République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Calcul Stochastique en Dimension Infinie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Daoudi **T**alia[1]

Sous la direction de

Dr. L. Bousmaha

Soutenu le 21/06/2018 devant le jury composé de

Dr. M. kadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. L. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. S. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : taliadaoudi@yahoo.com

Remerciement

En Préambule de ce travail, je remercie le bon dieu qu'il m'a donné la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreure, ***Dr. Lamia Bousmaha***, pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger.

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier tous les membres de jury, ***Dr. Mokhtar Kadi*** de m'avoir honorée en acceptant de présider le jury, ***Dr. Soumia Idrissi*** et ***Dr. Nadia Ait Ouali*** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants du département de Mathématiques qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour, ainsi que le personnel de l'administration.
Je remercie tous les membres de laboratoire des Modéles Stochastique, Statistique et Application pour leur accueil et leur sympathie.

Je remercie chaleureusement toute *ma famille*, qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'étude. Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes amis permanents, *Ayhar Chafiaà* et *Abdelli wafaa*, qui m'ont toujours entouré et m'ont motivé à continuer à meilleure.
Tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu de toute manière que ce soit.

Merci à tous

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À celui ou celle qui m'a donné son affection et ses conseils durant toutes mes années d'études , en particuliers

A ma très chère mère

Tu représente pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A la grande dame qui a tant sacrifié pour nous, *ma grand mère.* Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Un spéciale dédicace a la grande dame qui a tant sacrifié pour moi, ma grand soeur *Zahra.* Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites.

Je dédie ce travail à *Abdelli wafaa* et *Ayhar Chafiaà* en témoignage de mon profond amour.

A deux personnes qui m'ont donné leur confiance et leur soutien tout au long de mes études, mon pére et mon frère *Mokhtar.*

A mes très chers *frères* et mes très chères *soeurs* qui m'ont encouragé sur le long de mon parcour universitaire.

A tous les membres de ma famille , petits et grands, veuillez trouvez dans ce modeste travail l'expression de mon affection.
A tous mes collègues de Master 2 ASSPA. Et enfin, à tous ceux qui me *sont chers.*

Table des matières

Remerciement **2**

Dédicace **3**

Introduction **7**

1 Calcul stochastique en dimension finie **9**

1.1 Quelques notions sur les processus stochastiques 9

1.1.1 Comparaisons de processus 10

1.1.2 Filtration 10

1.1.3 Temps d'arrêt 11

1.2 Le mouvement brownien 12

1.2.1 Historique 12

1.2.2 Définition du mouvement Brownien 13

1.2.3 Quelques propriétés du mouvement Brownien 13

1.3 Martingales 14

1.3.1 Espérance conditionnelle 14

1.3.2 Martingales à temps continu 14

1.3.3 Exemples 16

1.4 Intégration stochastique (Intégrale d'Itô) 16

1.4.1 Intégrale stochastique par rapport à un mouvement Brownien 16

1.4.2 Intégrale stochastique par rapport à une martingale 20

1.5 Formule d'Itô 21

1.5.1 Formule d'Itô multidimensionnelle 21

1.5.2 Formule d'Itô unidimensionnelle 21

1.6 Processus d'Itô 21

2 Calcul stochastique en dimension infinie **23**

2.1 Rappels et Compléments . . . 23

2.2 Mesure gaussienne sur un espace de Hilbert . . . 26

2.3 Le processus de Wiener . . . 28

2.3.1 Processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert . . . 29

2.3.2 Processus de Wiener généralisés sur un espace de Hilbert . . . 32

2.4 Définition de l'intégrale stochastique . . . 35

2.4.1 Intégrale stochastique pour les processus de Wiener généralisés . . . 40

2.4.2 Approximations des intégrales stochastiques . . . 42

2.5 Propriétés de l'intégrale stochastique . . . 43

2.6 Formule d'Itô . . . 46

2.7 Théorème stochastique de Fubini . . . 50

2.8 Remarques sur la généralisation de l'intégrale . . . 54

3 Application aux EDS (Équations linéaires avec bruit additif) **56**

3.1 Rappels et Compléments . . . 56

3.2 Systèmes de retard (Exemple pour un système déterministe) . . . 58

3.3 Concepts de base . . . 60

3.3.1 Concept de solutions . . . 60

3.3.2 Convolution stochastique . . . 61

3.4 Existence et Unicité . . . 64

3.4.1 Solutions faibles . . . 64

3.4.2 Solutions fortes . . . 67

Conclusion **70**

Annexe **71**

A Opérateurs nucléaires et Opérateurs Hilbert-Schmidt **72**

A.1 Définition des opérateurs nucléaires et Hilbert-Schmidt . . . 72

B L'intégrale de Bochner **76**

B.1 Définition de l'intégrale de Bochner . . . 76

B.2 Propriétés de l'intégrale de Bochner . . . 78

C Théorie des C_0-semigroupes **80**

C.1 Semigroupes de classe C_0 80

D puissances fractionnaires et espaces d'interpolation **83**

Bibliographie **88**

Introduction

Le calcul stochastique est une branche à la croisée de probabilités et de l'analyse mathématiques qui s'occupe des phénomènes aléatoires dépendant du temps.
Le coeur des outils probabilistes réside dans le calcul stochastique, qui n'est rien autre qu'un calcul différentiel, mais adapté aux trajectoires des processus stochastiques qui ne sont pas différentiables. Le calcul différentiel présente une théorie de l'intégration d'un processus stochastique (intégrant) par rapport à un autre (intégrateur), afin de résoudre des équations différentielles stochastiques qui servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Le processus le plus connu et largement utilisé qui effectue ce calcul est le mouvement Brownien, il est utilisé en mathématiques financières, en économie (par exemple en évolution des prix des actions et des taux d'intérêt obligatoires), en mécanique quantique, en traitement du signal, en chimie, en météorologie, et même en musique.

La théorie de l'intégration des équations différentielles stochastiques a été développée par : N. Wiener ([34]), en 1923, K. Iô ([16, 17, 18]), en 1942 ; 1944 ; 1951, P. Lévy ([27]), en 1948, A. N. Kolmogorov ([24]), en 1931, W. Feller ([10]), en 1936,... La liste des articles et livres connexes est très longue et nous ne le mentionnons pas ici en entier. La théorie la plus connue du calcul stochastique est celle de K. Itô, le père de la théorie de l'intégration stochastique.

Dans ce mémoire, nous avons choisi de mettre l'accent sur les aspects liés à la théorie de calcul stochastiques dans des espaces de dimension infinie. Pour cela, j'ai partagé mon manuscrit en trois chapitres. Le premier chapitre, est consacrée à un bref rappel sur la théorie de calcul stochastique en dimension finie. Nous avons voulu faire un tour d'horizon des concepts et définitions. Le deuxième chapitre, est consacré au calcul stochastique dans des espaces de dimension infinie, plus préçisement Hilbert, les concepts de base et les résultats concernant les processus stochastiques dans des espaces de Hilbert sont établis. Nous nous intéressons à deux processus, le processus Q-Wiener et le processus de Wiener généralisés, Puis, nous définissons l'intégrale stochastique par rapport a ces deux processus. Nous établissons également les propriétés de base de l'intégrale stochastique, y compris la formule d'Itô et le théorème stochastique de Fubini, en se basant sur [6]. Le dernier chapitre est dédié à l'étude des équations différentielles stochastiques (équations linéaires avec bruit additif), commençons par définir les différents concepts de solutions. Puis, on a démontré l'existence et l'unicité de solution faible et solution forte.

Chapitre 1

Calcul stochastique en dimension finie

Ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

1.1 Quelques notions sur les processus stochastiques

Définition 1.1.1. ***(Processus stochastique)*** *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \in \mathrm{T}}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* T.
En général, $\mathrm{T} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}^+$ *et on considére que le processus est indexé par le temps* t.
Si T *est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si* $T = \mathbb{N}$ *alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand* $T \subset \mathbb{Z}$, *le processus est dit discret.*
Pour $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}^d$, *on parle de champ aléatoire (drap quand* $d = 2$*).*
Un processus dépend de deux paramétres : $X_t(\omega)$ *dépend de* t *(en général le temps) et de l'aléatoire* $\omega \in \Omega$.

- *Pout* $t \in \mathrm{T}$ *fixé,* $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in \mathrm{T} \mapsto X_t(\omega)$ *est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus réguliéres.*

Définition 1.1.2. *Un processus* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R} \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est* ***mesurable*** *par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.1.1 Comparaisons de processus

Ètant donnés deux processus stochastiques X et Y définis sur un méme espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Quand peut on dire $X = Y$?
Au sens le plus fort ceci se passe si pour tous $(t, \omega) \in \mathrm{T} \times \Omega$ on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.
Lorsque l'on travaille avec un espace de probabilité on peut avoir une définition moins restrictive en faisant rentrer $\mathbb{P}$ en action :

Définition 1.1.1.1. *On dira que deux processus X et Y sont **indistinguables** si et seulement si*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \ \textit{pour tout} \ \ t \in \mathrm{T}) = 1.$$

Autrement dit, les trajectoires de X et Y coincident partout presque sûrement. Cela reste encore une définition trés forte. On peut affaiblir cette notion en

Définition 1.1.1.2. *On dira que X est une **modification** (ou une version) de Y si et seulement si pour tout $t \in \mathrm{T}$*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Autrement dit, pour tout $t \in \mathrm{T}$ les v.a. X_t est Y_t sont presque sûrement égales.
Si X et Y sont indistinguables alors l'un est une modification de l'autre.

Proposition 1.1.1.1. *Soient T un intervalle de $\mathbb{R}$, $X = (X_t)_{t \in \mathrm{T}}$ et $Y = (Y_t)_{t \in \mathrm{T}}$ deux processus stochastiques continus alors :*

$$X \ \textit{et} \, Y \ \textit{sont indistinguables} \iff X \ \textit{est une modification de} \, Y.$$

Preuve. voir [15].

1.1.2 Filtration

Définition 1.1.2.1. *Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.*
Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelée un espace de probabilite filtre.

Définition 1.1.2.2. *1. Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration alors on définit la filtration suivante*

$$\mathcal{F}_{t^+} = \Big(\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \Big).$$

2. *On dit qu'une filtration est continue à droite si*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$$

3. *Soit $\mathcal{N}$ la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont $\mathbb{P}$-nègligeables. Si $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est complète.*

4. *On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est a la fois continue a droite et complète.*

Définition 1.1.2.3. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Remarque 1.1.2.1. *Si $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$, et si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.*

Définition 1.1.2.4. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est **progressivement mesurable** par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si l'application $(s, \omega \mapsto X_s(\omega))$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus mesurable et adapté alors il posséde une modification progressivement mesurable.

1.1.3 Temps d'arrêt

Définition 1.1.3.1. *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit maintenant T une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On dit que T est un **temps d'arrêt** de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$,*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.3.2. *(**Temps d'atteinte**) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*
Soit

$$T = inf\{t \geq 0, X_t \in F\},$$

où F est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Alors T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.1.3.3. *Soit T un temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On note*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in F,\ \forall t \geq 0,\ A \cap\ T \leq t \in \mathcal{F}_t\}.$$

*Alors $\mathcal{F}_T$ est une tribu, appelée **tribu des événements antérieurs** à T.*

Remarque 1.1.3.1. *On vérifie facilement que $\mathcal{F}_T$ est une tribu et que, si T est constant et égal à t alors T est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.*

Si T est un temps d'arrêt d'une filtration pour laquelle un certain processus est adapté, alors il est possible d'arrêter ce processus au temps T :

Proposition 1.1.3.1. *Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ et T un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ fini presque sûrement. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et progressivement mesurable. Alors le processus $(X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$*

Preuve. voir [1].

1.2 Le mouvement brownien

1.2.1 Historique

- 1828 : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.
- 1877 : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction).
- 1900 : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif).
- 1905 : Einstein détermine la densité du MB et le lié aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.
- 1923 : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

Définition 1.2.1.1. *Un processus $X = (X_t)_{t\in \mathrm{T}}$ est un **processus gaussien** si toutes ses lois de dimension fnie sont gaussiennes i.e.*

$$\forall n \geq 1,\ \ \forall t_1 < t_2 < ...., t_n \in \mathrm{T} \quad (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \textit{ est un vecteur gaussien.}$$

Définition 1.2.1.2. *On dit que le processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est a* ***accroissements independants*** *si :*

$$\forall n \geq 1,\ \forall t_1 < t_2 < ...., t_n \in \mathrm{T} \quad X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1} ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ sont indépendantes.}$$

1.2.2 Définition du mouvement Brownien

Définition 1.2.2.1. *Le processus* $B = (B_t)_{t\in T}$ *est un mouvement Brownien sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si et seulement si*

1. *B est issu de* 0*, c'est-à-dire que,* $B_0 = 0$ *P-presque sûrement,*
2. *B est à trajectoires continues,*
3. *B est à accroissement indépendants, c'est-à-dire que pour tous* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$*, la famille de variables aléatoires* $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0})$ *est indépendante,*
4. *pour tous* $0 \leq s < t \leq T$*,* $B_t - B_s$ *suit une loi gaussienne centrée de variance* $t - s$*.*

Un **processus gaussien** (centré) est un processus tel que toutes les marginales fini-dimensionnelles soient des vecteurs gaussiens (centrés), autrement dit tel que toute combinaison linéaire finie de ses marginales fini-dimensionnelles soit gaussienne (centrée). La loi d'un processus gaussien centré est caractérisée par sa **fonction de covariance**.

Proposition 1.2.2.1. *B est un mouvement Brownien si et seulement si B est un processus gaussien centré à trajectoires continues de fonction de covariance* $Cov(B_s, B_t) = \min(s, t)$*.*

Preuve. voir [25].

1.2.3 Quelques propriétés du mouvement Brownien

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien defini sur un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors

1. **Symétrie.**
   Le processus $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement Brownien
2. **Changement d'échelle (scaling).**
   Soit $C > 0$. Le processus $B^C = (B_t^C)_{t\geq 0}$ avec $B_t^C = (\frac{1}{C})(B_{C^2 t})$ est encore un mouvement Brownien.
3. **Propriété de Markov simple.**
   Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$.
   alors $B^{(s)} = (B_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien independant de $\mathcal{F}_s$.

4. **inversion temporel**

   Soit $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien. On pose $t \geq 0,\ Z_t = tB_{\frac{1}{t}}$, alors (Z_t) est un mouvement Brownien.

1.3 Martingales

1.3.1 Espérance conditionnelle

Définition 1.3.1.1. *Soit X variable aléatoire de l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$* [1] *et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})$ est l'unique variable aléatoire de $L^1(\mathcal{B})$ telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B}) d\mathbb{P}$$

Corollaire 1.3.1.1. *Si $X \in L^2(\mathcal{A})$, $\|X\|_2^2 = \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})\|_2^2 + \|X - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B}\|_2^2$*

1.3.2 Martingales à temps continu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilite filtré.

Définition 1.3.2.1. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adaptè et intègrable, on dit que X est*

1. *Une **martingale** si*
$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(X_t/\mathcal{F}_s\Big) = X_s.$$
2. *Une **surmartingale** si*
$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(X_t/\mathcal{F}_s\Big) \leq X_s.$$
3. *Une **sousmartingale** si*
$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(X_t/\mathcal{F}_s\Big) \geq X_s.$$

Définition 1.3.2.2. *Un processus aléatoire $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-martingale si*

(i) *X est $\mathcal{F}$-adapté,*

---

1. On note $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'ensemble des v.a. intégrables. on définit

$$L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left\{ X \text{ v.a.r} \,/ \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X(x) < +\infty \right\}$$

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, *pour tout* $t \in [0, T]$,

(iii) $E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$ *pour tout* $s, t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$

Un processus X est une $\mathcal{F}$-surmartingale (resp. une $\mathcal{F}$-sousmartingale) s'il vérifie les propriétés (i) et (ii) et $E[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s$ (resp. $E[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s$) pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Remarque 1.3.2.1. *Si $(X_t)_{t \in \mathrm{T}}$ est une martingale alors $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.*

Théorème 1.3.2.1. *Soit X un processus et φ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}|\varphi(X_t)| < \infty$, pour tous t.*

1. *Si X une martingale alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale,*
2. *si X est une sousmartingale et φ est croissante (au sens large) alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale.*

Preuve. voir [20].

Définition 1.3.2.3. *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique*

1. *On dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est uniformement integrable si :*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sup_{t \geq 0} \int_{(|X_t| > \alpha)} |X_t| d\mathbb{P} = 0.$$

2. *Si $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est bornè dans L^p si :*

$$\lim_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty.$$

Théorème 1.3.2.2. ***(Inégalité de Doob)*** *Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue a droite, alors*

$$\forall p > 1, \quad \left(\mathbb{E}[| \sup_{0 \leq s \leq t} X_s|^p] \right) \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\mathbb{E}[|X_s|^p] \right).$$

Soit (M_t) une martingale (par rapport à une filtration (F_t)) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s. Alors

(a) $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|M_t|)}{\lambda}, \quad \forall\, t > 0,\ \lambda > 0.$

(b) $\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_t|^2), \quad \forall\, t > 0.$

Preuve. voir [26].

1.3.3 Exemples

Le Brownien

Proposition 1.3.3.1. *Le Mouvement Brownien Standard* (B_t) *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathrm{T}}$*-martingale (à trajectoire) continue*

Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_{t+s}/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(B_t/\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t/\mathcal{F}_t)\\ &= B_t + \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t)\\ &= B_t\end{aligned}$$

Proposition 1.3.3.2. *Soit* (B_t) *un M.B.S. les processus suivants sont des* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathrm{T}}$*-martingales :*

1. $X_t = B_t^2 - t$
2. *Pour* θ *fixé* $N_t = N_t(\theta) := \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$.

Preuve. voir [20].

1.4 Intégration stochastique (Intégrale d'Itô)

1.4.1 Intégrale stochastique par rapport à un mouvement Brownien

Soit $(B_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement Brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$.
Soit $T > 0$ fixé ($\neq$ temps d'arrêt). Notre but est de construire l'intégrale stochastique

$$\left(\int_0^t H_s dB_s,\quad t \in [0,T]\right),$$

pour un processus (H_t) vérifiant certaines propriétés. Pour cela, on procède en plusieurs étapes.

Premiére étape

Définition 1.4.1.1. *Un processus* <u>*simple prévisible*</u> *(par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$*) est un processus* $(H_t)_{t\in[0,T]}$ *tel que*

$$H_t = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i[},$$

où $0 = t_0 < t_1 < .. < t_n = T$ *forme une partition de [0,T] et* X_i *est une v.a.* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*-mesurable et bornée,* $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

On voit donc que sur l'intervalle $]t_{i-1}, t_i]$, la valeur du procesus (H_t) est déterminée par l'information $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ d'où le nom de "prévisible" (l'appellation "simple" vient quant à elle du fait que le processus ne prend qu'un nombre fini de valeurs (aléatoires !)). On pose

$$(H \cdot B)_T = \int_0^T H_s dB_s = \sum_{i=1}^n X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Cette définition de l'intégrale stochastique pour des processus simples prévisibles est univoque (mais ça demande un petit travail de vérification) et l'intégrale est linéaire en H, i.e.

$$((cH + K) \cdot B)_T = c(H \cdot B)_T + (K \cdot B)_T.$$

Proposition 1.4.1.1. *On a les égalités suivantes :*

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot B)_T\Big) = 0 \ \text{ et } \ \mathbb{E}\Big((H \cdot B)_T^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big).$$

Preuve. voir [26].

La seconde égalité ci-dessus est appelée **l'isométrie d'Itô**.

Remarquer que si $H(t) \equiv 1$, alors on retrouve l'égalité $\mathbb{E}(B_T^2) = T$.

Remarque 1.4.1.1. *Pour être tout à fait exact, l'isométrie d'Itô dit encore que si* H *et* K *sont deux processus simples prévisibles, alors*

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot B)_T(K \cdot B)_T\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s K_s ds\Big)$$

Deuxiéme étape

Soit $(H_t)_{t\in[0,T]}$ un processus simple prévisible comme défini ci-dessus et $t \in [0, T]$. On pose

$$(H \cdot B)_t \equiv \int_0^t H_s dB_s = \Big((H\mathbb{1}_{[0,t]} \cdot B)_T\Big) = \sum_{i=1}^n (B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}).$$

A nouveau, cette intégrale est linéaire en H et on a par la proposition précédente :

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot B)_T\Big) = 0$$

et

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot B)_t^2\Big) = \Big(((H\mathbb{1}_{[0,t]} \cdot B)_T^2)\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s) ds\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big).$$

De plus, en utilisant la remarque 1.4.1.1, on peut encore calculer

$$\mathrm{Cov}((H \cdot B)_t, (K \cdot B)_s) = E((H \cdot B)_t(K \cdot B)_s) = \mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge s} H_r K_r d_r\Big).$$

Remarque 1.4.1.2. *Si* $t \in]t_{k-1}, t_k[$*, alors*

$$(H \cdot B)_t = \sum_{i=1}^{k-1} X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + X_k(B_t - B_{t_{k-1}}).$$

Proposition 1.4.1.2. *Le processus* $((H \cdot B)_t)_{t\in[0,T]}$ *est une* ***martingale continue de carré intégrable****.*

Preuve

Par la remarque ci-dessus et la continuité de (B_t), le processus $(H \cdot B)_t$ est clairement continu à l'intérieur des intervalles $]t_{k-1}, t_k[$. Aux points limites, il est aisé de vérifier que le processus reste continu également. D'autre part, l'isométrie montrée plus haut dit que $(H \cdot B)_t$ est un processus de carré intégrable, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(|(H \cdot B)_t|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((H \cdot B)_t^2)} < \infty.$$

De plus, si on suppose que $t \in]t_{k-1}, t_k[$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H \cdot B)_T/\mathcal{F}_t) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}(X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_t)) + \mathbb{E}(X_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})/\mathcal{F}_t) \\
&+ \sum_{i=1}^{i=k+1} \mathbb{E}(X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_t)) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + X_k\mathbb{E}(B_t - B_{t_{k-1}}/\mathcal{F}_t) \\
&+ \sum_{i=1}^{i=k+1} \mathbb{E}(X_i\mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_{t_{i-1}})/\mathcal{F}_t \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + X_k(B_t - B_{t_{k-1}}) + 0 = (H \cdot B)_t
\end{aligned}$$

par la remarque ci-dessus. Le processus $(H \cdot B)_t$ est donc une martingale car pour $t \geq s$, on a

$$\mathbb{E}((H \cdot B)_t/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((H \cdot B)_T/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((H \cdot B)_T/\mathcal{F}_s) = (H \cdot B)_s.$$

□

D'aprés l'inégalité de Doob 1.3.2.2 (b), on a donc :

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}(H\cdot B)_t^2\Big) \leq 4\mathbb{E}\Big((H\cdot B)_T^2\Big) = 4\mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big)$$

Troisième étape

On étend maintenant l'intégrale $(H \cdot B)$ par continuité à l'ensemble

$$\mathcal{H}_T = \Big\{(H_t)_{t\in[0,T]} : H \text{ est adapté, continu à gauche, limité à droite et tel que } \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big) < \infty\Big\}.$$

Cet ensemble est un espace vectoriel normé et complet (ou espace de Banach), muni de la norme $\|\cdot\|_{T,1}$ définie par

$$\|H\|_{T,1}^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big).$$

Lemme 1.4.1. *$\forall H \in \mathcal{H}_T$, il existe une suite $(H^{(n)})$ de processus simples prévisibles tels que*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2 ds\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conséquence : Du fait que la suite $(H^{(n)})$ converge, c'est également une suite de Cauchy :

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s^m)^2 ds\Big) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)}\cdot B)_t - (H^{(m)}\cdot B)_t)^2\Big) &= \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)} - H^{(m)})\cdot B)_t)^2\Big)\\ &\leq 4\mathbb{E}\Big(\textstyle\int_0^T((H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2 ds\Big) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

La suite de processus $((H^{(n)} \cdot B))$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_T$ défini par

$$\mathcal{M}_T = \Big\{(M_t)_{t\in[0,T]} \text{ martingale continue de carré intégrable telle que } M_0 = 0\Big\}$$

et muni de la norme $\|\cdot\|_{T,2}$ definie par

$$\|M\|_{T,2}^2 = \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} M_t^2\Big).$$

1.4.2 Intégrale stochastique par rapport à une martingale

On peut définir $\int_0^t H_s dM_s$ de la même manière que $\int_0^t H_s dB_s$ si on suppose que M est une martingale continue de carré intégrable.

1. Pour (H_t) un processus simple donné par $H_t = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i[}(t)$, on pose
$$(H \cdot M)_t \equiv \int_0^t H_s dM_s = \sum_{i=1}^{n} X_i (M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t})$$
et on vérifie que
$$\mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t\Big) = 0, \quad \mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big).$$
Remarquons que le terme ds apparaissant dans l'isométrie pour $(H \cdot B)_t$ a logiquement été remplacé par $d\langle M \rangle_s$ pour tenir compte de la variation quadratique $\langle M \rangle_s$ de la martingale qui n'est pas forcément égale à s.

   D'autre part, on vérifie que le processus $((H \cdot M)_t)_{t \in [0,T]}$ est également une martingale continue de carré intégrable.
2. L'extension de l'intégrale à un processus (H_t) adapté, continu à gauche, limité à droite et tel que
$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big) < \infty.$$
est identique à celle efectuée pour $\int_0^t H_s dB_s$.

Linéarité :$((cH + K) \cdot M)_t = c(H \cdot M)_t + (K \cdot M)_t$ et $(H \cdot (M + N))_t = (H \cdot M)_t + (K \cdot N)_t$.

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t\Big) = 0, \quad \mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big)$$
$$\mathrm{cov}(H \cdot M)_t (K \cdot N)_t = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s\Big).$$
$$\langle (H \cdot M)_t \rangle = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s d\langle M \rangle_s\Big).$$
$$\langle (H \cdot M)_t, (K \cdot N)_t \rangle = \Big(\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s\Big).$$
"Régle" utile à retenir : si $X_t = \int_0^t H_s dM_s$ (i.e $dX_t = H_t dM_s$,, alors $d\langle X \rangle_t = H_t^2 d\langle M \rangle_T$.

Noter que si $M_t = \int_0^t K_s dB_s$, alors
$$X_t = \int_0^t H_s K_s dB_s \ \ et \ \ \langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 K_s^2 ds$$

De même, vu que la proriété de martingale (continue de carré intégrable) est préservée, on peut encore définir $(L \cdot X)_t \equiv \int_0^t L_s dX_s$...etc.

1.5 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Cette formule offre un moyen de manipuler le mouvement Brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).
Soit $n \geq 1$ un entier. Un processus $(B_t = (B_t^{(1)}, ..., B_t^{(n)}), t \geq 0)$ issu de 0 est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ si $B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-mouvements Brownien indépendants.

1.5.1 Formule d'Itô multidimensionnelle

Pour n quelconque, soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$,

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_r f(r, B_r)dr + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \partial_{X_j} f(r, B_r)dB_r + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(r, B_r)dr.$$

1.5.2 Formule d'Itô unidimensionnelle

Lorsque $n = 1$, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$,

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_r f(r, B_r)dr + \int_0^t f'(r, B_r)dB_r + \frac{1}{2}\int_0^t f''(r, B_r)dr.$$

1.6 Processus d'Itô

Définition 1.6.1. *Soit $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.*

1. *On dit que (X_t) est un $\mathcal{F}_t$-processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}$ si pour tout $t \geq 0$ il peut s'écrire*

$$X_t = X_0 + \int_0^t L_s ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H_s^j dB_s^j. \tag{1.1}$$

où X_0 est une v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable, L_t et $H_t = (H_t^1, ..., H_t^d)$ sont prévisibles et tels que $\forall t \geq 0$, $i = 1, .., d$

$$\int_0^t |L_s| ds < \infty, \quad \int_0^t (H_s^i)^2 ds < \infty.$$

Notation différentielle :

$$dX_t = L_s ds + \sum_{j=0}^{d} H_s^j dB_s^j.$$

2. *Un processus d'Itô de dimension n est un processus vectoriel $X(t) = (X_t^1, ..., X_t^n)$ où chaque composante est un processus d'Itô réel.*

Exemples

Les processus suivants sont des processus d'Itô

1. $X_t = h(t)$, h dérivable
$$X_t = h(0) + \int_0^t h'(s)ds + \int_0^t 0dB_s.$$
2. $X_t = B_t$, Brownien
$$B_t = 0 + \int_0^t 0ds + \int_0^t 1dB_s.$$
3. La variation quadratique d'un processus d'Itô est un processus d'Itô
$$\langle X\rangle_t = 0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{d} H_s^j ds + \int_0^t 0dB_s.$$

Propriété 1.6.1. *Soit X_t un processus d'Itô à valeurs réelles de représentation 1.1. Alors*

1. *Si Y_t est un processus d'Itô à valeurs réelles de représentation $Y_t = Y_0 + \int_0^t J_s ds + \sum_{j=1}^{d'} (K^j, B^j)_t$ alors*
$$\langle X, Y\rangle_t = \sum_{i=1}^{d\wedge d'} (K^j, B^j)_t.$$
2. *Formule d'Itô : soit f de classe C^2 on a*
$$f(X_t) = f(x_0) + \left(f'(X_s)L_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sum_{i=1}^{d}(H_s'')\right)ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t f(X_s H_s^j dB_s^j).$$

Chapitre 2

Calcul stochastique en dimension infinie

Soient H et U deux espaces de Hilbert séparables. Ce chapitre est consacré à la construction de l'intégrale stochastique d'Itô

$$\int_0^t \Phi(s)dW(s), \qquad t \in [0,T],$$

où $W(\cdot)$ est un processus de Wiener sur un espace de Hilbert U et Φ est un processus avec valeur qui sont des opérateurs linéaires mais pas nécessairement bornés de U dans un espace de Hilbert H.

2.1 Rappels et Compléments

Un résultat important sur l'existence de modifications régulières est-il prévu par le théorème suivant de Kolmogorov.

Théorème 2.1.1. *Théorème de Kolmogorov*
Soit $X(t)$, $t \in [0,T]$, un processus stochastique avec des valeurs dans un espace métrique complet (E,ρ) tel que pour certaines constantes $C>0$, $\varepsilon>0$, $\delta>1$, et toutes $t,s \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left((\rho(X(t),X(s)))^{\delta}\right) \leq C|t-s|^{1+\varepsilon} \tag{2.1}$$

alors il existe une version de X avec $\mathbb{P}$-presque toutes les trajectoires étant des fonctions continues de Hölder avec un exposant arbitraire inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{\delta}$. En particulier X a une version continue.

Preuve. voir [6].

Théorème 2.1.2. *Les arssertions suivantes sont satisfaites.*

(1) *Si* $(M(t))_{t\in I}$ *est une martingale à valeur dans* E, I *un ensemble dénombrable et* $p \geq 1$, *alors pour un arbitraire* $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in I}\|M(t)\| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-p}\sup_{t\in I}\mathbb{E}(\|M(t)\|^p). \tag{2.2}$$

(2) *Si en plus* $p > 1$ *alors,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in I}\|M(t)\|^p\right) \leq \left(\frac{p}{(p-1)}\right)^p \mathbb{E}\sup_{t\in I}(\|M(t)\|^p). \tag{2.3}$$

(3) *Les estimations ci-dessus restent vraies si l'ensemble* I *est indénombrable et la martingale* M *est continue.*

Fixons un nombre $T > 0$ *et désignons par* $\mathcal{M}_T^2(E)$ *l'espace de toutes les martingales* M *continues, carrées intégrables à valeurs dans* E, *telles que* $M(0) = 0$. *puisque* $\|M(t)\|^2, t \in [0,T]$, *est une sous-martingale nous avons*

$$\mathbb{E}\|M(t)\|^2 \leq \mathbb{E}\|M(T)\|^2 \quad t \in [0,T].$$

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

Proposition 2.1.1. *Soit* E *un espace de Banach séparable. Supposons que* $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes de valeur dans* E *avec des distributions symétriques. Supposons qu'il existe une variable aléatoire* S *telle que, pour un arbitraire* $r > 0$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\|S - S_N\| \geq r) = 0,$$

où $S_k = \xi_1, ..., \xi_k,\ k \in \mathbb{N}$. *Puis*

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k, \qquad \mathbb{P} - P.s.$$

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

Proposition 2.1.2. *(Théorème de Lévy)*
Si $M \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$, $M(0) = 0$ *et* $\langle\langle M(t)\rangle\rangle = t$, $t \in [0,T]$, *alors* $M(\cdot)$ *est un processus de Wiener standard adapté à* $\mathcal{F}_t$ *et avec* $M(s) - M(t)$, $s > t$, *des acroissement indépendant de* $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$.

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6]

Proposition 2.1.3. *Supposons que* $\mathcal{K}$ *est un* π*-système et soit* $\mathcal{G}$ *la plus petite famille de sous-ensembles de* Ω *tel que*

(1) *$\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$,*

(2) *si $A \in \mathcal{G}$ alors $A^c \in \mathcal{G}$,*

(3) *si $A_i \in \mathcal{G}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $A_n \cap A_m$ pour $n \neq m$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$ Alors $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{K})$.*

Preuve. voir [6].

Lemme 2.1.1. *Soit E un espace métrique séparable avec métrique ρ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans E. Alors il existe une suite $\{X_m\}$ de variables aléatoires simples à valeur dans E telle que, pour un arbitraire $\omega \in \Omega$, la suite $\{\rho(X(\omega), X_m(\omega))\}$ est décroissante de façon monotone à 0.*

Preuve. voir [6].

Proposition 2.1.4. *Supposons que E et F sont des espaces de Banach séparables et $A : D(A) \subset E \to F$ est un opérateur fermé avec le domaine $D(A)$ un sous-ensemble de Borel de E. Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire telle que $X(\omega) \in D(A)$, $\mathbb{P}$-presque sûrement (P.s.), alors AX est une variable aléatoire à valeur dans F, et X est une variable aléatoire à valeur dans $D(A)$, où $D(A)$ est muni de la norme de graphe de A.[1] Si de plus*

$$\int_{\Omega} \|AX(\omega)\| \mathbb{P}(d\omega) < +\infty, \tag{2.4}$$

alors

$$A \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} AX(\omega)\mathbb{P}(d\omega). \tag{2.5}$$

Preuve. voir [6].

Proposition 2.1.5. *Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables et $\psi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^1$ une fonction mesurable bornée. Soient ξ_1, ξ_2 deux variables aléatoires dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec des valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ respectivement, et soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ la σ-algèbre fixé.*

On suppose que ξ_1 est $\mathcal{G}$-mesurable alors il existe une fonction $\widehat{\psi}(x_1, \omega)$, $x_1 \in E_1$,$\omega \in \Omega$ bornée $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{G}$-mesurable, telle que

$$\mathbb{E}(\psi(\xi_1, \xi_2)|\mathcal{G})(\omega) = \widehat{\psi}(\xi_1(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{2.6}$$

Si en plus ξ_2 est indépendant de $\mathcal{G}$, alors

$$\widehat{\psi}(x_1, \omega) = \widehat{\psi}(x_1) = \mathbb{E}(\psi(x_1, \xi_2)), \quad x_1 \in E_1. \tag{2.7}$$

1. Si A est fermé, la norme de graphe sur $D(A)$ est définie comme : pour tout $x \in D(A), \|x\|_{D(A)} := \|x\|_E + \|Ax\|_F$. Alors $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ est un espace de Banach.

Preuve. voir [6].

Proposition 2.1.6. *Soit* $X(t)$, $t \in [0,T]$ *un processus stochastique continu et adapté avec des valeurs dans un espace de Banach séparable. Alors* X *a une modification progressivement mesurable.*

La σ*-algèbre* $\mathcal{P}_\infty$ *des sous-ensembles de* $[0,+\infty) \times \Omega$ *jouera un rôle important dans la suite.* $\mathcal{P}_\infty$ *est la* σ*-algèbre généré par des ensembles de la forme,*

$$\{(s,t] \times F,\ 0 \leq s < t < \infty,\ F \in \mathcal{F}_s \ \text{et}\ \{0\} \times F,\ F \in \mathcal{F}_0\}. \tag{2.8}$$

Cette σ*-algèbre est appelée la* σ*-algèbre prévisible et ses éléments sont des ensembles prévisibles. La restriction* σ*-algèbre* $\mathcal{P}_\infty$ *sur* $[0,T]$ *sera notée par* $\mathcal{P}_T$*.*

Une application mesurable arbitraire de $([0,+\infty)\times,\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ *ou* $([0,T)\times\Omega,\mathcal{F}_T)$ *dans* $(E,\mathcal{B}(E))$ *est appelé un processus prévisible. Un processus prévisible est nécessairement un processus adapté.*

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

2.2 Mesure gaussienne sur un espace de Hilbert

Dans cette section, nous montrons que pour les mesures gaussiennes sur les espaces de Hilbert, des informations plus précises peuvent être données.

Soit H est un espace de Hilbert séparable, une mesure de probabilité μ sur $(H,\mathcal{B}(H))$ est appelé Gaussienne si pour un arbitraire $h \in H$ il existe $m \in \mathbb{R}^1$, $q \geq 0$ tel que,

$$\mu(\{x \in H, \langle h,x\rangle \in A\}) = \mathcal{N}(m,q)(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \tag{2.9}$$

En particulier, si μ est gaussienne, les fonctionnelles suivantes,

$$H \to \mathbb{R}^1, \quad h \to \int_H \langle h,x\rangle \mu(dx), \tag{2.10}$$

$$H \times H \to \mathbb{R}^1, \quad (h_1,h_2) \to \int_H \langle h_1,x\rangle\langle h_2,x\rangle \mu(dx), \tag{2.11}$$

sont bien définis. Nous montrons maintenant qu'ils sont continus. Nous avons besoin d'un lemme sur les mesures de probabilité générales.

Lemme 2.2.1. *Soit ν une mesure de probabilité sur $(H, \mathcal{B}(H))$. Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$*

$$\int_H \left|\langle z, x\rangle\right|^k \nu(dx) < +\infty \qquad \forall z \in H,$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left|\int_H \langle h_1, x\rangle ... \langle h_k, x\rangle \nu(dx)\right| \leq c|h_1|...|h_k|, \quad h_1...h_k \in H$$

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

Il résulte du lemme que si μ est gaussienne, alors il existe un élément $m \in H$ et un opérateur linéaire Q, tel que

$$\int_H \langle h, x\rangle \mu(dx) = \langle m, h\rangle, \qquad \forall h \in H, \tag{2.12}$$

$$\int_H \langle h_1, x - m\rangle \langle h_2, x - m\rangle \mu(dx) = \langle Qh_1, h_2\rangle, \qquad \forall h_1, h_2 \in H. \tag{2.13}$$

Le vecteur m est appelé la moyenne et Q est appelé l'opérateur de covariance de μ. Il est clair que l'opérateur Q est symétrique. De plus, puisque

$$\langle Qh, h\rangle = \int_H \langle h, x - m\rangle^2 \mu(dx) \geq 0, \qquad h \in H,$$

c'est aussi non négatif. Il résulte de (2.12) - (2.13) qu'une mesure gaussienne μ sur H avec la moyenne m et la covariance Q a la caractéristique fonctionnelle suivante

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int_H e^{i\langle \lambda, x\rangle} \mu(dx) = e^{i\langle \lambda, m\rangle - \frac{1}{2}\langle Q\lambda, \lambda\rangle}, \quad \lambda \in H.$$

elle est donc uniquement déterminé par m et Q. Elle est noté par $\mathcal{N}(m, Q)$.

Il s'avère que l'opérateur de covariance doit être nucléaire (voir l'annexe A pour la définition et propriétés de base).

Proposition 2.2.1. *Soit μ une mesure de probabilité gaussienne avec une moyenne 0 et covariance Q. Alors Q a une trace finie.*

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

Il résulte de la preuve que $Tr(Q) = \mathbb{E}|X|^2 < +\infty$. Ainsi, la définition de l'opérateur de covariance donnée ci-dessus est un cas particulier de la définition générale donnée à ([6]).

Dans les considérations suivantes on note $\{e_k\}$ une base orthonormale complète de H qui diagonalise Q, et par $\{\lambda_k\}$ l'ensemble correspondant de valeurs propres de Q. De plus, pour tout

$x \in H$ nous définissons $x_k = \langle x, e_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$. On note que les variables aléatoires $x_1, x_2, ..., x_n$ sont indépendantes, parce que la matrice de covariance de la variable aléatoire $(x_1, x_2, ..., x_n)$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est précisément $(\lambda_i \delta_{ij})$.

Proposition 2.2.2. *Soit Q un opérateur a trace positif et symétrique dans H et soit $m \in H$. Alors il existe une mesure gaussienne dans H avec une moyenne m et covariance Q.*

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

Maintenant, nous allons commencer par rassembler des informations de base sur les processus de Wiener dans un espace de Hilbert y compris les processus de Wiener cylindriques. Donc, nous définissons l'intégrale stochastique par étapes commençant à partir des processus élémentaires et aboutissant à la plus générale. Nous établissons également les propriétés de base de l'intégrale stochastique, y compris la formule d'Itô et le théorème stochastique de Fubini.

2.3 Le processus de Wiener

Définition 2.3.1. *Un processus stochastique $W = (W(t))_{t \geq 0}$ à valeur réelle, est appelé un processus de Wiener si*

(1) *W a trajectoires continues et $W(0) = 0$,*

(2) *W a accroissements indépendants et*

$$\mathscr{L}(W(t) - W(s)) = \mathscr{L}(W(t - s)), \qquad t \geq s \geq 0,$$

(3) $\mathscr{L}(W(t)) = \mathscr{L}(-W(t)), \qquad t \geq 0,$

De manière équivalente, voir par exemple [13], un processus stochastique $(W(t))_{t \geq 0}$ à valeur réelle, avec des trajectoires continues est appelé un processus de Wiener s'il est gaussien et il existe $\sigma \geq 0$ tel que,

$$\mathbb{E}(W(t)) = 0, \qquad \qquad \mathbb{E}(W(t)W(s)) = \sigma\, t \wedge s.$$

L'avantage de la définition 2.3.1 est qu'elle peut être généralisée naturellement aux processus prendre des valeurs dans des espaces linéaires généraux E. Soit E un espace topologique linéaire et soit $\mathcal{B}(E)$ le σ-algèbre généré par tous les sous-ensembles ouverts de E.

Donc, un processus stochastique $(W(t))_{t\geq 0}$ de valeur dans E, satisfaisant (1)-(3) est appelé un processus de Wiener dans E.

Les cas les plus importants sont quand E est un espace de Hilbert ou un espace de Banach de fonctions ou de distributions définies sur un sous-ensemble $\partial \subset \mathbb{R}$. Examinons quelques-unes des classe avec quelques détails.

2.3.1 Processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert

Supposons que E est un espace de Hilbert séparable U, avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et W est un processus Wiener de valeur dans U. Donc, pour chaque $u \in U$, le processus

$$\langle W(t), u \rangle, \qquad t \geq 0$$

est un processus de Wiener de valeurs réels. Ceci implique en particulier que $\mathscr{L}(W(t))$ est une mesure gaussienne avec le vecteur moyen 0. Notons aussi que pour $u, v \in U, t, s \geq 0$,

$$\mathbb{E}[\langle W(t), u \rangle \langle W(s), u \rangle] = t \wedge s \, \mathbb{E}[\langle W(1), u \rangle^2]$$

et

$$\mathbb{E}[\langle W(t), u \rangle \langle W(s), v \rangle] = t \wedge s \, \mathbb{E}[\langle W(1), u \rangle \langle W(1), v \rangle] = t \wedge s \langle Qu, v \rangle,$$

où Q est l'opérateur de covariance de la mesure gaussienne $\mathscr{L}(W(1))$. L'opérateur Q est a trace et il caractérise complètement la distribution de W.

Soit Q un opérateur non négatif a trace sur un espace de Hilbert U.

Définition 2.3.2. *Un processus stochastique $W = (W(t))_{t\geq 0}$, à valeur dans U, est appelé un processus Q-Wiener si*

1. $W(0) = 0$,
2. W *a trajectoires continues,*
3. W *a acroissement indépendants,*
4. $\mathscr{L}(W(t) - W(s)) = \mathscr{N}(0, (t-s)Q), \qquad t \geq s \geq 0.$

On note qu'il existe un système orthonormal complet $\{e_k\}$ dans U et une suite bornée de nombres réels non négatifs $\{\lambda_k\}$ tels que

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \quad k \in \mathbb{N} \quad et \quad TrQ = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

Proposition 2.3.1. *Supposons que $W = (W(t))_{t\geq 0}$ est un processus Q-Wiener. Donc, Les affirmations suivantes sont satisfaites.*

1. W est un processus gaussien sur U et

$$\mathbb{E}(W(t)) = 0, \qquad Cov(W(t)) = tQ, \quad t \geq 0. \tag{2.14}$$

2. Pour arbitrairement $t \geq 0$, W a accroissement

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)e_j \tag{2.15}$$

où

$$\beta_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\langle W(t), e_j\rangle, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$

sont des mouvements Brownien de valeurs réelles mutuellement indépendant sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et la série de (2.15) sont convergentes dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Preuve

Soit $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ et soit $u_1, ..., u_n \in U$. Considérons la variable aléatoire Z définie par

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\langle W(t_j), u_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle W(t_1), u_k\rangle + \sum_{k=2}^{n}\langle W(t_2) - W(t_1), u_k\rangle + ... + \langle W(t_n) - W(t_{n-1}), u_n\rangle.$$

Puisque W a accroissement indépendants, Z est gaussienne pour tout choix de $u_1, ..., u_n$ et (1) suit.

Nous prouvons maintenant (2). Soit $t > s > 0$, puis par (2.16) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\beta_i(t)\beta_j(s)) &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\mathbb{E}(\langle W(t), e_i\rangle\langle W(s), e_j\rangle) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\Big[\langle\mathbb{E}(\langle W(t) - W(s), e_i\rangle\langle W(s), e_j\rangle) + \mathbb{E}(\langle W(s), e_i\rangle\langle W(s), e_j\rangle)\rangle\Big] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}s(Qe_i, e_j) = s\delta_{ij}
\end{aligned}$$

alors l'indépendance de β_i, $i \in \mathbb{N}$ suit. Pour prouver la représentation (2.15), il suffit de remarquer que, pour $m \geq n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{j=n}^{m} \sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)e_j\right\|^2 = t\sum_{j=n}^{m}\lambda_j, \tag{2.17}$$

et rappelons que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$. □

Proposition 2.3.2. *Pour tout opérateur Q positif symétrique a trace sur un espace de Hilbert séparable U, il existe un processus Q-Wiener $(W(t))_{t\geq 0}$.*

Preuve La preuve de l'existence d'un processus W satisfaisant les conditions (1), (3) et (4) de la définition 2.3.2 est une conséquence directe de l'extension de théorème de Kolmogorov. Pour trouver une version qui satisfait également à la condition (2) il suffit d'utiliser le test de Kolmogorov, Théorème 2.1.1. □

Si cela ne méne pas à une confusion, nous dirons simplement le processus de Wiener au lieu du processus de Q-Wiener. Nous allons maintenant considérablement renforcer la partie (2) de la proposition 2.3.1 et montré le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Soit W un processus Q-Wiener tel que (2.14) est vérifié. Alors la série (2.15) est convergente uniformément $\mathbb{P}-p.s.$ sur $[0,T]$ pour un arbitraire $T > 0$.*

Preuve

Pour prouver la convergence de (2.15), considérons les variables aléatoires ξ_j, $j \in N$ de valeurs dans $C = C([0,T];U)$ définies par

$$\xi_j(t) = \sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)e_j, \qquad t \in [0,T].$$

Par (2.17) et Théorème 2.1.2 (2)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \| \xi_n(t) + ... + \xi_m(t) \| > r\right)$$

$$\leq \frac{1}{r^2}\mathbb{E}(\| \xi_n(T) + ... + \xi_m(T) \|^2) \leq \frac{T}{r^2}\sum_{j=n}^{m} \lambda_j.$$

Donc, la suite $S_N = \sum_{j=1}^{N} \xi_j$, $N \in \mathbb{N}$ de variables aléatoires à valeurs dans $C([0,T],U)$ converge en probabilité à sa somme S qui peut être facilement identifié avec le processus de Wiener W. La Proposition 2.1.1 implique finalement que $S_N \to W$ dans $C([0,T],U)$ $\mathbb{P}-p.s.$□

On note que la variation quadratique d'un processus Q-Wiener dans U, avec $TrQ < +\infty$, est donnée par la formule $\langle\langle W(t)\rangle\rangle = tQ$, $t \geq 0$. Nous avons en fait la généralisation directe suivante du résultat unidimensionnel de Lévy, voir la Proposition 2.1.2.

Théorème 2.3.2. *Une martingale $M \in \mathcal{M}_T^2(U), M(0) = 0$, est un processus Q-Wiener sur $[0,T]$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, et avec des accroissements $M(t)-M(s), t \geq s$ indépendant de $\mathcal{F}_s$, $s \geq 0$ si et seulement si $\langle\langle M(t)\rangle\rangle = tQ$, $t \geq 0$.*

Preuve

Nous devons seulement montrer que si $\langle\langle M(t)\rangle\rangle = tQ$, $t \geq 0$, alors M est un processus Q-Wiener. On note que pour un arbitraire $j \in \mathbb{N}$ le processus $M_j(.) = \langle M(.), e_j\rangle$ appartient à $\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R}^1)$ et de plus

$$\langle\langle M_j(t)\rangle\rangle = \lambda_j t, \qquad t \geq 0$$

Donc, d'après la Proposition 2.1.2, M_j est un processus λ_j-Wiener avec $M_j(t)-M_j(s)$, $t > s$ des accroissements indépendants de $\mathcal{F}_s$. Par le même argument, les processus de dimension finie $(M_1(.), ..., M_N(.))$ sont des processus de Wiener avec le processus de variation quadratique diagonale diag $(\lambda_1, ..., \lambda_N)$. par conséquent

$$M(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)e_j, \qquad t \geq 0$$

où les processus $\beta_j(.)$,

$$\beta_j(t) = \frac{M_j(t)}{\sqrt{\lambda_j}}, \qquad t \geq 0,\ j \in \mathbb{N}$$

sont des processus de Wiener indépendants normalisés. □

2.3.2 Processus de Wiener généralisés sur un espace de Hilbert

Soit $W = (W(t))_{t\geq 0}$ un processus de Wiener sur un espace de Hilbert U et soit Q son opérateur de covariance. Pour chaque $a \in U$, on définit un processus de Wiener à valeur réelle $(W_a(t))_{t\geq 0}$ par la formule

$$W_a(t) = \langle a, W(t)\rangle, \qquad t \geq 0 \tag{2.18}$$

L'application $a \to W_a$ est linéaire de U à l'espace des processus stochastiques. De plus, elle est continue dans le sens suivant :

$$t \geq 0, \{a_n\} \subset U, \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|W_a(t) - W_{a_n}(t)|^2 = 0. \tag{2.19}$$

Toute application linéaire $a \to W_a$ dont les valeurs sont des processus de Wiener de valeurs réelles sur $[0, +\infty)$ satisfaisant (2.19) est appelé un processus de Wiener généralisé.

De cette définition il résulte qu'il existe une forme bilinéaire $K(a,b), a, b \in U$, tel que

$$\mathbb{E}[W_a(t)W_b(s)] = t \wedge s\, K(a,b) \qquad t, s \geq 0,\ a, b \in U \tag{2.20}$$

La condition (2.19) implique facilement que K est une forme bilinéaire continue dans U et donc il existe $Q \in L(U)$ tel que

$$\mathbb{E}[W_a(t)W_b(s)] = t \wedge s \, \langle Qa, b\rangle, \qquad t, s \geq 0, \; a, b \in U \tag{2.21}$$

L'opérateur Q est auto-adjoint et défini positif ; nous l'appelons la covariance du processus de Wiener généralisé $a \to W_a$. Si la covariance Q est l'opérateur identité I alors le processus de Wiener généralisé est appelé un **processus de Wiener cylindrique** dans U.

Notons par U_0 l'image $Q^{\frac{1}{2}}(U)$ avec la norme induite. Nous appelons $Q^{\frac{1}{2}}(U)$ le noyau reproducteur du processus de Wiener généralisé $a \to W_a$.

Il est facile de construire, pour un opérateur arbitraire Q auto-adjoint et défini positif, un processus de Wiener généralisé $a \to W_a$ satisfait (2.21). Soit en effet $\{e_j\}$ une base orthonormale et complète dans U et $\{\beta_j\}$ une suite de processus de Wiener standards de valeur réels indépendants. Définir

$$W_a(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Q^{\frac{1}{2}} e_j, a\rangle \beta_j(t), \quad t \geq 0, \; a \in U. \tag{2.22}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mid \langle Q^{\frac{1}{2}} e_j, a\rangle|^2 = \mid Q^{\frac{1}{2}} a \mid^2 < +\infty,$$

pour chaque $a \in U$ il existe une version de W_a qui est un processus de Wiener. puisque

$$\mathbb{E}[W_a(t)W_b(s)] = (t \wedge s) \sum_{j=1}^{\infty} \langle Q^{\frac{1}{2}} e_j, a\rangle \langle Q^{\frac{1}{2}} e_j, b\rangle = (t \wedge s)\langle Qa, b\rangle,$$

le résultat suit.

Proposition 2.3.3. *Soit U_1 un espace de Hilbert tel que $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$ est intégré dans U_1 avec une inclusion de Hillbert-Schmidt J. Donc, la formule*

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q^{\frac{1}{2}} e_j \beta_j(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.23}$$

définit un processus Wiener de valeur dans U_1. De plus, si Q_1 est la covariance de W alors les espaces $Q_1^{\frac{1}{2}}(U_1)$ et $Q^{\frac{1}{2}}(U)$ sont identiques.

Preuve

On note que les éléments $g_j = Q^{\frac{1}{2}} e_j$, $j \in \mathbb{N}$ forme une base orthonormale et complète dans U_0 et donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Jg_j|^2_{U_1} < +\infty.$$

Par conséquent, la série dans (2.23) définit un processus de Wiener dans U_1. Pour $a, b \in U_1$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle Qa, b\rangle_{U_1} &= \mathbb{E}[\langle a, W(1)\rangle_{U_1}\langle b, W(1)\rangle_{U_1}] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\langle a, Jg_j\rangle_{U_1}\langle b, Jg_j\rangle_{U_1} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\langle J^*a, g_j\rangle_{U_0}\langle J^*b, g_j\rangle_{U_0} \\
&= \langle J^*a, J^*b\rangle_{U_0} = \langle JJ^*a, b\rangle_{U_1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $JJ^* = Q_1$. En particulier

$$| Q_1^{\frac{1}{2}} a |_{U_1}^2 = \langle J^*a, J^*a\rangle_{U_1} = | J^*a |_{U_0}^2, \quad a \in U_1.$$

Ainsi par la Proposition $B.1$ voir[6] appliquée aux opérateurs $Q^{\frac{1}{2}} : U_1 \longrightarrow U_1$ et $J : U_0 \longrightarrow U_1$ on a $Q_1^{\frac{1}{2}}(U_1) = J(U_0) = U_0$ et $| Q_1^{-\frac{1}{2}} u |_{U_1} = | u |_{U_0}$, ce qui fallait démontré. □

Ainsi, avec un abus de langage, nous pouvons dire qu'un processus de Wiener généralisé arbitraire sur U est un processus de Wiener classique dans un espace de Hilbert plus large que U_1. Les noyaux reproduire liés à toutes ces extensions sont les mêmes.

Pour compléter l'image, nous montrerons qu'un processus de Wiener W généralisé arbitraire est de la forme (2.23). Pour ce faire, soit $\{a_j\}$ une suite d'éléments linéairement indépendants, linéairement denses dans U. Définir

$$V = Q^{\frac{1}{2}}(lin\{a_j\}).$$

Sans perte de généralité, nous supposons que $Q^{\frac{1}{2}}(U)$ est dense dans U. Alors V est aussi dense dans U. Par l'orthogonalisation de Hilbert-Schmidt de $\{Q^{\frac{1}{2}}a_j\}$ nous créons une base orthonormale complète $\{e_i\}$ dans U. On note que $lin\{e_i\} = V$ et

$$U = \overline{lin\{Q^{\frac{1}{2}}a_j\}}. \tag{2.24}$$

Proposition 2.3.4. *Pour chaque $a \in U$ nous avons*

$$W_a(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\langle Q^{\frac{1}{2}}e_j, a\rangle W_{Q^{-\frac{1}{2}}e_j}(t), \qquad t \geq 0. \tag{2.25}$$

Preuve

On vérifié facilement que le membre droit de (2.25), noté par $\widetilde{W}_a(t)$, définit un processus de Wiener généralisé avec covariance Q. Maintenant, fixez $a = Q^{\frac{-1}{2}} e_k$, pour un arbitraire $k \in \mathbb{N}$. Puis

$$\widetilde{W}_{Q^{\frac{-1}{2}} e_k}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Q^{\frac{1}{2}} e_j, Q^{\frac{-1}{2}} e_k \rangle W_{Q^{\frac{-1}{2}} e_j}(t) = W_{Q^{\frac{-1}{2}} e_k}(t), \qquad t \geq 0.$$

Ainsi $\widetilde{W}_a(t) = W_a(t)$. Cependant, l'ensemble de tous les éléments $a = Q^{\frac{-1}{2}} e_j$ est dense dans U, donc l'identité est vérifié pour tout $a \in U$. □

2.4 Définition de l'intégrale stochastique

On nous donne ici un processus Q-Wiener dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ayant des valeurs dans U. Par la Proposition 2.3.1, $W(t)$ est donné par (2.15). Pour simplifier la notation, nous nécessitons que $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On nous donne aussi une filtration normale $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ en $\mathcal{F}$ et nous supposons que

(1) $W(t)$ est un $\mathcal{F}_t$-mesurable,

(2) $W(t+h) - W(t)$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$, $\quad \forall h \geq 0,\ t \geq 0$.

Si un processus Q-Wiener W vérifie (1) et (2) on dit que W est un processus Q-Wiener par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Cependant, pour réduire la formulation nous évitons habituellemnet de stresser la dépendance sur la filtration.

Fixons $T < \infty$. Un processus $\Phi(t)$, $t \in [0, T]$ à valeur dans $L = L(U, H)$ [2], prenant seulement un nombre fini de valeurs est dit élémentaire s'il existe une suite $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = T$ et une suite $\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_{k-1}$ des variables aléatoires à valeurs dans L prenant seulement un nombre fini des valeurs telles que Φ_m sont $\mathcal{F}_{t_m}$-mesurable et

$$\Phi(t) = \Phi_m, \qquad \text{pour } t \in (t_m, t_{m+1}], \quad m = 0, 1, ..., k-1.$$

Pour les processus élémentaires Φ on définit l'intégrale stochastique par la formule

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi_m (W_{t_{m+1} \wedge t} - W_{t_m \wedge t})$$

et l'indiquent par $\Phi \cdot W(t),\ t \in [0, T]$.

2. Soit U et H deux espaces de Hilbert séparables et notons $L = L(U, H)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de U dans H. L'ensemble L est un espace linéaire et, muni de la norme d'opérateur, devient un espace de Banach.

Il est utile, à ce moment, d'introduire le sous-espace $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$ de U qui, doté du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle u, e_k\rangle\langle v, e_k\rangle = \langle Q^{\frac{-1}{2}}u, Q^{\frac{-1}{2}}v\rangle, \qquad u, v \in U_0,$$

est un espace de Hilbert.

Dans la construction de l'intégrale stochastique pour des processus plus généraux, l'espace de tous les opérateurs Hilbert-Schmidt $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ joue un rôle important de U_0 dans H. L'espace L_2^0 est aussi un espace de Hilbert séparable, muni de la norme

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2_{L_2^0} = & \sum_{h,k=1}^{\infty} |\langle \Psi g_h, f_k\rangle|^2 = \sum_{h,k=1}^{\infty} \lambda_h |\langle \Psi e_h, f_k\rangle|^2 \\ = & \|\Psi Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{L_2(U,H)} = Tr[(\Psi Q^{\frac{1}{2}})(\Psi Q^{\frac{1}{2}})^*] \end{aligned}$$

où $\{g_j\}$, avec $g_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$, $\{e_j\}$ *et* $\{f_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, sont des bases orthonormées complètes dans U_0, U et H respectivement. Clairement, $L \subset L_2^0$, mais pas tous les opérateurs de L_2^0 peuvent être considérés comme des restrictions d'opérateurs de L. L'espace L_2^0 contient des opérateurs vraiment non bornés sur U.

Soit $\Phi(t)$, $t \in [0, T]$, un processus mesurable de valeur dans L_2^0, nous définissons les normes

$$\begin{aligned} ||| \; \Phi \; |||_t &= \left[\mathbb{E}\int_0^t \| \; \Phi(s) \; \|^2_{L_2^0} \, ds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\mathbb{E}\int_0^t Tr[(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^*]ds\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.1. *Si un processus* Φ *est élémentaire et* $|||\Phi|||_T < \infty$ *alors le processus* $\Phi \cdot W$ *est une martingale continue et carrée intégrable à valeur dans* H *sur* $[0, T]$ *et*

$$\mathbb{E}|\Phi \cdot W(t)|^2 = |||\Phi|||_t^2, \qquad 0 \le t \le T. \tag{2.26}$$

Preuve

La preuve est simple. Nous vérifierons par exemple que (2.26) vérifié pour $t = t_m \le T$.

Définir $\xi_j = W(t_{j+1}) - W(t_j)$, $j = 1, ..., m-1$. alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\Phi \cdot W(t_m)|^2 &= \mathbb{E}\left|\sum_{j=0}^{m-1} \Phi(t_j)\xi_j\right|^2 \\ &= \mathbb{E}\sum_{j=0}^{m-1} |\Phi(t_j)\xi_j|^2 + 2\mathbb{E}\sum_{i<j=1}^{n} \langle \Phi(t_i)\xi_i, \Phi(t_j)\xi_j\rangle. \end{aligned}$$

Nous montrerons d'abord que

$$\mathbb{E}\sum_{j=0}^{m-1} |\Phi(t_j)\xi_j|^2 = \sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}\|\Phi(t_j)\|^2_{L_2^0}, \qquad j = 0, 1, ..., m-1. \tag{2.27}$$

Pour ce but, on note que la variable aléatoire $\Phi^*(t_j)f_l$ est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable et ξ_j est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_{t_j}$. Par conséquent (voir la Proposition 2.1.5)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\Phi(t_j)\xi_j|^2 &= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{E}(|\langle\Phi(t_j)\xi_j, f_l\rangle|^2) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}[\langle\xi_j, \Phi^*(t_j)f_l\rangle]^2|\mathcal{F}_{t_j}) \\
&= (t_{j+1}-t_j)\sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{E}(\langle Q\Phi^*(t_j)f_l, \Phi^*(t_j)f_l\rangle) \\
&= (t_{j+1}-t_j)\sum_{l=1}^{\infty}|Q^{\frac{1}{2}}\Phi^*(t_j)f_l|^2, \\
&= (t_{j+1}-t_j)\mathbb{E}\|\Phi(t_j)\|^2_{L_2^0},
\end{aligned}$$

Cela montre (2.27). De même, on a

$$\mathbb{E}\langle\Phi(t_i)\xi_i, \Phi(t_j)\xi_j\rangle = 0, \qquad \textit{si } i \neq j$$

et la conclusion suit. □

Remarque 2.4.1. *Notons que l'intégrale stochastique est une application linéaire de l'espace de tous les processus élémentaires muni de la norme* $|||\ .\ |||_T$ *dans l'espace* $\mathcal{M}_T^2(H)$ *des martingales à valeur dans* H.

Pour étendre la définition de l'intégrale stochastique à des processus plus généraux, il est convient de regarder les intégrands comme des variables aléatoires définies sur l'espace produit $\Omega_\infty = [0, +\infty)\times\Omega$ *(respectivement* $\Omega_T = [0, T]\times\Omega$*), muni du produit* σ*-algèbre :* $\mathcal{B}([0, +\infty))\times\mathcal{F}$ *(respectivement* $\mathcal{B}([0, T])\times\mathcal{F}$*). Le produit de la mesure de Lebesgue sur* $[0, +\infty)$ *(respectivement sur* $[0, T]$*) et la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *est notée* $\mathbb{P}_\infty$ *(respectivement* $\mathbb{P}_T$*).*

La σ*-algèbre qui vient d'être introduit ne prend pas en compte l'adaptation du processus considéré et donc n'est pas appropriè pour notre objectif. Le bon choix naturel est fourni par la* σ*-algèbre généré par les processus simples et adaptés. Il est facile de voir que ce sont exactement les* σ*-algèbre prévisibles* $\mathcal{P}_\infty$ *(respectivement* $\mathcal{P}_T$*). Il se trouve que la classe appropriée des intégrands sont des processus prévisibles avec des valeurs dans* L_2^0*, plus précisement, des applications mesurables de* $(\Omega_\infty, \mathcal{P}_\infty)$ *(respectivement* $(\Omega_T, \mathcal{P}_T)$*), dans* $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$.

Proposition 2.4.2. *Les affirmations suivantes sont vérifiées.*

(1) *Si une application Φ de Ω_T, dans L est L-prévisible donc Φ est aussi L_2^0-prévisible. En particulier, les processus élémentaires sont L_2^0-prévisibles.*

(2) *Si Φ est un processus L_2^0-prévisible tel que $|||\Phi|||_T < \infty$ donc il existe une suite $\{\Phi_n\}$ de processus élémentaires tels que $|||\Phi - \Phi_n|||_T \to 0$ comme $n \to \infty$.*

Lemme 2.4.1. *Supposons que $\mathbb{K}$ est un espace de Hilbert séparable et K_1 est un sous-ensemble linéaire dense de $\mathbb{K}$. Si X est une application de Ω dans $\mathbb{K}$ tel que pour un arbitraire $k \in K_1$, $\langle k, X\rangle$ est $\mathcal{F}$-mesurable alors X est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$.*

Preuve de Proposition 2.4.2

Puisque les opérateurs

$$f_k \otimes e_j \cdot u = f_k\langle e_j, u\rangle, \qquad u \in U, \quad k, j \in \mathbb{N}$$

sont linéairement dense dans L_2^0 et pour un arbitraire $T \in L_2^0$

$$\langle f_k \otimes e_j, T\rangle_{L_2^0} = \lambda_j \langle T e_j, f_k\rangle_H,$$

la partie (1) suit.

Prouvons (2). Puisque l'espace L est densement intégré dans L_2^0, par le lemme (2.1.1) il existe une suite $\{\Phi_n\}$ de processus prévisibles à valeur dans L sur $[0, T]$ prenant seulement un nombre fini de valeur telle que

$$\|\Phi(t, \omega) - \Phi_n(t, \omega)\|_{L_2^0} \downarrow 0$$

pour tout $(t, \omega) \in \Omega_T$. Par conséquent $|||\Phi - \Phi_n|||_T \downarrow 0$. Il suffit donc de prouver que pour un arbitraire $A \in \mathcal{P}_T$ et un arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe une somme finie Γ d'ensembles disjoints de la forme (2.8) avec $s, t \leq T$ tels que

$$\mathbb{P}_T\{(A \setminus \Gamma) \cup (\Gamma \setminus A)\} < \varepsilon$$

Pour montrer cela, notons $\mathcal{K}$ la famille de toutes les sommes finies des ensembles de la forme (2.8) avec $s \leq t \leq T$. $\mathcal{K}$ est un π-système (voir [6]).

Soit $\mathcal{G}$ la famille de tout $A \in \mathcal{P}_T$ qui peut être approchée dans le sens ci-dessus par des éléments de $\mathcal{K}$. On peut facilement vérifiée que $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ et que les conditions de la proposition

2.1.3 sont satisfaites. Donc $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{P}_T = \mathcal{G}$ est verifié. $\square$

Nous sommes maintenant capables d'étendre la définition de l'intégrale stochastique à tous les processus prévisibles Φ à valeurs dans L_2^0 tels que $|||\Phi|||_T < \infty$. On note qu'ils forment un espace de Hilbert noté $\mathcal{N}_W^2(0,T,L_2^0)$, plus simplement $\mathcal{N}_W^2(0,T)$ *ou* $\mathcal{N}_W^2$, et, par la proposition précédente, les processus élémentaires forment un ensemble dense dans $\mathcal{N}_W^2(0,T)$. Par la Proposition 2.4.1, l'intégrale stochastique $\Phi \cdot W$ est une application isométrique de cet ensemble dense dans $\mathcal{M}_T^2(H)$, donc la définition de l'intégrale peut être immédiatement étendue à tous les éléments de $\mathcal{N}_W^2(0,T)$. De plus (2.26) tient et $\Phi \cdot W$ est une martingale de carré intégrable continue.

En dernière étape, nous étendons la définition de l'intégrale stochastique à des processus prévisible à valeur dans L_2^0 satisfaisant la condition faible suivante.

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds < \infty\right) = 1 \tag{2.28}$$

Tous ces processus sont appelés stochastiquement intégrables sur $[0,T]$. Ils forment un espace linéaire noté $\mathcal{N}_W(0,T,L_2^0)$, plus simplement $\mathcal{N}_W(0,T)$ ou même $\mathcal{N}_W$. L'extension peut être accomplie par la procédure dite de localisation. Pour ce faire, nous avons besoin de ce qui suit.

Lemme 2.4.2. *Supposons que $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(0,T,L_2^0)$ et que τ est un $\mathcal{F}_\tau$-temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(\tau \leq T) = 1$. alors*

$$\int_0^t I_{[0,\tau]}(s)\Phi(s)dW(s) = \Phi \cdot W(\tau \wedge t), \qquad t \in (0,T], \quad \mathbb{P}-p.s. \tag{2.29}$$

Preuve

On suppose que Φ est élémentaire et que τ est un temps d'arrêt simple (voir [6]), alors (2.29) est retenu par recherche. Si Φ est élémentaire et τ général, alors il existe une suite de temps d'arrêt simples $\{\tau_n\}$ tels que $\tau_n \downarrow \tau$, et $\Phi \cdot W(\tau_n \wedge t) \to \Phi \cdot W(\tau \wedge t)$, $\mathbb{P} - P.s.$ D'autre part,

$$|||I_{[0,\tau]}\Phi - I_{[0,\tau_n]}\Phi|||_T^2 = \mathbb{E}\int_0^t I_{[0,\tau_n]}(s)\|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds \downarrow 0$$

et donc, pour une sous-suite, encore noté $\{\tau_n\}$,

$$I_{[0,\tau_n]}\Phi \cdot W \to I_{[0,\tau]}\Phi \cdot W, \quad \mathbb{P}-p.s \text{ et uniformément dans } [0,T].$$

Si Φ est général et $|||\Phi - \Phi_m|||_T \to 0$ pour une suite de processus élémentaires, on a $\Phi_m \cdot W \to \Phi \cdot W$ et, pour une sous-suite appropriée, $I_{[0,\tau]}\Phi_{m_k} \cdot W \to I_{[0,\tau]}\Phi \cdot W$. $\square$

Supposons que la condition (2.29) verifiée et définir

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T] : \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds \geq n\right\}$$

avec la convention que la borne inférieure d'un ensemble vide est T. Alors $\{\tau_n\}$ est une suite telle que

$$\mathbb{E}\int_0^t \|I_{[0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds < \infty. \tag{2.30}$$

Par conséquent, les intégrales stochastiques $I_{[0,\tau_n]}\Phi \cdot W(t)$, $t \in [0,T]$ sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus si $n < m$ alors $\mathbb{P} - p.s.$

$$I_{[0,\tau_n]}\Phi \cdot W(t) = (I_{[0,\tau_n]}(I_{[0,\tau_m]}\Phi) \cdot W(t)) = (I_{[0,\tau_m]}\Phi) \cdot (\tau_n \wedge t), \quad t \in [0,T].$$

Par conséquent, on peut supposer que (2.30) est vérifier pour tous $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$, $n < m$. Pour un arbitraire $t \in [0,T]$ définir

$$\Phi \cdot W(t) = I_{[0,\tau_n]}\Phi \cdot W(t) \tag{2.31}$$

où n est un nombre naturel arbitraire tel que $\tau_n \geq t$. On note que si aussi $\tau_m \geq t$ et $m > n$ alors

$$(I_{[0,\tau_m]}\Phi) \cdot W(t) = (I_{[0,\tau_m]}\Phi) \cdot W(\tau_n \wedge t) = I_{[0,\tau_n]}\Phi \cdot W(t)$$

et donc la définition (2.31) est cohérente. Par un raisonnement analogue si $\{\tau'_n\} \uparrow \tau$ est une autre suite vérifiant (2.30) alors la définition (2.31) conduit à un processus stochastique identique $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \in [0,T]$. On note que pour arbitrairement $n \in N$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$,

$$\Phi \cdot W(\tau_n \wedge t) = I_{[0,\tau_n]}\Phi \cdot W(\tau_n \wedge t) = \mathbf{M}_n(\tau_n \wedge t), \quad t \in [0,T],$$

où $\mathbf{M}_n$ est une martingale continue et carée intégrable à valeur dans H. Cette propriété sera appelée la propriété de martingale locale de l'intégrale stochastique.

Remarque 2.4.2. *Il résulte de la construction ci-dessus que le lemme 2.4.2 est vérifiée pour tous les* $\Phi \in \mathcal{N}_W(0,T,L_2^0)$. □

2.4.1 Intégrale stochastique pour les processus de Wiener généralisés

La construction de l'intégrale stochastique a nécessité l'hypothèse que Q était un opérateur nucléaire ; alors seulement le processus Q-Wiener a des valeurs dans U. Nous pouvons cependant étendre facilement la définition de l'intégrale au cas des processus de Wiener généralisés avec un opérateur de covariance Q pas nécessairement a trace. On peut effectuer cela de plusieurs manières équivalentes. La proposition simple suivante joue un rôle important dans ces extensions. Comme précédemment nous notons $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$ (avec la norme induite $\|u\|_0 = \|Q^{\frac{1}{2}}(u)\|$, $u \in U_0$) le noyau reproducteur de W. Nous utiliserons à nouveau la notation,

$$L_2^0 = L_2(U_0, H).$$

Proposition 2.4.3. *Supposons que Z est une variable aléatoire à valeur dans U avec une moyenne 0 et covariance Q et que R est un opérateur de Hilbert-Schmidt de U_0 dans H. Si $\{R_n\} \subset L_2(U_0, H)$ est tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \|R - R_n\|_{L_2(U_0,H)} = 0,$$

il existe une variable aléatoire RZ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\|RZ - R_nZ\|^2_{L_2(U_0,H)} = 0.$$

RZ est indépendante de la suite $\{R_n\}$.

Preuve

La preuve est une conséquence directe de l'identité

$$\mathbb{E}|SZ|^2 = \|SQ^{\frac{1}{2}}\|^2_{L_2(U_0,H)},$$

utilisable pour les opérateurs bornés linéaires arbitraires $S : U \to H$. On note que

$$\mathbb{E}|Z_n - Z_m|^2 = \|R_n - R_m\|^2_{L_2(U_0,H)} \to 0 \text{ comme } n, m \to \infty.$$

Si $\{R'_n\}$ est une autre suite avec toutes les propriétés satisfaites, alors

$$\mathbb{E}|Z_n - Z'_n|^2 = \mathbb{E}\|R_nZ - R'_nZ\|^2_{L_2(U_0,H)} = \|R_n - R'_n\|^2_{L_2(U_0,H)} \to 0 \text{ comme } n \to \infty,$$

donc le résultat suit. □

Si maintenant W_a, $a \in U$ est un processus de Wiener généralisé avec covariance Q, alors, par la proposition 2.3.3, il existe une suite $\{\beta_j\}$ de processus de Wiener indépendante et une base orthonormale $\{e_j\}$ dans U telle que

$$W_a(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a, Q\frac{1}{2}e_j\rangle \beta_j(t), \quad a \in U,\, t \geq 0.$$

De plus la formule

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q^{\frac{1}{2}} e_j \beta_j(t), \qquad t \geq 0.$$

définie un processus de Wiener sur un espace de Hilbert $U_1 \supset U_0$ avec l'intégration de Hilbert-Schmidt. Si $\Phi \in L_2^0$ alors les variables aléatoires $\Phi W(t)$, $t \geq 0$, décrites dans la proposition 2.4.3, sont données par la formule

$$\Phi W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi Q^{\frac{1}{2}} e_j \beta_j(t), \quad t \geq 0 \tag{2.32}$$

et en particulier nous avons

$$W_a(t) = \langle a, W(t) \rangle, \quad t \geq 0.$$

Ainsi la construction de l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

peut être fait comme dans le cas où $TrQ < +\infty$. Il suffit de prendre en compte que les variables aléatoires de la forme

$$\Phi_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

sont définis d'une manière unique à condition $\Phi_{t_j} \in L_2^0$. La formule de base

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \right|^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds \right), \quad t \geq 0, \tag{2.33}$$

reste la même.

De manière équivalente on peut répéter la définition de l'intégrale stochastique pour un processus de Wiener W à valeur dans U_1 déterminée par $(W_a)_{a \in U}$. Encore une fois, l'espace des intégrands et la formule (2.33) restent les mêmes.

2.4.2 Approximations des intégrales stochastiques

Nous décrivons maintenant un moyen d'approximation des intégrales stochastiques qui pourraient également servir comme une manière différente de définir l'intégrale stochastique par rapport à un processus Q-Wiener de dimension infinie ($TrQ \leq +\infty$). Soit

$$W_N(t) = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\lambda_j} \beta_j(t) e_j, \qquad t \in [0, T],$$

où $\{\lambda_j, e_j\}$ est une suite propre définie par Q, et soit Φ stochastiquement intégrable sur $[0, T]$, par rapport à un processus Q-Wiener W. On note que W_N et $W^N = W - W_N$ sont des processus de Wiener respectivement, $Q_N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \otimes e_j$ et $Q^{N(t)} = \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j e_j \otimes e_j$. Il est facile de voir que $\Phi \cdot W = \Phi \cdot W_N + \Phi \cdot W^N$. Ainsi

$$\mathbb{E}\|\Phi \cdot W(T) - \Phi \cdot W_N(T)\|^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|Q(s)(Q^N)^{\frac{1}{2}}\|^2_{L_2^0} ds.$$

Si $|||\Phi|||_T < \infty$ alors

$$\mathbb{E} \int_0^T \|Q(s)(Q^N)^{\frac{1}{2}}\|^2_{L_2^0} ds \to 0 \ \text{ comme } N \to \infty.$$

Puis par la propriété martingale de l'intégrale stochastique

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|\Phi \cdot W(t) - \Phi \cdot W_N(t)\|^2 \right) \to 0 \ \text{ comme } N \to \infty$$

et par conséquent on peut considérer une sous-suite $\{\Phi \cdot W_{N_k}\}$ convergeante $\mathbb{P} - p.s.$ et uniformément dans $[0, T]$. Ainsi l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener de dimension infinie, également cylindrique, peut être obtenue, dans le sens ci-dessus, comme une limite d'intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener de dimension finie. La suite $\Phi \cdot W_N(\cdot)$ contient une sous-suite convergente uniformément $\mathbb{P} - P.s.$ par rapport à $t \in [0, T]$. La limite est indépendante de la sous-suite choisie et donne peut-être une définition plus intuitive de l'intégrale stochastique d'un processus prévisible Φ tel que $\mathbb{E} \int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds < +\infty$. Le cas général de $\Phi \in \mathcal{N}_W(0, T, L_2^0)$ peut être obtenu par localisation.

2.5 Propriétés de l'intégrale stochastique

Le théorème suivant résume les résultats des sections 2.3 et 2.4.

Théorème 2.5.1. *Supposons que $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(0, T, L_2^0)$, alors l'intégrale stochastique $\Phi \cdot W$ est une martingale continue de carrée intégrable et sa variation quadratique est de forme*

$$\langle\langle \Phi \cdot W(t) \rangle\rangle = \int_0^t Q_\Phi(s) ds,$$

où

$$Q_\Phi(s) = (\Phi(s) Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s) Q^{\frac{1}{2}})^*, \ s, t \in [0, T].$$

Si $\Phi \in \mathcal{N}_W(0, T, L_2^0)$, alors $\Phi \cdot W$ est une martingale locale.

Dans les calculs, nous utiliserons fréquemment ce qui suit.

Proposition 2.5.1. *Supposons que* $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{N}_W^2(0, T, L_2^0)$. *alors*

$$\mathbb{E}(\Phi_i \cdot W(t)) = 0, \qquad \mathbb{E}(\|\Phi_i \cdot W(t)\|^2) < \infty, \qquad t \in [0, T], \quad i = 1, 2.$$

De plus, les opérateurs de corrélation

$$V(t, s) = Cor(\Phi_1 \cdot W(t), \Phi_2 \cdot W(s)), \qquad t, s \in [0, T].$$

sont donnés par les formules

$$V(t, s) = \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s} (\Phi_2(r) Q^{\frac{1}{2}})(\Phi_1(r) Q^{\frac{1}{2}})^* dr. \tag{2.34}$$

Preuve

On note que $\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}}$ et $(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})^*$, $r \in [0, T]$ sont des processus à valeurs dans $L_2(U, H)$ et $L_2(H, U)$ respectivement. Par conséquent, le processus

$$\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}}(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})^*, \quad r \in [0, T],$$

est un processus à valeur dans $L_1(H, H)$ et

$$\|(\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})^*\|_1 \;\leq\; \|(\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}})\|_{L_2(U,H)} \|(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})\|_{L_2(U,H)}, \quad r \in [0, T].$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^T \|(\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})^*\|_1 dr \;&\leq\; \mathbb{E} \int_0^T \|(\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}})\|_{L_2(U,H)} \|(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})\|_{L_2(U,H)} dr \\
&\leq\; \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})\|^2_{L_2(U,H)} dr \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \|\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}})\|^2_{L_2(U,H)} dr \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |||\Phi_1|||_T \cdot |||\Phi_2|||_T < \infty,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

et donc l'intégrale (2.34) existe comme un intégrale de Bochner à valeur dans $L_1(H, H)$. L'opérateur $V(t, s)$ est défini par

$$\mathbb{E}\langle \Phi_1 \cdot W(t), a \rangle \langle \Phi_2 \cdot W(s), b \rangle = \langle V(t, s)a, b \rangle, \quad a, b \in H.$$

On peut facilement voir que si, en plus, Φ_1 et Φ_2 sont des processus simples alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\langle \Phi_1 \cdot W(t), a \rangle \langle \Phi_2 \cdot W(s), b \rangle \\
&= \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s} \langle \Phi_1(r) dW(r), a \rangle \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s} \langle \Phi_2(r) dW(r), b \rangle \\
&= \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s} \langle Q^{\frac{1}{2}} \Phi_1^*(r) a, Q^{\frac{1}{2}} \Phi_2^*(r) b \rangle dr.
\end{aligned}$$

Donc, le résultat est vrai pour des processus simples. L'estimation (2.35) et la proposition d'approximation 2.4.2 impliquent que le résultat est vérifié en général. $\square$

De la définition de l'opérateur de corrélation, nous avons ce qui suit

Corollaire 2.5.1. *Sous l'hypothèse de la Proposition 2.5.1, on a*

$$\mathbb{E}\langle \Phi_1 \cdot W(t), \Phi_2 \cdot W(s)\rangle = \mathbb{E}\int_0^{t\wedge s} Tr[(\Phi_2(r)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi_1(r)Q^{\frac{1}{2}})^*]dr. \tag{2.36}$$

Nous remarquons que si les processus Φ_1 et Φ_2 sont à valeurs dans $L = L(U,H)$, nous pouvons écrire la formule (2.36) de manière plus petite

$$\mathbb{E}\langle \Phi_1 \cdot W(t), \Phi_2 \cdot W(s)\rangle = \mathbb{E}\int_0^{t\wedge s} Tr[\Phi_2(r)Q\Phi_1(r)^*]dr.$$

Plusieurs résultats sont vérifier pour l'intégrale de Bochner ont leurs contre parties pour les intégrales stochastiques. En particulier, presque la même Proposition 2.1.4 est vérifiée. Supposons que $(\Phi(t))_{t\in[0,T]}$, est un processus prévisible à valeur dans $L_2^0(H) = L_2^0(U_0, H)$ et soit $A : D(A) \subset H \to E$ un opérateur fermé avec le domaine $D(A)$ un sous-ensemble de Borel de H.

Proposition 2.5.2. *Si $\Phi(t)(L_2^0(H)) \subset D(A)$, $\mathbb{P}-P.s.$ pour tout $t \in [0,T]$ et*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0(D(A))} ds < \infty\right) &= 1\\ \mathbb{P}\left(\int_0^T \|A\Phi(s)\|^2_{L_2^0(D(A))} ds < \infty\right) &= 1\end{aligned}$$

alors $\mathbb{P}(\int_0^T \Phi(s)dW(s) \in D(A)) = 1$ et

$$A\int_0^T \Phi(s)dW(s) = \int_0^T A\Phi(s)dW(s), \quad \mathbb{P}-P.s.$$

Preuve

On peut vérifié tout de suite que le résultat est vrai pour les processus élémentaires. Le cas général peut être obtenu de manière similaire à la preuve de la Proposition 2.1.4 en utilisant la proposition 2.4.2(2) et le faite que : Si $D(A)$ est muni de sa norme de graphe et S est un opérateur linéaire de U_0 dans $D(A)$ alors $S \in L_2^0(U_0, D(A))$ si et seulement si $S \in L_2^0(U_0,H), AS \in L_2^0(U_0,H)$. de plus

$$\|S\|^2_{L_2^0(H)} + \|AS\|^2_{L_2^0(H)} = \|S\|^2_{L_2(U_0,D(A))}.$$

Nous terminerons cette section avec une estimation utile vérifie pour un intégrand général Φ.

Proposition 2.5.3. *Supposons que* $\Phi \in \mathcal{N}_W(0,T;L_2^0)$. *Alors pour arbitrairement* $a > 0, b > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \Phi \cdot W(t) \mid > a\right) \leq \frac{b}{a^2} + \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi(t)\|_{L_2^0}^2 dt > b\right).$$

Preuve

Définir

$$\tau_b = \left\{t \in [0,T] : \int_0^T \|\Phi(t)\|_{L_2^0}^2 dt > b\right\}.$$

Alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \Phi \cdot W(t) \mid > a\right) = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \Phi \cdot W(t) \mid > a \; et \quad \int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds > b\right)$$

$$I_2 = \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \Phi \cdot W(t) \mid > a \; et \quad \int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds \leq b\right).$$

Mais

$$I_2 \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t I_{[0,\tau_b]}(s)\Phi(s)dW(s)\right| > a\right)$$

et à partir du théorème et la définition de τ_b

$$I_2 \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\int_0^t \|I_{[0,\tau_b]}(s)\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds \leq \frac{b}{a^2}.$$

puisque $I_1 \leq \mathbb{P}(\int_0^T \|\Phi(t)\|_{L_2^0}^2 | ds > b)$ donc le résultat suit. □

2.6 Formule d'Itô

Supposons que Φ est un processus à valeurs dans L_2^0 stochastiquement intégrable dans [0,T], φ un processus prévisible à valeur dans H Bochner intégrable sur $[0,T]$, $\mathbb{P} - P.s.$, et $X(0)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans H. Donc, le processus suivant

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW(s), \quad t \in [0,T],$$

est bien défini. Supposons qu'une fonction $F : [0,T] \times H \to \mathbb{R}^1$ et ses dérivées partielles F_t, F_x, F_{xx}, sont uniformément continues sur des sous-ensembles bornés de $[0,T] \times H$.

Théorème 2.6.1. *Sous les conditions ci-dessus, Pour tout $t \in [0,T]$ $\mathbb{P}-P.s.$,*

$$\begin{aligned} F(t,X(t)) &= F(0,X(0)) + \int_0^t \langle F_x(s,X(s)), \Phi(s)dW(s)\rangle \\ &+ \int_0^t \Big\{ F_t(s,X(s)) + \langle F_x(s,X(s)), \varphi(s)\rangle \\ &+\frac{1}{2}Tr[F_{xx}(s,X(s))(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^*]\Big\}ds. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Preuve

Nous allons d'abord retrouver comment on peut réduire la preuve au cas des processus constants $\varphi(s) = \varphi_0$ et $\Phi(s) = \Phi_0,\ s \in [0,T]$, et donc au cas où

$$X(t) = X(0) + t\varphi_0 + \Phi_0 W(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{2.38}$$

Nous pouvons supposer que le processus $(X(t))_{t\in[0,T]}$ et les intégrales $\int_0^T |\varphi(s)|ds$ et $\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0}ds$ sont bornés. Cela peut être montré par localisation. A savoir pour une constante arbitraire $C > 0$ définir un temps d'arrêt τ_C :

$$\tau_C = \inf\left\{ t \in [0,T] :\mid X(t) \mid\geq C \text{ ou } \int_0^t |\varphi(s)|ds \geq C \text{ ou } \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0}ds \geq C \right\}$$

avec la convention que la borne inférieure de l'ensemble vide est T. Si l'on définit

$$\varphi_C(t) = I_{[0,\tau_C]}(t)\varphi(t), \qquad \Phi_C(t) = I_{[0,\tau_C]}(t)\Phi(t), \quad t \in [0,T]$$

et $X_C(t) = X(t \wedge \tau_C)$, alors

$$X_C(t) = X_C(0) + \int_0^t \varphi_C(s)ds + \int_0^t \Phi_C(s)dW(s), \qquad t \in [0,T],$$

Comparé au lemme 2.4.2. De plus, les processus φ_C, Φ_C et X_C sont les propriétés requises. Si la formule (2.37) est vraie pour φ_C, Φ_C, et X_C pour $C > 0$ arbitraire, en utilisant à nouveau le lemme 2.4.2, la formule (2.37) est vraie dans le cas général. Ainsi, en particulier, on peut supposer que

$$\mathbb{E}\int_0^T |\varphi(s)|ds < +\infty, \quad \mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0}ds < +\infty.$$

Par conséquent, en utilisant le lemme 2.1.1 et la Proposition d'approximation de base 2.4.2, on peut limiter les considérations aux processus élémentaires $\varphi(\cdot)$ et $\Phi(\cdot)$ et par conséquent aux processus $\varphi(\cdot)$ et $\Phi(\cdot)$ constants sur les intervalles, ce qui montre finalement que la réduction désirée est possible.

Soit les points $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_k < t$ définissent une partition d'un intervalle de temps fixe $[0, t] \subset [0, T]$. alors

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) - F(0, X(0)) &= \sum_{j=0}^{k-1} \Big[F(t_{j+1}, X(t_{j+1})) - F(t_j, X(t_{j+1})) \Big] \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \Big[F(t_j, X(t_{j+1})) - F(t_j, X(t_j)) \Big]. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor on obtient pour certains (aléatoire) $\Theta_{00}, \Theta_{01}, \ldots, \Theta_{0(k-1)}$, $\Theta_{10}, \Theta_{11}, \ldots, \Theta_{1(k-1)} \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) - F(0, X(0)) &= \sum_{j=0}^{k-1} \Big[F_t(t_{j+1}, X(t_{j+1}))\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \langle F_t(t_j, X(t_j)), \Delta X_j\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \langle F_{xx}(t_j, X(t_j)) \cdot \Delta_{X_j}, \Delta X_j\rangle \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} [F_t(\widetilde{t}_j, X_{j+1}) - F_t(t_{j+1}, X(t_{j+1}))]\Delta_{t_j} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \langle [F_{xx}(t_j, \widetilde{X}_j) - F_{xx}(t_j, X(t_j))\Big] \cdot \Delta X_j, \Delta X_j\rangle \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned}$$

où

$$t_{j+1} - t_j = \Delta t_j, \quad X(t_{j+1}) - X(t_j) = \Delta X_j$$

$$t_j + \Theta_{0j}(t_{j+1} - t_j) = \widetilde{t}_j, \qquad X(t_j) + \Theta_{1j}(X(t_{j+1} - X(t_j)) = \widetilde{X}_j.$$

Prenant en considération (2.38) et en supposant que la partition $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_k < t$ devient de plus en plus fine, on voit que

$$I_1 \to \int_0^t F_t(s, X(s))ds, \quad \mathbb{P} - P.s.$$

$$I_2 \to \int_0^t \langle F_x(s, X(s)), \varphi(s)\rangle ds + \int_0^t \langle F_x(s, X(s)), \Phi(s)dW(s)\rangle, \quad \mathbb{P} - P.s.$$

Pour trouver la limite de I_3 nous remarquons que

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\langle \Phi_0^* F_{xx}(t_j, X(t_j))\Phi_0 \Delta W_j, \Delta W_j\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\langle F_{xx}(t_j, X(t_j))\varphi_0, \varphi_0\rangle (\Delta t_j)^2 \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1}\langle F_{xx}(t_j, X(t_j))\Phi_0 \Delta W_j, \varphi_0\rangle \Delta t_j \\ &= I_{3,1} + I_{3,2} + I_{3,3} \end{aligned}$$

où $W(t_{j+1}) - X(t_j) = \Delta W_j$.

Nous montrerons d'abord que pour une sous-suite

$$I_{3,1} \to \frac{1}{2}\int_0^t Tr[\Phi_0^* F_{xx}(s, X(s))\Phi_0 Q]ds. \tag{2.39}$$

Notons $\xi_j = \Phi_0^* F_{xx}(t_j, X(t_j))\Phi_0$, alors

$$\begin{aligned} J &= \mathbb{E}\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\langle \Phi_0^* F_{xx}(t_j, X(t_j))\Phi_0 \Delta W_j, \Delta W_j\rangle \\ &- \sum_{j=0}^{k-1} Tr[\Phi_0^* F_{xx}(t_j, X(t_j))\Phi_0 Q \Delta t_j]\Big]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}(\langle \xi_j \Delta W_j, \Delta W_j\rangle^2 | \mathcal{F}_j) - (Tr[\xi_j Q])^2 (\Delta t_j)^2\right]. \end{aligned}$$

Ceci résulte du fait élémentaire que si $\eta_0, ..., \eta_{k-1}$ sont des variables aléatoires avec des seconds moments finis et $\mathcal{G}_0, ..., \mathcal{G}_{k-1}$ une suite croissante de σ-algèbre tels que η_j sont mesurables par rapport à $\mathcal{G}_j, 0 \le j \le k-1$, alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\eta_j - \sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}(\eta_j|\mathcal{G}_j)\right)^2 = \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\mathbb{E}(\eta_j)^2 - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta_j|\mathcal{G}_j)^2)\Big).$$

Soit M une constante telle que $|\xi_j| \le M,\ j = 0, 1, \ldots, k-1$. alors

$$J \le M^2\left(\sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}|W(t_{j+1}) - W(t_j)|^4 + Tr(Q)(t_{j+1} - t_j)^2\right)$$

et nous voir que $J \to 0$. Par conséquent, en prenant une sous-suite on obtient (2.39). d'après la continuité de trajectoire du processus de Wiener et la bornitude de $F_{xx}(s, X(s)),\ s \in [0, T]$, on déduit que $I_{3,2} \to 0$ et $I_{3,3} \to 0$. Il reste à montrer qu'il existe des sous-suites de I_4 et I_5, convergeant vers 0 $\mathbb{P}-P.s.$. La convergence de I_4 vers 0 est une conséquence de la continuité uniforme de F_t. Par la continuité uniforme de F_{xx} et en tenant compte du fait que la suite $\sum_{j=0}^{k-1} |X(t_{j+1}) - X(t_j)|^2$ contient une sous-suites bornée, une sous-suites de I_5 tend vers 0 $\mathbb{P}-P.s$. La preuve est complète. □

Appliquons la formule Itô à

$$X(t) = \int_0^t \Phi(s)dW(s), \quad t \geq 0$$

et $F(x) = |x|^2$, $x \in H$, alors

$$\begin{aligned} |X(t)|^2 &= 2\int_0^t \langle X(s), \Phi(s)\rangle dW(s) + \int_0^t Tr[(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2})}(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^*]ds \\ &= 2\int_0^t \langle X(s), \Phi(s)\rangle dW(s) + \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, le processus

$$|X(t)|^2 - \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds, \quad t \geq 0,$$

est une martingale locale. Nous utiliserons souvent la notation

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds, \quad t \geq 0,$$

dans l'analogie avec les martingales à valeurs réelles.

2.7 Théorème stochastique de Fubini

Soit $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable et soit $\Phi(t, \omega, x) \to \varphi(t, \omega, x)$ une application mesurable de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ dans $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$. Ainsi, en particulier, pour un arbitraire $x \in E$, $\Phi(\cdot, \cdot, x)$ est un processus prévisible à valeur dans L_2^0. Soit en plus μ une mesure positive finie sur $(E, \mathcal{E})$.

La version stochastique suivante du théorème de Fubini sera fréquemment utilisée. Il généralise un résultat similaire dû à [4], voir [30] pour le cas de dimension finie. (Parfois, pour simplifier la notation, nous n'indiquerons pas la dépendance de Φ Sur ω.)

Théorème 2.7.1. *Supposons que $(E,\mathcal{E})$ est un espace mesurable et soit*

$$\Phi : (t,\omega,x) \to \Phi(t,\omega,x)$$

une application mesurable de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ dans $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$. On suppose en outre que

$$\int_E |||\Phi(\cdot,\cdot,x)|||_T \mu(dx) < +\infty \tag{2.40}$$

alors $\mathbb{P}-P.s.$

$$\int_E \left[\int_0^T \Phi(t,x)dW(t)\right]\mu(dx) = \int_0^T \left[\int_E \Phi(t,x)\mu(dx)\right]dW(t). \tag{2.41}$$

Preuve

Il résulte de (2.40) que pour μ-presque tout $x \in E$ le processus prévisible $\Phi(\cdot,\cdot,x)$ est stochastiquement intégrable. Nous devons montrer qu'il existe une version $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(E)$-mesurable de l'intégrale

$$\xi(\omega,x) = \int_0^T \Phi(t,\omega,x)dW(t,\omega), \quad (\omega,x) \in \Omega \times E$$

qui est μ Bochner intégrable pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ tel que

$$\int_E \xi(\omega,x)\mu(dx) = \int_0^T \eta(t,\omega)dW(t,\omega), \quad pour\,\mathbb{P}-p.s.\ \omega \in \Omega,$$

où $\eta(\cdot,\cdot)$ est une version prévisible de l'intégrale forte de Bochner

$$\eta(t,\omega) = \int_E \Phi(t,\omega,x)\mu(dx), \quad (t,\omega) \in \Omega_T.$$

Nous généralisons d'abord le résultat de l'approximation de base de la Proposition 2.4.2.

Proposition 2.7.1. *On suppose que $(E,\mathcal{E})$ est un espace mesurable et soit $\Phi : (t,\omega,x) \to \varphi(t,\omega,x)$ une application mesurable de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ dans $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$. Supposons en outre que (2.40) est vérifier. Donc, il existe une suite $\{\Phi_n\}$ d'applications mesurables de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ dans $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$ de la forme*

$$\Phi_n(t,\omega,x) = \sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=1}^{K_n}\sum_{l=1}^{L_n} \alpha_{k,l}^n H_j \varphi_{j,k}^n(x) \mathbb{1}_{(s_{k,l}^n, t_{k,l}^n]} \mathbb{1}_{F_{k,l}^n} \tag{2.42}$$

où $\alpha_{k,l}^n$ sont des constantes, des opérateur Hilbert-Schmidt H_j de U dans H, $\varphi_{j,k}^n$ sont des fonction $\mathcal{B}(E)$-mesurable à valeur réelle bornée, $(s_{k,l}^n, t_{k,l}^n]$ sous-intervalle de $[0,T]$ et $F_{k,l}^n \in \mathcal{F}_{s_{k,l}^n}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left(\int_{\Omega_T} \|\Phi(t,\omega,x) - \Phi_n(t,\omega,x)\|_{L_2^0}^2 \mathbb{P}_T(dt,d\omega)\right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) = 0. \tag{2.43}$$

Preuve

Comme il existe une suite $\{\Phi_n\}$ des applications uniformément bornées pour les quelles (2.43) est vraie, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ est une application bornée. Soit $\{H_j\}$ un système orthonormé complet sur L_2^0 et $\{\varepsilon_k(\cdot,\cdot)\}$ un système orthonormé complet sur $\mathcal{L}_T^2 = L^2(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T)$ composé des processus bornés. Prenant en compte les expansions par rapport les bases $\{\varepsilon_n\}$ et $\{H_j\}$, nous définissons des processus d'approximation

$$\Phi_J^1(t,\omega,x) = \sum_{j=1}^{J} H_j \varphi_j(t,\omega,x)$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi_j(t,\omega,x) &= \langle \Phi(t,\omega,x), H_j \rangle_{L_2^0}, \\
\Phi_{J,K}^2(t,\omega,x) &= \sum_{j=1}^{J} H_j \left(\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k(t,\omega) \varphi_{j,k}(x) \right)
\end{aligned}$$

et

$$\varphi_{j,k}(x) = \langle \varphi_j(\cdot,\cdot,x), \varepsilon_k(\cdot,\cdot) \rangle_{\mathcal{L}_T^2}.$$

Le troisième processus d'approximation remplace les processus prévisibles ε_k par des processus simples

$$\Phi_{J,K,L}^3(t,\omega,x) = \sum_{j=1}^{J} H_j \left[\sum_{k=1}^{K} \varphi_{j,k}(x) \sum_{l=1}^{L} \alpha_{k,l} \mathbb{1}_{]s_{k,l},t_{k,l}]}(t) \mathbb{1}_{F_{k,l}^n} \right],$$

pour $(t,\omega,x) \in \Omega_T \times E$. Notons l'intégrale de (2.40) par $||||\Phi||||$. Par le théorème de convergence monotone de Lebesque nous avons

$$\lim_{J\to\infty} |||\Phi - \Phi_J^1||| = 0, \qquad \lim_{K\to\infty} |||\Phi_J^1 - \Phi_{J,K}^2||| = 0. \tag{2.44}$$

Enfin, en procédant comme dans la preuve de la Proposition 2.4.2 (2), pour J et K fixe on peut trouver une suite d'approximations du troisième type telles que

$$\lim_{L\to\infty} |||\Phi_{J,K}^2 - \Phi_{J,K,L}^3||| = 0. \tag{2.45}$$

Il résulte de la limite de Φ et de la construction des approximations que $\varphi_{j,k}(\cdot)$ sont des fonctions bornées et que les approximations sont des processus prévisibles. En prenant en compte (2.44) et (2.45) on arrive à (2.43).

Preuve de Théorème 2.7.1

Il est satisfait que le théorème est vrai pour les processus d'approximation Φ_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_E \left[\int_0^T \Phi_n(t,x) dW(t) \right] \mu(dx) = \int_0^T \left[\int_E \Phi_n(t,x) \mu(dx) \right] dW(t).$$

De plus, par le théorème de Fubini (voir[6])et la discussion précédente, le processus

$$\eta(t,\omega) = \int_E \Phi(t,\omega,x)\mu(dx), \quad (t,\omega) \in \Omega_T,$$

est prévisible. Nous montrons maintenant qu'il existe une version de $\xi(\cdot,\cdot)$ qui est $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(E)$-mesurable. Les processus

$$\xi_n(\omega,x) = \int_0^T \Phi_n(t,\omega,x)dW(t,\omega), \quad \omega \in \Omega,\ x \in E$$

sont $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(E)$-mesurables et, par l'utilisation standard de l'inégalité de Chebyshev et du lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons de (2.43) qu'il existe un ensemble $E_0 \in \mathcal{B}(E)$, $\mu(E \setminus E_0) = 0$, et une sous-suite $\{\Phi_{n_m}\}$ telle que pour tout $x \in E_0$ *et* $m \geq m(x)$

$$|||\Phi(\cdot,\cdot,x) - \Phi_{n_m}(\cdot,\cdot,x)||| \leq \frac{1}{2^m}.$$

Par conséquent, si nous définissons

$$\xi(\omega,x) = \begin{cases} \lim_{m\to\infty} \int_0^T \Phi_{n_m}(t,\omega,x)dW(t,\omega) & \text{si la limite existe,} \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors $\xi(\cdot,\cdot)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(E)$-mesurable et, par les propriétés élémentaires de l'intégrale stochastique,

$$\xi(\omega,x) = \int_0^T \Phi(t,\omega,x)dW(t,\omega)$$

pour tout $x \in E_0$ et $\omega \in \Omega$, $\quad \mathbb{P} - P.s.$ On note que

$$\mathbb{E}\left|\int_E \left(\int_0^T \Phi(t,x)dW(t)\right)\mu(dx) - \int_E \left(\int_0^T \Phi_{n_m}(t,x)dW(t)\right)\mu(dx)\right|$$

$$\leq \int_E \left(\mathbb{E}\left|\int_0^T (\Phi(t,x) - \Phi_{n_m}(t,x))dW(t)\right|\right)\mu(dx)$$

$$\leq \int_E |||\Phi(t,x) - \Phi_{n_m}(t,x)|||\mu(dx) \to 0 \ \text{ comme } \ m \to \infty. \tag{2.46}$$

De plus

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T \left(\int_E \Phi(t,x)\mu(dx)\right)dW(t) - \int_E \left(\int_0^T \Phi_{n_m}(t,x)dW(t)\right)\mu(dx)\right|^2$$

$$= \mathbb{E}\left|\int_0^T \left(\int_E \Phi(t,x)\mu(dx)\right)dW(t) - \int_0^T \left(\int_E \Phi_{n_m}(t,x)\mu(dx)\right)dW(t)\right|^2$$

$$= \mathbb{E}\left|\int_0^T \left(\int_E \Phi(t,x) - \Phi_{n_m}(t,x)\mu(dx)\right) dW(t)\right|^2.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T \left(\int_E \Phi(t,x)\mu(dx)\right) dW(t) - \int_E \left(\int_0^T \Phi_{n_m}(t,x)dW(t)\right)\mu(dx)\right|^2$$

$$\leq \|\|\int_E (\Phi(t,x) - \Phi_{n_m}(t,x))\mu(dx)\|\|^2$$

$$\leq \left(\int_E \|\|\Phi(t,x) - \Phi_{n_m}(t,x)\|\|\mu(dx)\right)^2 \to 0 \text{ comme } m \to \infty. \tag{2.47}$$

L'estimation finale suit en considérant $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot) - \Phi_{n_m}(\cdot,\cdot,\cdot)$ comme une application mesurable de $(E, \mathcal{E}, \mu)$ dans $L^2(\Omega_T, \mathbb{P}_T, H)$ (muni de la norme $\|\|\cdot\|\|$) et en appliquant l'inégalité suivante (en fait c'est aussi l'inégalité de Minkowski généralisée) $\left\|\int_B X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)\right\| \leq \int_B \|X(\omega)\|\mathbb{P}(d\omega)$.
D'après les estimations (2.46) -(2.47), le résultat suit. □

Remarque 2.7.1. *La condition (2.40), écrite dans une version étendue, a la forme*

$$\int_E \left[\int_\Omega \int_0^T \|\Phi(t,\omega,x)\|^2_{L_2^0})dt)\mathbb{P}(d\omega)\right]^{\frac{1}{2}} \mu(dx) < \infty.$$

Dans le cas où Φ est une application non stochastiques, on a simplement

$$\int_E \left[\int_0^T \|\Phi(t,x)\|^2_{L_2^0})dt\right]^{\frac{1}{2}} \mu(dx) < \infty.$$

□

2.8 Remarques sur la généralisation de l'intégrale

La théorie de l'intégration stochastique par rapport les martingales $M \in \mathcal{M}_T^2(H)$, complètement de même ordre par rapport à un processus de Wiener décrit dans les sections précédentes, peut être développée, voir [30]. Le rôle du processus tQ est joué par la variation quadratique $\langle\langle M(t)\rangle\rangle,\ t \in [0,T]$. Nous aurons besoin de cette extension dans le cas où la martingale M est elle-même une intégrale stochastique, dire $M = \Phi \cdot W$ avec $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(0,T;L_2^0)$. Donc, l'extension est simple, puisque nous pouvons définir l'intégrale stochastique $\Phi \cdot M$ simplement par

$$\Psi \cdot M(t) = \int_0^t \Psi(s)dM(s) = \int_0^t \Psi(s)\Phi(s)dW(s), \quad t \in [0,T]. \tag{2.48}$$

On note que

$$\langle\langle \Psi \cdot M(t)\rangle\rangle = \int_0^T \Psi(s)Q_\Phi(s)\Psi^*(s)ds, \quad t \in [0,T], \tag{2.49}$$

où

$$Q_\Phi(s) = (\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^*,$$

Puisque dans le cas présent

$$\langle\langle M(t)\rangle\rangle = \int_0^t Q_\Phi(s)ds, \quad s \in [0,T],$$

donc (2.49) peut être écrite intrinsèquement comme

$$\langle\langle \Psi \cdot M(t)\rangle\rangle = \int_0^t \Psi(s)\frac{d}{ds}\langle\langle M(s)\rangle\rangle\Psi^*(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2.50}$$

Enfin (2.50) peut être étendu à des martingales générales et les intégrands généraux.

Chapitre 3

Application aux EDS (Équations linéaires avec bruit additif)

3.1 Rappels et Compléments

Proposition 3.1.1. *Soit μ une mesure dans un espace de Banach séparable E et M un sous-espace linéaire de E^* générant la σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}(E)$.*

1. *Si un arbitraire $\varphi \in M$ a une loi gaussienne symétrique alors μ est gaussiene symétrique*
2. *Si en plus H_0 est un espace de Hilbert continuellement intégré dans E et tel que $\mathscr{L}(\varphi) = \mathscr{N}(0, |\varphi|_0^2)$ pour un arbitraire $\varphi \in M$, alors H_0 est le noyau reproducteur de μ.*

Preuve. voir [6].

Proposition 3.1.2. *Soit $S(\cdot)$ un C_0-semigroupe dans E et soit A son générateur infinitésimal. Alors A est fermé et le domaine $D(A)$ est dense dans E. De plus, si $x \in D(A)$, alors*

$$S(\cdot)x \in C^1([0, +\infty], E) \bigcap C([0, +\infty], D(A))$$

et

$$\frac{d}{ds} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad t \geq 0.$$

Preuve. voir [6].

Proposition 3.1.3. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(\cdot)$ dans E et*

$f \in L^1(0,T,E)$. Alors il existe une unique solution faible u de l'équation

$$\begin{cases} u'(t) = & Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ u(0) = & x \in E, \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(\cdot)$ dans E et $f \in L^p(0,T;E)$, $p \geq 1$ [1]*. L'unique solution est donnée par la formule de variation de constante*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

La fonction $u(\cdot)$ définie par (3.2) est appelée la solution mild du problème (3.1). Avant de prouver une condition suffisante pour l'existence de solutions strictes, il est commode d'introduire le problème d'approximation

$$\begin{cases} u_n'(t) = & A_n u_n(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ u_n(0) = & x \in X, \end{cases} \tag{3.3}$$

où A_n sont les approximations de Yosida de A. Le problème (3.3) a une solution unique $u_n \in W^{1,1}(0,T,E)$, donnée par la formule de variation de constante

$$u_n(t) = S_n(t)x + \int_0^t S_n(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,T], \tag{3.4}$$

où $S_n(t) = e^{tA_n}, t > 0$, et de plus

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \in C([0,T],E).$$

Proposition 3.1.4. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(\cdot)$ dans E.*

1. *Si $x \in D(A)$ et $f \in W^{1,p}([0,T],E)$* [2] *avec $p \geq 1$ alors le problème (3.1) a une solution stricte unique u dans $C([0,T],E)$* [3]*, étant donné par la formule (3.4) et de plus $u \in C^1([0,T],E) \bigcap C([0,T],D(A))$.*

---

1. $L^p(0,T;E)$: Espace de Banach des fonctions mesurables de Borel H sur $[0,T]$, intégrable de Bochner dans la puissance p
2. $W^{1,p}([0,T],E)$: Espace de Sobolev de fonctions $f \in L^p([0,T],E)$, avec $D^\alpha f \in L^p([0,T],E)$, $|\alpha \leq 1|$
3. $C([0,T],E)$: Espace de Banach des fonctions continues à valeur de E sur $[0,T]$

2. *Si* $x \in D(A)$ *et* $f \in L^p([0,T], D(A))$*, alors le problème (3.1) a une solution stricte unique dans* $L^p([0,T], E)$*, donnée par la formule (3.2) et de plus* $u \in W^{1,p}([0,T], E) \bigcap C([0,T], D(A))$.

Pour la preuve, voir, Da Prato and Zabczyk [6].

Définition 3.1.1. *Nous dit que le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} u'(t) = & A_0 u(t), \quad t \geq 0, \\ \\ u(0) = & x \in E \end{cases} \tag{3.5}$$

avec A_0 *étant un opérateur linéaire, généralement non borné, défini dans un sous-espace linéaire dense* $D(A_0)$ *de* E*, est bien défini si :*

1. *pour un arbitraire* $x \in D(A_0)$ *il existe exactement une fonction strictement différentiable* $u(t,x)$, $t \in [0,+\infty)$*, satisfaisant (3.5) pour tout* $t \in [0,+\infty)$,
2. *si* $\{x_n\} \in D(A_0)$ *et* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, alors pour tout* $t \in [0,+\infty)$ *nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} u(t, x_n) = 0. \tag{3.6}$$

Si la limite dans (3.6) est uniforme dans t *sur des sous-ensembles compacts de* $[0,+\infty]$*, nous dit que le problème de Cauchy (3.5) est uniformément bien défini.*

3.2 Systèmes de retard (Exemple pour un système déterministe)

Nous sommes préoccupés ici par le problème :

$$\begin{cases} z'(t) = & \displaystyle\int_{-r}^{0} a(d\theta) z(t+\theta) + f(t), \quad t \geq 0, \\ \\ z(0) = & h_0, \\ \\ z(\theta) = & h_1(\theta), \quad \theta \in [-r,0],\ \mathbb{P}-P.s. \end{cases} \tag{3.7}$$

où $a(\cdot)$ est une mesure finie à matrice $N \times N$ sur $[-r,0]$, $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction localement intégrable, $h_0 \in \mathbb{R}^N$, $h_1 \in L^2([-r,0], R^N)$ et r est un nombre positif égal au retard maximal. Ce problème a une solution continue absolue unique z définie dans $[-r,+\infty)$. Supposons pour l'instant $f \equiv 0$ et considérons l'espace de Hilbert $H = \mathbb{R}^N \oplus L^2([-r,0],\mathbb{R}^N)$. Il se trouve que la formule suivante

$$S(t)\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ z_t \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \in H, \tag{3.8}$$

où z est la solution de (3.7), avec $f \equiv 0$ et $z_t(\theta) = z(t+\theta)$, $\theta \in [-r,0]$, définit un C_0-semigroupe sur H. Le résultat suivant est bien connu, voir par exemple ([8]).

Proposition 3.2.1. *$S(\cdot)$ est un C_0-semigroupe dans H qu'il est de plus différentiable pour tout $t \geq r$. Le générateur infinitésimal A de $S(\cdot)$ est donné par :*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \in H : \ h_0 \in \mathbb{R}^N, \ h_1 \in W^{1,2}(-r,0,R^N), \ h_1(0) = h_0 \right\} \\ \\ Ah = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{-r}^{0} a(d\theta)h_1(\theta) \\ \dfrac{dh_1}{d\theta} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.9}$$

et nous avons

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \det\left(\lambda - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} a(d\theta)\right) = 0 \right\}.$$

Nous considérons maintenant le problème général (3.7). Nous avons la formule suivante

$$(z(t), z_t) = S(t)(h_0,h_1) + \int_0^t S(t-s)(f(s),0)ds.$$

Donc le problème (3.7) est équivalent au problème de Cauchy

$$u' = Au + Bf, \quad u(0) \in H$$

où A est donné par (3.9) et $B = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nous introduisons maintenant divers concepts de solutions et discutons leurs propriétés élémentaires.

3.3 Concepts de base

3.3.1 Concept de solutions

On nous donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une filtration normale $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Nous considérons deux espaces de Hilbert H et U, et un processus de Q-Wiener $W(t)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec l'opérateur de covariance $Q \in L(U)$. Si $Tr\, Q < \infty$, alors W est un processus de Wiener réel, alors si $Q = I$, W est un processus cylindrique et dans ce cas il a des trajectoires continus dans un autre espace de Hilbert U_1 plus grand que U, voir Chapitre 2. Nous supposons qu'il existe un système orthonormal complet $\{e_k\}$ dans U, une suite bornée λ_k de nombres réels non négatifs tels que

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

et une suite $\{\beta_k\}$ de mouvements Brownien indépendants réels tels que

$$\langle W(t), u\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\langle u, e_k\rangle \beta_k(t), \quad u \in U, t \geq 0.$$

Nous considérerons l'équation linéaire affine suivante

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + f(t))dt + BdW(t) \\ \\ X(0) = \xi \end{cases} \tag{3.10}$$

où $A : D(A) \subset H \to H$ et $B : U \to H$ sont des opérateurs linéaires et f est un processus stochastique à valeur dans H. Nous supposerons que le problème déterministe de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \\ \\ u(0) = x \in H, \end{cases}$$

est uniformément bien défini (voir Définition 3.1.1) et que B est borné, c'est-à-dire que nous avons le suivant :

Hypothèse 3.3.1. *A génère un C_0-semigroupe $S(\cdot)$ dans H et $B \in L(U, H)$.*

Hypothèse 3.3.2. *1. f est un processus prévisible avec des trajectoires intégrables au sens de Bochner sur l'intervalle arbitrairement fini $[0, T]$.*

2. ξ est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Remarque 3.3.1.1. *Si W est un processus Q-Wiener dans U, alors $W_1 = BW$ est un processus BQB^*-Wiener dans H. Nous pourrions donc supposer, sans aucune restriction, que $U = H$. Cependant, dans certaines applications, par exemple des équations d'onde ou de retard, il est pratique d'avoir B différent de l'identité.* □

Un processus prévisible $(X(t))_{t\in[0.T]}$ à valeur dans H, est dit une solution forte de (3.10) si $X(t)$ prend des valeurs dans $D(A)$, $\mathbb{P} - P.s.$,

$$\int_0^T |AX(s)|ds < \infty, \quad \mathbb{P} - P.s.$$

et pour $t \in [0, T]$

$$X(t) = \xi + \int_0^t [AX(s) + f(s)]ds + BW(t), \quad \mathbb{P} - P.s.$$

Cette définition n'a de sens que si W est un processus à valeur dans U et donc demandé que $Tr\,[Q] < +\infty$. On note qu'une solution forte devrait nécessairement avoir une modification continue. Un processus prévisible $(X(t))_{t\in[0.T]}$ à valeur dans H, est dit une solution faible de (3.10) si les trajectoires de $X(\cdot)$ sont intégrables au sens de Bochner $\mathbb{P}$-P.s. et si pour tout $z \in D(A^*)$ et tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\langle X(t), z\rangle = \langle \xi, z\rangle + \int_0^t [\langle X(s), A^*z\rangle + \langle f(s), z\rangle]ds + \langle BW(t), z\rangle, \quad \mathbb{P} - P.s. \tag{3.11}$$

Cette définition est importante pour un processus de Wiener cylindrique parce que les processus scalaires $\langle BW(t), z\rangle$, $t \in [0, T]$ sont des processus aléatoires bien définis (voir la section 2.4.1). Il est clair qu'une solution forte est également faible.

3.3.2 Convolution stochastique

Il est d'une grande importance dans notre étude des équations linéaire d'établir d'abord les propriétés de base du processus

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-s)BdW(s), \qquad t \geq 0,$$

qu'on appelle convolution stochastique. Les propriétés sont recueillies dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.2.1. *On suppose que l'hypothèse 3.3.1 est verifiée et*

$$\int_0^T \|S(r)B\|^2_{L_2^0} dr = \int_0^T Tr[S(r)BQB^*S^*(r)]dr < +\infty. \tag{3.12}$$

Alors

(1) *le processus $W_A(\cdot)$ est gaussien, continu en moyenne carré et a une version prévisible,*

(2) *nous avons*

$$Cov(W_A(t)) = \int_0^t S(r)BQB^*S^*(r)dr, \quad t \in [0,T], \tag{3.13}$$

(3) *les trajectoires de $W_A(\cdot)$ sont carrée intégrale $\mathbb{P} - P.s.$ et la loi $\mathscr{L}(W_A(\cdot))$ est une mesure gaussienne symétrique sur $\mathscr{H} = L^2(0,T,H)$ avec les opérateurs de covariance*

$$\mathscr{Q}\varphi(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi(s)ds, \quad t \in [0,T], \tag{3.14}$$

où

$$G(t,s) = \int_0^{t\wedge s} S(t-r)BQB^*S^*(s-r)dr, \quad t,s \in [0,T] \tag{3.15}$$

et $t \wedge s = \min\{t,s\}$.

Preuve

Pour prouver (1) fixer $0 \leq s \leq t \leq T$, alors

$$W_A(t) - W_A(s) = \int_s^t S(t-r)BdW(r) + \int_0^s [S(t-r) - S(s-r)]BdW(r).$$

Puisque les intégrales sont indépendantes, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_A(t) - W_A(s)|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^{t-s} |S(r)Be_k|^2 dr \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^s |(S(t-s+r) - S(r))Be_k|^2 dr. \end{aligned}$$

Par (3.12) et le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, la continuité en moyenne quadratique suit. Que le processus est Gaussien suit facilement de la définition de l'intégrale stochastique. L'existence d'une version prévisible est une conséquence de la proposition 2.1.6, et (3.13) résulte de la proposition 2.5.1. Il reste à prouver (3). Pour une version mesurable de $W_A(\cdot)$ nous avons, par le théorème de Fubini

$$\mathbb{E}\int_0^T |W_A(s)|^2 ds = \int_0^T \mathbb{E}|W_A(s)|^2 ds = \int_0^T \int_0^s \|S(r)B\|^2_{L_2^0} drds < +\infty,$$

donc la partie initiale de (3) est vrai et de plus $W_A(\cdot)$ peut être considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{H}$ (voir[6]). Pour montrer que $\mathscr{L}(W_A(\cdot))$ est symétrique et gaussienne sur $\mathscr{H} = L^2(0, T, H)$, nous appliquons la proposition 3.1.1 et considérons la famille M suivante de toutes les fonctionnelles $(h \otimes a) \in \mathscr{H}^* = \mathscr{H},\ a \in H$

$$(h \otimes a)(\varphi) = \int_0^T h(t)\langle a, \varphi(t)\rangle dt, \quad \varphi \in \mathscr{H}.$$

Pour compléter la démonstration, on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.3.2.1. *Si $\xi(\cdot)$ est un processus gaussien à valeur réelle, continu en moyenne carré alors pour un arbitraire $h \in L^2(0, T, R^1)$, $\int_0^T h(s)\xi(s)ds$ est une variable aléatoire gaussienne $\mathscr{N}_{0,|h|^2}$.*

Puisque

$$(h \otimes a)(W_A) = \int_0^T h(t)\langle a, W_A(t)\rangle dt, \quad W_A \in \mathscr{H}$$

et $\langle a, W_A(\cdot)\rangle$ est un processus gaussien réel, continu en moyenne carré , avec moyenne 0, par la proposition 3.1.1 $\mathscr{L}(W_A(\cdot))$ est une distribution gaussienne symétrique sur $\mathscr{H}$. Si $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$ alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{Q}\varphi, \psi\rangle_{\mathscr{H}} &= \mathbb{E}\Big(\int_0^T \langle \varphi(s), W_A(s)\rangle ds \int_0^T \langle \psi(r), W_A(r)\rangle dr\Big) \\
&= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}(\langle \varphi(s), W_A(s)\rangle \langle \psi(r), W_A(r)\rangle) ds dr.
\end{aligned}$$

Puisque pour $s > r$

$\mathbb{E}(\langle \varphi(s), W_A(s)\rangle \langle \psi(r), W_A(r)\rangle)$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \int_0^T \int_0^T \int_0^s \langle \varphi(s), S(s-\sigma)BdW(\sigma)\rangle \int_0^r \langle \psi(r), S(r-\rho)BdW(\rho)\rangle dsdr \\
&= \int_0^T \int_0^T \int_0^{s\wedge r} \langle QB^*S^*(s-\sigma)\varphi(s), B^*S^*(r-\sigma)\psi(r)\rangle d\sigma dsdr \\
&= \int_0^T \int_0^T \langle G(s,r)\varphi(s), \psi(r)\rangle dsdr,
\end{aligned}$$

où $G(s, r)$ est donné par (3.15). Alors (3.14) est vrai. $\square$

3.4 Existence et Unicité

Maintenant, nous démontrons l'existence de solutions faibles ainsi que les solutions fortes.

3.4.1 Solutions faibles

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.4.1. *Supposons les hypothèses 3.3.1, 3.3.1, et (3.12). Alors l'équation (3.10) a éxactement une solution faible qui est donnée par la formule*

$$X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)BdW(s), \quad t \in [0,T] \tag{3.16}$$

La formule (3.16) est une généralisation stochastique de la formule classique de la variation des constantes, voir la formule (3.2).

Preuve Il suit de la proposition 3.1.3 qu'un processus X est une solution faible à (3.10) si et seulement si le processus $\widetilde{X}$ donné par la formule

$$\widetilde{X}(t) = X(t) - \left(S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s)ds\right), \quad t \in [0,T],$$

est une solution faible à

$$d\widetilde{X} = A\widetilde{X}dt + BdW, \quad \widetilde{X}(0) = 0.$$

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $\xi = 0$ et $f \equiv 0$. Pour prouver l'existence, nous montrons que l'équation (3.10) avec $\xi = 0$ et $f \equiv 0$ est satisfaite par le processus $W_A(\cdot)$. On fixe $t \in [0,T]$ et soit $\zeta \in D(A^*)$. On note que

$$\int_0^t \langle A^*\zeta, W_A(s)\rangle ds = \int_0^t \left\langle A^*\zeta, \int_0^t \mathbb{1}_{[0,s]}(r)S(s-r)BdW(r)\right\rangle ds$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle A^*\zeta, W_A(s)\rangle ds &= \int_0^t \left\langle \int_0^t \mathbb{1}_{[0,s]}(r)B^*S^*(s-r)A^*\zeta ds, dW(r)\right\rangle \\
&= \int_0^t \left\langle \int_r^t B^*S^*(s-r)A^*\zeta ds, dW(r)\right\rangle \\
&= \int_0^t \left\langle \int_r^t \left(\frac{d}{ds}B^*S^*(s-r)\zeta\right) ds, dW(r)\right\rangle \\
&= \int_0^t \langle B^*S^*(t-r)\zeta), dW(r)\rangle - \int_0^t \langle B^*\zeta, dW(r)\rangle \\
&= \langle \zeta, W_A(t)\rangle - \langle \zeta, BW(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $W_A(\cdot)$ est une solution faible.

Pour prouver l'unicité, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4.1. *Soit X une solution faible du problème (3.10) avec $\xi = 0$, $f \equiv 0$. Donc, pour une fonction arbitrairement $\zeta(\cdot) \in C^1([0,T],\ D(A^*))$ et $t \in [0,T]$, nous avons*

$$\langle X(t), \zeta(t)\rangle = \int_0^t [\langle X(s), \zeta'(s) + A^*\zeta(s)\rangle] ds + \int_0^t \langle \zeta(s), BdW(s)\rangle.$$

Preuve

Considérons tout d'abord les fonctions de la forme $\zeta = \zeta_0 \varphi(s),\ s \in [0,T]$, où $\varphi \in C^1([0,T])$ et $\zeta_0 \in D(A^*)$. Soit

$$F_{\zeta_0}(t) = \int_0^t \langle X(s), A^*\zeta_0\rangle ds + \langle BW(t), \zeta_0\rangle.$$

En appliquant la formule d'Ito au processus $F_{\zeta_0}(s)\varphi(s)$ on obtient

$$d[F_{\zeta_0}(s)\varphi(s)] = \varphi(s) dF_{\zeta_0}(s) + \varphi'(s) F_{\zeta_0}(s) ds.$$

En particulier

$$F_{\zeta_0}(t)\varphi(t) = \int_0^t \langle \zeta(s), BdW(s)\rangle + \int_0^t [\varphi(s)\langle X(s), A^*\zeta_0\rangle + \varphi'(s)\langle X(s), \zeta_0\rangle] ds.$$

Puisque $F_{\zeta_0}(\cdot) = \langle X(\cdot), \zeta_0\rangle$, $\mathbb{P}-P.s$ le lemme est prouvé pour la fonction spéciale $\zeta(t) = \zeta_0\varphi(t)$. Puisque ces fonctions sont linéairement denses dans $C^1([0,T], D(A^*))$ le lemme est vrai en général. □

Soit X une solution faible et soit $\zeta_0 \in D(A^*)$. En appliquant le lemme 3.4.1 à la fonction $\zeta(s) = S^*(t-s)\zeta_0,\ s \in [0,t]$, nous avons

$$\langle X(t), \zeta_0\rangle = \int_0^t \langle S(t-s) BdW(s), \zeta_0\rangle$$

et, puisque $D(A^*)$ est dense dans H, nous trouvons que $X = W_A$. La preuve est complète. □

Exemple Équations de retard

Dans cet exemple, nous utilisons les notations de la section 3.2. Nous sommes préoccupés par le problème

$$\begin{cases} dz(t) = & \displaystyle\int_{-r}^0 a(d\theta) z(t+\theta) dt + f(t)dt + dW(t), \quad t \geq 0, \\ z(o) = & h_0, \\ z(\theta) = & h_1(\theta), \quad \theta \in [-r, 0],\ \mathbb{P}-P.s.; \end{cases} \tag{3.17}$$

où $a(\cdot)$ est une mesure finie à matrice $N \times N$ sur $[-r, 0]$, $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction localement intégrable, $h_0 \in \mathbb{R}^N$, $h_1 \in L^2(-r, 0, R^N)$ et r est un nombre positif représentant le retard. De la même manière que dans le cas déterministe (voir section 3.2), on peut associer à l'équation (3.17) une équation linéaire stochastique :

$$\begin{cases} dX = AXdt + Bf(t)dt + BdW(t) \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.18}$$

sur l'espace $H = \mathbb{R}^N \oplus L^2(-r, 0, \mathbb{R}^N)$ où le générateur A est donné par (3.9) et $B = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans la situation actuelle, U est égal à $\mathbb{R}^N$. Evidemment (3.12) est rempli dans ce cas et donc l'équation (3.18) comme une solution faible unique. Il a été montré par plusieurs auteurs [voir([5],[7],[31]] sous différents ensembles d'hypothèses que $X(t) = (z(t), z_t)$, $t > 0$, où z et z_t sont les solutions de l'équation (3.17) et son segment, respectivement. Ce fait est important dans l'application des systèmes de retard pour contrôler les problèmes et la stabilité.

Considérons le cas particulier où

$$a(\cdot) = a_0\delta_0(\cdot) + a_1\delta_{-r}(\cdot)$$

où a_0, a_1 sont des matrices $N \times N$. L'équation (3.18) avec $f = 0$ peut maintenant être résolue par étapes successives. En particulier, pour $t \in [0, r]$

$$z(t) = e^{ta_0}h_0 + \int_0^t e^{(t-s)a_1}h_1(s-r)ds + \int_0^t e^{(t-s)a_0}dW(s). \tag{3.19}$$

En tenant compte du fait que les trajectoires de la partie de convolution stochastique dans (3.19) ne sont jamais absolument continues, nous pouvons voir que dans ce cas la solution faible de (3.19) n'est jamais forte. □

3.4.2 Solutions fortes

Nous sommes maintenant préoccupés par l'existence de solutions fortes à (3.10). Puisque $(BW(t))_{t\geq 0}$, devrait être un processus à valeur dans H, nous supposerons que $B = I$ et que W est un processus de Wiener à valeur dans H avec l'opérateur de covariance Q avec $Tr\,Q < +\infty$. Nous sommes donc concernés par l'équation

$$X(t) = x + \int_0^t (AX(s) + f(s))ds + W(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3.20}$$

Comme les solutions fortes sont aussi des solutions faibles, nous savons qu'elles devraient être de la forme

$$X(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)dW(s), \quad t \in [0,T]. \tag{3.21}$$

Théorème 3.4.2. *Suppose que*

1. $Q^{\frac{1}{2}}(H) \subset D(A)$ *et* $AQ^{\frac{1}{2}}$ *est un opérateur de Hilbert-Schmidt,*
2. $x \in D(A)$ *et* $f \in C^1([0,T],H) \bigcap C([0,T],D(A))$.

Alors le problème (3.10) a une solution forte

Preuve

Le résultat est vrai si $f = 0$, $W = 0$, par la proposition 3.1.2. Supposons maintenant que $x = 0$, $W = 0$. Pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\int_0^t |AS(t-\sigma)f(\sigma)|d\sigma \leq \int_0^t \|S(t-\sigma)\|\,|Af(\sigma)|d\sigma < +\infty,$$

et donc, par Proposition 3.1.4 $X(t) \in \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \in D(A)$ et

$$AX(t) = \int_0^t AS(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma, \quad t \in [0,T].$$

De plus

$$\begin{aligned}
\int_0^t AX(s)ds &= \int_0^t \left(\int_0^s AS(s-\sigma)f(\sigma)d\sigma\right)ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t-\sigma} \frac{d}{ds}S(s)f(\sigma)ds\right)d\sigma \\
&= \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma - \int_0^t f(\sigma)d\sigma \\
&= X(t) - \int_0^t f(\sigma)d\sigma, \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Supposons enfin que $x = 0,\ f = 0$. On note que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|AS(s)Q^{\frac{1}{2}}\|_{L_2}^2 ds &= \int_0^t \|S(s)AQ^{\frac{1}{2}}\|_{L_2}^2 ds \\ &\leq \|AQ^{\frac{1}{2}}\|^2 \int_0^t \|S(s)\|_{L_2}^2 ds < +\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.5.2

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-\sigma)dW(\sigma) \in D(A), \quad \mathbb{P} - P.s$$

et pour $t \in [0, T]$, $\mathbb{P} - P.s$

$$AW_A(t) = \int_0^t AS(t-\sigma)dW(\sigma).$$

Puisque $W_A(\cdot)$ est une solution faible de (3.10), pour $t \in [0, T]$ et $\zeta \in D(A^*)$, $\mathbb{P} - P.s.$

$$\begin{aligned}\langle W_A(t), \zeta\rangle &= \int_0^t \langle W_A(s), A^*\zeta\rangle ds + \langle W(t), \zeta\rangle \\ &= \int_0^t \langle AW_A(s), \zeta\rangle ds + \langle W(t), \zeta\rangle \\ &= \langle A\int_0^t W_A(s), \zeta\rangle + \langle W(t), \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$W_A(t) = \int_0^t AW_A(s)ds + W(t), \quad \mathbb{P} - P.s.$$

Cela termine la preuve. □

Exemple

Supposons que W est un processus de Wiener de dimension finie, dire

$$W(t) = \sum_{k=1}^m a_k\beta_k(t), \quad t \geq 0, \tag{3.22}$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des processus de Wiener indépendantset et les vecteurs $a_1, \ldots, a_m \in H$ sont linéairement indépendants. Alors le théorème 3.4.2 dit que si $a_1, \ldots, a_m \in D(A)$ alors W_A est une solution forte de (3.21) avec $x = 0,\ f = 0$. Sous des conditions supplémentaires sur l'opérateur A l'élément $a_1, \ldots, a_m$ peut être moins régulière. C'est le sujet du prochain théorème.□

Théorème 3.4.3. *Supposons que A génère un semigroupe analytique de type négatif. Soit en plus*

1. *pour certains* $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, $Q^{\frac{1}{2}}(H) \subset D((-A)^{\beta})$ *et* $(-A)^{\beta}Q^{\frac{1}{2}}$ *est un opérateur de Hilbert Schmidt,*
2. $x \in D(A)$ *et pour certains* $\alpha \in (0,1)$, $f \in C^{\alpha}([0,T], H) \bigcup C([0,T], D_A(\alpha, \infty))$.

Alors le problème (3.10) a une solution forte.

Preuve. voir [6].

Exemple

Si W est donné par (3.22) et A génère un semigroupe analytique de type négatif, alors une solution faible est la solution forte à condition que $a_1, \ldots, a_m \in D((-A)^{\beta})$ pour certains $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Ceci est bien sûr une exigence plus faible que $a_1, \ldots, a_m \in D(A)$. □

Conclusion

Les concepts de base sur lesquels s'appuie la théorie des équations différentielles stochastiques, du moins celles gouvernées par des bruits gaussiens, sont celui du processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert et celui de l'intégrale stochastique associée. Le premier joue le rôle de mouvement brownien à valeurs dans un espace de dimension infinie. Le second va permettre de donner un sens, du point de vue de l'analyse, au produit entre des fonctions dont la régularité en temps est très différente.

Dans ce mémoire, j'ai réalisée une étude sur deux processus récemment définis : le processus Q-Wiener et le Processus de Wiener généralisés. En premier lieu, on a définit ces deux processus et étudié leurs propriétés sur les espaces de Hilbert. Par ailleurs, on a rappelé les notions des bases. Ensuite,on a définit l'intégrale stochastique par rapport aux processus Q-Wiener et le processus de Wiener généralisés, puis on a étudié leurs approximations et propriétés des intégrales stochastiques. Certains théorèmes connus ont été établis comme celui de Fubini, la formule d'Itô.

Enfin, on a éffectué une étude sur les équations linéaires avec bruit additif. Nous avons établi l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques dans des espaces de dimension infinie, des différentes notions de solutions sont établies (solutions faibles et fortes).

Annexe

Annexe A

Opérateurs nucléaires et Opérateurs Hilbert-Schmidt

A.1 Définition des opérateurs nucléaires et Hilbert-Schmidt

Soient E et G deux espaces de Banach et soit $L(E,G)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans G muni de la norme supremum usuelle. Nous écrivons $L_1(E)$ au lieu de $L_1(E,G)$. On note par $E^\star$ et $G^\star$ les espaces dual de E et G, respectivement. On dit qu'un élément $T \in L(E,G)$ est un opérateur a trace ou nucléaire s'il existe deux suites $\{a_j\} \subset G$, $\{\varphi_j\} \subset E^\star$ telles que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|\|\varphi_j\| < +\infty \tag{A.1}$$

et T a la représentation

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x), \quad x \in E.$$

L'espace de tous les opérateurs nucléaires de E dans G, muni de la norme

$$\|T\|_1 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|\|\varphi_j\| : Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x) \right\}$$

est un espace de Banach (voir[9]), et sera noté par $L_1(E,G)$. Soit K un autre espace de Banach, il est clair que si $T \in L_1(E,G)$ et $S \in L(G,K)$ alors $TS \in L_1(E,K)$ et $\|TS\|_1 \leq \|T\|\|S\|_1$. Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $\{e_k\}$ un système orthonormal complet dans H. Si $T \in L_1(H,H)$ alors nous définissons

$$Tr\ T = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j, e_j \rangle.$$

Proposition A.1.1. *Si $T \in L_1(H)$ alors $Tr\ T$ est un nombre bien défini indépendant du choix de base orthonormale $\{e_k\}$.*

Preuve Soit $\{a_j\} \subset H$ et $\{\varphi_j\} \subset H^\star$ deux suites telles que

$$Th = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(h), \quad h \in H$$

et (A.1) satisfaite. Soit $b_j \in H$ tel que $\varphi_j(h) = \langle h, b_j \rangle$. Alors

$$\langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_k, a_j \rangle \langle e_k, b_j \rangle.$$

de plus

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_k \rangle| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, a_j \rangle \langle e_k, b_j \rangle| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, a_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, b_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j||b_j| < +\infty
\end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, a_j \rangle \langle e_k, b_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a_j, b_j \rangle,$$

la définition de $Tr\,T$ est indépendante de la base $\{e_k\}$. □

On note aussi que

$$|Tr\ T| \leq \|T\|_1, \quad \forall T \in L_1(H). \tag{A.2}$$

Corollaire A.1.1. *Si $T \in L_1(H)$ et $S \in L(H)$, alors $TS \in L_1(H)$ et*

$$Tr\ TS = Tr\ ST \leq \|T\|_1 \|S\| \tag{A.3}$$

Proposition A.1.2. *Un opérateur non négatif $T \in L(H)$ est a trace si et seulement si pour une base orthonormale $\{e_k\}$ sur H.*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j, e_j \rangle < \infty.$$

De plus dans ce cas $Tr\ T = \|T\|_1$.

Preuve Nous montrerons d'abord que T est compact. Soit $T^{\frac{1}{2}}$ la racine carrée non négative de T. Alors $T^{\frac{1}{2}}x = \sum_{j=1}^{\infty}\langle T^{\frac{1}{2}}x, e_j\rangle e_j$, et

$$\begin{aligned}|T^{\frac{1}{2}}x - \sum_{j=1}^{N}\langle T^{\frac{1}{2}}x, e_j\rangle e_j|^2 &= \sum_{k=N+1}^{\infty}|\langle T^{\frac{1}{2}}x, e_j\rangle|^2 \\ &\leq |x|\sum_{k=N+1}^{\infty}|T^{\frac{1}{2}}e_j|^2 \leq |x|\sum_{k=N+1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle, \quad x \in H.\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $T^{\frac{1}{2}}$ est une limite, dans la norme d'opérateur, des opérateurs de rang fini. Donc $T^{\frac{1}{2}}$ est compact et $T = T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$ est aussi un opérateur non négatif compact. Soit $\{f_j\}$ une suite de tous les vecteurs propres de T et soit $\{\lambda_j\}$ la suite correspondante des valeurs propres. Alors

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\langle x, f_k\rangle f_k, \quad x \in H. \tag{A.4}$$

Puisque

$$\langle Te_j, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\langle f_j, e_k\rangle|^2,$$

on a

$$\sum_{j=1}^{\infty}\langle Te_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\langle f_j, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < +\infty.$$

De ceci et des accroissements (A.4) on a que T a trace et $Tr\ T = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$. De (A.2) et (A.4) , l'identité $Tr\ T = \|T\|_1$ suit. □

Soient E et F deux espaces de Hilbert séparables avec des bases orthonormées complets $\{e_k\} \subset H$, $\{f\}_j \subset F$, respectivement. Un opérateur linéaire bornée $T : H \to E$ est dit Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{k=1}^{\infty}|Te_k|^2 < \infty.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty}|Te_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\langle Te_k, f_j\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|T^*f_j|^2,$$

la définition de l'opérateur Hilbert-Schmidt, et le nombre $\|T\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|Te_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, est indépendant du choix de la base $\{e_k\}$. De plus $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$.

On peut facilement vérifier que l'ensemble $L_2(E,F)$ de tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt de E dans F, muni de la norme,

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |Te_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert séparable, avec le produit scalaire

$$\langle S, T\rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Se_k, Te_k\rangle.$$

La double suite des opérateurs $\{f_j \otimes e_j\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale complète dans $L_2(E,F)$ [1].

Proposition A.1.3. *Soit E, F, G des espaces de Hilbert séparables. Si $T \in L_2(E,F)$ et $S \in L_2(F,G)$ alors $ST \in L_1(E,G)$ et*

$$\|ST\|_1 \leq \|S\|_2 \|T\|_2.$$

Preuve

On note que

$$STx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Tx, f_j\rangle S f_j, \quad x \in E.$$

Il s'ensuit, à partir de la définition de l'opérateur a trace, que

$$\begin{aligned} \|ST\|_1 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |T^* f_j| |S f_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T^* f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |S f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

1. Pour arbitrairement $b \in E$, $a \in F$ on note par $b \otimes a$ l'opérateur linéaire défini par $(b \otimes a) \cdot h = \langle a, h\rangle b$, $h \in F$.

Annexe B

L'intégrale de Bochner

Soit $(X, \| \, \|)$ un espace de Banach, $\mathcal{B}(X)$ le σ-algèbre de Borel de X et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure à mesure finie

B.1 Définition de l'intégrale de Bochner

Etape 1 : Comme première étape, nous voulons définir l'intégrale pour les fonctions simples qui sont définies comme suit. Définir

$$\varepsilon := \{f : \Omega \to X | f = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{1}_{A_k},\ x_k \in X,\ A_k \in \mathcal{F},\ 1 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

et définir une semi-norme $\| \, \|_\varepsilon$ sur l'espace vectoriel ε par

$$\|f\|_\varepsilon := \int \|f\| d\mu, \quad f \in \varepsilon.$$

Pour obtenir que $(\varepsilon, \| \, \|_\varepsilon)$ est un espace vectoriel normé, nous considérons les classes d'équivalence par rapport à $\| \, \|_\varepsilon$. Pour la simplicité, nous ne changerons pas les notations.

Pour $f \in \varepsilon$, nous définissons maintenant l'intégrale de Bochner à

$$\int f d\mu := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(A_k)$$

De cette façon, obtenir une application

$$int : (\varepsilon, \| \, \|_\varepsilon) \to (X, \| \, \|)$$

$$f \to \int f d\mu$$

qui est linéaire et uniformément continue puisque $\| \int f d\mu \| \leq \int \|f\| d\mu$ pour tous $f \in \varepsilon$.

Par conséquent, nous pouvons étendre l'application int à Complet abstrait de ε par rapport à $\| \ \|_{\varepsilon}$ que nous donnons par $\overline{\varepsilon}$.

Etape 2 : Nous donnons une représentation explicite de $\overline{\varepsilon}$.

Définition B.1.1. *Une fonction $f : \Omega \to X$ est appelée fortement mesurable si elle est mesurable de Borel et si $f(\Omega) \subset X$ est séparable.*

Définition B.1.2. *Soit $1 \leq p < \infty$. donc, nous définissons $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X) := \mathcal{L}^p(\mu, X) := \left\{ f : \Omega \to X | f \text{ est fortement mesurable par rapport à } \mathcal{F} \text{ et} \int \|f\|^p d\mu < \infty \right\}$ et la semi-norme $\|f\|_{L^p} := \left(\displaystyle\int \|f\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$, $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X)$. L'espace de toutes les classes d'équivalence dans $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X)$ par rapport à $\| \ \|_{L^p}$ est noté $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X) := L^p(\mu, X)$.*

On pose :$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X) = \overline{\varepsilon}$.

Etape 1 :$(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X), \| \|_{L^1})$ est complet.

La preuve est seulement une modification du théorème de Fischer-Riesz à l'aide de la proposition suivante

Proposition B.1.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit un X espace Banach. alors*

(1) l'ensemble des fonctions mesurables de Borel de Ω à X est fermé sous le développement de limites ponctuelles, et

(2) l'ensemble des fonctions fortement mesurables de Ω à X est fermé sous le développement de limites ponctuelles.

Pour la preuve, voir, [CO 80,proposition E.1.,p.350]. □

Etape 2 : ε est un sous-ensemble dense de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X)$ par rapport à $\| \|_{L^1}$. Cela peut être montré à l'aide du lemme suivant

Lemme B.1.1. *Soit E un espace métrique avec métrique d et que $f : \Omega \to E$ soit fortement mesurable. Alors il existe une suite f_n, $n \in \mathbb{N}$, de fonctions simples d'une valeur de E (i.e f_n est $\mathcal{F}/\mathcal{B}(E)$-mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs) tel que pour un arbitraire $\omega \in \Omega$ la suite $d(f_n(\omega), f(\omega))$, $n \in \mathbb{N}$ est décroissante monotone vers zéro*

Preuve [Da Pr Za 92, Lemma 1.1, p.16]

Soit $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dense de $f(\Omega)$. Pour $m \in \mathbb{N}$ définir

$$\begin{aligned} d_m(\omega) &:= \min\{d(f(\omega), e_k) | k \leq m\} \\ k_m(\omega) &:= \min\{k \leq m | d_m(\omega) = d(f(\omega), e_k)\} \\ f_m(\omega &:= e_{k_m}(\omega) \end{aligned}$$

De toute évidence f_m, $m \in \mathbb{N}$, sont des fonction simple puisque

$$f_m(\Omega) \subset \{e_1, e_2, ..., e_m\}$$

De plus, par la densité de $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$, la suite $d_m(\omega)$, $m \in \mathbb{N}$, est décroissante monotone vers zéro pour un arbitraire $\omega \in \Omega$. Puisque $d(f_m(\omega), f(\omega) = d_m(\omega)$ l'assertion verifiée. $\square$

Soit maintenant $f \in L^1(\mu, X)$. Par le lemme B.1.1 ci-dessus nous obtenons l'existence d'une suite de fonctions simples f_n, $n \in \mathbb{N}$, telles que

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \downarrow 0 \text{ pour tout } \ \omega \in \Omega \text{ comme, } n \to \infty$$

Donc $f_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f$ dans $\|\|_{L^1}$ par le théorème de convergence dominé par Lebesgue.

B.2 Propriétés de l'intégrale de Bochner

Proposition B.2.1. *(Inégalité de Bochner). Soit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X)$. alors*

$$\| \int f d\mu \| \leq \int \|f\| d\mu.$$

Preuve Si $f \in \varepsilon$ l'assertion est évidente.

Si non, il existe une suite de fonctions simples f_n, $n \in \mathbb{N}$, telles que$\|f_n - f\|_{L^1} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

Puisque $int : L^1(\mu, X) \to X$ et $\| \|_{L^1} : L^1(\mu, X) \to \mathbb{R}$ sont continus, nous obtenons

$$\| \int f d\mu \| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \| \int f_n d\mu \| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \int \|f_n\| d\mu = \int \|f\| d\mu.$$

$\square$

Proposition B.2.2. *Soit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, X)$. Alors*

$$\int \varphi \circ f d\mu = \varphi\Big(\int f d\mu\Big)$$

retenir pour tout $\varphi \in X^* = L(X, \mathbb{R})$.

Preuve [Co 80,Proposition E.11,p.356]

Proposition B.2.3. *(Théorème fondamental). Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in C^1([a,b], X)$. Alors*

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(u)du := \begin{cases} \int \mathbb{1}_{[s,t]}(u)f'(u)du & si \;\; s \leq t \\ \\ -\int \mathbb{1}_{[t,s]}(u)f'(u)du, & si \; non. \end{cases}$$

pour tout $s, t \in [a,b]$ où dénote la mesure lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Preuve

Prétendre 1 :Si nous posons $F(t) = \int_s^t f'(u)du$, $t \in [a,b]$, nous obtenons ce $F'(t) = f'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

Pour cela, nous devons prouver que.

$$\|\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) - f'(t)\|_E \underset{\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

A cette fin nous fixons $t \in [a,b]$ et prenons un arbitraire $\varepsilon > 0$. Puisque f' est continu sur $[a,b]$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f'(u) - f'(t)\|_E < \varepsilon$ pour tout $u \in [a,b]$ avec $|u-t| < \delta$. Donc, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) - f'(t)\|_E &= \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f'(u) - f'(t)du\|_E \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f'(u) - f'(t)\|_E du < \varepsilon \end{aligned}$$

si $t + h \in [a,b]$ et $|h| < \delta$

Prétendre 2 : Si $\widetilde{F} \in \mathbf{C}^1([a,b], E)$ est une autre fonction avec $\widetilde{F'} = F' = f'$ alors il existe une constante c telle que $F - \widetilde{F} = c$.

Pour tout $L \in E^* = L(E, \mathbb{R})$, nous définissons $g_L := L(F - \widetilde{F})$. Alors $g'_L = 0$ et donc g_L est constante. Comme E^* sépare les points de E par le théorème de Hahn-Banach ce qui implique que $F - \widetilde{F}$ est elle-même constante. $\square$

Annexe C

Théorie des C_0-semigroupes

C.1 Semigroupes de classe C_0

Définition C.1.1. *Soit E un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. on note par $\mathcal{B}(E)$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans E et par I l'unité de $\mathcal{B}(E)$. Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ on note par*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(E)\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(E)$ et par

$$\begin{aligned} R(\cdot, A) : \quad & \sigma(A) \longrightarrow \mathcal{B}(E) \\ R(\lambda, A) = \quad & (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition C.1.2. *On appelle C_0-semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(E)$ vérifiants les propriétés suivantes :*

a) $S(0) = I$,

b) *(Propriété Semigroupe)* $S(t + s) = S(t)S(s)\ \forall\, t, s \geq 0$,

c) *(Propriété de continuité forte)* $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = x,\ \forall\, x \in E$.

Soit $S(t) \subset \mathcal{B}(E)$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach E. Donc, il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0 \tag{C.1}$$

- Si $M = 1$, alors $S(t)$ est appelé un semigroupe de pseudo-contraction.
- Si $\omega = 0$, alors $S(t)$ est appelé uniformément borné, et si $\omega = 0$ et $M = 1$ (i.e, $\|S(t)\| \leq 1$), alors $S(t)$ est appelé un semigroupe de contractions.
- Si pour tout $x \in X$, application $t \to S(t)x$ est différentiable pour $t > 0$, alors $S(t)$ est appelé un semigroupe différentiable.
- Un semigroupe d'opérateurs linéaires $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est appelé compact si les opérateurs $(S(t))_{t>0}$ sont compacts.

Définition C.1.3. *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe , $(S(t))_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \; exists \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Remarque C.1.1. *Le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe est un opérateur linéaire.*

Théorème C.1.1. *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ sur un espace de Banach E : Alors*

1) *Pour $x \in E$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t)xds = S(t)x.$$

2) *Pour $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ et*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

3) *Pour $x \in E$, $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$, et*

$$A\left(\int_0^t S(s)xds \right) = S(t)x - x.$$

4) *Pour $x \in D(A)$,*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(u)Axdu = \int_s^t AS(u)xdu$$

5) *$D(A)$ est dense en E, et A est un opérateur linéaire fermé.*

6) *L'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ est dense dans E :*

7) *Soit E un espace de Banach réflexive. Alors le semigroupe adjoint $S(t)^*$ de $S(t)$ est un C_0-semigroupe dont le générateur infinitésimal est A^*, l'adjoint de A.*

Proposition C.1.1. *Soient $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(E)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité*

$$S(t)Ax = AS(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

preuve. Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} S(t)Ax &= S(t) \lim_{t\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \end{aligned}$$

Donc $S(t)x \in D(A)$ et on a $S(t)Ax = AS(t)x,\ \forall t \geq 0$.

Remarque C.1.2. *On voit que :*

$$S(t)D(A) \subseteq D(A), \forall t \geq 0.$$

Théorème C.1.2. *(Hille-Yosida) Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé linéaire sur E. Alors l'assertion suivante est équivalente :*

(1) *A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(\cdot)$ tel que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.*

(2) *$D(A)$ est dense dans E, l'ensemble résolvant $\sigma(A)$ contient l'intervalle $(\omega, +\infty)$ et les estimations suivantes*

$$\left\|(R^k(\lambda, A))\right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus, si (1) ou (2) verifiée donc

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad x \in E,\ \lambda > \omega. \tag{C.2}$$

Finalement

$$S(t)x = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{tA_n}, \quad \forall x \in E,$$

où $A_n = nAR(n, A)$ et l'estimation suivante

$$\|e^{tA_n}\| \leq Me^{\frac{\omega nt}{n-\omega}}, \quad \forall t \geq 0,\ n > \omega$$

Les opérateurs $A_n = AJ_n$ où $J_n = nR(n, A), n > \omega$, sont appelés les approximations Yosida de A.

Annexe D

puissances fractionnaires et espaces d'interpolation

Hypothèse D.0.1. **(a)** *Il existe* $\omega \in \mathbb{R}^1$ *et* $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ *tels que* $\sigma(A) \supset S_{\omega,\theta_0}$ *avec*

$$S_{\omega,\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\omega\} : |\arg(\lambda - \omega)| \leq \theta_0\}.$$

(b) *Il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\|\mathbb{R}(\lambda - A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\omega,\theta_0}. \tag{D.1}$$

Ensuite, nous pouvons définir un semigroupe $S(\cdot)$ des opérateurs linéaires bornés dans E en fixant $S(0) = I$ et :

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\xi,\theta}} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, \quad t > 0. \tag{D.2}$$

Pour étudier les propriétés de régularité de solutions aux problèmes de Cauchy, il est commode d'introduire plusieurs domaines de sous-espaces de E. Pour simplifier la notation, nous supposons, en plus de l'hypothèse D.0.1, que le semigroupe $S(\cdot)$ est de type négatif, ce qui signifie que $\omega < 0$. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, nous définissons

$$(-A)^{-\alpha} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}} (-\lambda)^{\alpha} R(\lambda, A) x d\lambda, \quad t \geq 0, x \in E$$

où nous avons utilisé les symboles de la section A.4.1(voir [6]).
Comme cela est facile à vérifier, $(-A)^{-\alpha}$ est un-à-un. On notera $(-A)^{\alpha}$ l'inverse de $(-A)^{-\alpha}$ et par $D((-A)^{\alpha})$ son domaine. Il n'est pas difficile de prouver (voir [32]) que

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta} = (-A)^{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in (0, 1),\ \alpha + \beta \leq 1.$$

Les opérateurs $(-A)^\alpha$ sont appelés puissances fractionnaires de $-A$. Le premier domaine des sous-espaces de E est pourvu par

$$D((-A)^\alpha), \quad \alpha \in (0,1).$$

Par (D.2) nous obtenons une formule de représentation pour $(-A)^\alpha S(\cdot)$ qui sera souvent utilisée.

Proposition D.0.2. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant l'hypothèse D.0.1 avec $\omega < 0$. Alors pour tout $\alpha \in (0,1)$ et $t > 0$ on a $S(t)x \in D((-A)^\alpha)$, $\forall x \in E$ et*

$$(-A)^\alpha S(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}} e^{\lambda t}(-\lambda)^\alpha R(\lambda, A)x d\lambda. \tag{D.3}$$

De plus pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_{\alpha,\varepsilon} > 0$ tels que

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| \leq N_{\alpha,\varepsilon} t^{-\alpha} e^{(w+\varepsilon)t}, \quad t > 0. \tag{D.4}$$

Nous aurons besoin de deux autres domaine d'espaces liés à la théorie dite d'interpolation. Pour toute $\alpha \in (0,1)$ nous définissons

$$\|x\|_{\alpha,\infty} = \sup_{t>0} t^{-\alpha}\|S(t)x - x\|, \quad x \in E,$$

et on note par $D_A(\alpha,\infty)$ l'espace de Banach de tous les $x \in E$ tel que $\|x\|_{\alpha,\infty} < +\infty$, muni de la norme $\|\cdot\| + \|\ \|_{\alpha,\infty}$. nous définissons

$$D_A(\alpha+1,\infty) = \{x \in D(A) : Ax \in D_A(\alpha,\infty)\}.$$

De plus $D_A(\alpha,\infty)$ est un sous-espace invariant de $(S(t))_{t>0}$, et la restriction de $S(t)$ à $D_A(\alpha,\infty)$ génère un C_0-semigroupe dans $D_A(\alpha,\infty)$. Puisque $S(\cdot)$ est un semigroupe analytique, alors une norme équivalente est la suivante, voir [3], $\|\ \| + \widehat{\|\ \|}_{\alpha,\infty}$, où

$$\widehat{\|x\|}_{\alpha,\infty} = \sup_{t>0} t^{1-\alpha}\|AS(t)x\|, \quad x \in E.$$

Enfin nous définissons les espaces $D_A(\alpha,2)$, pour tout $\alpha \in (0,\frac{1}{2}]$

$$D_A(\alpha,2) = \left\{x \in E : |x|_\alpha^2 = \int_0^\infty \xi^{1-2\alpha}|AS(\xi)x|^2 d\xi < \infty\right\}. \tag{D.5}$$

Pour $\alpha \in (\frac{1}{2},1)$

$$D_A(\alpha,2) = \left\{x \in E : |x|_\alpha^2 = \int_0^\infty \xi^{3-2\alpha}|A^2S(\xi)x|^2 d\xi < \infty\right\}. \tag{D.6}$$

Il résulte des définitions (D.5), (D.6) que la restriction de $S(\cdot)$ à $D_A(\alpha,2)$ est un semigroupe de contractions dans $D_A(\alpha,2)$ pour tout $\alpha\in(0,1)$. En fait, si $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, nous avons

$$|S(t)x|_\alpha^2=\int_t^\infty(\eta-t)^{1-2\theta}|AS(\eta)x|^2d\eta\le|x|_\alpha^2,$$

alors que si $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$, nous avons

$$|S(t)x|_\alpha^2=\int_t^\infty(\eta-t)^{3-2\theta}|A^2S(\eta)x|^2d\eta\le|x|_\alpha^2.$$

Nous avons la relation suivante entre certains des espaces introduits.

Proposition D.0.3. *Soit A un opérateur linéaire qui verifié l'hypothèse D.0.1 avec $\omega<0$, et soit $\theta\in(0,1)$. Donc, les inclusions suivantes sont satisfaites :*

1. $D((-A)^\theta)\subset D_A(\theta,\infty)$.
2. $D_A(\theta,\infty)\subset D((-A)^{\theta-\varepsilon})$, *pour* $0<\varepsilon<\theta$.

Preuve. Soit $x\in D((-A)^\theta)$, alors par (D.4) il existe $C>0$ tel que

$$\|AS(t)x\|=\|(-A)^{1-\theta}S(t)(-A)^{-\theta}x\|\le Ct^{\theta-1}\|(-A)^\theta x\|.$$

Donc $\|t^{1-\theta}AS(t)x\|$ est bornée et $x\in D_A(\theta,\infty)$.

Supposons, à l'inverse, que $x\in D_A(\theta,\infty)$. Donc, en rappelant (C.2), il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une constante $C_1(x)$ telle que

$$\|\lambda^\theta AR(\lambda,A)x\|\le C_1(x),\quad \lambda>0.$$

Maintenant, soit $\varepsilon\in(0,\theta)$, alors il est facile de montrer que $x\in D((-A)^{\theta-\varepsilon})$ et

$$(-A)^{\theta-\varepsilon}x=\frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}}\lambda^{\theta-\varepsilon-1}AR(\lambda,A)xd\lambda.$$

□

Remarque D.0.3. *Nous aurons besoin du résultat d'inclusion suivant, voir [[29], Lemme 1.1] :*

$$C^{1,\alpha}([0,T],E)\bigcap C^\alpha([0,T],D(A))\subset C^{1+\alpha-\beta}([0,T],D_A(\beta,\infty)),$$

pour tous $\alpha\in(0,1)$, $\beta\in(0,\alpha]$. □

Proposition D.0.4. *Soit H est un espace de Hilbert et soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe analytique $S(\cdot)$ de type négatif. Alors pour tout $\theta \in (0,1)$ et tout $\varepsilon \in (0,\theta)$ l'inclusion suivante est vérifié*

$$D((-A)^\theta) \subset D_A(\theta - \varepsilon, 2).$$

Preuve. Nous remarquons d'abord que (D.4) il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\|(-A)^{1-\theta} S(t)\| \leq C t^{\theta-1} e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Maintenant, soit $x \in D((-A)^\theta)$, alors nous avons

$$\|AS(t)x\| = \|(-A)^{1-\theta} S(t)(-A)^\theta x\| \leq C t^{\theta-1} e^{-\alpha t} \|(-A)^\theta x\|.$$

Mais cela implique la conclusion puisque

$$\int_0^\infty \xi^{1-2\theta-2\varepsilon} \|AS(\xi)X\|^2 d\xi \leq C^2 \|(-A)^\theta x\|^2 \int_0^\infty \xi^{2\varepsilon-1} e^{-\alpha\xi} d\xi < \infty.$$

□

Remarque D.0.4. *Dans [28], l'inclusion suivante est prouvée*

$$W^{1,2}(0,T,H) \bigcap L^2(0,T,D(A)) \subset C([0,T], D_A(\frac{1}{2}, 2)).$$

□

Le résultat suivant est dû à [35].

Proposition D.0.5. *Supposons qu'il existe $\gamma \in (0,1)$ tel que $D((-A)^\theta)$ soit isomorphe à $D((-A^*)^\theta), \forall \theta \in (0,\gamma)$, où A^* désigne l'adjoint de A. Alors $D_A(\theta,2)$ est isomorphe à $D((-A)^\theta)$ pour tout $\theta \in (0,1)$.*

Remarque D.0.5. *L'hypothèse de la proposition D.0.5 est vérifié si $S(\cdot)$ est un semigroupe de contraction (voir [22]), et en particulier si A est auto-adjoint négatif*

Le résultat suivant est dû à [11].

Proposition D.0.6. *Soit H un espace de Hilbert et soit A le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique $S(\cdot)$ dans H de type négatif. Supposons que $D((-A)^{\frac{1}{2}})$ est isomorphe à $D_A(\frac{1}{2}, 2)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_0^t |(-A)^{\frac{1}{2}} S(s)x|^2 ds \leq C|x|^2, \quad \forall x \in D(A).$$

Preuve. Si $x \in D(A)$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^t |(-A)^{\frac{1}{2}} S(s)x|^2 ds &= \int_0^t |AS(s)(-A)^{\frac{-1}{2}} x|^2 ds \\ &\leq |(-A)^{\frac{-1}{2}} x|^2_{D_A(\frac{1}{2},2)},\end{aligned}$$

et la conclusion suit puisque $D((-A)^{\frac{1}{2}})$ est isomorphe à $D_A(\frac{1}{2}, 2)$. □

Bibliographie

[1] F. Baudoin. MR2, *module B1 : Cours de calcul stochastique.*

[2] J. C. Breton. *Processus Stochastiques, M2 Mathématiques*, Université de Rennes 1, Septembr-Octobre 2017.

[3] P. L. BUTZER, H. BERENS. *Semigroups of Operators and Approximations*, Springer-Verlag, (1967).

[4] A. Chojnowska-Michalik. *Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces and Some of Their Applications*, Thesis, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences (1977).

[5] A. Chojnowska-Michalik. Representation Theorem for General Stochastic Delay Equations, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci.Math.*, **26**, **7**, 634-641.(1978).

[6] G. Da Prato (Scuola Normale Superiore, Pisa)and J. Zabczyk (Polish Academy of Sciences). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications 152. Second Edition.

[7] M. C. Delfour. The Largest Class of Hereditary Systems Defining a C_0-Semigroup on The Product Space, *Can. J. Math.*,**32**, no. 4,969-978. (1980).

[8] M. C. Delfour, and S. K. Mitter, *Hereditary differential systems with constant delays.* I. General case. J. Differential Equations 12 (1972), 213-235 ; erratum, ibid. 14 (1973), 397.

[9] Y. Dunfordn, J. T. Schwartz. Linear Operators. Part II : Spectral Theory. *Self Adjoint Operators in Hilbert Space* (with the assistance of G. William Bade and G.Robert Bartle), Interscience Publishers John Wiley y Sons, (1963).

[10] W. Feller. *Zur Theorie der Stochastischen Prozesse (Existenzund Eindeutigkeitssatze).* Math. Ann.,113, 113-160 (1936).

[11] F. Flanandoli. *The Semigroup Approach to Stochastic Evolution Equations*, Stochastic Anal. Appl., 10, no. 2, 181-203, (1992).

[12] I. I. Gikhman. *A method of constructing random processes*, Dokl.Acad. Nauk, SSSR, **58**, 961-964. (1946).

[13] I. I. Gikhaman, A.V. Skorokhod. *Equations différentielles stochastiques.* Springer-Verlag.(1972).

[14] F. Godet. *Intégrale Stochastique*, présentation, 20 novembre 2006.

[15] H. Guiol, Calcul Stochastique Avancé, *TIMB/TIMC - IMAG* 2006.

[16] K. Itô. *Differential Equations Determining Markov processes.* Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, **244**, 1352-1400 (1942).

[17] K. Itô. *Stochastic Integral.* Proc. Imp. Acad. Tokyo,**20**, 519-524 (1944).

[18] K. Itô. S*tochastic Differential Equations.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 4(1951).

[19] J. Jacod. *Calcul Stochastique et Probléme de Martingales*, Lecture Notes in Mathematics, no.714, Springer-Verlag.(1979).

[20] B. Jourdain, B. Lapeyre, *Mouvement brownien, Espérance Conditionnelle, Martingale, Intégrale Stochastique*, 30 mai 2006.

[21] J. P. Kahane. Le mouvement Brownien, *Un essai sur les origines de la théorie mathématique Société Mathématique de France 1998*, p.123-155 .

[22] T. Kato. Strong Lp-solutions of the Navier-Stokes equation in Rm with applications to weak solutions, *Math. Z.*, **187**, no. 4, 471-480,(1984).

[23] I. Kanratzas and S. E. Shreve : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[24] A. N. Kolmogoroff. *Über Die Analytischen Methodenin der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Annalen,104, 415-458(1931).

[25] J. F. Le Gall. Mouvement Brownien et Calcul Stochastique, *Notes de cours de Master 2*, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Octobre 2008, 2009.

[26] O. Lévêque, EPFL, *Cours de Probabilites et Stochastic Calculus*, Semestre d'hiver 2004-2005.

[27] P. Lévy. *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.* Gauthier-Villars, Paris (1948) Second edition (1965).

[28] J. L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux Limites Nonhomogènes et Applications*, Dunod, (1968).

[29] A. Lunardi On the evolution operator for abstract parabolic equations, *Isr. J. Math.*, **60**, no. 3, 281-314,(1987).

[30] M. Metivier, J. Pellaumail. *Stochastic Integration*, Academic Press, (1980).

[31] R. B. Vinter. *A Representation of Solution to Stochastic Delay Equations*, Imperial College Department, Computing and Control, Report. (1975).

[32] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, (1983).

[33] J. B. Walsh. *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations*. In Eécole d'Ete de Probabilite de Saint Flour XIV 1984, P.L. Hennequin (ed.), *Lecture Notes in Mathematics*, no.1180, 265-439.

[34] N. Wiener. *Differential Space*. J. Math. Phys. *2*, 131-134 (1923).

[35] A. Yagi. Coincidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'pérateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **299**, no. 6. 173-176 ; (1984).

[36] Y. Zemel, *Calcul Stochastique*, January 18, 2011