$

où

$$\gamma_j(s) = (1, \cdots, \ 1, e^{2\pi i s}, 1, \cdots, 1) \quad (s \in [0,1])$$

où $e^{2\pi i s}$ est à la j-iéme position.

Soit $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\{0\}$. Si Γ est un contour fermé dans $\mathbb{C}^*$, il existe une fonction réelle continue sur $[0,1]$ telle que

$$\Gamma(s) = e^{2\pi i \psi(s)}.$$

L'entier $\psi(1) - \psi(0)$ est appelé l'index de Γ et est noté $Ind\Gamma$.

*Nous sommes maintenant prêts à prouver un résultat de **Rudin** qui donne une condition suffisante pour qu'un ensemble E soit les zéros d'une fonction holomorphe bornée dans le polydisque unité.*

Théorème 3.5.4. *Supposons que $E = Z(f)$ pour une fonction holomorphe quelconque dans $\mathbb{D}^n$ et supposons que E n'a pas de points d'accumulation sur $\partial\mathbb{D}^n$. Alors il existe $F \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ tel que*
(1) $E = Z(F)$
(2) $\frac{1}{F}$ est bornée près de $\partial\mathbb{D}^n$.

Preuve. Fixons $r < 1$ tel que la distance de E à Q^n soit positive. Soit $z' = (z_2, \cdots, z_n)$. Il existe un entier p tel que pour tout $z' \in Q^{n-1}$, la fonction $\lambda \to f(\lambda, z')$ possède exactement (avec multiplicité) p zéros $\alpha_1(z'),\ \alpha_p(z')$ dans $|\lambda| < r$ et aucun autre zéro dans le reste de $\mathbb{D}$. Ces affirmations sont prouvées avec le théorème de prèparation de ***Weierstrass***, voir le théorème 3.2.5. La fonction

$$\varphi(z) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{p}(z_1 - \alpha_{\mathrm{i}}(z')) \qquad (z \in \mathbb{D} \ \times Q^{n-1}) \tag{3.5}$$

est holomorphe dans $\mathbb{D} \times Q^{n-1}$; de plus les fonctions $\frac{f}{\varphi}$ *et* $\frac{\varphi}{f}$ le sont également. Soit les contours

$$\gamma_j(s) = \left(\sqrt{r}, \cdots, \sqrt{r}, \sqrt{r}e^{2\pi is}, \sqrt{r}, \cdots, \sqrt{r}\right) \qquad (s \in \ [0,1])$$

où $\sqrt{r}e^{2\pi is}$ est à la j-ième position. Tout les γ_j sont des contours fermés dans Q^n. Alors $\left(\frac{\varphi}{f}\right) \circ \gamma_j$ est un contour fermé dans $\mathbb{C}^*$ et soit son index-k_j. Remarquons que $k_1 = 0$, car nous avons que

$$\left(\frac{\varphi}{f}\right) \circ \gamma_1 = e^{2\pi i\psi(s)},$$

d'où

$$k_1 = \psi(1) - \psi(0) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\log\left(\left(\frac{\varphi}{f}\right) \circ \gamma_1(1)\right) - \log\left(\left(\frac{\varphi}{f}\right) \circ \gamma_1(0)\right)\right\} = 0$$

La dernière égalité provient de $\gamma_1(1) = \gamma_1(0)$. Soit

$$f_1(z) = z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n}\varphi(z) \qquad (z \in \mathbb{D} \times \mathbb{Q}^{n-1}).$$

Alors, de la même façon, $\left(\frac{f_1}{f}\right) \circ \gamma_j$ a un index nul pour $1 \leq j \leq n$. Comme $\mathbb{Q}^{n-1}$ est homotope à $\partial\mathbb{D}^{n-1}$, du théorème 3.5.3 nous avons que $\left(\frac{f_1}{f}\right) \circ \Gamma$ possède un index nul pour tout contour fermé Γ dans $\mathbb{D} \times \mathbb{Q}^{n-1}$. Alors nous avons dans $\mathbb{D} \times \mathbb{Q}^{n-1}$

$$\frac{f_1}{f} = e^{g_1}$$

avec g_1 est une fonction holomorphe. L'expression pour φ dans l'équation 3.5, montre que f_1 et $\frac{1}{f_1}$ sont bornés dans $\mathbb{Q}^n$. Avec la notation du lemme 3.5.2, définissons

$$g = \ (1 \ - \pi_n) \cdots (1 - \pi_2)(1 - \pi_1) g_1,$$

Remarquons que g contient exactement les termes de la série de ***Laurent*** de g_1 dont les exposants sont non négatifs. Alors g est holomorphe dans $\mathbb{D}^n$. Montrons que la fonction

$$F = f.\ e^g$$

possède les propriétés désirées : F et $\frac{1}{F}$ sont bornées dans $\mathbb{Q}^n$.

Le procédé qui nous a donné f_1 et g_1 nous donne des fonctions holomorphes f_i et g_i dans $\mathbb{Q}^{i-1} \times \mathbb{D} \times \mathbb{Q}^{n-i}$,

$$f_i = f.e^{g_i},$$

tel que f_i et $\frac{1}{f_i}$ sont bornées sur $\mathbb{Q}^n$. Alors $\frac{f_i}{f_1}$et $\frac{f_1}{f_i}$ sont également bornées sur $\mathbb{Q}^n$. De plus $\Re(g_1 - g_i)$ est borné pour $1 \leq i \leq n$ comme z_i couvre tout le disque dans le domaine ou holomorphe,$\pi_i g_i = 0$,alors,

$$\pi_i g_1 = \pi_i (g_1 - g_i).$$

Maintenant le lemme 3.5.2 implique que $\Re \pi_i g_1$ est bornée dans $\mathbb{Q}^n$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme

$$g_1 - g \ = \sum \pi_i g_1 - \sum \pi_i \pi_j g_1 - \sum \pi_i \pi_j \pi_k g_1 - \cdots \ ,$$

un nombre fini d'application du lemme 3.5.2 montre que $\Re(g_1 - g)$ est borné dans $\mathbb{Q}^n$. Comme

$$F = f.e^g = f_1.e^{(g-g_1)}$$

■

dans $\mathbb{Q}^n$, ceci termine la preuve.

Nous limiterons à ceci la discussions sur les fonctions holomorphes bornées dans le polydisque unité, mais il existe d'autres développements intéressants dans la littérature. Entre autre, dans [14], la condition de ***Blaschke*** dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$ (et non le polydisque) est présentée pour les classes de fonctions de ***Smirnov***, ***Nevanlinna*** et ***Nevalllinna-Dzhrbashyan***.

Chapitre 4

Interpolation et approximation simultanée

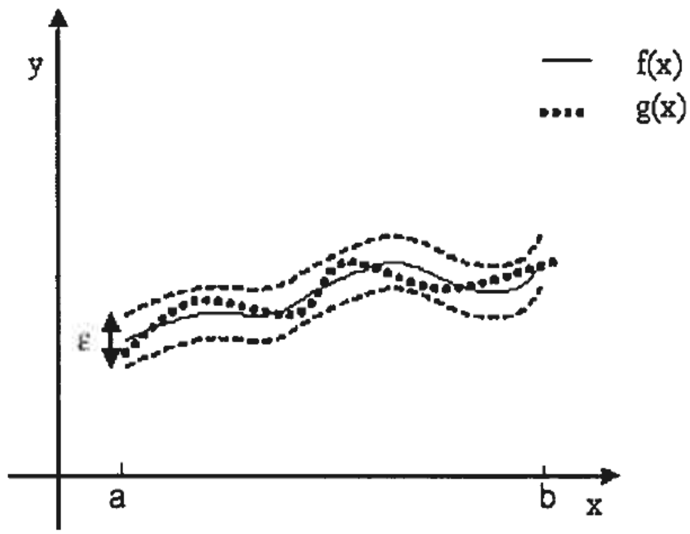

FIG. 1. Interpolation et approximation simultanée

Ce chapitre a pour but de démontrer que tout théorème d'approximation dans certains espaces abstraits n'est pas seulement un théorème d'approximation, mais un théorème d'approximation et interpolation simultanée. La figure 1 représente vaguement cette idée : on voit que la fonction $g(x)$ approche à epsilon près la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ et prend parfois, sur un ensemble discret de points la même valeur que $f(x)$. Les points où $g(x) = f(x)$ sont les points d'interpolation. Ce qui est intéressant dans cette approximation et interpolation simultanée c'est que lorsque l'on peut faire de l'approximation sur une fonction f dans l'intervalle $[a, b]$, nous pouvons également choisir un ensemble discret quelconque de points dans $[a, b]$ tel qu'il existe une fonction g qui approche f à epsilon près dans $[a, b]$ et qui prend les mêmes valeurs que f sur ce dit ensemble discret. Nous commencerons par démontrer plus précisément ce résultat dans les espaces préhilbertiens pour ensuite le démontrer dans les espaces topologiques linéaires. Enfin, nous appliquerons l'interpolation et l'approximation simultanée dans un ensemble fermé de $\mathbb{C}^n$.

4.1 Espaces de *Hilbert*

Définition 4.1.1. *Un espace linéaire réel* X *est dit préhilbertien si pour toutes paires* $x,\ y \in X$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *on définit un scalaire* $< x, y >$ *ayant les propriétés suivantes :*

(1) $< x, x > \geq 0$ *;*
(2) $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$ *;*
(3) $< x, y >=< y, x >$ *;*
(4) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$*.*
(5) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$ *.*

Remarquons qu'un espace préhilbertiens complexe est défini avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et la propriété (3) est changée par $< x, y >= \overline{< y, x >}$ où la barre désigne le conjugé complexe.

Définition 4.1.2. *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace préhilbertien complet.*

Définition 4.1.3. *Soient* X *et* Y *deux espaces de* ***Hilbert****. Un opérateur*

$$L : X \longrightarrow Y$$

est dit linéaire si et seulement si

$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad \forall x,\ y \in X,$ *et* $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Dans le cas particulier ou $Y = \mathbb{R}$*,* L *es aussi appellée une fonctionnelle linéaire.*

Les opérateurs qui nous intéresserons le plus seront les fonctionnelles linéaires dont voici un exemple.

Exemple 4.1.1. *Soit* $C[0, 1]$*, l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle* $[0,\ 1]$ *muni du produit scalaire défini par* $< x, y >= \int_0^1 x(t)y(t)dt$ *pour tout* $x,\ y \in C[0, 1]$*. Alors l'opérateur* $L : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ *défini pour tout* $f \in C[0, 1]$ *par*

$$L(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C[0, 1]$*.*

Le produit scalaire d'un espace préhilbertien X *induit une norme définie pourtout* $x \in X$ *par* $\|x\|_X = \sqrt{< x, y >}$*. Par exemple la norme induite par le produit scalaire dans* $l_2(n)$ *est donnée par*

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x(i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque nous écrirons une norme pour un espace préhilbertien, nous devons comprendre que c'est la norme induite par le produit scalaire.

Définition 4.1.4. *Un opérateur linéaire L est dit borné s'il existe une constante c telle que*

$$\|L(x)\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in X$$

Pour plus de précision nous aurions dû écrire $\|L(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$. Cependant il n'y a pas de confusion à ne pas indiquer l'indice de l'espace sur la norme.

Définition 4.1.5. *On définit la norme d'un opérateur linéaire borné par* $\|L\| = \inf\{c : \|L(x)\| \leq c\|x\|, \text{ pour tout } x \in X\}$.

Définition 4.1.6. *L'espace dual d'un espace préhilbertien X dénoté X^* est l'ensemble de tous les fonctionnelles linéaires borné sur X.*

4.2 Quelques théorèmes fondamentales d'analyse fonctionnelle

Nous aurons besoins de quelques résultats connus de l'analyse fonctionnelle. Ces résultats ne seront pas démontrés ici, mais sont clairement présentés dans [22].

Théorème 4.2.1. *Soit X, Y deux espaces préhilbertiens, où X est de dimension finie et soit un opérateur linéaire L,*

$$L : X \longrightarrow Y.$$

Alors L est borné.

Théorème 4.2.2. *Si M est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien X alors M est complet.*

Du théorème [?] et de la définition d'un espace de ***Hilbert***, nous pouvons conclure que tous les espaces préhilbertiens de dimension finie sont des espaces de ***Hilbert***, en particulier $l_2(\mathbb{N})$ est un espace de ***Hilbert***.

Théorème 4.2.3. *(Extension de **Hahn-Banach**). Soit M un sous-espace d'un espace préhilberiien X et $L \in M^*$, alors il existe $F \in X^*$ tel que*

$$F|_M = L$$

et

$$\|F\| = \|L\|$$

Théorème 4.2.4. *(Représentation de **Fréchet-Riesz**). Soit X un espace de **Hilbert**; alors pour tout $L \in X^*$ il existe un unique élément $x \in X$ tel que*

$$L(y) =< y, x > \text{ pour tout } y \in X$$

et

$$\|L\| = \|x\|$$

4.3 Théorème d'interpolation et d'approximation simultanée dans les espaces préhilbertiens

Définition 4.3.1. *Nous définissons le noyau d'une fonctionnelle linéaire par*

$$\ker L = \{y \in X : L(y) = 0\}.$$

Définition 4.3.2. *Soit S le sous espace engendré par un ensemble de fonctionnelles linéaires $\{L_1,\ L_2, \cdots ,\ L_n\}$ sur l'espace préhilbertien X. Alors S est défini par*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i \ :\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n \right\}.$$

Lemme 4.3.1. *Soit $L,\ L_1,\ L_2, \cdots, L_n$ des fonctionnelles linéaires sur l'espace préhilbertien X. Alors les affirmations suivantes sont équivalenŸes.*

(1) $L \in S$, le sous-espace engendré par $\{L_1,\ L_2, \cdots ,\ L_n\}$;

(2) $L(x) = 0$ lorsque $L_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$;

(3) $\bigcap_{i=1}^{n} \ker L_i \subset \ker L$.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2)

De la définition du sous-espace engendré $S = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i : \alpha_i \in\ \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\})$ si $L \in S$, alors $L(x) = 0$ lorsque $L_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Soit $x \in X$ tel que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker L_i$ c'est-à-dire que $L_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$, et par (2), $L(x) = 0$, c'est-à-dire, $x \in \ker L$.

(3) $\Rightarrow$ (2)

$$\{y \in\ X :\ L_i(y) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker L_i \subset \ker L = \{y\ \in X : L(y) = 0\}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Soit $M = \{ (L_1(x),\ L_2(x), \cdots ,\ L_n(x)) : x \in\ X\}$. Alors M est un sous-espace de $l_2(n)$. On définit G sur M par

$$G\,(L_1(x),\ L_2(x), \cdots ,\ L_n(x))\ = L(x)\quad (x \in X).$$

Donc G est bien défini car si

$$(L_1(x),\ L_2(x), \cdots ,\ L_n(x)) = (L_1(y),\ L_2(y), \cdots ,\ L_n(y)),$$

alors $L_i(x-y) = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$. Donc par (2), $L(x-y) = 0$, c'est-à-dire $L(x) = L(y)$. Alors G est une fonctionnelle linéaire sur M et par le théorème 4.2.1 G est borné car M est de dimension fini. Par le théorème 4.2.4, G a une extension F définie sur $l_2(n)$. Comme $l_2(n)$ est un espace de ***Hilbert***, nous pouvons appliquer le théorème de représentation de ***Fréchet-Riesz*** sur F.

$$F(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)y(i)\quad (y\ \in l_2(n)).$$

En particulier, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} L(x) &= G\,(L_1(x), L_2(x), \cdots, L_n(x)) \\ &= F\,(L_1(x), L_2(x), \cdots, L_n(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x). \end{aligned}$$

Alors $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i \in S$. ■

Théorème 4.3.1. *Soit* $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ *un ensemble de fonctionnelles linéairement indépendants sur l'espace préhilbertien* X. *Alors il existe un ensemble* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *dans* X *tel que*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}\quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

Preuve. Par induction. Pour $n = 1$, on choisit $x \in X$ tel que $L_1(x) \neq 0$. On définit x_1 par $x_1 = [L_1(x)]^{-1}\,x$, alors $L_1(x_1) = 1$.

Supposons que le théorème est vrai pour n fonctionnelles linéaires et supposons que $\{L_1, L_2, \cdots, L_{n+1}\}$ sont linéairement indépendants sur X. Par hypothèse, il existe $y_1, y_{2)}, \cdots, y_n \in X$ tel que $L_i(y_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Remarquons qu'il existe $x \in X$ tel que $L_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$ mais que $L_{n+1}(x) \neq 0$. Car s'il n'existait pas un tel x alors par le lemme 4.3.1, x_{n+1} serait un élément du sous-espace engendré par $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$, ce qui contredit l'indépendance linéaire de $\{L_1, L_2, \cdots, L_{n+1}\}$. Maintenant définissons

$$x_{n+1} = [L_{n+1}(x)]^{-1}\,X$$

et

$$x_i = y_i - L_{n+1}(y_i)x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

■

Alors $L_j(x_i) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, \cdots, n+1$.

Définition 4.3.3. *Si Y et Z sont des sous-ensembles de X, on dit que Y est dense dans Z si pour tout $z \in Z$ et $\epsilon > 0$, il existe $y \in Y$ tel que $\|z - y\| < \epsilon$.*

Définition 4.3.4. *Soit $x, y \in X$, et supposons Γ un ensemble de fonctionnelles linéaires sur X. On dit que y interpole x relativement à Γ si $L(y) = L(x)$ pour tout $L \in \Gamma$.*

Cette définition est une généralisation de interpolation habituelle, car les fonctionnelles linéaires peuvent être définies de plusieurs façon.

Théorème 4.3.2. *(Approximation et interpolation simultanée). Soit Y un sous-espace dense d'un espace préhilbertien X et soit $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\} \subset X^*$. Alors, pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in Y$ tel que*
(1) $\|x - y\| < \epsilon$
(2) $L_i(y) = L_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$.

Preuve. Supposons que $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ sont linéairement indépendants. Puisque Y est dense dans X, les restrictions $\{L_1|_Y, L_2|_Y, \cdots, L_n|_Y\}$ sont aussi linéairement indépendantes. Soit $F_i = L_i|_Y$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$. Par le lemme **??**, il existe un ensemble $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dans Y tel que $L_i(x_j) = F_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Posons $c = \sum_{j=1}^{n} \|L_j\|\|x_j\|$ et soit $\epsilon > 0$ donné. Choisissons $y_1 \in Y$ tel que $\|x - y_1\| < \epsilon(1 + c)^{-1}$, ce que nous pouvons faire car Y est dense dans X. Définissons $y_2 \in Y$ par $y_2 = \sum_{j=1}^{n} L_j(x - y_1)x_j$. Posons, $y = y_1 + y_2$. Alors $y \in Y$ et

$$\|x - y\| \leq \|x - y_1\| + \|y_2\| \leq \epsilon(1 + c)^{-1} + \sum_{j=1}^{n} |L_j(x - y_1)|\|x_j\|.$$

Nous avons donc,

$$\|x - y\| \leq \epsilon(1 + c)^{-1} + \epsilon(1 + c)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|L_j\|\|x_j\| = \epsilon(1 + c)^{-1}[1 + c] = \epsilon,$$

ce qui démontre (1). De plus

$$L_i(y) = L_i(y_1) + L_i(y_2) = L_i(y_1) + L_i(x - y_1) = L_i(x),$$

ce qui démontre (2). ■

Ce dernier théorème implique que tout résultat qui conclut de la densité d'un sous-espace dans X est un résultat d'approximation et interpolation simultanée et non juste un résultat d'approximation. Remarquons que dans le théorème 4.3.2 l'espace préhilbertien X peut être réel ou complexe.

4.4 Sur les ensembles fermés à plusieurs variables complexes

Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{C}^n$. On dénote $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des fonctions continues sur E et holomorphes à l'intérieur de E. De plus on dit qu'un sous ensemble fermé de $\mathbb{C}^n$ est un ensemble d'approximation si toute fonction $f \in \mathcal{A}(E)$ peut être approchée uniformément par des fonctions entières.

Théorème 4.4.1. *Soit E un ensemble d'approximation dans $\mathbb{C}^n$ et $b_1, \cdots, b_k \in E$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{A}(E)$ il existe une fonction entière g telle que*
(1) $\|f - g\| < \epsilon$
(2) $f(b_i) = g(b_i) \quad (i = 1, \ldots, k)$

Preuve. Le sous-espace X des fonctions de $\mathcal{A}(E)$ qui sont bornées est un espace vectoriel topologique avec la norme

$$\|f\| = \sup_E |f(z)|.$$

Soit $f \in \mathcal{A}(E)$. Puisque E est un ensemble d'approximation, il existe une fonction entière g_1 telle que $f - g_1$ est dans X, c'est-à-dire $\|f - g_1\| < M$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. Soit $h = f - g_1$ il existe une fonction entière g_2 tel que
(1) $\|h - g_2\| < \epsilon$
(2) $h(b_i) = g_2(b_i)(i = 1, \cdots k)$.
En remplaçant h par $f - g_1$ nous obtenons :
(1) $\|f - g_1 - g_2\| = \|f - (g_1 + g_2)\|| < \epsilon$
(2) $f(b_i) = (g_1 + g_2)(b_i) \quad (i = 1, \cdots k)$.
Pour terminer la preuve, il suffit de poser $g = g_1 + g_2$. ■

Définition 4.4.1. *Soit ω une fonction continue et positive sur un sous-ensemble fermé E de $\mathbb{C}^n$. On dit que E est un ensemble de ω-approximation, si pour toute fonction $f \in \mathcal{A}(E)$, $\forall \epsilon > 0$ il existe $g \in H(\mathbb{C}^n)$ tel que*

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon\omega(z), \quad (\forall z \in \ E).$$

Remarquons que dans le cas particulier où $\omega = 1$ nous tombons sur la définition d'un ensemble d'approximation,

Théorème 4.4.2. *Soit E un ensemble de $\omega-$approximation dans $\mathbb{C}^n$ et soit $b_1, \cdots, b_k \in E$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{A}(E)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction entière g telle que*
(1) $|f(z) - g(z)| < \epsilon\omega(z)$
(2) $f(b_i) = g(b_i) \quad (i = 1, \ldots, k)$

Preuve. Notons par $\mathcal{A}_\omega(E)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{A}(E)$ tel que

$$\|f\|_\omega = \sup_E \left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| < \infty.$$

Alors $\mathcal{A}_\omega(E)$ est un espace normé. Puisque E est un ensemble d'approximation, il existe une fonction entière g_1 telle que $f - g_1$ est dans $\mathcal{A}_\omega(E)$, c'est-à-dire $\|f - g_1\|_\omega < M$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. Soit $h = f - g_1$,, il existe une fonction entière g_2 tel que
(1) $\|h - g_2\|_\omega < \epsilon$
(2) $h(b_i) = g_2(b_i)(i = 1, \cdots, k)$.
En remplacant h par $f - g_1$ nous obtenons :
(1) $\|f - g_1 - g_2\|_\omega = \|f - (g_1 + g_2)\|_\omega < \epsilon$
(2) $f(b_i) = (g_1 + g_2)(b_i) \quad (i = 1, \ldots, k)$.
Posons $g = g_1 + g_2$. Nous obtenons
(1) $\|f - g\|_\omega < \epsilon$
(2) $f(b_i) = g(b_i)(i = 1, \cdots, k)$.
Pax définition de la norme, nous avons

$$\|f - g\|_\omega = \sup_E \left|\frac{f(z) - g(z)}{\omega(z)}\right| < \epsilon.$$

D'où nous obtenons, pour tout $z \in E$,

$$|f(z) \ - g(z)| < \epsilon\omega(z).$$

■

Conclusion

On a présenté dans ce mémoire quelques résultats sur le problème d'interpolation complexe, le travail a été divisé en deux parties : La première concerne le cas uni-dimentionnelle, et la deuxième cencerne le cas multi-dimentionnelle.
Pour chacun des deux cas, on traite l'interpolation par des fonctions holomorphes (analytiques), méromorphes et harmoniques (pluriharmoniques). Les résultats obtenus peuvent être généralisés en perspectives au cas des fonctions à variables vectorielles (dans $\mathbb{C}^m$).

Bibliographie

[1] Armitage, D. H ; Gardiner S. J. Classical potentiel theory, (Springer-Verlag, London, 2001).

[2] Axler, S. Bourdon, P. and Ramey, W., Harmonic Function Theory, (Springer Verlag, 1992).

[3] Chee P. S., The Btaschke condition for bounded hotomorphic functions, (Transaction of the American Mathematical Society 148, (1970) $249-263$.)

[4] Davis P. J., Interpolation and approximation, (New York, Blaisdell, 1963).

[5] Day M. M., Normed Linear Spaces, 236, (New York, Academic Press, 1962).

[6] Deutsch, F., Best approximation in inner product spaces, (New York, Springer-Verlag, 2001).

[7] Deutsch, F., Simuttaneous interpolation and approximation in topological linear space (J. SIAM Appi. Math. 14, 1966 1180-1190).

[8] Gauthier, P. M., Severat comptex variables, (Lecture notes, 2004).

[9] Gauthier, P. M., Hengartner W., Traces des fonctions méromorphes de plusieurs variables comptexes, (Rencontre sur l'analyse complexe à plusieurs variables et les systèmes surdéterminés, Montréal, 1975 : 21-47).

[10] Gauthier, P. M., M. R. Pouryayevali Approximation by Meromorphic Functions With ***Mittag-Leffler*** Type Constraints, (Canad. Math. Buli. vol 44(4), 2001 420- 428).

[11] Grauert, H., Fritzshe, K., Several complex variables, (New York, Springer-Verlag, 1976).

[12] Grauert, H., Remmert, R., Theory of Stein spaces, (New York, Springer-Verlag, 1979).

[13] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris, 1961.

[14] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., Theory of Bergman spaces, (New York, Springer-Verlag, 2000).

[15] Khenkin, G. M., Vitushkin, A. G. Several comptex variables II : Function theory in ctassicat domains. Comptex potential theory, (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

[16] Knopp, K., Theory of Functions, Part II, (Dover, New York, 1947).

[17] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, (Californie, Wadsworth Brooks/Cole, 1951).

[18] Naimark M. A., Normed atgebra, (Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing, 1972).

[19] Nishino, T., Function theory in severat complex variables, Translations of mathe matical monographs, 193, (Providence. Rhode Island, American Mathematical So ciety, 2001).

[20] Michael Range, R., Holomorphic functions and integrat representations in several comptex variables, (New York, Springer-Verlag, 1986).

[21] Rudin, W., Analyse réelle et complexe, (Paris. Dunod, 1998).

[22] Rudin W., Function theory in polydiscs, (New York, W.A Benjamin Inc., 1969).