République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2017/2018

Etude de quelques classes d'équations différentielles implicites

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Boumaza Yacine [1]

Sous la direction de

Pr. Abbas Saïd

Soutenue le 19/06/2018 devant le jury composé de

M. Ouakkas Seddik	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. Abbas Saïd	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mlle. Mostefai Fatima Zohra	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
M. Djerfi Kouider	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : yacine.20boss@gmail.com

Dédicaces

***J**e rends grâce a notre dieu le tout mis corde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoir venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humait et de gratitude à :*

***M**es parents, les êtres les plus chers a mon cœur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.*

***M**es très chères sœurs " **Asmaa**, **Soumia** et **Marwa** " , mon très chère frère "**Mohamed**" et toute ma famille.*

***M**es amies*

***M**es amies plus proche*

***E**t tous les étudiants Promo 2^{eme} année Master Math Géomitrie ,Analyse et Probabilité.*

***E**t tous les enseignants que j'ai eux pendant mes années.*

Boumaza Yacine.

Remerciments

***E**n préambule à ce mémoire, nous remercions d'abord le bon dieu tout puissant.*

***E**t je souhaite adresser sincèrement ici tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apportée leur aide de prés où de loin et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce travail.*

***T**out d'abord Professeur **S. Abbas** directeur de ce mémoire, pour son suivi, l'intérêt qu'il a porté à ce modeste travail de recherche et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.*

***D**es remerciements à tous les professeurs qui ont fait de leurs mieux afin de nous offrir de bonnes études et qui se sont montrer très compréhensifs à notre égard.*

***Q**ue soient, enfin, remerciés tous les membres de jury qui ont bien voulu accepter de lire ce travail et de l'évaluer.*

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie. Si dans les premières investigations, l'on s'attachait surtout à en calculer les solutions au moyen de fonctions déjà connues, très vite ce point de vue s'affirma trop étroit ; c'est qu'en effet le problème fondamental de la théorie des équations différentielles est de déduire les propriétés des solutions d'une équation ou d'un système donné de la forme analytique de ceux-ci. En général les équations qui résultent d'une investigation théorique en mathématiques ou en physique ne sont pas explicitement intégrables et constituent, bien souvent, la principale source pour la définition de nouvelles fonctions dont les propriétés peuvent être prévues par une analyse systématique de grandes classes d'équations ou de systèmes.

On développe les méthodes propres à mettre en évidence l'existence et l'unicité de solutions sous des conditions appropriées.

Une équation différentielle est une équation de la forme $y' = f(t, y)$ où f est une fonction (continue) sur un ouvert U de R^2 (U est appelé le domaine de l'équation différentielle). La solution de cette équation différentielle est une fonction y, définie et dérivable sur un intervalle ouvert I, avec $(t, y(t))$ est dans U, et $y'(t) = f(t, y(t))$.

L'équation différentielle de la forme précédente s'appelle une équation différentielle du premier ordre. On recontre aussi souvent des équations différentielles implicites du premier ordre, de la forme $y' = f(t, y, y')$.

Pour généraliser cette étude il faut se placer dans un espace à trois dimensions, de coordonnées notées (x, y, p). À l'équation différentielle est associée la surface d'équation $F(x, y, p) = 0$ (la coordonnée p permet de représenter y'). Les solutions sont des courbes tracées sur la surface. Les difficultés rencontrées viennent de ce que ces courbes sont projetées sur le plan (x, y). L'application de projection connaît des points critiques aux points où le gradient de F est vertical. Ce sont ces points qui se projettent en la parabole verte.

Les équations différentielles qui peuvent se mettre sous forme résolue jouissent de bonnes propriétés théoriques, avec sous certaines hypothèses. Un théorème d'existence et d'unicité de solutions est le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans le cas contraire, on dit que l'équation différentielle est sous forme implicite. On essaie sur les domaines les plus grands possibles de mettre l'équation différentielle sous forme résolue. Puis on doit procéder au raccordement des solutions obtenues. Récemment, une attention considérable a été accordée à l'existence de solutions des équations différentielles implicites avec conditions initiales ou des conditions aux limites voir par exemple (1) et (2).

L'objectif de ce travail consiste a étudier l'existence des solutions de quelques classes d'équations différentielles implicites. Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe (Le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder et le théorème de Schauder).

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus il fournit un algoritme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, la preuve que la fonction est contractante peut entraîne de laborieux calculs et d'autre part les conditions sur la fonction et les espaces étudiés restreignent le nombre de cas aux quells on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930 est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach par Juliusz Schauder. Il intervient dans la démonstration de l'existence des solutions d'équations différentielles particulièrement dans notre cas pour le problème de Cauchy.

Notre travail contient une introduction et **trois chapitres**.

Dans **le premier Chapitre**, nous allons présenter des notations, des définitions et certains lemmes préliminaires et quelques théorèmes de point fixe.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), u'(t)); \quad t \in I := [0, T] \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{où } T > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction donnée.

Qui interprète quelques problémes de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires dans le cas borné. Nous présentons deux résultats, le premier est basé sur le principe de contraction de Banach pour prouver l'existence et l'unicité des solutions avec un exemple, et l'autre résultat basé sur le théorème de Schauder particulièrement utile pour prouver l'existence des solutions qui n'est pas nécessairement unique.

Dans **le troisième Chapitre**, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle partielle du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) := u_t(t,x) = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x)) \quad \text{si} \quad (t,x) \in J := [0,T] \times [0,b], \\ u(0,x) = \phi(x); \quad x \in [0,b], \quad \text{où } T, b > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ et } \phi : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

deux fonctions données.

On achève ce mémoire par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliménaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Définitions et Notations

Espace de Banach

Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ où $\mathcal{C}$ et $\|.\|$ est une norme sur E.

Définition 1.1.1. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy dans E si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \eta, \|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.1.2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_p \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_p, \|u_n - l\| < \epsilon.$$

Définition 1.1.3. *L'espace normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si et seulement* *si toute suite de Cauchy d'éléments de cet espace converge dans lui même.*

Exemple 1.1.1. *Soit les espaces vectoriels normés :*

- *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*
- $(\mathbb{R}, |.|)$ *est complet.*
- $(\mathbb{Q}, |.|)$ *n'est pas complet. En effet, la suite de Cauchy* $(1+\frac{1}{n})^n$ *dans* $\mathbb{Q}$ *converge vers* $e \notin \mathbb{Q}$.

Définition 1.1.4. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Exemple 1.1.2. *Soit* $I := [0,T]$ *où* $T > 0$, *et* $J := I \times [0,b]$ *où* $b > 0$.

- *L'ensemble* $C(I,\mathbb{R})$ *des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$, *est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_C = \sup_{t\in I} |u(t)|.$$

  Aussi, $C(J,\mathbb{R})$ *est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_C = \sup_{(t,x)\in J} |u(t,x)|.$$

- *L'ensemble* $BC(J,\mathbb{R})$ *des fonctions continues qui sont bornées est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{BC} = \sup_{(t,x)\in J} |u(t,x)|.$$

Continuité et équicontinuité

Définition 1.1.5. *Soient* $(E, \|.\|)$ *et* $(E', \|.\|')$ *deux espaces normés.*

Une fonction $f : E \longrightarrow E'$ *est dite continue en* $x_0 \in E$ *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|' < \epsilon.$$

C-à-d :

$$\lim_{x \longmapsto x_0} f(x) = f(x_0).$$

Et on dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.1.6. *Soit* M *un sous ensemble de* $C(I, \mathbb{R})$; $I := [0, T]$, $T > 0$.

(i) - on dit que M *est équicontinu en* $f \in M, \forall u, v \in I$, *si*

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, *tel que* $|f(u) - f(v)| \leq \epsilon$, *pour* $f \in M$ *et* $\forall u, v \in I$ *vérifiant :* $|u - v| < \eta$.

(ii) - on dit que M *est équicontinu sur I, s'il est équicontinu pour tout* $v \in I$.

Compacité.

Définition 1.1.7. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé. On dit que* E *est relativement compact si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un recouvrement fini de* E *par des parties de* E *dans le diamêtre est inférieur à* ϵ.

Corollaire 1.1.1 (3). *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n sur* $\mathbb{R}$ *où* $\mathcal{C}$ *de dimension fini. Les parties relativements compactes de* E *sont les parties bornées.*

Théorème 1.1.1. ***(Théorème de la convergence dominée)***[5]

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions complexes mesurables sur* X*.*

On suppose que :

1. $f_n(x)$ *converge presque partout vers une limite* $f(x)$*.*
2. *Il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait :* $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ *presque partout en* x*.*

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* f *dans cet espace :*

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Définition 1.1.8.
- *Un espace normé* $(E, \|.\|)$ *est dit compact s'il est relativement compact et complet.*
- *Une partie* P *d'un espace normé* $(E, \|.\|)$ *est dite compacte si le sous-espace normé* $(P, \|.\|_p)$ *est compact.*

Théorème 1.1.2 (3). *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n sur* E *de dimension fini. Alors les parties compactes de* E *sont les parties fermées et bornées de* E*.*

Convexité

Définition 1.1.9. *Ensemble convexe.*

On dit que $B_M \subset E$ *est convexe si :*

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in B_M, tx + (1-t)y \in B_M.$$

Exemple 1.1.3. • *Les sous-ensembles convexes de* $\mathbb{R}$ *des nombres réels sont les intervalles* $\mathbb{R}$.

• *Pour tout* $x \in E$ *et* $r \geq 0$, *la boule centrée en* x *et de rayon* r *(ouverte ou fermée) est convexe :*

$$B(x, r) := \{y \in E \ / \ \|x - y\| \leq r\}.$$

Opérateur intégral

Définition 1.1.10. *Soit* A *est un opérateur.*

On dit que A *est intégral linéaire s'il vèrife la condition suivante :*

$$(A\varphi)x = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt.$$

La fonction K *étant appelée noyau de l'opérateur* A.

Remarque 1.1.1. *Si* K *est une fonction continue de* $[a, b] \times [a, b]$, *l'opérateur* A *est appelé opérateur intégral à noyau continu* K.

Opérateur compact

Définition 1.1.11. *Soit* T *un opérateur d'un espace normé* X *dans un espace normé* Y. *On dit que* T *est compact s'il envoie tout ensemble borné dans* X *à un ensemble relativement compact dans* Y .

Définition 1.1.12. *On dit qu'un opérateur T est compact ; si et seulement si pour toute suite bornée $(u_n)_{n\geq 0} \subset X$, la suite $(Tu_n)_{n\geq 0}$ admet une sous suite convergente dans Y. Dans le cas où $X = C([a,b])$, le théorème suivant d'Arzelà-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité des opérateurs.*

Théorème 1.1.3. ***(Théorème d'Arzelà-Ascoli)***[5]
Une famille de fonctions $M \subset C([a,b])$ est compacte ; si et seulement si cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

Théorème 1.1.4. *Un opérateur intégral A de C([a,b]) dans C([a,b]) à noyau continu est un opérateur compact.*

Démonstration :

Soit E un sous ensemble borné de $C([a, b])$ alors, on a

$\|\varphi\| \leq M$, *pour tout* $\varphi \in E$, *de plus*

$$|A\varphi(x)| \leq M|b-a| \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)|, \forall x \in [a,b] \text{ et } A\varphi \in E.$$

D'ou l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, *d'ou pour tout x, t, z de $[a, b]$, on a*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-t| < \delta \Longrightarrow |k(x,z) - k(t,z)| < \frac{\epsilon}{M|b-a|}.$$

D'où,

$$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \epsilon, \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x,t \in [a,b] \text{ avec } |x-t| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzelà-Ascoli, alors A est compact.

1.2 Généralités sur les équations différentielles

Dans cette section, nous allons donner quelques définitions essentielles pour les équations différentielles dans le cas générale.

Définition 1.2.1. *On appelle équation différentielle (ED) d'ordre n, toute relation de la forme :*

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

liant à une fonction inconnue y de la variable t et ses dérivées successives $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Exemple 1.2.1. *Soit les équations différentielles suivantes :*

- $ty' + y - y^2 \ln t = 0.$
- $y'' - 3y' + 2y = 0.$
- $y''' - 5y' + y = \sin 2t.$
- $y^{(4)} + y'' - 3y = 9e^{2t}.$
- $(1 - t^2)y^{(n)} - (2t - 3)ty^{(n-1)} - (n - 2)^2 y^{(n-2)} = 0.$

Définition 1.2.2. *L'équation différentielle est résolue par rapport à $y^{(n)}$ si la relation précédente peut se mettre sous la forme :*

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.1}$$

Définition 1.2.3. *On appelle intégrale ou solution de l'équation différentielle (1.1) sur un intervalle I, toute fonction $y = f(t)$ n fois dérivable sur I, vérifiant :*

$$f^{(n)} = F(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I.$$

La courbe plane définie par $y = f(t)$ est appelée courbe intégrale de (1.1).

1.3 Equations différentielles implicites

Nous distinguons deux cas dans cette section :

- Equations différentielles ordinaires implicites.

- Equations différentielles implicites aux dérivées partielles.

1.3.1 Equations différentielles ordinaires implicites

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

On considère une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$y' = f(t, y, y'), \quad (t, y, y') \in I \times \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

On dit que cette équation est une équation différentielle implicite ordinaire.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy correspondant à cette équation est la recherche les solutions y de (1.2) telles que $y(t_0) = y_0$.

Notation : *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y, y'), \quad (t, y, y') \in I \times \mathbb{R}^2 \\ \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3}$$

Définition 1.3.1. *Une solution du problème de Cauchy (1.3) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec la condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

(i) - Pour tout $t \in I$, $(t, y(t), y'(t)) \in I \times \mathbb{R}^2$,

(ii) - Pour tout $t \in I$, $y' = f(t, y, y')$,

(iii) - $y(t_0) = y_0$.

Théorème 1.3.1 (3). *On suppose que f est continue sur $I \times \mathbb{R}^2$ et (t_0, y_0) un point fixe. Soit y une fonction définie sur I telle que $t_0 \in I$; $(y : I \longrightarrow \mathbb{R})$. On dit que y est une solution de (1.3) sur I si et seulement si ; elle vérifie*

1. *Pour tout $t \in I$, $(t, y(t), y'(t)) \in I \times \mathbb{R}^2$,*
2. *y est continue sur I,*
3. *Pour tout $t \in I$,*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), y'(s))ds.$$

La solution y du problème de Cauchy est appelée l'intégrale du problème.

1.3.2 Equations différentielles implicites aux dérivées partielles

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables :

$$(t, x, \ldots) \longmapsto u(t, x, \ldots).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

Exemple 1.3.1. *Soit l'EDP très simple* $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.
où u est une fonction inconnue de t et x. Cette équation implique que les valeurs u(t, x) sont indépendantes de t. Les solutions de cette équation sont :
$u(x, y) = f(y)$, *où* f *est une fonction de x.*

Notation : u_t *est la dérivée partielle de u(t, x) par rapport à t, soit avec les notations habituelles du calcul différentiel :*

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Définition 1.3.2. *Soient* $\Omega :=]a,b[\times]c,d[$ *une partie de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi :]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions. Considérons le problème de cauchy suivant :*

pour tout $(t,x) \in \Omega$ *et* $u, u_t \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x)), \\ u(0,x) = \phi(x); \quad x \in]c,d[. \end{cases}$$

Ce problème est appelé EDP implicite avec une condition initiale.

Exemple 1.3.2. *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{e^{-t+x}}{(e^{t+2x}+7)(1+|u(t,x)|+|u_t(t,x)|)}; \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times [0,1]; \\ u(0,x) = x^3 + 2, \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dans cet exemple, nous avons

$$f(t,x,u,u_t) = \frac{e^{-t+x}}{(e^{t+2x}+7)(1+u(t,x)+u_t(t,x))}, \quad (t,x) \in [0,1] \times [0,1],$$

et

$$\phi(x) = x^3 + 2, \quad x \in [0,1].$$

1.4 Les théorèmes de point fixe

Théorème 1.4.1. ***(Théorème de point fixe de Banach)***[1]
Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ *une application strictement contractante i.e. Il existe* $0 < l < 1$ *telle que, pour tout* $u, v \in X$

$$d(f(u), f(v)) < ld(u, v).$$

Alors il existe un unique point fixe u_0 *(i.e),* $f(u_0) = u_0$.

Théorème 1.4.2. ***(Théorème du point fixe de Schauder)***[1]
Soit E un espace de Banach, M un convexe, fermé et borné de E, et $N : M \longrightarrow M$ *un opérateur continu et N(M) relativement compact. Alors N admet au moins un point fixe dans M.*

Théorème 1.4.3. ***(Alternative non linéaire de type Leray-Schauder)***[1]
Soit X un espace de Banach, et C un sous-ensemble convexe non vide de X. U *un ouvert de* C *et* $0 \in U$, *et* $T : \overline{U} \longrightarrow C$ *est un opérateur continu et compact. Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite,*

(P_1) *T admet un point fixe dans* $\overline{U}$, *ou*

(P_2) *Il existe* $\lambda \in]0, 1[$ *et* $u \in \partial U$ *avec* $u = \lambda N(u)$.

1.5 Lemmes Préliminaires

Lemme 1.5.1. *Soit $g \in C(I, \mathbb{R})$. Une fonction $u \in C(I, \mathbb{R})$ telle que sa dérivée $\frac{d}{dt}$ existe et est intégrable sur I est une solution du problème suivante :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = g(t); \quad t \in I \\ u(0) = u_0; \quad u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.4}$$

telle que $I := [0, T]$ et $\frac{d}{dt}u(t) = u'(t)$. Si seulement si u vérifie l'equation itégrale :

$$u(t) = u(0) + \int_0^t g(s))ds, \ t \in I. \tag{1.5}$$

Preuve. Soit $u(t)$ une solution du problème (1.4).

Alors ;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= g(t) \\ \int_0^t \frac{d}{ds}u(s)ds &= \int_0^t g(s)ds \\ u(t) - u(0) &= \int_0^t g(s)ds \\ u(t) &= u(0) + \int_0^t g(s)ds. \end{aligned}$$

Maintenant si u(t) vérifie (1.5). Il est claire que u(t) vérifie

$u(0) = u_0$ et $\frac{d}{dt}u(t) = g(t); \quad t \in I.$ ■

Lemme 1.5.2. *Soit* $h \in C(J, \mathbb{R})$. *Une fonction* $u \in C(J, \mathbb{R})$ *est solution du problème suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = h(t,x); \;\; (t,x) \in J \\ \\ u(0,x) = \phi(x); \;\; x \in [0,b], \end{cases} \tag{1.6}$$

où $J = [0,T] \times [0,b]$, *et* $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = u_t(t,x); \quad (t,x) \in J$

Si et seulement si u(t,x) vérifie

$$u(t,x) = \phi(x) + \int_0^t h(s,x) ds. \tag{1.7}$$

Preuve. Soit $u(t,x)$ une solution du problème (1.6).

Alors ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= h(t,x) \\ \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} u(s,x) ds &= \int_0^t h(s,x) ds \\ u(t,x) - u(0,x) &= \int_0^t h(s,x) ds \\ u(t,x) &= \phi(x) + \int_0^t h(s,x) ds. \end{aligned}$$

Maintenant si u(t, x) vérifie (1.7). Il est claire que u(t, x) vérifie

$u(0,x) = \phi(x)$ et $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = g(t,x); \quad t \in I.$ ∎

Chapitre 2

Equations Différentielles Ordinaires Implicites

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles ordinaires implicites du premier ordre.

2.1 Introduction

Une équation différentielle ordinaire implicite se présente sous la forme suivante :

$$u'(t) = f(t, u(t), u'(t)); \quad t \in I := [0, T], \tag{2.1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

où $T > 0$,

$$f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

une fonction donnée.

Définition 2.1.1. *Une fonction $u \in \mathbf{C}(I, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (2-1)-(2-2), si $u(0) = u_0$, et u vérifie l'équation (2-1) dans $\mathbb{R}$.*

Lemme 2.1.1 (2)**.** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors le problème (2.1)-(2.2) est équivalent au problème du solution de l'equation intégrale*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds,$$

où $g \in C(I)$, avec

$$g(t) = f\left(t, u_0 + \int_0^t g(s)ds, g(t)\right).$$

2.2 Résultats d'unicité

Maintenant, nous présentons une condition suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (2-1)-(2-2).

Théorème 2.2.1. *Supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :*

$(\mathbf{H_1})$ - *Pour tout $a, b, u, v \in \mathbb{R}$ il existe des constantes $d > 0$ et $0 \leq h < 1$,*

$$|f(t,u,a) - f(t,v,b)| \leq d|u-v| + h|a-b|.$$

Si

$$\frac{Td}{1-h} < 1, \tag{2.3}$$

alors, le problème (2.1)-(2.2) possède une solution unique définie sur I.

Preuve. Considérons l'opérateur $N : C(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C(I,\mathbb{R})$; pour tout $g \in C(I,\mathbb{R})$.

On a

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds;\ t \in I,$$

avec

$$g(t) = f\left(t, u_0 + \int_0^t g(s)ds, g(t)\right).$$

D'après le Lemme 2.1.1, le problème de trouver les solutions de (2.1)-(2.2) est réduit à le fait de trouver les solutions de l'équation :

$$(Nu)(t) = u(t);\ \text{pour tout } u \in C(I,\mathbb{R}) \text{ et } t \in I.$$

Soient $u, v \in C(I),$ et $t \in I$.

Alors, on trouve

$$|N(u)(t) - N(v)(t)| \leq \int_0^t |g(t) - L(t)| ds, \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{aligned} g(t) = & \quad f(t, u(t), g(t)), \\ L(t) = & \quad f(t, v(t), L(t)). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse H_1, nous avons

$$|g(t) - L(t)| \leq d|u - v| + h|g(t) - L(t)|,$$

d'où

$$\begin{aligned} |g(t) - L(t)| &\leq \frac{d}{1-h}|u(t) - v(t)| \\ &\leq \frac{d}{1-h}\|u - v\|_C. \end{aligned}$$

Il s'ensuit de (2.3) que

$$\begin{aligned} |(Nu)(t) - (Nv)(t)| &\leq \int_0^t \frac{d}{1-h}\|u - v\|_C ds \\ &\leq \frac{d}{1-h}\|u - v\|_C \int_0^T ds. \end{aligned}$$

d'où

$$\|(Nu) - (Nv)\|_C \leq \frac{Td}{1-h}\|u - v\|_C.$$

D'aprés (2.3) nous concluons que N est une contraction, d'où N admet un point fixe unique u d'après le principe de contraction de Banach. La fonction u est alors la celle solutions du problème (2.1)-(2.2). ■

Exemple 2.2.1. *Considérons le problème suivante :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = \frac{2e^{3t+4}}{e^{4t+5}(6+|-6u(t)|+6|u'(t)|)}; \qquad \forall t \in I := [0,1]; \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Posons

$$f(t, u(t), u'(t)) = \frac{1}{3e^{t+1}(1+|u(t)|+|u'(t)|)}; \ \forall t \in I := [0,1].$$

Il est claire que la fonction f est continue.

Pour tout $u, v, w, z \in \mathbb{R}$, et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(t,u,v) - f(t,w,z)| &= \left| \frac{1}{3e^{t+1}} \left(\frac{1}{(1+u+v)} - \frac{1}{(1+w+z)} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{3e^{t+1}} \left(|u-w| + |v-z| \right) \\ &\leq \frac{1}{3e}|u-w| + \frac{1}{3e}|v-z|. \end{aligned}$$

Donc la condition (H_1) est satisfaite avec $d = h = \frac{1}{3e}$, De plus la condition (2.3) est vraie avec T= 1.

En effet :

$$\frac{d}{1-h} = \frac{1}{3e-1} < 1.$$

Donc toutes les conditions du Théorème 1.4.1 sont satisfaites, le problème (2.5) possède une unique solution sur [0, 1].

2.3 Résultats d'existence

Théorème 2.3.1. *Supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :*

(H_2) *- Il existe duex fonctions positives* $p, q \in C := C(I, \mathbb{R})$*, tels que :*

$$|f(t, u, v)| \leq p(t)|u| + q(t)|v|.$$

Si

$$Tp^* + q^* < 1,$$

où

$$p^* = \sup_{t \in I} p(t), \quad q^* = \sup_{t \in I} q(t).$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution sur I.

Preuve.

Soit B_M la boule bornée, fermée et convexe de l'espace de Banach C définie par :

$$B_M = \{u \in C : \|u\|_C \leq M\},$$

où

$$M \geq |u_0| + \frac{Tp^*|u_0|}{1 - (Tp^* + q^*)}.$$

Considérons l'opérateur de point fixe. $N : B_M \longrightarrow B_M$ défini par :

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds,$$

avec $g \in C$, et

$$g(t) = f\left(t, u_0 + \int_0^t g(s)ds, g(t)\right).$$

Etape (1) : N est continu.

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans B_M, pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)| &\leq \left|u_0 + \int_0^t g_n(s)ds - u_0 - \int_0^t g(s)ds\right| \\
&\leq \left|\int_0^t g_n(s) - g(s)ds\right| \\
&\leq \int_0^t |g_n(s) - g(s)|\, ds,
\end{aligned}$$

où $g_n, g \in C(I, \mathbb{R})$, telle que :

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= f(t, u_n(t), g(t)), \\
g(t) &= f(t, u(t), g(t)).
\end{aligned}$$

puisque $u_n \longrightarrow u$ quand $n \longrightarrow \infty$ et f une fonction continue.

On a, $g_n(t) \longrightarrow g(t)$ quand $n \longrightarrow \infty$,

il existe $h \in C(I, \mathbb{R})$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, t \in I, |g_n(t)| \leq h(t) \quad \text{et} \int_0^t h(s)ds < +\infty.$$

Alors d'aprés le théorème de la convergence dominée, on obtient finalement

$$\int_0^t |g_n(s) - g(s)|ds \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} 0.$$

par conséquence

$$N(u_n) \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} N(u).$$

Etape (2) : <u>$N(B_M)$ est uniformément bornée.</u>

Pour tout $t \in I$, et $g \in C(I, \mathbb{R})$, nous avons :

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds,$$

avec

$$g(t) = f\left(t, u_0 + \int_0^t g(s)ds, g(t)\right).$$

On a

$$|(Nu)(t)| \leq |u_0| + \left|\int_0^t g(s)ds\right|. \tag{2.6}$$

Par(H_2)

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq p(t)\left|u_0 + \int_0^t g(s)ds\right| + q(t)|g(t)| \\ &\leq p^*\left(|u_0| + \int_0^t |g(s)|ds\right) + q^*|g(t)|, \end{aligned}$$

d'où

$$\|g\|_C \leq p^*(|u_0| + \|g\|_C.T) + q^*\|g\|_C,$$

donc

$$\|g\|_C \leq \frac{p^*|u_0|}{1 - (p^*.T + q^*)} = M_0.$$

Ainsi, (2.6) implique cela

$$\begin{aligned}|(Nu)(t)| &\leq |u_0| + M_0 \int_0^T ds \\ &\leq |u_0| + M_0 T \leq M.\end{aligned}$$

Donc $N(B_M) \subset B_M$, Comme B_M est bornée, alors $N(B_M)$ est uniformément bornée.

Etape (3) : $N(B_M)$ est équicontinue.

Soient $t_1, t_2 \in I,\ t_1 < t_2$, et soit $u \in B_M$, alors ;

$$|(Nu)(t_2) - (Nu)(t_1)| \leq \left| u_0 + \int_0^{t_2} g(s)ds - u_0 - \int_0^{t_1} g(s)ds \right|,$$

avec

$$\begin{aligned}g(t_1) &= f\left(t_1, u_0 + \int_0^{t_1} g(s)ds, g(t_1)\right), \\ g(t_2) &= f\left(t_2, u_0 + \int_0^{t_2} g(s)ds, g(t_2)\right).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}|(Nu)(t_2) - (Nu)(t_1)| &\leq \left| \int_0^{t_2} g(s)ds + \int_{t_1}^{0} g(s)ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |g(s)|ds \\ &\leq \sup_{t \in I} |g(t)| \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M(t_2 - t_1) \underset{t_1 \mapsto t_2}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $N(B_M)$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'opérateur $N : B_M \longrightarrow B_M$, est continu et relativement compact. Par conséquent, à partir de le Théorème 1.4.2, en déduit que l'opérateur N admet au moins un point fixe qui correspond à une solution du problème (2.1)-(2.2). ■

Exemple 2.3.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = \frac{(t^2-3)|u(t)|+e^t|u'(t)|}{1+|u(t)|+|u'(t)|}; \qquad \forall t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = 0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Posons

$$f(t,u(t),u'(t)) = \frac{(t^2-3)|u(t)|+e^t|u'(t)|}{1+|u(t)|+|u'(t)|}; \ \forall t \in [0,1].$$

Il est claire que la fonction f est continue.

Pour tout $u, v \in \mathbb{R},$ et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(t,u,v)| &\leq \left| \frac{(t^2-3)|u|+e^t|v|}{1+|u|+|v|} \right| \\ &\leq \frac{(t^2-3)|u|+e^t|v|}{1+|u|+|v|} \\ &\leq (t^2-3)|u|+e^t|v| \end{aligned}$$

Donc la condition (H_2) est satisfaite avec

$$\begin{aligned} p(t) &= t^2-3, \\ q(t) &= e^t. \end{aligned}$$

De plus la condition $Tp^* + q^* < 1$,

est vraie avec $T = 1$.

En effet :

$$p^* + q^* = e - 2 < 1.$$

Donc toutes les conditions du Théorème 2.3.1 sont satisfaites,

Alors le problème (2.7) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Equations Différentielles Implicites aux Dérivées Partielles Du Premier Ordre

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation différentielle partielle implicite du premier ordre.

3.1 Introduction

Une équation différentielle partielle implicite se présente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) := u_t(t,x) = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x)), \qquad (3.1)$$

si $(t,x) \in J := [0,T] \times [0,b]$,

avec la condition initiale

$$u(0,x) = \phi(x); x \in [0,b], \qquad (3.2)$$

où $T, b > 0$,

$$f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ et } \phi : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

deux fonctions données.

Définition 3.1.1. *Une fonction $u \in C(J,\mathbb{R})$ est dite solution du (3.1)-(3.2) si u satisfait l'équations (3.1) dans J et la condition initiale (3.2) dans [0, b] :*

Lemme 3.1.1 (4). *Soit une fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Alors le problème (3.1)-(3.2) est équivalent au problème du solution de l'equation ;*

$$g(t,x) = f\left(t,x,\phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds, g(t,x)\right),$$

et si $g \in C(J)$ *est la solution de cette equation, alors*

$$u(t,x) = \phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds.$$

3.2 Résultats d'unicité

Dans la suite, nous présentons une condition pour l'existence et l'unicité d'un solution du problème(3.1)-(3.2).

Théorème 3.2.1. *Nous présentons l'hypothèse suivante :*

(H_1') *Pour tout* $u, v, w, z \in \mathbb{R}$ *il existe des constantes* $k > 0$ *et* $0 \leq l < 1$ *telle que :*

$$|f(t,x,u,v) - f(t,x,w,z)| \leq k|u-w| + l|v-z|.$$

Si

$$\frac{Tk}{1-l} < 1, \tag{3.3}$$

alors le problème (3.1)-(3.2) possède une unique solution sur J.

Preuve. Considérons l'opérateur $N : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$;

$$(Nu)(t,x) = \phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds, \tag{3.4}$$

avec

$$g(t,x) = f\left(t, x, \phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds, g(t,x)\right).$$

pour tout $(t,x) \in J := [0,T] \times [0,b]$.

Par le Lemme 3.1.1, le problème de trouver les solutions de (3.1) (3.2) est réduit à le fait de trouver les solutions de l'équation suivante :

$$(Nu)(t,x) = u(t,x), \text{pour tout } (t,x) \in J.$$

Soient $v, w \in C(J, \mathbb{R})$, alors pour $(t,x) \in J$,

on trouve

$$|(Nv)(t,x) - (Nw)(t,x)| \leq \int_0^t |g(s,x) - h(s,x)|ds, \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned} g(t,x) &= f\left(t, x, v(t,x), g(t,x)\right), \\ h(t,x) &= f\left(t, x, w(t,x), h(t,x)\right). \end{aligned}$$

Par (H_1')

$$\begin{aligned} |g(t,x) - h(t,x)| &\leq k|v(t,x) - w(t,x)| + l|g(t,x) - h(t,x)| \\ &\leq \frac{k}{1-l}|v(t,x) - w(t,x)| \\ &\leq \frac{k}{1-l}\|v - w\|_C. \end{aligned}$$

Ainsi, (3.5) implique cela

$$|(Nv) - (Nw)| \leq \int_0^t \frac{K}{1-L} \|v - w\|_C ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|(Nv) - (Nw)\|_C &\leq \frac{K}{1-L} \|v - w\|_C \int_0^T ds, \\ &\leq \frac{Tk}{1-l} \|v - w\|_C. \end{aligned}$$

D'aprés (3.3) nous concluons que N est une contraction. D'après le principe de contraction de Banach, l'opérateur N possède un point fixe unique qui représente l'unique solution de notre problème. ∎

Exemple 3.2.1. *Considérons le problème suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{3e^{t+1}}{6e^{2t+x+4}(1+|u(t,x)|+|u_t(t,x)|)}; \quad \forall (t,x) \in [0,1]\times[0,1]; \\ u(0,x) = x^3+2, \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.6}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x),u_t(t,x)) = \frac{1}{2e^{t+x+3}(1+|u(t,x)|+|u_t(t,x)|)};\ \forall (t,x) \in [0,1]\times[0,1].$$

Il est claire que la fonction f est continue.

pour tout $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$ *et* $(t,x) \in [0,1]\times[0,1]$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} |f(t,x,u_1,v_1) - f(t,x,u_2,u_2)| &= \left| \frac{1}{2e^{t+x+3}} \left(\frac{1}{1+u_1+v_1} - \frac{1}{1+u_2+v_2} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2e^{t+x+3}} \big(|u_1-u_2| + |v_1-v_2| \big) \\ &\leq \frac{1}{2e^3}|u_1-u_2| + \frac{1}{2e^3}|v_1-v_2|. \end{aligned}$$

Donc la condition (H_1') *est satisfaite avec* $k = l = \frac{1}{2e^3}$ *De plus la condition (3.3) est vraie avec T= 1.*

En effet

$$\frac{k}{1-l} = \frac{1}{2e^3-1} < 1,$$

Donc toutes les conditions du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, le problème (3.6) possède une unique solution sur $[0,1]\times[0,1]$,

3.3 Résultats d'existence

Dans la suite, nous présentons une condition néscessaire pour l'éxistence des solutions du problème (3.1)-(3.2).

Théorème 3.3.1. *Supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :*

(H_2') *Il existe* $p, q, d \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$|f(t,x,u,v)| \leq p(t,x) + q(t,x)|u| + d(t,x)|v|$$

pour tout $(t,x) \in J$ *et* $u, v \in \mathbb{R}$.

Si

$$d^* + q^*T < 1,$$

avec

$$d^* = \sup_{(t,x)\in J} d(t,x) \text{ } et \text{ } q^* = \sup_{(t,x)\in J} q(t,x),$$

alors le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solution définie sur $[0,T] \times [0,b]$.

Preuve. Considérons l'opérateur N défini dans (2.4).

Nous allons montrer que l'opérateur N est continue et compact.

Etape 1 : N est continue.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite converge vers u dans $C(J,\mathbb{R})$;

et soit $\gamma > 0$ telle que $\|u_n\|_C \leq \gamma$, nous avons

$$|(Nu_n)(t,x) - (Nu)(t,x)| \leq \int_0^t |g_n(t,x) - g(t,x)|ds,$$

où $g_n, g \in C(J, \mathbb{R})$, telle que :

$$\begin{aligned} g_n(t,x) &= f(t,x,u_n(t,x),g(t,x)), \\ g(t,x) &= f(t,x,u(t,x),g(t,x)). \end{aligned}$$

puisque $u_n \longrightarrow u$ quand $n \longrightarrow \infty$ et f une fonction continue.

On a, $g_n(t,x) \longrightarrow g(t,x)$ quand $n \longrightarrow \infty$

il existe $F \in C(J, \mathbb{R})$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (t,x) \in J, |g_n(t,x)| \leq F(t,x) \text{et} \quad \int_0^t F(s,x)ds < +\infty.$$

Alors d'aprés le théorème de la convergence dominée, on obtient finalement

$$\int_0^t |g_n(s,x) - g(s,x)|ds \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} 0.$$

par conséquence

$$N(u_n) \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} N(u).$$

Etape 2 : <u>N tronsforme les parties bornées dans des parties bornées dans $C(J, \mathbb{R})$.</u>

Pour $\varphi^* > 0$, il existe une constante positive τ telle que pour

$$u \in B_{\varphi^*} = \{u \in C(J, \mathbb{R}) \,/\, \|u\|_C \leq \varphi^*\}$$

On obtient : $\|N(u)\|_C \leq \tau$, pour tout $(t, x) \in J$.

On a

$$\begin{aligned}
(Nu)(t,x) &= \phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds \\
|(Nu)(t,x)| &= \left|\phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds\right| \\
&\leq |\phi(x)| + \int_0^t |g(s,x)|ds,
\end{aligned}$$

où $g \in C(J, \mathbb{R})$

telle que :

$$g(t,x) = f\left(t, x, \phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds, g(t,x)\right).$$

Par (H_2') et pour tout $(t, x) \in J$,

On a

$$\begin{aligned}
|g(t,x)| &\leq p(t,x) + q(t,x)\left|\phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds\right| + d(t,x)|g(t,x)| \\
&\leq p^* + q^*\left(|\phi| + \int_0^t |g(s,x)|ds\right) + d^*|g(t,x)|
\end{aligned}$$

où $p^* = \sup_{(t,x)\in J} p(t,x)$.

$$\begin{aligned}\|g\|_C &\leq p^* + q^*|\phi| + q^*\|g\|_C T + d^*\|g\|_C \\ &\leq \frac{p^* + q^*|\phi|}{1-(d^*+q^*T)} := M,\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^t \|g\|_C ds \leq MT,$$

pour $t \in [0,T]$. Ainsi

$$\|N(u)\|_C \leq |\phi| + MT := \tau.$$

Etape 3 : N transforme les bornées dans des parties équicontinues dans $C(J,\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0,T], x \in [0,b], t_1 < t_2$, et $u \in B_{\varphi^*}$.

Alors

$$\begin{aligned}|(Nu)(t_2,x) - (Nu)(t_1,x)| &= \left|\phi(x) + \int_0^{t_2} g(s,x)ds - \phi(x) - \int_0^{t_1} g(s,x)ds\right| \\ &= \left|\int_0^{t_2} g(s,x)ds + \int_{t_1}^{0} g(s,x)ds\right| \\ &\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} g(s,x)ds\right|,\end{aligned}$$

où $g \in C(J,\mathbb{R})$,

telle que :

$$g(t,x) = f\left(t, x, \phi(x) + \int_0^t g(s,x)ds, g(t,x)\right).$$

Mais

$$\|g\|_C \leq M$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |(Nu)(t_2,x) - (Nu)(t_1,x)| &\leq M \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut conclure que N est continu et complètement continu.

Etape 4 : L'estimation apriori.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un ouvert $U \in C(J,\mathbb{R})$ avec $u \neq \lambda N(u)$ pour $\lambda \in]0,1[$ et $u \in \partial U$, Soit $u \in C(J,\mathbb{R})$ et $u = \lambda N(u)$ pour certain $0 < \lambda < 1$.

Ainsi, pour tout $(t,x) \in J$,

$$u(t,x) = \lambda\phi(x) + \lambda \int_0^t g(s,x)ds.$$

Cela implique d'après (H_2) que, pour tout $(t,x) \in J$,

On obtient : $\|u\|_C \leq M$.

Posons

$$U = \{u : \|u\|_C < M+1\}.$$

Par le choix de U, il n'ya pas de $u \in \partial U$ tel que $u = \lambda N(u)$, pour $\lambda \in]0,1[$ Comme une conséquence du théorème 1.4.3, l'opérateur N admet un point fixe u dans $\overline{U}$ qui est une solution de notre problème (3.1)-(3.2) .

■

Exemple 3.3.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = 2t^3x + \frac{e^{t+x}|u(t,x)|+(t-6x)|u_t(t,x)|}{1+|u(t,x)|+|u_t(t,x)|}; \quad \forall (t,x) \in [0,1]\times[0,1]; \\ u(0,x) = e^x - 1, \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Posons

$$f(t,u(t,x),u_t(t,x)) = 2t^3x + \frac{e^{t+x}|u(t,x)| + (t-6x)|u_t(t,x)|}{1+|u(t,x)|+|u_t(t,x)|}; \forall (t,x) \in [0,1]\times[0,1].$$

Il est claire que la fonction f est continue.

Pour tout $u, w \in \mathbb{R}$, et $(t,x) \in [0,1]\times[0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(t,u,w)| &\leq 2t^3x + \frac{e^{t+x}|u| + (t-6x)|w|}{1+|u|+|w|} \\ &\leq 2t^3x + e^{t+x}|u| + (t-6x)|w|. \end{aligned}$$

Donc la condition (H_2') est satisfaite avec

$$\begin{aligned} p(t) &= 2t^3x, \\ q(t) &= e^{t+x}, \\ d(t) &= (t-6x). \end{aligned}$$

De plus la condition $Tq^* + d^*$ est vraie avec $T = 1$.

En effet

$$q^* + d^* = e^2 - 5 < 1.$$

Toutes les conditions du Théorème 3.3.1 sont satisfaites.

Donc le problème (3.7) admet au moins une solution définie sur $[0,1] \times [0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, Nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions de quelques classe d'équations différentielles implicites ordinaires et aux dérivées partielles.

On a commencé par quelques préliminaires sur l'espace de Banach et quelques définitions d'équation différentielle implicite avec des exemples, puis nous avons traité trois théorèmes du point fixe celui de Schauder et Banach et on a donné les lemmes préliminaires.

Ensuite, Nous avons montré l'existence et l'unicité des solutions d'une classe d'équations différentielles implicites par l'utilisation des théorèmes de point fixe de Banach et de schauder, comme on a donné des exemples sur cette problème.

Enfin, nous avons démontré l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle implicite aux dérivées partielles, en lui applique le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Learay-Schauder avec des exemples.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York, 2012.

[2] S. Abbas, M. Benchohra and A. N. Vityuk, On fractional order derivatives and Darboux problem for implicit differential equations, Frac. Calc. Appl. Anal. **15** (2) (2012), 168-182.

[3] F. Bouzaida, Etude de la stabilité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles, Mémoire de Master, Université de Saida, 2017.

[4] T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr. **189** (1998), 23-31.

[5] G. Messaoud, Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de Magister, Université de Ouargla, 2012.