République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

# Dérivation Fractionnaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

## Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie différentielle

par


**L**akhdar **G**uettaf [1]


Sous la direction de

**Dr.F**.Zohra Mostefai

Soutenu le 19/06/2018 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **Dr.S O**uakkas | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Président |
| **Dr.F.Z M**ostefai | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Encadrice |
| **Dr.K D**jerfi | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Examinateur |
| **Dr.S A**bbas | Université de Saida - Dr Moulay Tahar | Examinateur |


1. e-mail : lakhdarg32@gmail.com

# Dédicaces

# Remerciements

# Table des matières

# Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un".On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaires. La dérivation d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hospital et Johann Bernoulli à la fin du 17ème siècle.

Dans le chapitre 1, on donne la version de Grunwald-Letnikov sur les dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire, en mentionnant quelques propriétés.

Le chapitre contient l'approche la plus utilisée des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire, celle de Riemann-Liouville. Des résultats sur la composée de dérivées d'ordre entier et fractionnaire sont donnés.

# Chapitre 1

# Les dérivées fractionnaires de Grunwald-Letnikov

## 1.1 Relation entre dérivées et intégrales d'ordre entier

Dans l'analyse classique les notions de dérivées d'ordre entier $n$ et d'intégrale répétée $n$-fois sont souvent présentés séparément. Dans cette section nous présentons une approche pour l'unification des deux notions.

Considérons pour celà une fonction continue $y = f(t)$. On sait que la dérivée première de la fonction $f(t)$ est définie par :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1.1}$$

De même la dérivée d'ordre 2 est définie par :

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre 3 définie par :

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{1.2}$$

et par récurrence, on définie la dérivée d'ordre $n$ par

$$f^n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) \tag{1.3}$$

ou

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} \tag{1.4}$$

Considèrons maintenant, l'expression suivante qui généralise les résultats (1.1)-(1.3) :

$$f_h^p(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) \tag{1.5}$$

ou $p$est entier arbitraire et $n$ est aussi un entier. Pour $p \leq n$ on a

$$\lim_{h\to 0} f_h^p(t) = f^p(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \tag{1.6}$$

Car dans un tel cas, tous les coefficients du numérateur dans l'expression (1.3) aprè $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ sont nuls.

Considèrons les valeurs négatives de $p$, par commodité, on note

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1}{r!} \tag{1.7}$$

on a alors

$$\begin{pmatrix} -p \\ r \end{pmatrix} = \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

et en remplaçant $p$ dans l'équation (1.5) par $-p$ on peut écrire

$$f_h^{-p}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \tag{1.9}$$

où $p$ est un nombre entier positif.

Si $n$ est fixé, alors $f_h^{-p}(t)$ tend vers une limite non-intéressant "0" quand $h \to 0$. Pour arriver à une limite non nulle, on supposera que $n$ tend vers $\infty$

lorsque $h$ tend vers 0. On peut prendre alors $h = \frac{t-a}{n}$, où $a$ est une constante réelle, et on considère la valeur limite, qui soit finie ou infinie, de $f_h^{-p}(t)$, que l'on notera comme suit :

$$\lim_{h \to 0} f_h^{-p}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t), \tag{1.10}$$

où $nh = t - a$. Considèrons quelques cas particuliers :

**Cas** $p = 1$ On a

$$f_h^{-1}(t) = h \sum_{r=0}^{n} f(t - rh) \tag{1.11}$$

Sachant que $t - nh = a$ et que la fonction $f(t)$ est supposée continue, on en conclut que

$$\lim_{h \to 0} f_h^{-1}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{1.12}$$

**Cas** $p = 2$ De même comme,

$$\left[ \begin{array}{c} 2 \\ r \end{array} \right] = \frac{2.3...(2 + r - 1)}{r!} = r + 1, \tag{1.13}$$

on a alors

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (r + 1)hf(t - rh) \tag{1.14}$$

et en notant par $t + h = y$ on obtient

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh)f(y - rh) \tag{1.15}$$

et en faisant tendre $h$ vers zéro, nous aurons :

$$\lim_{h \to 0} f_h^{-2}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} zf(t - z)dt = \int_a^t (t - \tau)f(\tau)d\tau \tag{1.16}$$

car $y \to t$ quand $h \to 0$.

**Cas** $p = 3$

$$\left[ \begin{array}{c} 3 \\ r \end{array} \right] = \frac{3.4...(3 + r - 1)}{r!} = \frac{(r + 1)(r + 2)}{1.2}$$

donc

$$f_h^{-3}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=0}^{n} (r+1)(r+2)h^2 f(t-rh) \tag{1.17}$$

En notant comme ci-dessus, $t + 2h = y$ on a donc

$$f_h^{-3}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \tag{1.18}$$

$$f_h^{-3}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) \tag{1.19}$$

Faisont tendre h vers zéro, nous obtenons

$${}_aD_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau \tag{1.20}$$

car $y \to t$ et $h \to 0$ et

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) = \lim_{h\to 0} h \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0$$

Il en résulte à partir de ces trois cas l'expression générale suivante

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=1}^{n} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \tag{1.21}$$

qu'on doit montrer par récurrence. Pour celà introduisons la fonction

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$$

qui admet la propriété évidente $f_1(a) = 0$, et considèrons

$$\begin{aligned} aD_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{h\to 0} h^{p+1} \textstyle\sum_{r=0}^n \left[ \begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array} \right] f(t-rh) \\ &= \lim_{h\to 0} h^p \textstyle\sum_{r=0}^n \left[ \begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array} \right] f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{h\to 0} h^p \textstyle\sum_{r=0}^n \left[ \begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array} \right] f_1(t-(r+1)h) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

ou nous devons poser

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Remplacement de $r$ par $r-1$ dans la seconde somme donnent :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p-1}f(t) &= \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1t(t-rh) \\
&+ \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\
&- \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\
&= {}_aD_t^{-p}f_1(t) - \lim_{h\to 0} h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h) \\
&= {}_aD_t^{-p}f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\propto} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

et ona

$$\lim_{n\to\propto} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0$$

En tenant compte de la limite connue

$$\lim_{n\to\propto} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\propto} \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}f_1(t) =_a D_t^{-p-1}f(t) &= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau)d\tau \\
&= \left[\frac{-(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!}\right]_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Ce qui achéve la démonstration par récurrence de la formule (1.21).

Montrons maintenant que la formule (1.21)n'est autre que l'intégrale répétée p-fois de la fonction $f$. En intégrant la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right)=\frac{1}{(p-2)!}\int_a^t(t-\tau)^{p-2}f(\tau)d\tau$$

$$={}_aD_t^{-p+1}f(t)$$

de $a$ à $t$, nous obtenons

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t\left({}_aD_t^{-p+1}f(t)\right)dt\\ {}_aD_t^{-p+1}f(t) &= \int_a^t\left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)dt, etc...,\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t dt\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)\\ &= \int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+3}f(t)\right)dt\\ &= \underbrace{\int_a^t dt\int_a^t dt...\int_a^t}_{n-fois}f(t)dt\end{aligned}$$

On voit que la dérivée d'ordre ent$n$ (1.3) et l'intégrale répétée $n$-fois d'une fonction contnue $f(t)$ sont des cas particuliers de l'expression générale suivante

$${}_aD_t^pf(t)=\lim_{h\to 0}h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\begin{pmatrix}p\\r\end{pmatrix}f(t-rh) \tag{1.23}$$

qui représente la dérivée d'ordre $m$ si $p=m$ et l'intégrale répétée $m$-fois si $p=-m$.

Cette observation entraine naturellement l'idée d'une généralisation des notions de différentiation et d'intégration en imposant à $p$ dans (1.23) d'être un nombre réel, ou même complexe arbitraire..On se restreindra dans la suite aux valeurs réelles de $p$.

## 1.2 Intégrales d'ordre arbitraire

Considérons le cas particulier $p < 0$. Remplacons $p$ par $-p$ dans l'expression (1.23) alors cette dernière prend la forme suivante

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{h \to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t - rh) \tag{1.24}$$

où, comme ci-dessus, les valeurs de $n$ et $h$ sont reliées par $nh = t - a$.

Pour prouver l'existence de la limite dans (1.24) et évaluer cette limite on a besoin du théorème suivant :

**Théorème 1.2.1.** *[1] Prenons une suite $(\beta_k)_{k=1,2,cdots}$ et supposons que*

$$\lim_{n \to \infty} \beta_k = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{n,k} = 0, \quad \textit{pour tout } k,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A \quad \textit{pour tout } k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| < K \quad \textit{pour tout } n,$$

*Alors*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} \beta_k = A. \tag{1.25}$$

Pour appliquer le théorème 1.2.1 afin d'evaluer la limite (1.24), on écrit

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p} f(t) &= \lim_{h \to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t - rh) \\
&= \lim_{h \to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r^{p-1}} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] h(rh)^{p-1} f(t - rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h \to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] h(rh)^{p-1} f(t - rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h \to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] \frac{t-a}{n} \left( r\frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left( t - r\frac{t-a}{n} \right)
\end{aligned}$$

et on prend

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right]$$

$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n} \left( r\frac{t-a}{n})^{p-1} f(t - r\frac{t-a}{n} \right).$$

En utilisant l'identité

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)},$$

on aura

$$\lim_{r\to\infty} \beta_r = \lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] = 1$$

Evidemment, si la fonction $f(t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, t]$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \alpha_{n,r} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{t-a}{n} \left( r\frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left( t - r\frac{t-a}{n} \right) \\ &= \lim_{h\to\infty} \sum_{r=0}^{n} h(rh)^{p-1} f(t - rh) \\ &= \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f\tau) d\tau \end{aligned}$$

donc

$$_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[ \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t - rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (1.26)$$

Si la dérivée $f'(t)$ est continue dans $[a, b]$, alors en intégrant par parties on pourra écrire (1.26) sous la forme

$$_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \quad (1.27)$$

et si la fonction $f(t)$ est de classe $C^{m+1}$,alors

$$_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{m+1}(\tau) d\tau. \quad (1.28)$$

## 1.3 Dérivée d'ordre arbitraire

Commencons par considérer le cas $p > 0$. Notre but, comme ci-dessus, est d'évaluer la limite suivante

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t - rh) = \lim_{h \to 0} f_h^{(p)}(t) \tag{1.29} $$

où

$$ f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t - rh) \tag{1.30} $$

En utilisant la propriété connue des coefficients du binôme

$$ \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \tag{1.31} $$

on peut écrire

$$ \begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p-1 \\ r \end{pmatrix} f(t - rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p-1 \\ r-1 \end{pmatrix} f(t - rh) \\ &= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p-1 \\ r \end{pmatrix} f(t - rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \begin{pmatrix} p-1 \\ r \end{pmatrix} f(t - (r+1)h) \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} p-1 \\ n \end{pmatrix} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \begin{pmatrix} p-1 \\ r \end{pmatrix} \Delta f(t - rh) \end{aligned} $$

où nous notons par

$$ \Delta f(t - rh) = f(t - rh) - f(t - (r+1)h). $$

En utilisant la propriété connue des coefficients du binome répétée $m$-fois, on obtient

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \begin{pmatrix} p-1 \\ n \end{pmatrix} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} p-2 \\ r-1 \end{pmatrix} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \begin{pmatrix} p-2 \\ r \end{pmatrix} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} p-1 \\ n \end{pmatrix} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} p-2 \\ r-1 \end{pmatrix} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&+ (-1)^{n-2} \begin{pmatrix} p-3 \\ n-3 \end{pmatrix} \Delta^3 f(t-rh) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} p-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \begin{pmatrix} p-m-1 \\ r \end{pmatrix} \Delta^{m+1} f(t-rh).
\end{aligned}$$

Evaluons maintenant, la limite du $k$-ième terme de la première somme :

$$\lim_{h\to 0} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} p-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) = \lim_{h\to 0} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} p-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} (n-k)^{p-k}$$

$$\times (\frac{n}{n-k})^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}$$

$$= (t-a)^{-p+k} \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} p-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} (n-k)^{p-k}$$

$$\times \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n-k})^{p-k} \times \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}$$

$$= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \tag{1.32}$$

car $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} p-k-1 \\ n-k \end{pmatrix}(n-k)^{p-k}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2)...(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-k})^{p-k} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^k(a)$$

Pour calculer la limite de la première somme, écrivons la sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\sum_{r=1}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\begin{pmatrix} p-m-1 \\ r \end{pmatrix} r^{-m+p}$$

$$\times h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}} \tag{1.33}$$

Pour appliquer le Théorème 1.2.1, on prend,

$$\beta_r = (-1)^r\Gamma(-p+m+1)\begin{pmatrix} p-m-1 \\ r \end{pmatrix} r^{-m+p}$$

$$\alpha_{n,r} = h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}} h = \frac{t-a}{n}$$

En utilisant toujours l'identité

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)...z+n)}$$

on peut vérifier que

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = \lim_{r\to\infty}\beta_r = (-1)^r\Gamma(-p+m+1)\begin{pmatrix} p-m-1 \\ r \end{pmatrix} r^{-m+p} = 1 \tag{1.34}$$

En plus, si $m-p > -1$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-m-1}(-1)^r\alpha_{n,r} &= \lim_{h\to 0}\sum_{r=1}^{n-m-1}(-1)^r h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}} \\ &= \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+p}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

En tenant compte des deux résultats précédents et en appliquant le Théorème 1.2.1, on obtient

$$\lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{r=1}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau \qquad (1.35)$$

En utilisant (1.3) et (1.35), on a finalement la valeur de la limite voulue

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+m+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \qquad (1.36)$$

La formule (1.36) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t), (k = 1, 2..., m+1)$ sont continues dans l'intervalle fermé $[a, t]$ et que $m$ est un nombre entier vérifiant la condition $m > p-1$. La plus petite valeur possible de $m$ est déterminée par l'inégalité :

$$m < p < m+1.$$

## 1.4 Dérivée fractionnaire de $(t-a)^\alpha$

Calculons la dérivée fractionaire ${}_aD_t^p f(t)$ au sens de Grünwald-Lutnikov de la fonction polynôme

$$f(t) = (t-a)^\alpha, \quad \text{où} \quad \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

on va commencer par considèrer des valeurs négatives de $p$, ce qui veutdire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale d'odre $-p$. Utilisons la formule (1.35) alors

$${}_aD_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

et supposons que $\alpha > -1$ pour la convergence de l'intégrale. En appliquant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ et en utilisant la définition de la fonction bèta, on obtient

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{\alpha-p}\int_a^t s^{\alpha}(1-s)^{-p-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)}B(-p,\alpha+1)(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \quad (p<0,\alpha>-1).
\end{aligned}$$

Considèrons maintenant le cas où $0 \leq m \leq p < m+1$. Afin d'appliquer la formule (1.35), oa besoin d'imposer $\alpha > n$ pour la convergence de l'intégrale, on a alors

$${}_aD_t^p(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}\frac{d^{m+1}(\tau-a)^{\alpha}}{d\tau^{m+1}}d\tau.$$

Et en tenant compte de

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^{\alpha}}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)(\tau-a)^{\alpha-m+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha-m}(\tau-a)^{\alpha-m+1}.$$

Et en effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-p)\Gamma(\alpha-m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}(\tau-a)^{\alpha-m}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-p)\Gamma(\alpha-m+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_0^1 (1-s)^{m-p-1}s^{\alpha-m}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(m-p,\alpha-m+1)}{\Gamma(m-p)\Gamma(\alpha-m+1}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m-p)\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(m-p)\Gamma(\alpha-m+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

Notons que les deux expressions sont identiques, on peut alors conclure que la dérivée au sens de Grünwald-Lutnikov de la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ est donnée par

$${}_aD_t^p(t-a)^{\alpha} = \frac{\alpha+1}{\Gamma(-p+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \qquad \text{où } 0 \leq n \leq p < n+1, \alpha > n. \tag{1.37}$$

On verra que cette formule (1.37) est la même avec d'autres approches, sauf que les conditions de son application sont différentes.

D'un point de vue théorique, la classe de fonctions pour laquelle la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Lutnikov est considérée définie est trés réduite elle se limite juste pour les fonctions $(m+1)-$ fois continûement différentiables .

## 1.5 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Notons que nous avons une seule restriction pour $m$ dans la formule (1.36), à savoir lma condition $m > \alpha - 1$, écrivons $s$ à la place de $m$ dans cette formule, on obtient alors

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+m+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1.38}$$

On supposera dans la suite que $m < p < m+1$.

**1er Cas** Calculons la dérivée d'ordre $n$ de la dérivée fractionnaire d'ordre $p$ de la forme (1.38), où on prend $s \geq m+n-1$. le résultat est alors

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau)d\tau \\ &= {}_aD_t^{p+n} f(t). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Comme $s \geq m+n-1$ est arbitraire, prenons $s = m+n-1$. Ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) &= {}_aD_t^{p+n} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{1.40}$$

**2eme Cas** Considérons l'ordre inverse des opérations, ie la dérivée fractionnaire d'ordre $p$ d'une dérivée d'ordre entier $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$.

utilisant la formule (1.38), on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

En posant ici $s = m-1$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-p+m)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

En comparant (1.40) et (1.42) on arrive à la conclusion

$$
\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^p\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-n-p+1)} \tag{1.43}
$$

Ainsi les deux opérations commutent, i.e

$$
\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^p\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) =_a D^{p+n} f(t), \tag{1.44}
$$

si et seulement si, en la borne inférieure $t = a$ de la différentiation fractionnaire on a

$$
f^{(k)}(a) = 0, \qquad \text{pour tout } k = 0, 1, \cdots, n-1.
$$

## 1.6 Composition avec dérivée d'ordre fractionnaires

Dans cette section, on va considérer la dérivée fractionnaire d'ordre $q$ d'une dérivée fractionnaire d'ordre $p$ :

$$
{}_aD_t^q\Big({}_a D_t^p\Big).
$$

Deux cas seront considérés séparement : $p < 0$ et $p > 0$. Le premier cas veut dire que dépendant du signe de $q$, la différentiation d'ordre $q > 0$ ou l'intégration d'ordre $-q > 0$ est appliquée à l'intégrale fractionnaire d'ordre $-p > 0$.
Dans le second cas, l'objet de l'opération extérieure est la dérivée fractionnaire d'ordre $p > 0$.

Dans les deux cas on obtient une propriété analogue à celle de différentiation d'odre entier connue :

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\Big) = \frac{d^m}{dt^m}\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) = \frac{d^{n+m} f(t)}{dt^{n+m}}.$$

**Cas** $p < 0$ 1. Prenons d'abord $q < 0$. Alors ona a :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1}\Big({}_aD_t^p f(\tau)\Big)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^t (t-s)^{-p-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_a^t f(s)ds \int_s^t (\tau-s)^{-p-1}(t-\tau)^{-q-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p-q)} \int_a^t (t-s)^{-p-q-1} f(s)ds \\
&= D_t^{p+q} f(t) \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

2. supposons maintenant que $0 < n < q < n+1$. En remarquant que $q = (n+1) + (q-n-1)$, où $q-n-1$ et en utilisant les formules (1.39) et (1.45) on obtient

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\Big\{{}_aD_t^{-q-n-1}({}_aD_t^p f(t))\Big\} \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\Big\{{}_aD_t^{p+q-n-1} f(t)\Big\} \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

En combinant (1.45) et (1.46), il en resulte que si $p < 0$ alors pour tout réel $q$

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^{p+q} f(t).$$

**Cas** $p > 0$

**Proposition 1.1.** *Si* $q < 0$ *et* $p \in R$*,alors*

$$ {}_aD_t^p({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^{p+q} f(t) \tag{1.47}$$

*Si* $0 \leq m-1 < q < m$ *et* $p < 0$*,alors*

$$ {}_aD_t^p({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^{p+q} f(t)$$

*ssi* $f^k(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, ..., r-2$ *avec* $r = max(m, n)$

Si $q < 0$ et $0 \leq n-1 < p$,ona $p = n + (p-n)$ avec $(p-n) < 0$ alors :

$$ {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}{}_a D_t^{p-n}({}_aD_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}{}_a D_t^{q+p-n} f(t) =_a D_t^{p+q} f(t) \tag{1.48}$$

Pour $0 \leq n-1 < q < n$ et $p < 0$ ona

$$ {}_aD_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t (t-\tau)^{n-q-1} f^n(\tau) d\tau \tag{1.49}$$

et $(t-a)^{k-q}$ ont des singularités non intégrable,donc ${}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t))$ n'existe que si $f^k(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-2$ et dans ce cas on a

$$ {}_aD_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(n-q)} +_a D_t^{q-n} f^n(t) \tag{1.50}$$

alors

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{f^{n-1}(a)(t-a)^{n-1-q-p}}{\Gamma(n-q-p} +_a D_t^{p+q-n} f^n(t) \\ &= \frac{f^{n-1}(a)(t-a)^{m-(q+p)-1}}{\Gamma(n-q-p} + \frac{1}{\Gamma(m-(p+q))} \int_a^t (t-\tau)^{n-(p+q)-1} f^n(\tau) d\tau \\ &= {}_aD_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

Pour $0 \leq n-1 < q < n$ et $0 \leq n-1 < p < n$ ona :

$$ {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}{}_a D_t^{p-n}({}_aD_t^q f(t)) \tag{1.51}$$

Si $f^k(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-2$ alors

$$ {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) =_a D_t^{p+q-n} f(t)$$

Par conséquent :

$$ {}_aD_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{q+p-n} f(t) =_a D_t^{p+q} f(t) \tag{1.52}$$

# Chapitre 2

# Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La manipulation avec les dérivées fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov définie comme limite d'une différence d'ordre fractionnaire n'est pas commode. L'expression (1.36) obtenue est bien meilleure grâce à la présence de l'intégrale dedans, mais que faire du terme non intégrale ? Il suffit de considérer l'expression (1.36) comme un cas particulier de l'expression intégro-différentielle suivante

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \qquad (2.1) $$

$$ (m \leq p < m+1) $$

L'expression (2.1) est la définition la plus connue de la dérivée fractionnaire, elle est souvent appelée la définition de Riemann-Liouville.

Evidemment, l'expression (1.36), laquelle est obtenue pour la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov sous l'hyposthèse que la fonction $f(t)$ doit être $m+1$ fois différentiable, peut être obtenue à partir de (2.1) sous la même hypothèse en faisant des intégrations par parties et différentiations répétées.

Ceci donne

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)d\tau r \\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^k(a)(t-a)-p+k}{\Gamma(-p+m+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m-p}(\tau)d\tau \\
&= {}_aD_t^p f(t), \qquad (m \leq p < m+1).
\end{aligned}$$

## 2.1 Unification des dérivées et intégrales d'ordre entier

Supposons que la fonction $f(\tau)$ et continue et intégrable sur tout intervalle $(a,t)$ ; la fonction $f(\tau)$ pourrait avoir une singularité intégrable d'ordre $r < 1$ en le point $\tau = a$ :

$$\lim_{\tau \to a}(\tau - a)^r f(t) = const(\neq 0)$$

Alors l'intégrale

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{2.2}$$

existe et admet une valeur finie à savoir 0, quand $t \to a$. En effet, en faisant le changement de variables $\tau = a + y(t-a)$ et en posant $\varepsilon = t - a$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a} f^{(-1)}(t) &= \lim_{\tau\to a}\int_a^t f(\tau)d\tau \\
&= \lim_{t\to a}(t-a)\int_0^1 f(a+y(t-a))dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-r}\int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a+y\varepsilon)y^{-r}dy = 0
\end{aligned}$$

car $r < 1$. De plus, on peut considérer la double intégrale

$$\begin{aligned}
f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau)d\tau \int_\tau^t d\tau_1 \\
&= \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

L'intégrale de (2.2) donne l'intégrale triple de $f(\tau)$ :

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3)d\tau_3 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau)f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

et par récurrence dans le cas général, on a la formule de Cauchy

$$f^{(-3)}(t)\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

Supposons maintenant que $n \geq 1$ et fixé et prenons un entier $k \geq 0$.

Evidemment, on obtiendra

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}D^{-k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

où le symbole $D^{-k}, (k \geq 0)$ désigne $k$ intégrations itérées.

D'autre part, pour un $n \geq 1$ et un entier $k \geq n$ la $(k-n)$-ième dérivée de la $f(t)$ peut s'écrire comme

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}D^{k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

ou le symbole $D^k(k \geq 0)$ désigne $k$ différentiations itérées.

On voit que les formules (2.4) et (2.5) peuvent être considérées comme des cas particuliers l'une de l'autre, à savoir, dans laquelle $n(n \geq 1)$ est fixé et le symbole $D^k$ signifie $k$ intégrations si $k \leq 0$ et $k$ différentiations si $k > 0$.

Si $k = n-1, n-2, \ldots$, alors la formule (2.5) donne les intégrales itérées de $f(t)$, pour $k = n$ elle donne la fonction $f(t)$ ,et pour $k = n+1, n+2, n+3, \ldots$ elle donne les dérivées d'ordre $k-n = 1, 2, 3, \ldots$ de la fonction $f(t)$.

## 2.2 Intégrales d'ordre arbitraire

Pour étendre la notion n-uple intégration aux valeurs non-entières $n$, on peut démarrer de la formule de Cauchy (2.2) et remplacer l'entier $n$ par un réel $p > 0$ :

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.6} $$

Dans (2.2) l'entier $n$ doit satisfaire la condition $n \geq 1$; la condition correspondante pour $p$ est faible : pour l'existence de l'intégrale (2.6) on doit avoir $p > 0$.

De plus, sous certaines hypothèses raisonnables

$$ \lim_{p \to 0} ({}_aD_t^{-p}f(t) = f(t)) \tag{2.7} $$

et on peut alors poser

$$ {}_aD_t^{0}f(t) = f(t) \tag{2.8} $$

La preuve de la relation (2.7) est très simple si $f(t)$ admet des dérivées continues pour $t \geq 0$. Dans un tel cas, une intégration par parties et l'utilisation de la formule classique

$$ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) $$

donne

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{(t-a)^p f(a)}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau $$

et nous obtenons

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau)d\tau = f(a) + (f(t) - f(a)) = f(t) $$

Si $f(t)$ est seulement continue pour $t \geq a$, alors la preuve de (2.7) est "relativement" longue. Dans un tel cas, écrivons ${}_aD_t^{-p}f(t)$ sous la forme

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau \\ &+ \frac{f(t)(t-a)^p)}{\Gamma(p+1)} \end{aligned} $$

Soit $t \geq 0$ et

$$ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) $$

donne

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{(t-a)^p f(a)}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau)d\tau $$

et nous obtenons

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau)d\tau = f(a) + (f(t) - f(a)) = f(t) $$

Dans un tel cas , écrivons${}_aD_t^{-p}f(t)$ sous la forme

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau \\ &+ \frac{f(t)(t-a)^p)}{\Gamma(p+1)} \end{aligned} $$

Considérons l'intégrale

$$ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau. $$

comme $f(t)$ continue pour tout $\delta > 0$, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$ | f(\tau) - f(t) | < \varepsilon. $$

En donc on a l'estimation suivante

$$ | I_2 | < \frac{\varepsilon}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1} < \frac{\varepsilon \delta^p}{\Gamma(p+1)} \tag{2.9} $$

et en tenant compte du fait que $\varepsilon \to 0$ quand $\delta \to 0$, nous obtenons que pour tout $p \geq 0$,

$$ \lim_{\delta \to 0} | I_2 | = 0 \tag{2.10} $$

Prenons maintenant un $\varepsilon > 0$ arbitraire et choisissons $\delta$ tel que

$$ | I_2 | < \varepsilon \tag{2.11} $$

pour tout $p \geq 0$. Pour ce $\delta$ fixé, nous obtenons l'estimation suivante sur l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1}(f(\tau)-f(t))d\tau,$$

$$\mid I_1 \mid < \frac{M}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1} d\tau \leq \frac{M}{\Gamma(p+1)} \Big( \delta^p - (t-a)^a \Big) \tag{2.12}$$

de laquelle il suit, pour tout $\delta > 0$ fixé

$$\lim_{\delta \to 0} \mid I_1 \mid = 0 \tag{2.13}$$

En considérant

$$\mid_a D_a^{-p} f(t) - f(t) \mid \leq \mid I_1 \mid + \mid I_2 \mid + \mid f(t) \mid \cdot \mid \frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} - 1 \mid$$

et en tenant compte des limites (2.9) et(2.12) et l'estimation (2.10) nous obtenons

$$\limsup_{p \to 0} \mid_a D_a^{-p} f(t) - f(t) \mid \leq \varepsilon,$$

ou $\varepsilon$ peut être choisi assez petit que l'on désire. Ainsi

$$\limsup_{p \to 0} \mid_a D_a^{-p} f(t) - f(t) \mid = 0,$$

et (2.7) a lieu si $f(t)$ est continue pour $t \geq a$. Si $f(t)$ est continue pour $t \geq a$ alors l'intégration d'ordre réel arbitraire définie par (2.6) possède la propriété importante suivante :

$${}_aD_a^{-p}({}_aD_a^{-q} f(t)) =_a D_a^{-p-q} f(t) \tag{2.14}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{-p} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)_a^{q-1} D_\tau^{-p} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{p-1} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{q-1} (\tau-\xi)^{p-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (\tau-\xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \\
&= {}_aD_t^{-p-q} f(t))
\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale de $\xi$ à $t$, nous avons utilisé le changement de variable $\tau = \xi + \zeta(t - \xi)$, ce qui nous permet de l'exprimer en termes de la fonction béta ou la fonction béta est définie par

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}, \mathbb{R}x > 0, \mathbb{R}y > 0$$

Evidemment, on peut interchanger $p$ et $q$, nous avons alors

$$_aD_t^{-p}(_aD_t^{-q}f(t)) =_a D_t^{-q}(_aD_t^{-p}f(t)) =_a D_t^{-p-q}f(t) \tag{2.15}$$

Notons que la règle (2.15) est similaire à la propriété connue sur les dérivées d'ordre entier :

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}} \tag{2.16}$$

## 2.3 Dérivée d'ordre arbitraire

La représentation (2.3) pour la dérivée d'ordre entier $k - n$ donne une opportunité pour étendre la notion de différentiation à un ordre non-entier. A savoir, on peut gardre l'entier $k$ et remplacer l'entier $n$ par un réel $\alpha$ et alors $k - \alpha > 0$. Ceci donne

$$_aD_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \qquad (0 < \alpha \leq 1) \tag{2.17}$$

où la seul restriction importante pour $\alpha$ est"$\alpha > 0$," laquelle est nécessaire pour la convergence de l'intégrale dans (2.20). Cette restriction, cependant, peut être sans perte de généralité remplacée par la condition plus réduite $0 < \alpha \leq 1$ ceci peut être facilement vu à l'aide de la propriété (2.15) des intégrales d'ordre réel arbitraire et la définition (2.17).

En notant par $p = k - \alpha$, on peut écrire (2.17) comme

$$_aD_t^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}f(\tau)d\tau \qquad (k-1 \leq p < k) \tag{2.18}$$

Ou bien

$$_aD_t^{p}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}(_aD_t^{-(p-q)}f(t)) \qquad (k-1 \leq p < k) \tag{2.19}$$

Si $p = k - 1$ alors nous avons une dérivée conventionelle d'ordre $k - 1$ :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{k-1}f(t) &= \frac{d^k}{dt^k}({}_aD_t^{-(k-(k-1))}f(t)) \\ &= \frac{d^k}{dt^k}({}_aD_t^{-1}f(t)) = f^{(k-1)}(t). \end{aligned}$$

De plus en utilisant (2.8) on voit que pour $p = k \geq 1$ et $t > a$ on a :

$$ {}_aD_t^p f(t)) = \frac{d^k}{dt^k}({}_aD_t^0 f(t)) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t) \tag{2.20}$$

qui signifie que pour tout $t > a$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (2.18) d'ordre $p = k > 1$ coïncide avec la dérivée conventionnelle d'ordre $k$.

Considérons maintenant quelques propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

La première propriété, et peut être la plus importante de la dérivée au sens de Riemann-Liouville, est que pour $p > 0$ et $t > a$

$$ {}_aD_t^p({}_aD_t^{-p}f(t)) = f(t) \tag{2.21}$$

qui signifie que l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Luiouville du même ordre.

Afin de prouver la propriété (2.21), considérons le cas d'un entier $p = n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^n({}_aD_t^{-n}f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t) \end{aligned}$$

Prenons maintenant $k - 1 \leq p < k$ et utilisons la règle de composition pour l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, il vient

$$ {}_aD_t^{-k}f(t) =_a D_t^{-(k-p)}({}_aD_t^{-p}f(t)) \tag{2.22}$$

et donc

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p({}_aD_t^{-p}f(t)) &= \frac{d^k}{dt^k}\left\{ {}_aD_t^{-(k-p)}({}_aD_t^{-p}f(t))\right\} \\ &= \frac{d^k}{dt^k}\left\{({}_aD_t^{-p}f(t))\right\} = f(t) \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la propriété (2.21).

Si la dérivée fractionnaire${}_aD_t^p f(t)), (k-1 \leq p < k)$, d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors

$$ {}_aD_t^{-p}({}_aD_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{k}[{}_aD_t^{p-j}f(t))]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \tag{2.23}$$

En effet, d'une part nous avons

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p}({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)_a^{p-1}D_\tau^p f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)_a^p D_\tau^p f(\tau)d\tau\right\} \end{aligned} \tag{2.24}$$

D'autre part, en faisant des intégrations par parties répétées et en utilisant (2.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)_a^{p-1}D_\tau^p f(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\frac{d^k}{d\tau^k}\left\{({}_aD_\tau^{-(k-p)}f(\tau))\right\}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left\{({}_aD_\tau^{-(k-p)}f(\tau))\right\}d\tau \\ &- \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}({}_aD_t^{-(k-p)}f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left\{({}_aD_\tau^{-(k-p)}f(\tau))\right\}d\tau \\ &- \sum_{j=1}^{k}\left[({}_aD_t^{p-j}f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\ &= {}_aD_t^{-(p-k+1)}({}_aD_t^{-(p-k)}f(t)) \\ &- \sum_{j=1}^{k}\left[({}_aD_t^{p-j}f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\ &= {}_aD_t^{-1}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[({}_aD_t^{p-j}f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \end{aligned} \tag{2.25}$$

L'existence de tous les termes $\sum_{j=1}^{k}\left[\left({}_aD_t^{p-j}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}$ vient de l'intégrabilité de ${}_aD_t^{p}f(t)$, car en vertu de cette condition les dérivée fractionnaire ${}_aD_t^{p-j}f(t), (j = 1, 2, \ldots, k)$ sont toutes bornÃ©es en $t = a$.

La combinaison de (2.24) et (2.25) achève la preuve de la relation (2.23).

Un cas particulier important doit être mentionné. Si $0 < p < 1$ alors

$$ {}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{p}f(t)) = f(t) - \left[\left({}_aD_t^{p-1}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p} \tag{2.26}$$

La propriété (2.21) est un cas particulier de la propriété genérale

$$ {}_aD_t^{p}({}_aD_t^{-q}f(t)) =_a D_t^{p-q}f(t) \tag{2.27}$$

où nous supposons que $f(t)$ est continue et que si $p \geq q \geq 0$ la dérivée ${}_aD_t^{p-q}f(t)$ existe.

Deux cas doivent être considéres :$q \geq p \geq 0$ et $p > q \geq 0$.

Si $q \geq p \geq 0$, alors en utilisant les propriétés (2.15) et (2.21) nous obtenons

$$\begin{aligned} aD_t^{p}({}_aD_t^{-q}f(t)) &= aD_t^{p}(aD_t^{-p}aD_t^{p-q}f(t) &(2.28)\\ &= aD_t^{-(q-p)}f(t) = aD_t^{-(q-p)}f(t). &(2.29)\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas $p > q \geq 0$. Notons par $m, n$ des entiers tel que $0 \leq m-1 \leq p < m$ et $0 \leq n \leq p-q < n$ evidemment $n \leq m$ alors, on utilisant la définition(2.18) et la propriété (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{p}({}_aD_t^{-q}f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}({}_aD_t^{-q}f(t))\right\}\\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p-q-m}f(t)\right\}\\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_aD_t^{p-q-n}f(t)\right\} =_a D_t^{p-q}f(t)\end{aligned}$$

La propriété (2.23) mentionée ci-dessus est un particulier de la propriété plus générale

$$ {}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{p}f(t)) =_a D_t^{q-p}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[\left({}_aD_t^{q-j}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \tag{2.30}$$

$$(0 \leq k-1 \leq q < k).$$

Afin de prouver la formule (2.30) on utilise d'abord la propriété (2.15) (si $q \leq p$) ou bien la propriété (2.27) (si $q \leq p$) est donc la propriété (2.23). Ceci donne :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}({}_aD_t^q f(t)) &= {}_aD_t^{q-p}\left\{{}_aD_t^{-q}({}_aD_t^q f(t))\right\} \\
&= {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[({}_aD_t^{q-j} f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(p-j+1)} \\
&= {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[({}_aD_t^{q-j} f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la dérivée connue de la fonction polynôme :

$${}_aD_t^{q-p}\left\{\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)}\right\} = \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)}.$$

## 2.4 La dérivée fractionnaire de $(t-a)^{\alpha}$

Calculons maintenant la dérivée fractionnaire ${}_aD_t^p$, au sens de Riemann-Liouville, de la fonction

$$f(t) = (t-a)^{\alpha},$$

où $\alpha$ est un nombre réel.

A ce propos, supposons que $n-1 \leq p < n$, et rappelons que, d'après la définition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{-(n-p)} f(t)) \qquad n-1 \leq p < n \tag{2.31}$$

En appliquant, dans la formule (2.31), l'intégrale fractionnaire d'ordre $\beta = n-p$ de cette fonction, que nous avons déjà évaluée ( voir la formule, i,e

$${}_aD_t^{-\beta}\Big((t-a)^{\alpha}\Big) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta}$$

non obtenons

$${}_aD_t^{p}\Big((t-a)^{\alpha}\Big) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}(t-a)^{\alpha-p} \tag{2.32}$$

et la seule restriction pour $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ait son intégrabilité, à savoir $\alpha > -1$.

## 2.5 Composition avec les dérivées d'ordre entier

La composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparait dans plusieurs problèmes appliqués

Considérons la dérivée n-ième de la dérivée fractionnaire, au sens de Riemann-Liouville, d'ordre $p$. En utilisant la définition (2.17) de la dérivée de Riemann-Liouville, nous obtenons

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{k-\alpha}f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau =_a D_t^{n+k-\alpha}f(t) \quad (2.33)$$

$$(0 < \alpha < 1)$$

et en notant par $p = k - \alpha$ nous aurons

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^{n+p}f(t) \quad (2.34)$$

Afin de considérer les opérations d'ordre "inverse",on doit tenir compte du fait que

$$\begin{aligned} {}_aD_t^n f(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^n(\tau)d\tau \\ &= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

et que

$$ {}_aD_t^p g(t) =_a D_t^{p+n}({}_aD_t^{-n}g(t)) \quad (2.36)$$

En utilisant (2.35), (2.36) et (1.43) nous obtenons

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) &= {}_aD_t^{p+n}({}_aD_t^{-n}f^n(t)) \\ &= {}_aD_t^{p+n}\left\{f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right\} \\ &= {}_aD_t^{p+n}f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

qui est identique à la relation (1.43). De plus comme dans le cas des dérivée de Gruwald-Letnikov on voit que l'opérateur dérivée fractionnaire ${}_aD_t^p$ de Riemann-Liouville commute avec $\frac{d^n}{dt^n}$ ,i.e.,que

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) =_a D_t^{p+n} f(t) \tag{2.38}$$

si et seulement si la borne inférieure de la différentiation fractionnaire de la fonction $f(t)$ satisfait les conditions

$$f^k(a) = 0. \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1). \tag{2.39}$$

## 2.6 Composition avec les dérivées fractionnaires

On s'intéresse maintenant à la composition de deux opérateurs de dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville : ${}_a\mathbf{D}_t^p, (m-1 \leq p < m)$ et ${}_a\mathbf{D}_t^q, (n-1 \leq q < n)$

En utilisant par la suite la définition (2.19) de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, la formule (2.23) et la composition (2.34) avec des dérivées d'ordre entier, on aura :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m}\{{}_aD_t^{-(m-p)}({}_aD_t^q f(t))\\
&= \frac{d^m}{dt^m}\{{}_aD_t^{-(p+q-m)} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[({}_aD_t^{q-j} f(t))\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)}\\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[({}_aD_t^{q-j} f(t))\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

En interchangeant $p$ et $q$ (et donc $m$ et $n$),on peut écrire

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[({}_aD_t^{p-j} f(t))\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1+-p-j)} \tag{2.41}$$

la comparaison des relations (2.40) et (2.41) dit que dans le cas général les opérateurs ${}_aD_t^p$ et ${}_aD_t^q$ de dérivées fractionnaires, au sens de Riemann-Liouville ne commutent pas, avec seulement une seule exeption (en plus du cas trivial $p = q$ ) : à savoir pour $p \neq q$ on a :

$${}_a\mathbf{D}_t^p({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)) =_a \mathbf{D}_t^q({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) =_a \mathbf{D}_t^{p+q} f(t) \tag{2.42}$$

seulement si les deux sommes dans les membres de droite de (2.40) et (2.41) sont nulles. Pour cete raison nous demandons la vérification simultanée des conditions

$$\left[\left({}_aD_t^{p-j}f(t)\right)\right]=0, \qquad (j=1,2,\cdots,m) \tag{2.43}$$

et les conditions

$$\left[\left({}_aD_t^{q-j}f(t)\right)\right]=0, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2.44}$$

Comme on va le voir dans la section suivante, si $f(t)$ admet un nombre suffisant de dérivées continues, alors les conditions (2.43) sont équivalentes à

$$f^{(j)}(a)=0, \qquad (j=1,2\ldots,m-1), \tag{2.45}$$

et les conditions (2.44) sont équivalentes à

$$f^{(j)}(a)=0, \qquad (j=1,2\ldots,n-1), \tag{2.46}$$

et la relation (2.42) a lieu (i.e, les dérivées p-ième et q-ième commutent )si

$$f^{(j)}(a)=0, \qquad (j=1,2\ldots,r-1), \tag{2.47}$$

ou $r=max(n,m)$.

## 2.7 Lien avec l'approche de Grunwald-Letnikov

Comme mentioné ci-dessus, il existe une relation entre les approches de différentiation d'ordre réel arbitraire de Riemann-Liouville et de Grunwald-Letnikov. Les conditions exactes de l'équivalence de ces deux approches sont les suivantes.

Supposons qus la fonction $f(t)$ est $(n-1)-$fois continument différentiable dans l'intervalle $[a,T]$ et que $f^{(n)}(t)$ est intégrable sur $[a,T]$. Et donc pour tout $p(0<p<n)$la dérivée ${}_aD_t^pf(t)$ au sens de Riemann-Liouville, existe et coïncide avec la dérivée ${}_aD_t^pf(t)$ au sens de Grunwald-Letnikov. Et si $0\leq m-1\leq p<m\leq n$, alors pour $a<t<T$ nous avons

$${}_a\mathbf{D}_t^pf(t)={}_a D_t^pf(t)=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{f^j(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)}+\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t\frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}} \tag{2.48}$$

En effet, d'une part, le membre de droite de la formule (2.48) est égale à la dérivée ${}_aD_t^p f(t)$ de Grunwald-Letnikov. D'autre part, on peut écrire

$$\frac{d^m}{dt^m}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{f^j(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)}+c,$$

laquelle, après intégration par parties, prend la forme de la dérivée ${}_a\mathbf{D}_t^p f(t)$ au sens de Riemann-Liouville.

Le cas particulier suivant de la relation (2.48) est important de point de vue applications numériques.

Si $f(t)$ est continue et $f'(t)$ est intégrable sur $[a, T]$, alors pour tout $p(0 < p < 1)$, les deux dérivées de Riemann-Liouville et de Grunwald-Letnikov existent et peuvent s'écrire sous la forme :

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) =_a D_t^p f(t) = \frac{f(a)(-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau)d\tau \quad (2.49)$$

Evidemment la dérivée donnée par l'expression (2.49) est intégrable.

Une autre propriété importante découlant de (2.48) est que l'existence de la dérivée d'ordre $p > 0$ entraine l'existence de la dérivée d'ordre $q$ pour tout $q$ tel que $0 < q < p$. En effet,si on note par $g(t) =_a \mathbf{D}_t^{-(1-p)} f(t)$, alors on peut écrire

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d}{dt}({}_a\mathbf{D}_t^{-(1-p)} f(t)) = g'(t).$$

En remarquant que $g'(t)$ est intégrable et en tenant compte de la formule (2.38)et de l'inégalité $0 < 1+q-p < 1$, on conclut que la dérivée ${}_a\mathbf{D}_t^{1+q-p} g(t)$ existe et est intégrable. Et donc en utilisant la propriété (2.27) nous obtenons

$${}_a\mathbf{D}_t^{1+q-p} g(t) =_a \mathbf{D}_t^{1+q-p}({}_a\mathbf{D}_t^{-(1-p)} f(t) =_a \mathbf{D}_t^q f(t).$$

Sous les mêmes hypothèses sur la fonction $f(t)$ ($f(t)$ est $(m-1)-$fois continument différentiable et sa $m-$ième dérivée et intégrable dans $[a, T]$ ) et sur $p(m-1 \le p < m)$ la condition

$$\Big[({}_a\mathbf{D}_t^p f(t))\Big]_{t=a} = 0 \quad (2.50)$$

et équivalente aux conditions

$$f^{(j)}(a) = 0, \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, m-1). \tag{2.51}$$

En effet, si les conditions (2.51) sont vérifiées, alors en faisant tendre $t$ vers $a$ dans (2.48), on obtient immédiatement (2.50).

D'autre part, si la condition (2.50) est vérifiée, alors en multipliant par la suite les deux membres de (2.48) par $(t-a)^{p-j}, (j = m-1, m-2, m-3, ..., 2, 1, 0)$ et en prenant les limites quand $t \to a$ nous obtenons $f^{m-1}(a) = 0, f^{m-2}(a) = 0, ..., f''(a) = 0, f'(a) = 0, f(a) = 0$ i.e les condition (2.51).

Et donc, (2.50) a lieu si et seulement si (2.51) est vérifiée.

De l'équivalence des conditions (2.50)et(2.51), il vient immédiatement que si, pour un certain $p > 0$ la dérivée $p$-ième de $f(t)$ et égale à zéro en la borne $t = a$, alors toutes les dérivées d'ordre $q(0 < q < p)$ sont aussi égales à zéro en $t = a$ :

$$\left[ ({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) \right]_{t=a} = 0.$$

# Bibliographie


[1] . Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.