République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherchescientifique"

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Condition de stabilité pour un réseau de file d'attente à deux stations et quatre classes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

Bergui Rachida[1]

Sous la direction de

Mme.O Benzatout

Soutenue le 21 mai 2017 devant le jury composé de

Mme. R. Raouane	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Mme. O. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreure
Mr. M. Kadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. F. Mokhtari	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : bergui32rachida@gmail.com

Remerciements

Je tiens à signifier notre gratitude et mes remerciements à
Mme O. Benzatout, qui, en tant que directrice de mémoire, pour ses conseils et pour son temps précieux qu'il m'a consacré.

Je remercie de manière égale tous les membres du jury qui ont accepté d'examiner ce mémoire et en particulier le président du jury.

Je tiens à exprimer notre reconnaissance envers tous les enseignants pour leurs efforts durant notre cursus universitaire.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin, par leurs conseils, leurs suggestions et par leurs encouragements afin de réaliser de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie des files d'attente s'applique en grande partie dans la modélisation des réseaux informatiques et de télécommunications, leur comportement est étudié avec des modèles probabilistes correspondant (réseaux de files d'attentes) dans le but d'optimiser leurs performances. Si (X(t)) est un processus de Markov de sauts représentant un modèle de réseaux de files d'attentes, il y a deux méthodes pour connaître le comportement du réseaux : expliciter les caractéristique du processus (X(t)) à l'état stationnaire et étudier le comportement asymptotique du réseau quand un paramètre devient grand (les limites fluides). L'étude du processus (X(t)) à l'état stationnaire est en général difficile, dans la plupart des modèles où le comportement à l'équilibre est explicité, la loi stationnaire est représentée par la fameuse forme produit. Pour l'étude du comportement asymptotique du réseau, on utilise la méthode des limites fluides. Cette méthode a été introduite récemment pour l'étude de la stabilité de certains réseaux par Rybko et Stolyar, puis Dai voir [4]. La méthode consiste à modifier le processus en accélérant le temps et en renormalisant en espace par un paramètre et d'étuder le comportement du processus modifié quand ce paramètre tend vers l'infini. Ce procédé présent l'avantage de gommer toutes les fluctuations indésirables qui n'ont aucun impact sur le comportement principal du réseau.

Le chapitre 1 présente la théorie des chaînes de Markov avec un exemple concret, à temps discret et à valeurs discrètes.

Le deuxième chapitre est consacré aux rappels des résultats généraux et aux définitions des limites fluides stochastiques.

Dans le chapitre 3, Nous étudions l'ergodicité du réseau de files d'attente de Lu-Kumar-Bramson sous la discipline de service FIFO et sous les conditions habituelles,

$$\rho_1 = m_1 + m_2 < 1 \text{ et } \rho_2 = m_2 + m_3 < 1$$

En utilisant le critère de modèle fluide présenté par Rybko , Stolyar et Dai, nous mntrons que si $\rho_1 \leq \rho_2$, alors le modèle fluide est stable et le réseau de files d'attente stochastique est ergodique .

Par conséquent, nous prouvons la conjecture de Whitt[9] et nous montrons que les conditions de stabilité des réseaux multiclasses de files d'attente sous la discipline FIFO obtenues par Chen et Zhang[3] ne sont pas optimales.

Chapitre 1

Chaînes de Markov

1.1 Définition

Soit I un ensemble dénombrable. Chaque $i \in I$ est appelé un état et I appelé un espace d'état. Une famille $(\lambda_i, i \in I)$ de nombres réels définit une mesures sur I si $\lambda_i \geq 0$ pour tout λ_i. Si en plus $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, alors cette famille définit une pronabilité sur I. On associe à cette mesure de probabilité sur I, une variable aléatoire X qui choisit à chaque état i avec probabilité λ_i.

Dans ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. une variable aléatoire X à valeurs dans I est une application de $\Omega \to I$ telle que $[X = i] \in \mathcal{F}$, $\forall i \in I$.

La famille $(\lambda_i = P(X = i), i \in I)$ définit la probabilité $\sum_{i\in I} \lambda_i \delta_i$ sur I. Cette dernière s'appelle la loi de X ou la distribution de probabilités de X. La variable aléatoire X modélise un état aléatoire qui prend l'état i avec probabilité λ_i.

Matrice stochastique. Une famille de nombres réels positifs

$$(p_{ij}, (i, j) \in I^2)$$

est un matrice stochactique si

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \text{ et } \sum_{j\in I} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I$$

Proposition 1 Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Preuve. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques . Le coefficient c_{ij} de A . B a pour expression

$$c_{ij} = \sum_{k \in I} a_{ik} b_{kj}.$$

Il est clair que $0 \leq c_{ij}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} c_{ij} &= \sum_{j \in I} \sum_{k \in I} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k \in I} a_{ik} (\sum_{j \in I} b_{kj}) \end{aligned}$$

Comme B est une matrice stochastique , alors

$$\sum_{j \in I} b_{kj} = 1 \qquad \forall k,$$

d'où $\sum_{j \in I} c_{ij} = 1$ car A est stochastique. Rappellons que pour toute suite $(u_{ij} : i, j \in I)$ de terme général $u_{ij} \geq 0$, on a

$$\sum_{i \in I} (\sum_{j \in I} u_{ij}) = \sum_{j \in I} (\sum_{i \in I} u_{ij})$$

Probabilités conditionnelles

On se donne au départ un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F})$ muni probabilité $\mathbb{P}$. Rappelons d'abord que si B est un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(A/B) = \tfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est appelée la probabilité de A sachant B. L'application

$$A \to \mathbb{P}(A/B) := \mathbb{P}^B(A)$$

est une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Le résultat est appelé la formule des probabilités composées .

Proposition 2

1. pour tous les événements A, B et C tels que $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$, on a

$$\mathbb{P}^{B}(A/C) = \mathbb{P}^{B\cap C}(A)$$

2. Pour toute probabilité $\mathbb{P}$ et pour tous les événements $B, A_1, ..., A_n$ tels que

$$\mathbb{P}(B \cap A_1 ... \cap A_{n-1}) > 0,$$

on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}^{A_1}(A_2)\mathbb{P}^{A_1\cap A_2}(A_3)...\mathbb{P}^{A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n).$$

En particulier ,
$\mathbb{P}^{B}(A_1\cap...\cap A_n) = \mathbb{P}^{B}(A_1)\mathbb{P}^{B\cap A_1}(A_2)\mathbb{P}^{B\cap A_1\cap A_2}(A_3)...\mathbb{P}^{B\cap A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n).$

Preuve.

1. En effet ,

$$\mathbb{P}^{B}(A/C) = \frac{\mathbb{P}^{B}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}^{B}(C)},$$

or $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}^{B}(C) = \mathbb{P}(B \cap C)$. Ce qui donne le résultat .

2. La formule est vraie pour $n = 1, 2$. Puis on procède par récurrence . On pose $A_1 \cap ... \cap A_{n-1} = A$
et $C = A_n$. Nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C\backslash A),$$

ceci nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence .

Définition 1 Une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale λ si :

1. $\forall i, P(X_0 = i) = \lambda_i$,
2. $\forall n$ et pour tout uplet $(i_0, \ldots, i_{n+1}) \in I^{n+2}$ tel que $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$ on a

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}\backslash X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}.$$

Théorème 1 Une suite de variable aléatoire (X_n) à valeurs dans I est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale λ si et seulement si :

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$$

pour tout uplet $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in I^{n+1}$

Preuve. On distingue deux cas :

1. $P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) > 0$ entraîne

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) &= P(X_n = i_n \backslash X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= p_{i_{n-1} i_n} P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

2. Si $P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 0$, alors l'égalaté $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P_{i_{n-1} i_n} P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = 0$ est aussi vérifiée.

Nous concluons que dans les deux cas,

$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{i_{n-1} i_n} P(X_{n-1} = i_{n-1}, X_0 = i_0)$.

D'où, par intération on obtiient le résultat :

Inversement, si la suite X_n vérifie la formule du théorème, alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} \backslash X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) &= \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_0 = i_0)}{P(X_0 = i_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} \\ &= p_{i_n i_{n+1}} \end{aligned}$$

à chaque fois que Le théorème suivant est une conséquence d'un théorème général de Kolmogrov. On peut consulter la preuve par exemple dans le livre de Billingsly.

Théorème 2 Soit P une matrice stochastique et λ une mesure de probabilité sur I. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une chaîne de Markov $(X)_n$ définie sur Ω de matrice de transition P et de loi initiale λ.

Remarques et commentaires.

1. Le dernier théorème montre que la loi de la chaîne ne dépend que de la loi initiale λ et de la matrice de transition P.

2. une chaîne de Markov de matrice P se représente sous forme d'un graphe. On relie l'état i à l'état j par une flèche si $P_{ij} > 0$.
3. D'après la proposition 2 on a $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = 0$ si et seulement si $P_{i_k i_{k+1}} = o$ pour un certain $0 \leq k < n$.

Dans la suite, l'entier n sera appelé indifféremment la date n ou bien la génération n. Pour chaque entier m, la suite $(X_n : n \geq m)$ sera appelée les descendants de la génération m.

Corollaire 1 Soit (X_n) une chaîne de Markov de loi initiale λ et de matrice de transitions p. Nous avons pour tous les états

$$i_0, \dots, i_m, j_1, \dots, j_n \in I$$

tels que $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$,

$$P(X_{m+n} = j_n, \dots, X_{m+1} = j_1 \backslash X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m) = p_{i_m j_1} \dots p_{j_{n-1} j_n}.$$

Preuve.

1. Si $P(X_{m+n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = 0$, alors forcément $p_{j_k j_{k+1}} = 0$ pour un certain $0 \leq k \leq n-1$ avec $j_0 = i_m$ (car $P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) > 0$). Dans ce cas, le corollaire est vérifié.
2. Si $P(X_{m+n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$, alors

$$\begin{aligned}
& P(X_{m+n} = j_n, \dots, X_{m+1} = j_1 \backslash X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m) \\
= \quad & P^B(X_{m+n} = j_n, \dots, X_{m+1} = j_1) \\
= \quad & P^B(X_{m+n} = j_n, \dots, X_{m+1} = j_1) \backslash X_{m+n-1} = j_{n-1}, \dots, X_{m+1} = j_1 \\
& P(X_{m+n-1} = j_{n-1}, ..., X_{m+1} = j_1) \\
= \quad & p_{j_{n-1} j_n} P^B(X_{m+n-1} = j_{n-1}, \dots, X_{m+1} = j_1)
\end{aligned}$$

où $B = [X_0 = i_0, \dots, X_m = i]$. Par itération on achève la preuve.

Changement de loi. Soit (X_n) chaîne de Markov de loi initiale λ et de matrice de transitions P. A chaque date m et à chaque état i pour lequel $P(X_m = i) > 0$, on associe la probabilité

$$A \to \mathbb{P}^{X_M = i}(A) = \mathbb{P}(A \backslash X_m = i).$$

Le dernier corollaire 1 nous permet de conclure que sous la probabilité $\mathbb{P}^{X_M=i}$, les événements $[X_{m+1}=j_1,\ldots,X_{m+n}=j_n]$ et $[X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_{m-1}=i_{n-1}]$ sont indépendants.

Dans la suite on note pour chaque $i\in I,\delta_i=(\delta_i(j),j\in I)$ où $\delta_i(j)=1$ si $i=j$ et 0 sinon, δ_i est une distribution de probabilités sur I.

Le théorème suivant montre que les descendants d'une génération m d'une chaîne de markov ne dépendent pas des ascendants de m.

Théorème 3 Soit (X_n) une chaîne de markov de loi initiale λ et de matrice de transitions P. Sachant que $X_m=i$, la suite $(Y_n=X_{n+m},n\geq 0)$ est une chaîne de markov de loi initiale δ_i et de matrice de transition P, c'est-à-dire

$$P^{X_m=i}(Y_{n+1}=i_{n+1},Y_n=i_n,\ldots,Y_1=i_1,Y_0=j)=\delta_i(j)_{p_{ii_1}}\ldots p_{i_ni_{n+1}}$$

pour tout entier n et pour tout uplet $(j,i_1,\ldots,i_{n+1})$.

Preuve. Il est clair que si $i\neq j$ alors,

$$P^{X_m=i}(Y_{n+1}=i_{n+1},Y_n=i_n,\ldots,Y_1=i_1,Y_0=j)=0$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} P^{X_mi}(Y_{n+1}=i_{n+1},Y_n=i_n,\ldots,Y_1=i_1,Y_0=i) & = & \\ P(X_{n+1+m}=i_{n+1},X_{m+n}=i_n,\ldots,X_{m+1} & = & i_1\backslash X_m=i)p_{ii_i}\ldots p_{i_ni_{n+1}}. \end{array}$$

Définition de l'indépendance relative à une probabilité . On se donne deux vecteurs aléatoires $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ et $Z=(Z_1,\ldots,Z_k)$, chaque composante prend ses valeurs dans I. On dit que Y et Z sont indépendants par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ si $\forall i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_k\in I$,

$$\mathbb{P}(Y=(i_1,\ldots,i_n),Z=(j_1,\ldots,j_k))=\mathbb{P}(Y=(i_1,\ldots,i_n))\mathbb{P}(Z=(j_1,\ldots,j_k)).$$

Proposition 3 Soit (X_n) une chaîne de Markov . Pour tout couple d'entiers (n,m) et pour tout $i\in I$, les vecteurs $Y=(X_0,\ldots,X_{n-1})$ et $Z=(X_{n+1},\ldots,X_{m+n})$ sont indépendantes par rapport à la probabilité $P^{x_n=i}$.

Preuve. Ceci est une conséquence du corolllaire 1.

1.2 Calcul de la loi de X_n

Le reste de cette section est consacré au calcul de la loi de X_n, c'est-à-dire $P(X_n = i)$.

Nous représentons la distribution de la probabilité λ sous forme d'une matrice à une ligne $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$. Ainsi le produit λP est une matrice à une ligne. Le j-ème coefficient

$$(\lambda P)_j = \sum_{i \in I} \lambda_i p_{ij}.$$

La matririce P^2 a pour coefficients

$$(P)^2_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj} := (P)^2_{ij}.$$

Par récurrence on définit $P^n = PP^{n-1} := (p^n_{ij}, i, j \in I)$ et par convention $(P)^0_{ij} = \delta_i(j)$.

La proposition suivante est une coséquence du théorème 1.

Proposition 4 Si P est une matrice stochastique, alors P^n est aussi une matrice stochastique

Théorème 4 Soit (X_n) une chaîne de Markov de loi initial λ et de matrice de transitions P. Alors, pour tout couple d'entiers m et n

1. $\mathbb{P}(X_n j) = (\lambda P^n)_j$,
2. Si $P(X_0 = i) > 0$ et $P(X_m = i) > 0$, alors $\mathbb{P}^{X_0 = i}(X_n = j) = \mathbb{P}^{X_m = i}(X_{m+n} = j) = p^{(n)}_{ij}$,
3. $p^{(n=m)}_{ij} = \sum_{k \in I} p^{(n)}_{ik} p^{(m)}_{kj}$.

Preuve. Nous avons par récurrence

$$\begin{aligned} P(X_n = j) = \sum_{i \in I} P(X_n = j \backslash X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) &= \sum_{i \in I} p_{ij} (\lambda P^{n-1})_i \\ &= (\lambda P^{n-1} P)_j = (\lambda P^n)_j. \end{aligned}$$

En particulier si $\lambda = \delta_i$ alors,

$$(\delta_i p^n)_j = p^{(n)}_{ij}.$$

1.3 Calcul de $p_{ij}^{(n)}$, règle générale

Soit P une matrice stochastique d'ordre M. La règle générale pour calculer $p_{ij}^{(n)}$, est la suivante :

1. On cherche les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_m$ de P en résolvant l'équation

$$\det(\lambda - P) = 0.$$

2. Si les valeurs propres sont distinctes, alors $p_{ij}^{(n)}$ ont la forrme

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in I} M_{a_k}(\lambda_k^n), \forall n \geq 1,$$

Où les coefficients $a_1, \ldots, a_m$ sont des constantes qui dépendent de i et j. La formule est valable pour $n = 0$ à condition que $\lambda_k \neq 0$ pour tout k.

3. Si une valeur propre λ_i est multiple d'ordre m_i alors la forme générale contient des termes $Q_i(n)\lambda_i^n$ Où $Q_i(n) = \sum_{k=0}^{m_i - 1} a_{k_i} n^k$.

1.4 Décomposition d'une chaîne de Markov

Nous allons définir une partitio de I en utilisant une relation d'équivalence entre les états. Ceci revient à décomposer la chaîne de Markov en petits "morceaux". Chaque morceau est facile à comprendre et ces morceaux nous parmettent de mieux comprendre chaîne de départ. Cette décomposition sera faite grâce à la notion des états qui communiquent entre eux.

Définition 2

1. On dit que i mène à j si

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty}[X_n = j] \backslash X_0 = i) > 0.$$

En particulier si $i = j$, alors

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty}[X_n = i] \ X_0 = i) = 1.$$

Dans la suite on notera par $i \to j$ la relation i mène à j.

2. On dit que i et j communiquent si $i \to j$ et $j \to i$. On notera dans la suite par
$$i \leftrightarrow j$$

Théorème 5 Soient $i \neq j$ deux états, les propositions suivantes sont équivalentes

1. $i \to j$.
2. Ils existe un entier $n \geq 1$ et des états $i_1, \ldots, i_{n-1}$ tels que
$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1}j} > 0.$$
3. Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Preuve. Nous avons pour toout entier n

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j \backslash X_0 = i) &\leq \mathbb{P}(\bigcup_{m=0}^{\infty} [X_m = j] \backslash X_0 = i) \\ &\leq (\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_n = j] \backslash X_0 = i), \end{aligned}$$

et pour tous $m \geq 0, i \ldots i_{m-1} \in I$,

$$\mathbb{P}([X_m = j, X_{m-1} = i_{m-1}, \ldots, X_1 = i_1] \backslash X_0 = i| \leq \mathbb{P}(\bigcup_{m=0}^{\infty} [X_m = j] \backslash X_0 = i)$$

$$= \mathbb{P}(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup i_1, \ldots, i_{m-1} [X_m = j, X_{m-1} = i_{m-1}, \ldots, X_1 = i_1] \backslash X_0 = i).$$

Ceci donne trivialement la preuve.

On définit maintenant une relation $\mathcal{R}$ entre les états de la façon suivante :

$$i \mathcal{R} j \textit{ si et seulement si } i \leftrightarrow j.$$

En utilisant le théorème 5, on vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur I. On obtient une partition de I. Chaque élément de la partition est une classe d'éléments de I qui communiquent entre eux.

Définition 3 Une classe C est dite fermée si $i \leftrightarrow j$ avec $i \in C$ entraîne que $j \in C$. Ainsi, on ne peut pas sortir d'une classe fermée. Un état i est absorbant si $\{i\}$ est une classe fermée. Une chaîne de Markov, d'espace des états I, est irréductible si I est une classe.

Proposition 5

1. Une classe C fermée si et seulement si $p_{ij} = 0$ pour tout $i \in C$ et $j \notin C$. en particulier si C est fermée, alors $p_{ij}^{(n)} = 0$ pour tous les entiers $n \geq 1$.
2. On suppose que C est fermée. Pour tout entier n, si dans P^n on efface les lignes et les colonnes des état qui n'appartiennent pas à C, alors on obtient une matrice stochastique d'une chaîne de Markov à valeurs dans C.

1.5 Temps d'atteinte et probabilités d'absorption

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace d'états I. Le temps d'atteinte d'un ensemble $A \subset I$ par la chaîne X est la variable aléatoire

$$H^A(X) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\},$$

avec la convention $H^A(X) = +\infty$ lorsque $\{n \geq 0 : X_n \in A\} = \emptyset$. L'entier $H^A(X, \omega)$ est la première génération de l'individu ω qui rentre dans A. La probabilité pour que les descendants de l'état i atteignent A est égale à

$$h_i^A = \mathbb{P}(H^A(X) < +\infty \backslash X_0 = i).$$

Lorsque A est une classe fermée, h_i^A est appelée la probabilité d'absorption.

Le temps moyen pris par la chaîne pour atteindre A est égale à $+\infty$ lorsque $\mathbb{P}(H^A(X) = +\infty \backslash X_0 = i) > 0$ et à

$$k_i^A = \sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(H^A(X) < n \backslash X_0 = i)$$

lorsque $\mathbb{P}(H^A(X) = +\infty \backslash X_0 = i) = 0$.

Remarques importantes.

1. Si (X_n) et (Y_n) sont deux chaînes avec la même matrice de transition, alors
$$h_i^A(X) = h_i^A(Y)\ \forall i.$$
2. i mène à j si est seulement si $h_i^{\{j\}} > 0$.

Théorème 6 Le vecteur des probabilités d'atteinte $h^A = (h_i^A : i \in I)$ est la solution minimale positive du système

$$\begin{cases} h_i^A = 1e & si \quad i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A & si \quad i \notin A. \end{cases}$$

La minimalités signifie que si $x = (x_i, i \in I)$ est une autre solution positive, alors $x_i \geq h_i^A, \forall i \in I$.

Preuve . Si $i \in A$, alors les descendants de i se trouvent dans A à la génération 0, c'est-à-dire $h_A(X) = 0$ sous $P^{X^0=i}$ et par suite $h_i^A = 1$. Si $i \notin A$ et $X_0 = i$, alors

$$\begin{aligned} H^A(X) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} &= 1 + \inf\{n \geq 0 : X_{n+1} \in A\} \\ &= 1 + H^A(Y). \end{aligned}$$

où $Y_n = X_{n+1}$. Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} h_i^A = P^{X_0=i}(H^A(X) < \infty) &= \sum_{j \in I} P^{X_0=i}(H^A(X) < \infty \backslash X_1 = j) P^{X_0=i}(X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} P^{Y_0=j}(H^A(y) < \infty) p_{ij} \\ &= \sum_{j \in I} h_j^A p_{ij}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant une autre solution positive de ce système. Nous avons $x_i = 1, \forall i \in A$. Si $i \notin A$, alors

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in I} p_{ij} x_j \\ &= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j. \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $j \notin A$ on applique à x_j cette dernière égalité. On obtient

$$x_i = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j_1 \notin A, j_2 \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} + \sum_{j_1 \notin A, j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} x_{j_2}.$$

Les deux premiers termes représentent

$$P^{X_0=i}(H^A = 1) + P^{X_0=i}(H^A = 2).$$

Par récurrence, on voit que pour tout entier n,

$$x_i \geq P^{X_0=i}(H^A \leq n)$$

d'où $x_i \geq P^{X_0=i}(H^A \leq +\infty) = h_i^A$.

Exemple. La chaîne de vie et de mort. On considère la chaîne de matrice de transition $p_{ii+1} = p_i, p_i, p_{ii-1} = q_i, \forall i \geq 1$ avec $p_i + q_i = 1$.

Cette chaîne modélise le nombre d'idividus d'une population. A chaque instant, on note par i le nombre d'individus de la population et à cet istant, il y a une naissance avec probabilité p_i ou bien une mort avec probabilité q_i.

Quelle est la probabilité de l'extinction de cette population ?

Le vecteur $(h_i := h_i\{0\}, i)$ est la solution minimale du sysyème

$$h_0 = 1, h_i = p_i h_{i+1} + q_i h_{i-1},$$

pour $i \geq 1$. On pose $u_i = h_{i-1} - h_i$, cette suite vérifie

$$p_i u_{i+1} = q_i u_i.$$

D'où

$$u_{i+1} = \frac{q_i ... q_1}{p_i ... p_1} u_1 := \gamma_i u_1,$$

et

$$u_1 + ... + u_i = h_0 - h_i,$$

ce qui donne

$$h_i = 1 - A\Big(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j\Big),$$

avec $A = u_1$ et $\gamma_0 = 1$. Il reste à déterminer A. La condition $0 \leq h_i \leq 1$ oblige

$$0 \leq A \leq \frac{1}{\sum_{j=0}^{i} \gamma_j}, \forall i.$$

Comme (h_i) doit être la solution minimale, alors nécessairement

$$A = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j},$$

c'est-à-dire

$$h_i = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j},$$

avec $h_i = 1$ lorsque $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = +\infty$.

Corollaire 2

1. Soit $i \notin A$ et on suppose que $h_i^A = 1$. Nous avons $h_j^A = 1$ pour tous les états j tel que $p_{ij} > 0$.
2. Si $h_i^A < 1$, alors il existe $j \in I$ tel que

$$h_j^A < 1, \ et \ p_{ij} > 0.$$

Preuve.

1. On sait déja que

$$h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A.$$

   Si $h_i^A = 1$, alors

$$1 - h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij}(1 - h_j^A) = 0$$

   et comme $(1 - h_j^A) \geq 0$, nous déduisons que

$$p_{ij}(1 - h_j^A) = 0$$

2. On a
$$h_i^A = \sum_{j\in I} p_{ij} h_j^A,$$
si $h_i^A < 1$, alors
$$1 - \sum_{j\in I} p_{ij} h_j^A = \sum_{j\in I} p_{ij}(1 - h_j^A) > 0.$$
Donc il existe $j \in I$ tel que
$$p_{ij}(1 - h_j^A) > 0$$
et par suite $p_{ij} > 0$ et $h_j^A < 1$.

Maintenant, nous donnons le théorème concernant le vecteur temps moyens d'atteinte $k^A = (k_i^A = \mathbb{E}^{X_0=1}[H^A] : i \in I)$ d'un ensemble A. Nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 1 Soit X une variable aléatoire réelle discrète et A un événement. On suppose que
$$\sum_n |x_n| P(X = x_n \backslash A) < +\infty.$$
Alors
$$\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = P[A] \mathbb{E}[X \backslash A]$$

Théorème 7 Le vecteur k^A est l'unique solution positive minimale du système
$$k_i^A = 0, \ \ si \ i \in A$$
et
$$k_i^A = 1 + \sum_{j\in I} p_{ij} k_j^A, \ \ si \ i \notin A.$$

Preuve. Si $i \notin A$ et $X_0 = i$, alors $H^A = 0$. D'où $k_i^A = 0$.

Si $i \in A$ et $X_0 = i$, alors $H^A(X) = 1 + H^A(Y)$ où $(Y_n = X_{n+1} : n \geq 0)$.

Ainsi
$$k_i^A = \mathbb{E}^{X_0=i}[H^A(X)] = \sum_{j\in I} \mathbb{E}^{X_0=i}[H^A(X) \backslash X_1 = j] p_{ij}.$$

Ceci entraîne que pour chaque j,

$$\mathbb{E}^{X_0=i}[H^A(X)\backslash X_1 = j] = \mathbb{E}^{Y_0=j}[1 + H^A(Y)] = 1 + k_i^A,$$

D'où le résultat.

On termine maintenant la preuve du théorème en montrant que k^A est minimale. En effet, soit $y = (y_i)$ une autre solution, alors

$$k_i^A = y_i = 0, \forall i \in A$$

et pour $i \notin A$,

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} y_j \\ &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} + \sum_{j_1 \notin A, j_2 \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} y_{j_0} \\ &= 1 + P^{X_0=i}(H^A \geq 1) + P^{X_0=i}(H^A \geq 2) + ... \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n \geq 1} P^{X_0=i}(H^A \geq n) = \mathbb{E}^{X_0=i}[H^A] = k_i^A,$$

alors $y_i \geq k_i^A$.

1.6 La propriété de Markov forte

Soit (X_n) une chaîne de Markov de loi initial λ et de transitions P. Nous avons vu que $\forall n$, le futur et le passé sont indépendants sachant le présente X_n. On se propose, dans cette section de généraliser cette propriété à un présent de la forme X_T où T est un "temps d'arrêt".

Définition 4 une application $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup +\infty$ est un temps d'arrêt si $[T = n]$ est $\sigma(X_0, ..., X_n)$ -mesurable pour tout entier n. Ceci signifie que la réalisation ou la nonréalisation de l'événement $[T = n]$ ne dépend que des observations $X_0, ..., X_n$

Exemples.

1. $T_j = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}$ est un temps d'arrêt $\forall j$.
2. $H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ est un temps d'arrêt $\forall A \in I$.

3. La dernière visite de $A, L^A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ n'est pas en général est un temps d'arrêt.

Proposition 6 Soit T un temps d'arrêt. L'ensemble des événements avant le temps d'arrêt T défini par

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{F} : B \cap [T \leq n] \in \sigma(X_0, ..., X_n) \forall n\} = \sigma(X_0, ..., X_T \mathbb{1}_{[T<+\infty]})$$

est une tribu.

Le but d'un temps d'arrêt est d'arrêter chaîne de Markov à un instant $T(\omega)$ aléatoire fini. Lorsque $P(T = +\infty) > 0$ on ne va s'intéresser qu'à l'événement $[T < +\infty]$. Sur cet événement, la variable aléatoire X_T est définie par

$$X_T = \sum_{n \geq 0} X_n \mathbb{1}_{[T=n]}.$$

On définit alors pour chaque $i \in I$, la probabilité $\mathbb{P}_i^T$

$$A \in \mathcal{F} \to \mathbb{P}(A \backslash T < +\infty, X_T = i)$$

qui ne mesure que la trace des événements sur $[T < +\infty, X_T = i]$.

On peut maintenant énoncer la propriété de Markov forte.

Théorème 8 Sous la probabilité $\mathbb{P}_i^T$, la suite des variables aléatoire $(X_{T+n}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov de loi initiale δ_i et de matrice de transition P. Plus précisément, nous avons pour tout entier n et tous les états $i_1, ..., i_{n+1}$,

$$\mathbb{P}(X_{T+n+1} = i_{n+1} \backslash T < +\infty, X_T = i, X_{T+1} = i_1, ..., X_{T+n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$$

Preuve. Soient $i_1, \cdots, i_n$ une suite d'éléments de I, nous avons

$$\mathbb{P}_i^T(X_T = i = 1$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i^T(X_{T+n+1 i_{n+1}} \backslash X_{T+1} = i_1, ..., X_{T+n} = i_n) &= \\ \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_i^T X_{k+n+1} = i_{n+1} \backslash X_{k+1} = i_1, ..., X_{k+n} &= i_n, T = k) P_i^T(T = k). \end{aligned}$$

L'événement $[T = k]$ est mesurable par rapport à $X_0, ..., X_k$ et pour chaque entier k, nous avons

$\mathbb{P}_i^T(X_{k+n+1} = i_{n+1} \backslash X_{k+1} = i_1, ..., X_{k+n} = i_n, T = k) = P(X_{k+n+1} = i_{n+1} \backslash T = k, X_k = i, ..., X_{k+n=i_n}) p_{i_n} i_{n+1}$

Ceci achève la preuve.

Le résultat suivant montre que le passé et le futur par rapport au temps d'arrêt T sont indépendants relativement à la probabilité

$$\mathbb{P}(.\backslash X_T = i, T < \infty) \textit{ pour tout } i \in I.$$

Corollaire 3 Nous avons pour les événements $A, B \in \mathcal{F}_t$ et pour tout $C \in \sigma(X_{T+n}, n \geq 0)$, $\forall i \in I$,

$\mathbb{P}(A \cap C \backslash B, X_T = i, T < \infty) = \mathbb{P}(A \backslash B, X_T = i, T < \infty)\mathbb{P}(C \backslash X_T = i, T < \infty)$.

Plus généralement, pour toutes fonctions positives f_1, f_2 respectivement $\mathcal{F}_T$-mesurable et $\sigma(X_{T+n}, n \geq 0)$ mesurable, nous avons

$$\mathbb{E}[f_1 f_2 \backslash B, X_T = i, T < \infty] = \mathbb{E}(f_1 \backslash B, X_T = i, T < \infty)\mathbb{E}(f_2\, , X_T = i, T < \infty).$$

1.7 État récurrent ou transient

Soit (X_n) une chaîne de Markov et soit i un état. Pour écourter les notations, nous allons utiliser l'abréviation anglo-saxonne suivante :

$$\limsup_{n \to +\infty} [X_n = i] = [X_n = i \ i.o.]$$

Définition 5

1. Un état i est récurrent si
$$P^{X_0=i}(X_n = i \ i.o.) = 1.$$
2. L'état i est transient si
$$P^{X_0=i}(X_n = i \ i.o.) = 0.$$

Nous allons montrer que tout état est soit récurrent, soit transient. C'est-à-dire presque sûrement, tous les descendants de i reviennent en i un nombre infini de fois ou bien ils quittent i après un nombre fini de visites.

Nous définissons le temps de retour à l'état i par

$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}.$$

Par convention, $T_i = +\infty$ lorsque $\{n \geq 0 : X_n = i\}$ est vide.

Il ne faut pas confondre le temps de retour T_i à i avec le temps d'atteinte de i

$$H^i = \inf\{n \geq 0 : X_n = i\}.$$

Par récurrence, on définit le r-ème temps de retour à l'état i par

$$T_i^{(r)} \inf\{n \geq T_i^{(r-1)} : X_n = i\}.$$

La longueur de la r-ème excursion en dehors de i est définie par

$$S_i^{(r)} = T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)}, \ si \ T_i^{(r-1)} < +\infty$$

et $S_i^{(r)} = +\infty$, sinons.

La récurrence et la transience vont dépendre de loi des excursions.

Lemme 2 Pour tout $r \geq 2$, sous la probabilité

$$A \to \mathbb{P}(A \backslash T_i^{(r-1)} < \infty),$$

La r-ème excursion $S_i^{(r)}$ est indépendante de $X_0, ..., X_{T_i^{(r-1)}}$ et de même loi que T_i sous $P^{X_0=i}$. Plus précisément, nous avons pour entier $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(S_i^{(r)} = k \ \backslash T_i^{(r-1)} < +\infty, X_0 = i_0, ..., X_{T_i^{(r-1)}-1} = i_{T_i^{(r-1)}-1}) \\ &= \mathbb{P}(S_i^{(r)} = k \ \backslash T_i^{(r-1)} < +\infty) = \mathbb{P}(T_i = k \ \backslash X_0 = i.)\end{aligned}$$

Preuve. C'est une application de la propriété de Markov au temps d'arrêt $T_i^{(r-1)}$ c'est-à-dire la suite $(X`_{T_i^{(r-1)}+n}, n \geq 0)$ sachant $[T_i^{(r-1)} < \infty]$ est une chaîne de Markov qui part de i et de même matrice de transition que celle de (X_n).

Maintenant, on introduit le nombre de visites d'un état i. Cest la variable aléatoire

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[X_n=i]} = \mathbb{1}_{\{i\}}(X_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_i^{(r)}<+\infty\}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{X_0=i}[N_i] &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \\ &= 1+\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}^{[X_0=i]}(T_i^{(r)} < +\infty). \end{aligned}$$

Lemme 3 Pour chaque $r \geq 1$

$$\mathbb{P}^{[X_0=i]}(T_i^{(r)} < +\infty) = f_i^r$$

où $f_i = \mathbb{P}^{[X_0=i]}(T_i < +\infty)$.

Preuve. Nous avons

$$[T_i^{(r)} < +\infty] = [T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} < +\infty, T_i^{(r-1)} < +\infty].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P^{X_0=i}(T_i^{(r)} < +\infty) &= \\ P^{X_0=i}(T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} &< \infty \backslash T_i^{(r-1)} < +\infty) P^{X_0=i}(T_i^{(r-1)} < +\infty). \end{aligned}$$

or

$$P^{X_0=i}(T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} < +\infty \setminus T_i^{(r-1)} < +\infty) = P^{X_0=i}(T_i < +\infty) = f_i$$

L'itération achève la preuve.

Théorème 9 Les propositions suivantes ont lieu.

1.
$$\begin{aligned} P^{X_0=i}(T_i < +\infty) &\Leftrightarrow i \text{ est récurrent} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = +\infty. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} P^{X_0=i}(T_i < +\infty) &\Leftrightarrow i \text{ est transient} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = +\infty. \end{aligned}$$

Conséquences importantes. Pour chaque couple $(i,j) \in I \times I$, on pose

$$U(i,j) = \mathbb{E}^{X_0=i}[N_i].$$

C'est le nombre moyen de visites de j en partant de i. Nous avons obtenu le résultat suivant :

1.
$$\begin{aligned} U(i,i) = +\infty \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}^{[X_0=i]}(T_i < +\infty) = 1 \Leftrightarrow \\ \mathbb{P}^{[X_0=i]}(N_i < +\infty) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad i \text{ est récurrent.} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} U(i,i) = +\infty \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}^{[X_0=i]}(T_i < +\infty) = 1 \Leftrightarrow \\ \mathbb{P}^{[X_0=i]}(N_i < +\infty) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad i \text{ est transient.} \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne le lien entre $U(i,j)$ et $U(i,i)$.

Théorème 10 Si $i \neq j$, alors

$$U(i,j) = \mathbb{P}^{[X_0=i]}(T_j < +\infty) U(j,j)$$

et on en déduit $U(j,j) \geq U(i,j)$.

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} N_i &= \mathbb{1}_{\{j\}}(X_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_j\}(r) < +\infty} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(X_n). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$U(i,j) = \mathbb{E}^{[X_0=i]}[N_j] = \sum_{r=1}^{\infty} P^{[X_0=i]}(T_j^{(r)} < +\infty).$$

En appliquant la propriété de Markov forte on a pour $r > 1$,

$$\begin{aligned} P^{[X_0=i]}(T_j^{(r)} < +\infty) &= P^{[X_0=i]}(T_j^{(r)} < +\infty \backslash T_j < +\infty) P^{[X_0=i]}(T_j < +\infty) \\ &= P^{[X_0=j]}(T_j^{(r-1)} < +\infty) P^{[X_0=i]}(T_j < +\infty). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corollaire 4

1. Nous avons pour $i \neq j$
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = U(i,j) = P^i(T_j < +\infty)U(j,j).$$
En particulier si j est transient, alors pour tout $i \in I, p_{ij}^{(n)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$
2. Si I est fini, alors ils contient au moins un état récurrenet.
3. Les états de la même classe sont même de nature.

Preuve. En effet,
$$N_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_I(X_n) = +\infty = \sum_{i \in I} N_i.$$
Ceci entaîne
$$\mathbb{E}[N_1] = \sum_{j \in I} \mathbb{E}[N_j] = +\infty.$$
Il existe donc un état j tel que
$$\mathbb{E}[N_j] = +\infty = \mathbb{E}^i[N_j]P(X_0 = i)$$
car I est fini. D'où l'existence d'un état i tel que
$$\mathbb{E}^i[N_j] = +\infty = U(i,j) = P^i(T_j < +\infty)U(j,j)$$
et nécessairement, $U(j,j) = +\infty$.

3. On suppose que i ème à j. Soit n tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. Nous avons
$$\begin{aligned} U(j,j) &\geq U(j,j) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k+n)} \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} = U(i,i)p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$
Si i est récurrent, alors $U(i,i) = +\infty$ et par suite $U(j,j) = +\infty$, donc j est récurrent. Si i est transient, alors i est aussi transient.

Théorème 11 Une classe récurrente est fermée.

Preuve. L'état i est récurrent. Donc, sachant $X_0 = i$, presque sûrement, la chaîne repasse par par i un nombre infini de foi. Soit $i \in C$ tel que $i \to j$.

Il existe alors un entier m tel que $P_{ij}^{(m)} = P^{X_0=i}(X_m = j) > 0$. Donc il existe, avec une probabilité non nulle, des descendants de i qui atteignent j. Nécessairement, ces descendants doivent repasser par i après leur passage par j. Ainsi $j \to i$.

Voici la preuve détaillée. Nous rappelons que i est récurrent, par définition

$$P^{X_0=i}(X_n = i\ i.o) = 1$$

et donc l'événement $[X_n = i\ i.o]$ est certaine sous $P^{[X_0=i]}$. Soient $i_1, ..., i_{m-1}$ tels que

$$P(X_m = j, X_{m-1} = i_{m-1}, ..., X_1 = i_1 \backslash X_0 = i) > 0.$$

Si on suppose que j ne mène pas vers i alors pour tous les entiers n

$$P(X_{n+m} = i, X_m = j, ..., X_1 = i_1) \backslash X_0 = i) > 0.$$

Nous concluons que si $X_0 = i$, alors les individus

$$\omega \in [X_m = j, X_{m-1} = i_{m-1}, ..., X_1 = i_1]$$

n'appartiennent pas à $[X_n = i\ i.o]$. Ceci est absurde.

Nous allons voir que la réciproque est vraie lorsque C est fini.

Théorème 12 Toute classe C, finie et fermée, est nécessairement récurrente.

Preuve. Comme C est finie et fermée, alors partant d'un état $i \in C$, nécessairement, la chaîne reste dans C. D'après le corollaire 4, C contient un état récurrent, et alors C est récurrente.

Théorème 13 On suppose que la chaîne est irrédictible et récurrente. Alors, $\forall j \in I, \mathbb{P}(T_j < \infty) = 1$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_j < \infty) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(T_j < \infty, X_0 = i)\\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(T_j < \infty \backslash X_0 = i) P(X_0 = i).\end{aligned}$$

Nous allons montrer que

$$\mathbb{P}(T_j < \infty \backslash X_0 = i) = 1.$$

Comme $j \to i$, alors il existe un entier m tel que

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{m+n} = i \backslash X_n = j) > 0, \ \forall n$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_j(X_n = j \ i.o) &= 1\\ &= \mathbb{P}_j(X_{n+m} = j \ pour \ certains \ entiers \ n)\\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}_j(X_{n+m} = j \ pour \ certains \ entiers \ n \ \backslash X_m = i).\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_j(X_{n+m} = j \ pour \ certains \ entiers \ n \ \backslash X_m = i).\\ &= P^{X_0 = i}(X_n = j \ pour \ certains \ entiers \ n)\\ &= P^{X_0 = i}(T_j < \infty).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} P^{X_0 = i}(T_j < \infty) p_{ji}^{(m)} &= 1\\ \leq \sum_{i \in I} p_{ji}^{(m)} &= 1.\end{aligned}$$

Nécessairement,

$$P^{X_0 = i}(T_j < \infty) = 1.$$

Conséquence importante. Si la chaîne part d'une classe récurrente, alors elle va visiter chaque état de la classe avec probabilité 1. En effet, d'après le théorème 13, on sait que cette classe est fermée. Si la chaîne part de cette classe, elle va rester dans cette classe. Dans ce cas, on est dans la sitiation du dernier théorème.

1.8 Distributions de probabilités invariantes

Le comprtement de la chaîne (X_n) lorsque $n \to +\infty$ dépendre de l'étude des mesures $(\lambda_i, i \in I)$ sur I qui vérifient le système

$$\lambda P = \lambda.$$

Ici, p est la matrice de transitions de la chaîne (X_n). Une telle mesure dite invariante ou bien mesure d'équilibre ou mesure stationnaire. Le théorème suivant justifie le terme "mesure stationnaire".

Proposition 7 On suppose que λ est une probabilité invariante et que la loi initiale de (X_n) est égale à λ. Alors pour tout entier m, la chaîne $(X_{m+n}, n \geq 0)$ est aussi une chaîne da Markov de loi initiale λ et de matrice de transition P.

Il suffit de remarquer que la loi X_m est égale à

$$\lambda P^m = \lambda.$$

Corollaire 5 Sous les même hypothèses que la proposition 7, la loi de $(X_0, ..., X_n)$ est égale à la loi de $(X_m, ..., X_{m+n})$ pour tout entier m.

Le résultat suivant justifie le terme "mesure d'équilibre".

Proposition 8 On suppose que I est fini et que pour un certain $i \in I$, nous avons

$$p_{ij}^{(n)} \to \lambda_j, \forall j$$

Lorsque $n \to \infty$. Alors le vecteur $\lambda = (\lambda_j, j \in I)$ est une probabilité invariante.

Preuve. Il est clair que

$$\sum_{j \in I} \lambda_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

car I est fini.

D'autre part, pour tout $j \in I$,

$$(\lambda P)_j = \sum_{k \in I} \lambda_k p_{kj}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n+1)} = \lambda_j.$$

Le théorème suivant donne une interprétation probabiliste. On définit pour chaque $i, k \in I$, le temps moyen passé dans i entre deux visiites successives de k

$$\gamma_i^k = \mathbb{E}^{X_0=k}[\sum_{n=0}^{T_{k-1}} \mathbb{1}_{X_0=i}].$$

Théorème 14 On suppose que P est irréductible et récurrente. Alors,
- i) $\gamma_k^k = 1, \forall k \in I$,
- ii) le vectur $\gamma^k = (\gamma_i^k <^k, i \in I)$ est solution de $\lambda P = \lambda$,
- iii) $0 < \gamma_i^k < \infty, \forall i$,

Preuve i) est évident car sous $P^{X_0=k}$,

$$\sum_{n=0}^{T_{k-1}} \mathbb{1}_{[X_0=k]} = 1.$$

ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
\gamma_i^k &= \mathbb{E}^{[X_0=k]}[\sum_{n=0}^{T_{k-1}} \mathbb{1}_{[X_0=j]}] \\
&= \mathbb{E}^{[X_0=k]}[\sum_{n=0}^{T_{k-1}} \mathbb{1}_{[X_0=j]}] = \sum_{n=1}^{\infty} P^{X_0=k}(n \le T_k, X_n = j),
\end{aligned}$$

car l'état k est récurrent et alors sous $\mathbb{P}^{X_0=k}$ on a, $T_k < \infty$ et $X_0 = X_{T_k} = k$.

Maintenant pour chaque entier $n \ge 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{X_0=k}(n \le T_k, X_n = j) &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}^{X_0=k}(n \le T_k, X_n = j, X_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}^{X_0=k}(X_n = j \backslash n \le T_k, X_{n-1} = i)\mathbb{P}^{X_0=k}(n \le T_k, X_{n-1} = i).
\end{aligned}$$

Or $[n \le T_k] = \Omega \backslash [T_{k\le n}]$ est $\sigma(X_0, ..., X_{n-1})$-mesurable. Nous avons alors la propriété de Markov

$$P^{X_0=k}(X_n = j \backslash\ n \le T_k, X_{n-} = i) = p_{ij}.$$

Nous concluons que

$$\gamma_j^k = \sum_{i\in I} \gamma_i^k p_{ij}$$

iii) Nous pour tous les entier n et pour tout $k \in I, \gamma^k P^n = \gamma^k$. Il s'ensuit que $\forall j \in I$,

$$\sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ij}^{(n)} = \gamma_j^k \geq \gamma_k^k p_{kj}^{(n)}.$$

Comme γ_k^k, alors $\forall n, \gamma_k^j \geq p_{kj}^{(n)}$. Par conséquent $\gamma_k^j > 0$, car k mène à j.

D'autre part

$$\sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ij}^{(n)} = \gamma_k^k = 1,$$

Comme P est irréductible, alors $0 < \gamma_i^k < \infty, \forall i, k \in I$.

Théorème 15 Soit λ une mesure invariante positive telle que pour un certain $k \in I$,

1. Alors $\lambda_i \geq \gamma_i^k, \forall i \in I$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_{j \in I} \lambda_j p_{ji} = p_{kj} + \sum_{j \neq k} \lambda_j p_{ji} \\ &= \mathbb{P}^{X_0=k}(X_1 = i) + \sum_{j \neq k} \lambda_j p_{ji} \\ &= \mathbb{P}^{X_0=k}(X_1 = i, 1 \leq T_k) + \sum_{j \neq k} \lambda_j p_{ji}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $j \neq k$ on remplace λ_j par $\sum_{j_1 \in k} \lambda_{j_1} p_{j_1 j}$ et on distingue $j_1 = k$ et $j_1 \neq k$. On obtient

$$\mathbb{P}^{X_0=k}(X_1 = i, 1 \leq T_k) + \mathbb{P}^{X_0=k}(X_2 = i, 2 \leq T_k) + ...$$

Par récurrence , On obtient

$$\lambda_i \geq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^{X_n=i}(X_n = i, n \leq T_k) = \gamma_i^k$$

lorseque $i \neq k$.

Théorème 16 Si P est irréductible et récurrente, alors γ^k est l'unique mesure invariante telle que $\gamma_k^k = 1$. Et par onséquent il existe une unique prabablité invariante à condition que $\sum_{i \in I} \gamma_i^k < +\infty = \mathbb{E}_k[T_k] < +\infty$.

Preuve. En effet, γ est une mesure invariante. Ceci entraîne que $\lambda - \gamma^k = \mu$ est aussi une mesure invariante. Par conséquent

$$\mu_k = \sum_{i\in I} \mu_i p_{ik}^{(n)} = 0,$$

pour tout entier $n.P$ étant irréductible, donc pour tout état i il existe un entier n tel que $p_{ik}^{(n)} > 0$. Ceci entraîne que

$$\mu_i = 0, \forall i \in I.$$

1.9 Récurrence positive, Récurrence nulle

Soit i un état récurrent. On dit qu'il est récurrent positif si

$$m_i : \mathbb{E}^{X_0=i}[T_i] < +\infty,$$

et si $m_i = +\infty$, l'état i est récurrent nul.

Théorème 17 On suppose que P est irréductible. Alors les propositions sont équivalentes :

1. Chaque état est récurrent positif.
2. Au moins un état est récurrent positif.
3. La matrice P a une probabilité invariante..

Preuve. entraîne 2) est évident. Montrons que 2) implique 3). Soit un état récurrent positif, alors chaque état est récurrent car P est irréductible.

D'après le théorème 16, la suite $(\gamma_i^k, i \in I)$ est une mesure invariante.

Sa masse totale est égale à

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \gamma_i^k &= \sum_{i\in I} \sum_{n\geq 0 I} P^{X_0=k}(X_n = i, n < T_k) \\ &= \mathbb{E}_k[T_k] = m_k < \infty.\end{aligned}$$

Par conséquent P a une probabilité invariante.

Montrons que 3) implique 1). Soit λ est une probabilité invariante, montrons que $\lambda_k > 0, \forall k$. En effet,

$$\sum_{k\in I} \lambda_k = 1,$$

et par suite il existe k_0 tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$. D'autre part, $\forall i \in I$,

$$\lambda_i = \sum k \in I \lambda_k p_{ki}^{(n)},$$

pour tout entier n. Comme P est irréductible, alors il existe un erntier n tel que $p_{k_0 i}^{(n)}$. Ceci entraîne que $\lambda_i > 0$.

Pour chaque état k fixé, on considère la mesure $(\pi_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_k}, i \in I)$.

C'est une mesure invariante avec $\pi_k = 1$. D'après le théorème 16, nous avons

$$\pi_i = \gamma_i^k, \forall i \in I.$$

Ceci entraîne que

$$\sum_{i \in I} \pi_i = m_k = \frac{1}{\lambda_k} < +\infty.$$

Par conséquente K est récurrent positif et la probabilité invariante est donne par

$$\lambda_i = \frac{1}{m_i}, \forall i \in I.$$

1.10 Covergence vers l'équilibre

Nous avons vu au théorème 15, que si P est fini et si la suite $(p_{ij}^{(n)}, n)$ converge $\forall j$, alors la limite est une probabilité invariante. Mais parfois la suite $(p_{ij}^{(n)}, n)$ n'est pas convergente. Par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 6 Soit i un état soient $A_i = \{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Si le pgcd d_i de A_i est supérieur à 1, alors d_i est appelé de i. Si $d_i = 1$, alors i est dit apériodique.

Porposition 9

1. Si $d_i > 1$, alors $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour tous les entiers $n \notin d_i\mathbb{N}$.

2. Si $d_i = 1$, alors ou bien pour $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour tous les entiers $n \geq 1$ (c'est-à-dire la chaîne ne revient plus en i), ou bien pour tout entier $d > 1$, il existe $n \notin d\mathbb{N}$ tel que $p_{ii}^{(n)} > 0$.
3. Si on désigne par d le plus grand entier tel que
$$\{n : \mathbb{P}(T_i = n \backslash X_0 = i) > 0\} \subset d\mathbb{N},$$
alors $d = d_i$.

Proposition 10 Si $i \Leftrightarrow j$, alors $d_i = d_j$.

Preuve Soient r et s deux entiers tels que $p_{ji}^{(r)} > 0$, $p_{ij}^{(s)} > 0$. Soint n tel que $p_{jj}^{(n)} > 0$.

Nous avons
$$p_{ii}^{(r+s+n)} > p_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(r)} > 0.$$
Ceci entraîne que d_i divise $r + s + n$ et comme d_i divise $r + s$, alors d_i divise n. Nous concluons que $d_i \leq d_j$. Le rôle symétrique que jouent i, j achève la preuve.

Maintenant, voici le résultat le plus important de cette section.

Théorème 18 Soit P irréductible et apériodique. On suppose que P a une probabilité invariante π. Alors pour toute chaîne de Markove (X_n) de loi initiale λ et de matrice de transition P,
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j,$$
en particulier
$$\pi_j = \lim_{n \to +\infty} p_{ij}^{(n)}, \forall i \in\in I.$$

Preuve Étape 1. On admet l'existence d'une chaîne de Markov (Y_n) indépendante de (X_n) de loi initiale π et de matrice de transition P. On vérifie que la suite $(X_n, Y_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans I^2 de loi initiale $\lambda_{(ij)} = \lambda_i \pi_j, \forall (i,j) \in I^2$ et de matrice de transition
$$\widetilde{P}_{(i,j),(k,l)} = p_{ik} p_{jl}, \forall (i,j), (k,l) \in I^2.$$

P est apériodique entraîne que $\widetilde{P}$ est irréductible. P a π comme probabilité invariante implique $\widetilde{P}$ a $\pi \bigotimes \pi$ comme probabilité invariante.

Maintenant, on fixe un état b et on définit le tamps d'arrêt

$$T = \inf\{n \geq 0, (X_n, Y_n) = (b; b)\},$$

il est fini par $\widetilde{P}$ est récurrente positive.

Étape 2.

Maintenant, on vérifie que la suite

$$Z_n = X_n \mathbb{1}_{[n<T]} + Y_n \mathbb{1}_{[T \leq n]},$$

est da Markov (λ, P), donc elle a la même loi que (X_n). De même la suite

$$Z_n^{'} = Y_n \mathbb{1}_{[n<T]} + X_n \mathbb{1}_{[T \geq n]},$$

est da Markov (π, P), donc elle a la même loi que (Y_n).

Étape 3.

Nous avons

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n = j, n < T) + \mathbb{P}(X_n = j, T \leq n).$$

Par la propriété de Markov

$$\mathbb{P}(X_n = j, T \leq n) = \mathbb{P}(Y_n = j, T \leq n).$$

Finalement

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_n = j) - \pi| &= |\mathbb{P}(X_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| \\ &= |\mathbb{P}(X_n = j, n < T) - \mathbb{P}(Y_n = j, n < T)| \to 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$.

On termine cette section par résumé du comportement limite des probabilités $p_{ij}^{(n)}$.

Théorème 19

1. L'état j est récurrent nul si et seulement si
$$\sum_{n\geq 1} p_{jj}^{(n)} = +\infty$$
mais $p_{jj}^{(n)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Dans ce cas, pour tout $i \in I, p_{ij}^{(n)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Si j est apériodique, alors
$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{h_i^{\{j\}}}{m_i}$$
lorsque $n \to +\infty$.

Corollaire 6 On suppose que I est fini. Alors il existe au moins un état récurrent positif.

Preuve. Nous avons pour tous les états i et pour tous les entiers n
$$\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = 1.$$
Si j est trasient ou bien récurrent nul, alors $p_{ij}^{(n)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Nécessairement, il existe j récurrent positive, sinon
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = 0$$
et ceci est absurde.

1.11 Retournement du temps

Théorème 20 On suppose que P est irréductible et ayant une probabilité invariante π. Soit (X_n) une chaîne de Markov de loi initiale π et de matrice de transition P. Alors la suite $(Y_n, n \leq N)$ est une chaîne de Markov de loi initiale π et de matrice de transition $\widetilde{P}$ où
$$\pi_j \widetilde{P}_{ji} = \pi_i p_{ij}.$$

Preuve. On vérifie facilement que $\widetilde{P}$ est bien une matrice stochastique et que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_N = i_N, \ldots, Y_0 = i_0) &= \mathbb{P}(X_0 = i_N, \ldots, X_N = i_0)\\ &= \pi_{i_{N-1}} p_{i_N i_{N-1}} \ldots p_{i_1 i_0}\\ &= \pi_{i_{N-1}} \widetilde{p}_{i_{N-1} i_N} p_{i_{N-1} i_{N-2}} \ldots p_{i_1 i_0}\\ &= \widetilde{p}_{i_{N-1} i_N} \ldots \widetilde{p}_{i_0 i_1} \pi_{i_0}.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Stabilité au sens probabiliste

2.1 Fonction de Liapunov et mécanique

Les résultats de probabilité obtenus dans le paragraphe (3.2) s'appuient en très grande partie sur la méthode de Liapunov. Ce sont les travaux effetués par celui-ci au début du ciècle, qui ont permis d'obtenir dans le cadre de systèmes régis par des équations différentielles, une méthode d'étude de la stabilité d'ordre mécanique. L'idée repose sur la construction de fonctions dites de Liapunov. On expose dans ce premier paragraphe les résultats obtenus. La méthode a ensuite été adaptée pour l'étude de la Stabbilité de modèle stochastiques. On rappelle dans le second paragraphe leurs résultats généraux.

2.1.1 Stabilité mécanique

Le problème évoqué ici, concerne l'étude de la stabilité et des mouvements des systèmes mécaniques. Mathématiquement, ce problème se ramène à l'étude du comportement limite des solutions d'équations différentielles de type

$$x^{'} = f(x), \tag{3.1}$$

où f est une fonction continûment différebtiable définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. La stabilité est définie par rapport aux perturbations des données initiales du système.

Definition 2.1.1.1. *Une solution $x(t)$ l'équation différentielle sera dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute autre solution $y(t)$ vérifiant $\|y(t)-x(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Si de plus $(y(t)-x(t))$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, on dira que $x(t)$ est asymptotiquement stable. Quand nous savons intégrer les équations différentielles, ce problème, bien sûr, ne présente pas de difficultés. Mais il est important d'avoir des méthodes qui permettent de résoudre, indépendamment de la possibilé de cette intégratoin. Avant Liapunov, les problèmes de stabilité étaient habituellement résolus en linéarisant les équations différentielles et en négligenant tout ce qui était d'ordre supérieur. Ce entraînait une simplification importante, surtout les coefficients de ces équations différentielles sont constants. Certains comme, Routh par exemple, reconnaissant ce procédé peu rigoureux, ne se bornèrent pas à une première approximation, mais utilisèrent des approximations d'ordre deux et même plus. En opérant ainsi, on avance peu, car, en général, par cette voie, on obtient seulement une représentation faible des fonctions dans les limites d'un intervalle de temps compact, ce qui assurément, ne donne pas de nouveaux éléments pour obtenir des conclusions quelconques sue la stabilité.*

Liapunov a appelé point d'équilibre de (3.1) tout point $\widetilde{x}$ de W vérifiant $f(\widetilde{x}) = 0$. Il est clair que la fonction constante $x(t) \equiv \widetilde{x}$ est solution de équation différentielle. Liapunov trouvera un critère de stabilité en utilisant des fonctions V positives définies sur un voisinage de $\widetilde{x}$ et décroissantes sur le chemin déterminé par f. Voici son résultat principal :

Théorème 2.1.1.1. *Soit $\widetilde{x} \in W$ un point d'équilibre pour (3.1).*
Soit $V : U \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue définie sur un voisinage U de $\widetilde{x}$, différentiable sur $U \backslash \widetilde{x}$, telle que

$$V(\widetilde{x}) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \quad \text{si } x \neq \widetilde{x}.$$

$$\text{Si } \tfrac{dV}{dx}(f(x)) \leq 0 \quad \text{sur } U \backslash \widetilde{x},$$

$\widetilde{x}$ est stable. De plus, si

$$\tfrac{dV}{dx}(f(x)) < 0 \text{ sur } U \backslash \widetilde{x},$$

le point $\widetilde{x}$ est asymptotiquement stable. La fonction V est appelée foncion de Liapunov. La méthode exposée est puissante à condition de trouver ces *fonction f dites de Liapunov. C'est un problème auquel de nombreux mathématiciens se sont attelés et un certain nombre de propriétés ont étés mises en évidence mais il n'existe pas encore de méthodes générales pour trouver ce type de fonctions. Dans les cas simples, des fonctions d'ordre physique comme des fonctions énergie par exemple, peuvent parfois convenir.*

2.2 Fonction de Liapunov

La méthode utilsée par Liapunov a été reprise dans un cadre probaliste. De nouvelles fonctions de Liapunov permettent d'établir dans le théorème 2.1.1.1. dû à Filonv [16], des conditions de stabilité d'une chaîne de Markov. On dira qu'un modèle est stable si la chaîne de Markov correspondante est récurente, c'est à dire que partant de n'importe quel état, le retour à une position donnée est certain. La chaîne sera dite récurrente positive si les variables indiquant le temps de retour à une position donnée sont intégrables. Elle est ergodique si de plus elle est apériodique. Nous donnerons ensuite, dans proposition , des conditions d'existance des moments d'ordre $\alpha(\alpha \geq 1)$ de variables aléatoires indiquant le temps de retour d'une chaîne de Markov, soit vers un point, soit vers un sous-ensemble de l'espace d'état. Dans ce paragraphe, on se place sur d'états S dénombrable et on considère une chaîne d Markov $(M_n)_{n\geq 0}$ homogène, irréductibl, apériodique à valeurs dans S. On note $P = (p(x,y))_{(x,y)\in s^2}$ la matrice de transition, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $M_0, \ldots, M_n$ et on note $\mathbb{E}_x(.)$ l'espérance d'un variable lorsque la chaîne est en x à l'instant initial.
D'autre résultats ont été obtenus à l'aide des fonctions de Liapunov. Citons, en particulier, les algorithmes stochastiques, lastabilité des solutions d'équations différentielles stochastiques. Les résultats indiqués dans ce paragraphe se trouvent dans le livre de Mayn ett Tweedie ou celui de Fayolle, Malyshev et Menshikov.

Remarque 2.2.1. *Une chaîne de Markov ergodique est une chaîne récurrente positive et apériodique. Cette dernière propriété n'intervient pas dans Les preuves du théoréme 2.3.1. et du corollaire γ concluant à l'ergodicité.*
Si Une chaîne de Markov vérifie les hypothèses de l'un d'eux sauf l'apériodi-

cité, on pourra conclure qu'elle est récurrente positive.

2.3 Ergodicité d'une chaîne de Markov

Le théorèmee suivant est dû à Filonov.

Théorème 2.3.1. *S'il existe une fonction* $f : S \to \mathbb{R}^+$ *, F un sous-ensemble de* $S, \gamma > 0$ *et un temps d'arrêt intégrable* τ *tels que*

$$(\mathbb{E}_x(f(M_1)) < +\infty, x \in F, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{E}_x(f(M_\tau) - f(x)) \leq -\gamma \mathbb{E}_x(\tau), \ \ sur S \backslash F, \tag{3.3}$$

alors le temps d'atteinte

$$T_F = \inf\{k \geq 0 \ t.q \ M_k \in F\}$$

est intégrable et

$$\mathbb{E}_x(T_F) \leq \frac{f(x)}{\gamma}, x \in S.$$

f est appelée fonction de Liapunov. Si de plus l'ensemble F est fini, alors la chaîne de Markov (M_n) *est ergodique.*

Preuve. Nous reprenons la preuve de P.Robert.
On définit la suite croissante t_n par

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_n &= t_{n(-1} + \tau(\theta_{t_{n-1}}), n \geq 1 \end{aligned}$$

où $\tau(\theta_t)$ désigne le temps d'arrêt τ associé à la chaîne partant de $M_t, (M_{n+t})$. Les t_n sont des temps d'arrêt. En effet, par récurrence, si t_{n-1} est un temps d'arrêt, alors pour $k \geq 1$,

$$\{t_n = k\} = \bigcup_{i=0}^{k} \{t_{n-1} = i\} \cap \{\tau(\theta_i) = k - i\}$$

comme $\{\tau(\theta_i) = k - i\} \in \mathcal{F}_k$, t_n est un temps d'arrêt.
On désignera par $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n) = (\mathcal{F}_{t_n})$ la fltration associée à cette suite croissante de temps d'arrêt. En posant

$$\nu = \inf\{k \geq 0 \ t.q. \ t_k \geq T_F\}$$

alors $\{\nu > k\} = \{t_k < T_F\} \in \mathcal{F}_{t_k} = \mathcal{G}_k$ puisque T_F est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et donc ν est un temps d'arrêt relativement à la filtration $\mathcal{G}$.
Posons $X_n = f(M_{t_n}) + \gamma t_n$. La suite de variables aléatoires positives X_n est adaptée à la filtration $(\mathcal{G}_n)$, et

$$\mathbb{E}_x(X_{n+1} \backslash \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}_x(f(M_{t_{n+\tau(\theta_{t_n})}}) + \gamma(t_n + \tau(\theta_{t_n})) \backslash \mathcal{G}_n).$$

La propriété forte de Markov nous donne

$$\mathbb{E}_x(X_{n+1} \backslash \mathcal{G}_n) = \gamma t_n + \mathbb{E}_{M_{t_n}}(f(M_\tau) + \gamma \tau).$$

Sur l'ensemble $\nu > n = \{t_n < T_F\}$, on a

$$\mathbb{E}_x(X_{n+1} \backslash \mathcal{G}_n) - X_n = \mathbb{E}_{M_{t_n}}(f(M_\tau) - f(M_{t_n}) + \gamma \tau) \leq 0 \ sur \ \{\nu > n\},$$

d'après l'hypothèse 3.3. Autrement dit, $(X_{n \wedge \nu})$ est surmartingale positive relativement à la filtration $(\mathcal{G}$, en particulier ,

$$\mathbb{E}_x(X_{n \wedge \nu}) \leq \mathbb{E}_x(X_0) = f(x)$$

soit

$$\mathbb{E}_x(f(M_{n \wedge \nu}) + \gamma t_{n \wedge \nu}) \leq f(x).$$

En utilisant le théorème de convergence monotone et le fait que f soit positive,

$$\mathbb{E}_x(t_\nu) \leq \frac{f(x)}{\gamma},$$

par définition, $t_\nu \geq T_F$, et donc

$$\mathbb{E}_x(T_F) \leq \frac{f(x)}{\gamma}, \forall x \in S \backslash F.$$

D'autre part, pour $x \in F$,

$$\mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{M_1}(T_F) \leq \mathbb{E}_x \left(\frac{f(M_1)}{\gamma} \right) < +\infty,$$

d'après l'hypothèse 3.2.
Supposons désormais le sous ensemble F fini. Pour tout état x de S, $\mathbb{E}_x(T_F)$ est finie, la chaîne de Markov reviendra une infinité de fois en F. Notons X_n

le n^{ime} passage de la chaîne en F. Il est évident que $()X_n$ est une chaîne de Markov irréductible sur l'ensemble fini F. Elle admet une mesure invariante π_F. On définit sur S à partir de cette π_F une mesure π définie par

$$\forall \Theta \subset S, \pi(\Theta) = \mathbb{E}_{\pi_F}\left[\mathbb{E}_y\left(\sum_{i=0}^{T_F^+-1} \mathbb{1}_\Theta(M_i)\right)\right]$$

où les éléments y sont úéléments de F et T_F^+ est défini par

$$T_F^+ = \inf\{K > 0 \; t.q. \; M_k \in F\}.$$

Cette mesure est finie car

$$\pi(E) = \mathbb{E}_{\pi_F}(E_y(T_F^+)) = \mathbb{E}_{\pi_F}(\mathbb{E}_y(g(M_1))) < +\infty.$$

La mesure π est invariante pour la matrice de probabilité P. En effet,

$$\begin{aligned}
\pi.P(x) &= \sum_{x_n \in S} \pi(x_n)p(x_n, x) \\
&= \sum_{x_n \in S} \mathbb{E}_{\pi_F}\left[\mathbb{E}_y\left(\sum_{i=0}^{T_F^+-1} \mathbb{1}_{x_n}(M_i)\right)\right] p(x_n, x) \\
&= \mathbb{E}_{\pi_F}\left[\mathbb{E}_y\left(\sum_{i=0}^{T_F^+} \mathbb{1}_x(M_i)\right)\right] \\
&= \pi(x) + \mathbb{E}_{\pi_F}(X_1) - \mathbb{E}_{\pi_F}(X_0) \quad = \pi(x).
\end{aligned}$$

Ce théorème permet de montrer la propriété suivante :

Proposition 2.3.1. *S'il existe une fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ et $T > 0$ tels que*

$$\{xt.q.f(x)\}\textit{est fini pour tout } k > 0$$

et si

$$\limsup_{f(x)\to+\infty} \mathbb{E}_x\left(\frac{f(x_{[f(x)T]})}{f(x)}\right) < 1,$$

alors la chaîne de Markov est ergodique.

On peut énoncer le corollaire du théorème 2.3.1 dans le cas où le temps d'arrêt τ est égal à 1. Ce résultat est dû à Foster. Il est utilisable dans de nombreuse cas, en particulier, pour les chaînes de Markov dont le nombre de transitions à partir d'un état donné est fini.

Corollaire 7 S'il existe une fonction $f : S \to \mathbb{R}^+$, F une partie fini de S et $\gamma > 0$ vérifiant

1. $\forall x \in F, \mathbb{E}_x(f(M_1)) < +\infty$,
2. $\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(x)) \leq -\gamma$ sur $S \backslash F$,

alors la la chaîne de Markov est ergodique.

Proposition 2.3.2. *S'il existe une fonction f positive définie sur S, un réel $\alpha > 1$ et des réel strictement positifs K, γ et un sous- ensemble F de S vérifiant*

$$\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(M_0)) \leq -\gamma \textit{ sur } S \backslash F \tag{3.4}$$

$$\mathbb{E}_x(|f(M_1) - f(M_0)|^\alpha \leq K, \tag{3.5}$$

alors

$$\mathbb{E}(T_F^\alpha \backslash M_0) \leq A + B[f(M_0)]^\alpha, \tag{3.6}$$

où A et B sont des constantes positives ne dépendant que de α, γ et K. Si de plus F est fini, alors

$$\forall y \in F, \mathbb{E}_y(T_0^\alpha) < +\infty$$

Remarque 2 On peut, avec des hypothèses comparables, établir des propriétés similaires, encore à l'aide de fonctions de Lapunov pour d'autres moments et en particulier des moments exponentiels.

Preuve . les idées de la première partie de la démonstration sont dues à Malyshev et Menshikov. La variable $f(M_1) - f(M_0)$ ayant un moment d'ordre $\alpha > 1$ majoré indépendamment de M_0, on peut trouver un réel C supérieur à 1 et $\frac{\gamma}{2}$ tels que la variable

$$\Gamma = (f(M_1) - f(M_0))\mathbb{1}_{\{f(M_1) - f(M_0) > -c\}} + \frac{\gamma}{2}$$

vérifie

$$\mathbb{E}(\Gamma) \leq \frac{-\gamma}{4} \quad \textit{sur } (T_F > 0).$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} Y_n & = & f(M_n) + \frac{n\gamma}{2}, \Delta_n = Y_n - Y_{n-1}, \\ X_n & = & (1+\delta Y_n)^\alpha \mathbb{1}_{\{T_F \geq n\}}. \end{array}$$

Le réel δ appartient à l'intervalle $[0, 1/C]$. Sur $(T_F \geq n)$ on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \backslash \mathcal{F}_{n-1}) & = & X_{n-1}\mathbb{E}\left(\left(1 + \frac{\delta\Delta_n}{1+\delta Y_{n-1}}\right)^\alpha - 1\backslash \mathcal{F}_{n-1}\right), \\ & \leq & X_{n-1} g\left(\frac{\delta}{1+\delta Y_{n-1}}; M_{n-1}\right), \end{array}$$

où g est la fonction définie sur $[0, /C] \times S$ par

$$g(\beta; x) = \mathbb{E}_x((1+\beta\Gamma)^\alpha - 1).$$

Cette application est dérivable par rapport à β. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{\partial(1+\beta\Gamma)^\alpha}{\partial\beta}\right| & = & \mid \alpha\Gamma(1+\beta\Gamma)^{\alpha-1} \mid, \\ & \leq & \alpha(1+|\Gamma|)^\alpha \end{array}.$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème de convergence dominnée.
De plus,

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{\partial g}{\partial\beta}(\beta; x) - \frac{\partial g}{\partial\beta}(0; x)\right| & \leq & \int_{\Gamma\leq 1} \alpha \mid \Gamma((1+\beta\Gamma)^{\alpha-1} - 1)_\rho \mid dP \\ & + & \int_{\Gamma>1} \alpha\Gamma_\alpha \left[\left(\frac{1}{\Gamma} + \beta\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{1}{\Gamma}\right)^{\alpha-1}\right] dP. \end{array}$$

Les deux termes de droite tendent vers 0 uniformément en x losque β tend vers 0. Le premier est majoré par $\alpha C \max((1-\beta C)^{\alpha-1} - 1; (1+\beta)^{\alpha-1} - 1)$.

Pour le second, on utilise l'uniforme continuité de la fonction $t^{\alpha-1}$ sur $[0, 1]$.
$\partial g/\partial\beta$ est ainsi continue en 0 uniformément par rapport à x. Nous avons

$$g(0, x) = 0$$

et

$$\frac{\partial g(0, x)}{\partial\beta} \leq -\frac{\gamma\alpha}{4} \quad sur \quad \{T_F > 0\}.$$

Il existe alors un réel β_0 strictement positif tel que $g(\beta, x) \leq 0$ pour tout $\beta \leq \beta_0$ et $x \in F$. En choisissant $\delta \leq \beta_0$, on obtient

$$\mathbb{E}(X_n \backslash \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1} \quad sur \quad (T_F \leq n),$$

d'autre part,

$$\mathbb{E}(X_n \backslash \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \leq X_{n-1} \quad sur \quad (T_F < n).$$

X_n est une sur-martingale et T_F étant un temps d'arrêt,

$$\left(\frac{\gamma\delta}{2}\right)^{\alpha} \mathbb{E}_x((T_F \wedge n)^{\alpha}) \leq \mathbb{E}_x(X_{T_{f\wedge n}}) \leq X_0.$$

En passant à la limite

$$\mathbb{E}_x(T_F^{\alpha}) \leq \left(\frac{2+2\delta f(x)}{\gamma\delta}\right)^{\alpha}.$$

En utilisant pour $p=2$ l'intégrale

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^{\alpha} \leq p^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha}, \tag{3.7}$$

on démontre 3.6.

Remarquons que si y est un élément de F, alors

$$\mathbb{E}_y[(T_F^{+})^{\alpha}] < +\infty.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y[(T_F^{+})^{\alpha}] &= \sum_{x\in S} p(y,x)[\mathbb{E}_x(T_F+1)^{\alpha}] \\ &\leq 2^{\alpha-1} \sum_{x\in S} p(y,x)[\mathbb{E}_x(T_F^{\alpha})+1] \\ &\leq 2^{\alpha-1}[(A+1) + B\sum_{x\in S} p(y,x) f^{\alpha}(x)] \\ &\leq 2^{\alpha-1}\left[(A+1) + B\mathbb{E}_y(f^{\alpha}(M_1))\right] < +\infty. \end{aligned}$$

On peut ainsi définir une chaîne de Markov X_n induite par la trace de M_n dans F. La probabilité de transition entre deux éléments y et y' de F est

$$P^F(y,y') = P_y(M_{T_F} = y').$$

Cette chaîne est irréductible, finie, donc récurrente positive. Pour y élément de F, on note C_y l'ensemble des chemins dans F d'origine y et tronqués dès le premier passage en 0. La longueur de ces chemins est presque sûrement finie. Un tel chemin sera noté $C = (y_0, y_1, ..., y_k)$ où $y_0 = y$ et $y_k = 0$. Partant de y, on obtient

$$\mathbb{E}_y(T_0^\alpha) = \sum_{C=(y,y_1,...,y_{k-1},0)\in C_y} P^F(C)(\mathbb{E}(T_0^\alpha \backslash C))$$

et en utilisant la formule (3.7),

$$\mathbb{E}(T_0^\alpha \backslash C) \leq k^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}_y(T_F^\alpha \backslash M_{T_F} = y_{i+1}) \leq k^\alpha \Theta,$$

où

$$\Theta = \max\{\mathbb{E}_y[(T_F^+)^\alpha \backslash M_{T_F}^+ = y^{'})]/P^F(y, y^{'}) > 0\}$$

Il en résulte

$$\mathbb{E}_y(T_0^\alpha) \leq \Theta \mathbb{E}_y^F(T_0^\alpha) < +\infty$$

où T_0 est le temps de retour à 0 de la chaîne (X_n) induite sur l'espace d'état fini F. On peut conclure d'après (3.6).
Pour terminer cette partie, nous donnons un résultat asymptotique déja montré par Malyshev et Menshikov sous une forme différente. Cette propriété est applicable en particulier aux suites de chaîne de Markov vérifiant les hypothèses de la proposition 2.3.2 de façon uniforme. Nous remarquons que l'hypotthèse $\alpha \geq 1$ n'est pas suffisante pour la convergence des mesures invariantes. Un contre-exemple est indiqué après la preuve.

Proposition 2.3.3. *On considère une suite de chaînes de Markov (X_n^N) sur un espace d'état S dénombrable de probabilités de transition P^N et une chaîne (X_n) de probabilités de transition P sur le même espace vérifiant*

$$\forall (x, y) \in S^2, \lim_{N\to+\infty} P^N(x, y) = P(x, y),$$

$$\exists \alpha > 1 \quad \textit{tel que } J = \sup_N \mathbb{E}_0^N[(T_0^+)^\alpha] < +\infty,$$

alors

$$\mathbb{E}_0[(T_0^+)^\alpha] \leq J \tag{3.8}$$

et les mesures invariantes π_N convergent en loi vers la mesure invariantes π.

Preuve. Soit K un entier positif. Si S^k est l'ensemble des chemins de S de longueur K, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut extraire une partie finie Θ de S^k telle que, pour N assez grand, $P_0(\Theta)$ et $P_0(\Theta)$ soient supérieurs à $(1-\varepsilon)$. L' ensemble $\{T_0^+ \leq k\} \cap \Theta$ étant fini, pour N assez grand,

$$|P^N[((T_0^+)^\alpha \leq k^\alpha) \cap \Theta] - P[((T_0^+)^\alpha \leq k^\alpha) \cap \Theta]| \leq \varepsilon,$$

on en déduit alors

$$\lim_{N\to+\infty} P^N[(T_0^+)^\alpha \leq k^\alpha] = P[(T_0^+)^\alpha \leq k^\alpha],$$

et d'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}_0((T_0^+)^\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_0[(T_0^+)^\alpha > k^\alpha] \liminf \sum_{k=1}^{+\infty} P_0^N[(T_0^+)^\alpha > k^\alpha] \leq J.$$

Ce qui prouve (3.8).

Pour la convergence des mesures invariantes, montrons tout d'abord que pour toute fonction f bornée

$$f : S \to \mathbb{R},$$

on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_0^N \left(\sum_{i=1}^{T_0} f(X_i) \right) = \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0} f(X_i) \right) < +\infty \tag{3.9}$$

Si f est possitive, pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0^N} f(X_i^N) \right) &= \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0^N \wedge k} f(X_i^N) \right) \\
&+ \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=k+1}^{T_0^N} f(X_i^N) \mathbb{1}_{(T_0^N > k)} \right) \\
\mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=k+1}^{T_0^N} f(X_i^N) \mathbb{1}_{(T_0^N > k)} \right) &\leq \|f\| \mathbb{E}_0(T_0^N \mathbb{1}_{T_0^N > k}) \\
&\leq \tfrac{\|f\|}{k^{\alpha-1}} \mathbb{E}_0[(T_0^N)^\alpha] \\
&\leq \tfrac{J\|f\|}{k^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, grâce à la convergence des probabilités de transition,

$$(X_1^N, ..., X_k^N \to^L (X_1, ..., X_k),$$

d'où

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0^N \wedge k} f(X_i^N \right) = \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0 \wedge k} f(X_i^N \right). \tag{3.10}$$

On remarque que le terme de gauche est majoré pour tout k par $J\|f\|$ donc la suite

$$k \to \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0 \wedge k} f(X_i \right)$$

est bornée .f étant positive , cette suite converge vers .
soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut trouver k_0 vérifiant (3.11) et (3.12).

$$\left| \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0} f(X_i \right) - \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0 \wedge k} f(X_i) \right) \right| \leq \varepsilon. \tag{3.11}$$

$$\forall N > 0 \quad \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=k_0+1}^{T_0^N} f(X_i^N) \mathbb{1}_{(T_0^N > k_0)} \right) \leq \frac{J\|f\|}{k_0^{\alpha-1}} \leq \varepsilon. \tag{3.12}$$

D'après (3.10), il existe N_{k_0} vérifiant

$$\forall N \geq N_{k_0} \quad \left| \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0 \wedge k_0} f(X_i) \right) - \mathbb{E}_0 \left(\sum_{i=1}^{T_0 \wedge k_0} f(X_i^N) \right) \right| \leq \varepsilon. \tag{3.13}$$

D'après (3.11) , (3.12) , et (3.13) nous obtenonos

$$|\mathbb{E}_0(\sum_{i=1}^{T_0} f(X_i)) - \mathbb{E}_0(\sum_{i=1}^{T_0} f(X_i^N))| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve (3.9).
En choisissant $f \equiv 1$, on obtient

$$\lim_{N\to+\infty} \pi_N(0) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\mathbb{E}(T_0)^n} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_0)} = \pi(0),$$

puis pour tout x élémentbde S,

$$\pi(x) = \frac{\mathbb{E}\left(\sum^{T_0} \mathbb{1}_x(X_i) \right)}{\mathbb{E}(T_0)} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(\sum^{T_0^N} \mathbb{1}_x(X_i) \right)}{\mathbb{E}(T_0^N)} = \lim_{N\to+\infty} \pi_N(x).$$

Remarque 3 La conclusion (3.8) reste vraie pour $\alpha = 1$. Par contre la convergence des mesures invariantes tombe en défaut. En effet, considérons pour tout naturel N supérieur à 1, une marche aléatoire X_n^N définie sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition sont les suivantes :

$$\forall n \neq 0 \quad P^N(n, n-1) = 1$$

$$P^N(0, N)\frac{1}{N} \ et \ P^N(0,1) = 1 - \frac{1}{N}.$$

Et la marche déterministe X_n définie par

$$\begin{array}{rcl} \forall n \neq 0 \quad P(n, n-1) & = & 1 \\ P(0,1) & = & 1. \end{array}$$

Nous avons convergence des probabilités de transition.

$$\mathbb{E}[T_0^N] = 2(1 - \frac{1}{N}) + (N+1)(\frac{1}{N}) = 3 - \frac{1}{N}.$$

Les hypothèses de la propriété 2.3.2 sontvérifiées pour $\alpha = 1$. or,

$$\pi_N(0) = \pi_N(1) = \frac{1}{3 - \frac{1}{N}}$$

et

$$\pi(0) = \pi(1) = \frac{1}{2}$$

2.4 Limites fluides

2.4.1 Présentation et propriétés

La méthode des limites fluides permet en particulier d'étudier la stabilité de certains réseaux. Elle a été introduite assez récemment par Rybko, Stolyar, puis Dai, es limites fluides ont l'avantage de décrire un modéle sous une forme macroscopique. Ce sont, dans le cadre des files d'attente, en général des processus simplifiés, presque sûrement affines par morceaux. Dans de nombreux cas, ces processus sont, soit déterminstes, soit de loi de probabilité très élémentaire. Ils permettent donc d'écrire de façon simplifiée les équations régissant la dynamique établie sur le réseau.

Dans ce paragraphe , nous écrivons trois propositions permettant d'établir l'existence de limites fluides et certaines de leurs propriétés.Les preuves s'appuient trés largement sur des théorèmes écritsdans.
Nous considérons une chaîne de Markov $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ discréte, définie sur un espace Ω, dé crivant les différents états successifs d'un réseau. On choisira l'espace d'état de la chaîne de la forme $S = \mathbb{N}^p$ muni de la norme L^1. Ce type d'ensembles permet en général de caractériser de façon discréte la situation dans un modéle de files d'attente. On note $(\mathcal{F})_n$ la filtration engendrée par $M_0, ..., M_n$ et $\mathbb{E}_x(.)$ l'espérance d'une variable lorsque la chaîne est l'état x à l'instant initial. Dans ce paragraphe 3.3, nous considérons des suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, $(X_n^x)_{n\geq 0})$ adaptées à la filtration $\mathcal{F}_n$, et parmétrées par éléments x de l'espace d'état S. Ce paramétrage correspond à la position initiale de la chaîne. Ici, l'intérnêt est d'étudier le comportement de ces suites lorsque l'on augmente indéfiniment la taille $|x|$ de l'état initial. On normalise également les processus en effectuant un changement de temps proportionnel à la taille de l'état initial. Ils sont définis comme suite :

Definition 2.4.1.1. *Pour tout élément x non nul de l'espace d'état S, on définit le processus $(Y)^x$ à valeurs dans $D_{\mathbb{R}^k}([0, +\infty[)$ par*

$$Y^x(t) = \frac{X^x_{[|x|t]}}{|x|},$$

où$[.]$ désigne la partie entière et $D_{\mathbb{R}^k}([0, +\infty[)$ est l'espace séparable des fonction continues à droite et ayant une limite à gauche (càdlàg), muni de la topologie de Skorokhod.

Definition 2.4.1.2. *On appelle limite fluide toute valeur d'adhérence de l'ensemble des processus $(Y)^x$ lorsque x parcourt $S\backslash 0$.*
Les deux conditions indiquées dans la proposition suivante, permettent de monter l'existence des limites fluides et certaines de leurs propriétés, en particulier le coté lipschitzien et la dérivabilité presque partout. Ces conditions sont en général réalisées pour des processus définis à partir de réseaux.

Proposition 2.4.1. *Si l'ensemble des processus $(X_n^x)_{n\geq 0}$ vérifie les deux propriétés suivantes :*

1.

(3.14) $$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in S \backslash \{0\}, \|X_0^x\| \le M|x| \quad p.s.,$$

2. Il existe une suite de variable aléatoire $(Z_n)_{n\ge 0})$*, positives, indépendantes, identiquement distribuées finie, adaptée à la filtration* $\mathcal{F}$*, vérifiant*

(3.15) $$\forall x \in S, \forall n \ge 1 \|X_n^x - X_{n-1}^x\| \le Z_n \quad p.s.,$$

alors l'ensemble des processus $(Y)^x_{x\in S\backslash\{0\}}$*, défini précédemment, est un sous-espace relativement compact de l'espace des processus de* $D_{\mathbb{R}^k}([0,+\infty])$*.*

Preuve. Il suffit de montrer, d'après Ethier et Kurtz

1. pour tout réel positif T, il existe un réel positif A_T vérifiant

(3.16) $$\lim_{|x|\to+\infty} P\{\|Y^x(T)\| \le A_T\} = 1,$$

2. il existe un réel positif B, tel que pour tout couple (T_1, T_2) de réels positifs,

(3.17) $$\lim_{|x|\to+\infty} P\{\sup_{(s,t)\in[T_1,T_2]} \|Y^x(t) - Y^x(s)\| \le B|T_2 - T_1|\} = 1.$$

Pour la premiére assertion, nous avons

$$\|Y^x(T)\| \le \frac{1}{|x|}\left[\sum_{k=1}^{[|x|T]} \|X_k^x - X_{k-1}^x\| + \|X_0^x\|\right] \le \frac{\sum_{k=1}^{[|x|T]} Z_k}{|x|} + M \quad p.s.$$

D'après la loi forte des grands nombres, ce dernier terme tend presque sûrement vers $(T.\mathbb{E}(Z) + M)$. Il suffit donc de choisir $A_T = T\mathbb{E}(Z) + M + 1$.
Pour la secode assertion, choisissons deux réels positifs vérifiant $T_1 \le s \le t \le T_2$, alors

$$\begin{aligned}\|Y^x(t) - Y^x(s)\| &\le \frac{1}{|x|}\left[\sum_{k=[|x|s]+1}^{k=[|x|t]} Z_k\right] \le \frac{1}{|x|}\left[\sum_{k=[|x|T_1]+1}^{k=[|x|T_2]} Z_k\right] \; p.s., \\ &= \frac{1}{|x|}\left[\sum_{k=1}^{k=[|x|T_2]} Z_k\right] - \frac{1}{|x|}\left[\sum_{k=1}^{k=[|x|T_1]} Z_k\right] \; p.s.\end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers $(T_2 - T_1)\mathbb{E}(Z)$ presque sûrement lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$ On peut choisir $B = \mathbb{E}(Z) + 1$.

Proposition 2.4.2. *Toute valeur d'adhérence Y de l'espace relativement compact défini à la proposition 2.4.1 est persque sûrement lipschitizienne, donc dérivable presque partout.*

Remarque 4 Il existe un ceoficient de Lipschitz commun à toutes les valeurs d'adhérence.

Preuve. On considère une suite (x_k) d'éléments de l'espace d'état S telle que la suite des processus $(Y^{x_k})k \in \mathbb{N}$ converge en loi vers un processus Y. Le processus Y est presque sûrement continu si et seulement si $J(Y^{x_k})$ converge en loi vers 0 (d'après le théorème de Ethier et Kurtz), avec

$$J(X) = \int_0^{+\infty} e^{-u}[J(X,u) \wedge 1]du$$

et

$$J(X,u) = \sup_{0 \le t \le u} \|X(t) - X(t-1)\|.$$

Cette dernière fonction étant positive et croissante en u, pour prouver que

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ \lim_{k \to +\infty} J(Y^{x_k}, u) = 0 \quad p.s., \tag{3.18}$$

il suffit de montrer que pour tout réel positif T, $J(Y^{x_k}, T)$ tend vers 0 p.s. Le procrssus Y^{x_k} est constant par morceaux avec des sauts éventuels aux instants $\frac{i}{|x_k|}$, $(i \in \mathbb{N}^*)$, donc

$$J(Y^{x_k}, T) \le \frac{1}{|x_k|} \sup_{1 \le i[|x_k|T]} \|X_i^{x_k} - X_{i-1}^{x_k}\| \frac{1}{|x_k|} \max_{1 \le i[|x_k|T]} Z_i \quad p.s.$$

Pour tout réel $a > 0$,

$$\begin{array}{rcl} P[J(Y^{x_k}, T) \le a] & \ge & P[\max_{1 \le i[|x_k|T]} Z_i \le a|x_k|] \\ & = & (1 - P(Z > a|x_k))^{[|x_k|T]}. \end{array}$$

Ce dernier terme tend vers 1 lorsque $|x_k|$ tend vers $+\infty$. En effet,

$$[|x_k|T] \ln(1 - P(Z > a|x_k|)) \sim -|x_k|T.P(Z > a|x_k|)$$

et

$$|x_k|P(Z > a|x_k|) \le \frac{1}{a} \int_{Z > a|x_k|} Z d\mu.$$

L'espérance de Z étant par hypothèse finie, cette dernière experession tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui montre (3.18). Il suffit d'utiliser la convergence dominée pour conclure à la convergence presque sûre de $J(Y^{x_k})$ vers 0. La continuité p.s. de Y est ainsi prouvée. Pour montrer que Y est lipschitzienne, il suffit d'utiliser (3.17) pour T_1 et T_2 nombres rationnels puis de prolonger aux nombres réel grâce à la continuité.

Proposition 2.4.3. *Sous les hypothèses de la proposition 2.4.1 , s'il existe un réel positif T_0 tel que pour toute valeur d'adhérence Y,*

$$Y(T_0) = 0,$$

alors

$$\lim_{|x|\to+\infty} \mathbb{E}[\frac{X^x_{[|x_k|T]}}{|x|} = 0.]$$

Preuve. Considérons une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S tendant en norme vers $+\infty$ et vérifiat

$$\frac{X^x_{[|x_k|t]}}{|x|} \to^{\ell} Y(t).$$

On obtient en particulier pour T_0

$$\frac{X^x_{[|x_k|T_0]}}{|x_k|} \to^{\ell} 0. \tag{3.19}$$

Les hypothèses de la proposition 2.4.1 permettent d'écrire

$$\frac{\|X^x_{[|x_k|T_0]}\|}{|x_k|} \leq M + \frac{\sum_{i=1}^{[|x_k|T_0]} Z_i}{|x_k|} \ p.s. \tag{3.20}$$

La suite de droite tend en loi et en espérance vers $M + T_0\mathbb{E}(Z)$. La majoration (3.20) nous permet d'appliquer un théorème de convergence doninée : La convergence en loi (3.19) est aussi une convergence en espérance. D'où le résultat.

Corollaire. Sous les hypothèse de la proposition précédente, il existe un réel A, un temps d'arrêt itégrable τ est un réel γ strictement positif tels que

$$\mathbb{E}[|X(\tau)| - |X(0)|] \leq -\gamma\mathbb{E}_x(\tau) \quad si \ \ |x| > A.$$

Preuve. On choisit un réel ε strictement compris entre 0 et 1. D'après la conclusion de la proposition précédente, il existe un réel A, tel que

$$\forall x \in S, |x| > A \Rightarrow \mathbb{E}[|X[|x|T_0]|] \leq \varepsilon|x|.$$

Choisissons pour temps d'arrêt τ, la variable déterministe égale à la partie entière de $|x|T_0$ et pour γ le réel $\frac{1-\varepsilon}{T_0}$. On obtien ainsi le résultat désiré.

2.5 Exemple

La file M/M/1 Prenons l'exemple de la file D'attente $M/M/1$, où le processus d'arriver des clients dans l'unique salle d'attente est de Poisson de paramètre λ et pour chaque cleint le service suit la loi exponentielle de paramètre μ. L'espace d'état $\mathbb{N}$ indique le nombre de clients dans le système. Lorsque l'état initial est x, la variable X_n^x indique le nombre de clients lors du n^{ime} changement d'état. Les deux hypotèses de la proposition 2.4.1 sont vérifiées car

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, \quad \|X_0^x\| = |x|, \\ &\forall n \geq 1, \quad \|X_n^x - X_{n-1}^x\| = 1. \end{aligned}$$

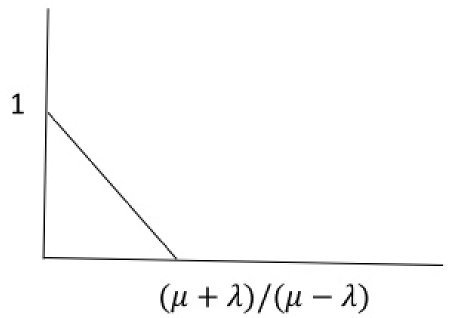
Notons Y, une valeur d'adhérence des processus (Y^x). On montre que ce processus est déterministe et afine par morceaux. Deux situations se présentent suivant les valeurs de λ et μ :
Si $\lambda \geq \mu$

$$\forall t \geq 0, Y(t) = 1 + t\frac{\lambda - \mu}{\mu + \lambda}. \tag{3.21}$$

Si $\lambda < \mu$,

$$Y(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 - t\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu} & si & t \leq \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}, \\ 0 & si & t \geq \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}. \end{array} \right. \tag{3.22}$$

Dans ce deuxième cas, l'existence de réels T vérifiant $Y(T) = 0$ nous permet de prouver la récurrence positive de la chaîne de Markov.



Preuve. Le processus Y^x vérifie

$$Y^x(0) = 1 \quad p.s.$$

C onsidérons trois ombres rationnels strictement positif t, s et a vérifiant $0 \leq s - t < a$.
Nous avons la relation

$$Y^x(0) - Y^x(t) = \frac{1}{x} \sum_{k=[xt]+1}^{k=[xs]} X_k^x - X_{k-1}^x.$$

Sous la condition $Y^x(t) \geq a$, le système est, entre les instants $[xt]$ et $[xs]$, non vide et les variables $(X_k^x - X_{k-1}^x)$ sont pour $k \in \{[xt]+1...[xs]\}$ indépendantes, identiquement distribuées et d'espérance $\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$. D'après la loi forte des grands nombres,

$$\lim_{x \to +\infty} Y^x(s) - Y^x(s) = (s-t)\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \quad p.s.$$

Si on note Y un processus limite, on obtient grâce à la continuité presque sûre pour touts réels strictement positifs et t (proposition 23),

$$Y(t) \geq a \Rightarrow \forall s \in [t, t+a], \qquad Y(s) = Y(t) - (s-t)\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \quad p.s. \tag{3.23}$$

Dans le cas $\lambda \geq \mu$, on remarque que l'ensemble

$$\left\{ \; t \geq 0 \;\; t.q. \;\; \forall s \in [0,t], \qquad Y(s) = 1 + s\tfrac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \qquad \text{p.s. .} \right\}$$

est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ non vide car il contient 0, fermé grâce à la continuité de Y et non borné grâce à (3.23.) Ceci prouve (3.21.) Dans le cas $\lambda < \mu$, on peut montrer de façon similaire que

$$\forall t \in [0, T], Y(t) = 1 - t\frac{\mu - \lambda}{\lambda + \nu},$$

avec Le processue Y est positief et $Y(T) = 0$. Supposons qu'il existe $T_1 > T$ vérifiant $Y(T_1) > 0$. Considérons l'intervalle I défini par

$$\left\{ \ t \in [T, T_1] \ \ \forall s \in [t, T_1], \quad Y(s) = Y(T_1) + (T_1 - s)\tfrac{\mu - \lambda}{\lambda + \nu} \ \right\}.$$

Cet intervalle est non vide et fermé, donc de la forme $[T_2, T_1]$ avec $T \leq T_2 \leq T_1$. D'après ce qui précède,

$$Y(T_2) \geq Y(T_1) > 0.$$

Si nous supposions $T_2 > T$, on pourrait trouver, d'après (3.23) et la continuité de Y, un itervalle ouvert de centre T_2 inclus dans i, ce qui est impossible. On ne peut supposer sous l'hypothèse $I = [T, T_1]$ car $Y(t) = 0$. Ceci prove (3.22). Sous corollaire $\lambda < \mu$, nous pouvons utiliser les conclusions de la proposition 2.4.3 et de son corollaire : il existe un réel A, un temps d'arrêt intégrable τ et un réel γ strictement positif tels que

$$\mathbb{E}_x[|X(\tau) - X(0)|] \leq -\gamma \mathbb{E}_x(\tau) \quad si \ \ |x| > A.$$

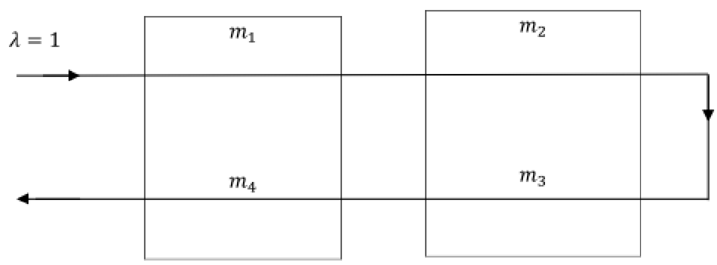
Les hypothèses du théorème 2.4.2 sont réalisées : $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, l'application de S vers R^+ définie par $x \to |x|$ est une fonction de Liapunov car l'ensemble $\{xt.q|x| \leq A\}$ est fini et sur cet ensemble $\mathbb{E}_x(X_1) \leq A + 1$. Ceci prouve la récurrence positive de la chaîne de Markov.

Chapitre 3

Étude par la méthode des limites fluides de la stabilité du réseau de file d'attente de Lu-Kumar-Bramson

Le réseau de file d'attente de Lu-Kumar- Bramson se compose de deux files d'attente ($i = 1, 2$). A chaque file d'attente il y a un serveur et une salle d'attente de capacité infinie. Les clients suivent un itinéraire fixé par le réseau. Ils arrivent de l'extérieur à la cadence 1, ils vont faire la file 1 où ils ont besoin d'un service de moyenne m_1, et puis aligner 2 où ils besoin d'abord d'un service de moyenne m_2, et puis ils éprouvent un feedback à cette file exigeant un service de moyenne m_3, ensuite ils reviennent à la première file où ils ont besoin d'un service de moyenne m_4, et puis ils quittent le réseau. Par conséquent nous avons quatre classes de clients, 1 et 4 à la première file d'attente, et 2 et 3 à la seconde.

La discipline est FIFO dans les deux files d'attente.



Réseau de Lu-Kumar-Bramson

Les conditions nécessaires de stabilité sont

$$(1) \qquad \rho_1 = m_1 + m_4 < 1 \quad et \quad \rho_2 = m_2 + m_3 < 1.$$

Ce réseau a été présenté la première fois dans une configuration particulière par Lu et Kumar [7] et Whitt [9]. Lu et Kumar ont prouvé que pour un certain choix particulier des paramètres, la discipline accordant des priorités plus élevées des classes 2 et 4 est instable.

Whitt a étudié ce réseau sous la discipline FIFO et a conjecturé que sous les conditions (1) si $m_1 = m_3 = 0$ et $m_2 = m_4$ alors le réseau est stable.

Bramson [2] a étudié ce réseau avec j dos d'alimetation à la deuxième station où l'itinéraire est de la forme $1 \to 2 \to 2 \to ... \to 2 \to 1$ dans le cadre de la discipline FIFO. Sous les conditions $m_1 = m_i = \delta, 3 \leq i \leq j+2$ et $m_2 = m_j = 3 = c$, faisant les conditions habituelles $c+\delta \leq cj\delta < 1$, le réseau est instable. Le modèle fluide associé aux réseaux de Bramson a été étudié par Dumas [6] où il a conjecturé que les réseaux de Bramson sont transients pour $j \geq 2$ (mais le cas $j \geq 1$ est toujours un problème non résolu.)

Dai et Weiss [4] ont prouvé que l'addition à (1) de la condition $m_2+m_4 < 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau soit stable sous toute discipline (stabilité globale), en particulier suiffisante pour la discipline FIFO.

En 1988, Chen et Zhang [3] ont établi des conditions suffisante pour pour la stabilité des réseaux de files d'attente multiclasses sous la discipline de service FIFO, qui ramement dans notre cas à la condition $(1-m_4)(1-m_3)-2m_4(m_2-m_3)>0$.

Cependant, ces conditions ne sont pas optimales.

3.1 Modèle fluide

3.1.1 Présentations générales

Pour chaque nombre entier $n \geq 1$, soit $\tau(n)$ le temps d'interarrivée entre l'arrivée du $(n-1)^{ieme}$ client et celle du n^{ieme} client de l'exterieur ; le premier client arrive au temps $\tau(1)$.

Les temps de services pour le n^{ieme} client dans différentes classes sont $\sigma_1(n), ..., \sigma_1(n)$.

Nous faisons les présentation suivantes sur les interarrivées et les services.

D'abord, nous avons :

$$\text{(2)} \qquad \left\{ (\tau(n), \sigma_1(n), ..., \sigma_1(n), \quad n \geq 1 \right\} \textit{ est une suite i.i.d.}$$

Ensuite, nous supposons que les variables aléatoires sont non les premiers moments finis

$$\text{(3)} \qquad \mathbb{E}[\tau(1)] < \infty \quad et \quad \mathbb{E}[\sigma_k(1)] = m_k < \infty, \text{ pour } k = 1, ..., 4.$$

Finalement, nous suppososons que les interarrivées sont non bornées et leurs distributions sont étendues, c'est à dire

$$\text{(4)} \qquad \forall s > 0 \quad \mathbb{P}[\tau(1) \geq x] > 0.$$

On suppose aussi pour un certain nombre entier $n > 0$ et une certaine fonction $p(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^\infty p(x)dx > 0$

$$\text{(5)} \qquad \mathbb{P}[a \leq \sum_{j=1}^{n} \tau(j) \leq] \geq \int_a^b p(x)dx, \ \textit{pour tout} \ \ 0 \leq a \leq b.$$

Sans perte de généralité, nous supposons que $\mathbb{E}[\tau(1)] = 1$. Pour $i = 1, 2$, la charge du trvail pour le serveur i par unité de temps est $\rho_1 = m_1 + m_4$ et $\rho_2 = m_2 + m_3$. Dans tout cet article nous supposons que les conditions

(1) sont satisfaites. Nous supposons que la discipline de service dans les deux stations est FIFO.

Dans Dai [4] ou Dumas [6], les autres ont présentés un processus stochastique $X(t), t \geq 0$ qui décrit la dynamique du réseau de file d'attente.

Pour chaque $t \geq 0, X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ où $X_i(t)$ est l'état à la station i au temps t. Puisque la discipline utilisée est FIFO on a besoin de prendre

$$(6) \qquad X_i(t) = (C_t(i,1), ..., C_t(i, N_i(t)), u(t), v_i(t))$$

où $N_i(t)$ est le nombre de clients à la file i au temps $t \geq 0$ et $C_i(i,l)$ est la classe du l^{eme} client dans ka file i au temps t.

Ici $u(t)$ est le temps résiduel pour le prochain client qui arrive de l'exterieur et $v_i(t)$ est le temps résiduel de service pour le client étant entertenu à la station i au temps t (par covention si $N_i(t) = 0$, $v_i(t) = 0$.) Dans les présentations (2) et (3) le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov déterministe paar morceaux, voir Dai [4]. Comme d'habitude, nous identifions la stabilité de notre réseau par la réccurence positif au sens de Harris de $(X_t)_t$. Nous utiliserons la notion de limite présentée par Rybko et Stolyar [8]. A cet effet, nous avons besoin de quelques notations.

Définition 1. Pour un état initial donée x, et une classe donnée k à la file i :

- $Q_k(x,t)$ est le nombre de clients de la classe k au temps t.
- $A_k(x,t)$ est le nombre d'arrivées de la classe k jusqu' au temps t (par convention : $A_k(x,0) = Q_k(x,0)$).
- $D_k(x,t)$ est le nombre de départs de la classe k jusqu' au temps t (avec $D_k(x,0) = 0$.)
- $T_k(x,t)$ est le temps passé par le serveur $\sigma(k)$ pour servir des client de la classe k jusqu' au temps t.
- $Z_i(x,t)$ est la charge de travail immediate à la file i au temps t.

Tous ces processus sont pris continus. Nous définissions les processus correspondants de vecteurs $Q, A, D,$ et T qui sont de dimention 4 et $Z = (Z_1, Z_2)$.

3.2 La limite fluide et le modèle fluide

Si x est l'état du réseau nous notons par $|x|$ le nombre total des clients dans le système dans l'état x. Pour toute suite d'état $(x_n)_{n\geq 0}$, $\forall n$, et pour tout processus $(H(x_n,t))_{t\geq 0}$, on définit $\overline{H}^n$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad \overline{H}^n(t) = \frac{H(x_n, |x_n|t)}{|x_n|}.$$

Le théorème suivant dû à Dai [4] définit et cara ctérise les limites fluides associées au réseau de L.K.B..

Théorème 1 (Dai). Soit (x_n) une suite d'états initials avec $|x_n| \to +\infty$ alors il existe une sous suite $(x_{\phi(n)})$ telle que :

$(\overline{Q}_{\phi(n)}, \overline{A}_{\phi(n)}, \overline{D}_{\phi(n)}, \overline{T}_{\phi(n)}, \overline{Z}_{\phi(n)})$ cnverge en loi vers limite (Q, A, D, T, Z). Cette limite satisfait les équations suivantees :

(7) $\quad Q_k(t) = Q_k(0) + \mu_{k-1}T_{k-1}(t) - \mu_k T_k(t)$ pour $k = 1, ..., 4$

avec $\mu_k = \frac{1}{m_k}$ pour $k = 1, ..., 4, \mu_0 = 1$ et $T_0(t) = t$ pour $t \geq 0$,

(8) $\quad Q_k(t) \geq 0$ pour $k = 1, ..., 4$,

(9) $\quad D_k(t) = \mu_k T_k(t)$ pour $k = 1, ..., 4$,

(10) $\quad T_k(0) = 0$ est croissant pour $k = 1, ..., 4$,

(11) $\quad B_1(t) = T_1(t) + T_4(t)$ et $B_2(t) = T_1(t) + T_3(t)$

(12) $\quad Y_i(t) = t - B_i(t)$ est croissant pour $i = 1, 2$,

(13) $\quad Y_i(t)$ augmente seulement par t quand $Z_i(t) = 0$

(14) $\quad Z_1(t) = m_1Q_1(t) + m_4Q_4(t)$ *et* $Z_2(t) = m_2Q_2(t) + m_3Q_3(t)$

(15) $\quad D_k(t + Z_i(t)) = Q_k(0) + A_k(t)$ pour $k = 1, \cdots, 4, \ i = \sigma(k)$.

Définition 2. Toute solution aux équations $(7),...,(15)$ s'appelle un modèle fluide. Ainsi n'importe qu'elle limite fluide est un modèle fluide.

Pour tout $k = 1,...,4$, les foncions $t \to T_k(t)$ et $t \to t - T_k(t)$ sont croissantes et nous avons : $|T_k(t) - T_k(s)| \leq |t - s|$ pour tout $s, t \geq 0$, donc elle sont absolument continues et par les équations de fluide toutes les fonctions $Q_k(.), B_i(.), Y_i(.)$ et $Z_i(.)$ sont absolument continues.

La condition de conservation du travail (13) est utilisé dans la formule suivante

$$(16) \qquad Si \quad Z_i(t) > 0 \quad pour\ tout\ t \in [a, b], \quad alors\ Y_i(a) = Y_i(b)$$

L'équation de FIFO (15) est également connue sous la forme équivalente suivante

$$(17) \qquad D_k(t) = Q_k(0) + A_k(\tau_i(t)) \quad pour\ tout\ t \geq t_i = Z_i(0),\ i = \sigma(k),$$

avec $\tau_i(t)$ l'inverse de la fonction $t \to t + Z_i(t)$.

Dans le contexte stochastique, $\tau_i(t)$ est le temps d'arrivée du client actuel en service à la station i, si $Z_i(t) > 0$ et $\tau_i(t) = t$ si $Z_i(t) = 0$.

Dans la proposition suivante on va donner les propriétés de la fonction $\tau_i(t)$, $i = 1, 2$ (pour la preuve et plus de details voir Chen et Zhang [3])

Proposition 1. Pour $i = 1, 2$ nous avons :

(a) $Z_i(\tau_i(t)) = t - \tau_i(t)$ *pour* $t \geq Z_i(t)$.

(b) $\tau_i(t)$ *est lipschitzinne sur*$[0, \infty[$.

(c) $\tau_i(t)$ *est une fonction croissante et* $\tau_i(t) \to +\infty$.

3.3 Résultat de stabilité :

Théorème 2. En plus de (1) si nous avons :

$$(18) \qquad \rho_1 \leq \rho_2$$

alors tout modèle fluide $Q(.)$ satisfait $\lim_{t\to\infty} |Q(t)| = 0$ et donc le réseau est stable.

Preuve. Soit $Z(t) = Z_1(t) = Z_2(t)$. Ainsi nous avons

$$\lim_{t\to\infty} |Q(t)| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} Z(t) = 0.$$

Nous réecrivons les charges de travail aux deux stations sous une forme commode qui nous permet d'employer la propriété de conservation (16).

En utilisant les équations fluides $(7), (9), (14)$ et l'équation de FIFO (17), la charge de travail dans les deux stations peut s'écrire comme suite :

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} Z_1(t) & = & [m_1[Q_1(0) + A_1(t)] + m_4[Q_4(0) + A_4(t)]] - t + Y_1(t), \\ Z_2(t) & = & [m_2[Q_2(0) + A_2(t)] + m_3[Q_3(0) + A_3(t)]] - t + Y_2(t) \end{array} \right.$$

Tout les relations dans la suite ne peuvent se tenir pour aucun $t \geq 0$ mais seulement pour tout $t \geq T_0$ avec T_0 un temps fini à déterminer par les données initiales. Et puisque nous étudions le comportement de $Z(t)$ lorsque $t \to \infty$, nous omettrons d'indiquer la constante T_0.

Le réseau est un ligne de réentrée ainsi nous avons :
$A_1(t) = t, \quad A_2(t) = D_1(t), \quad A_3(t) = D_2(t), \quad$ et $\quad A_1(t) = D_3(t)$.
L'équation de FIFO (17) donne :

$$\begin{array}{lrclcl} (20) \qquad & A_1(t) & = & t & & \\ (21) & A_2(t) & = & D_1(t) & = & Q_1(0) + A_1(\tau_1(t)), \\ (22) & A_3(t) & = & D_2(t) & = & Q_2(0) + A_2(\tau_2(t)), \\ (23) & A_4(t) & = & D_3(t) & = & Q_3(0) + A_3(\tau_2(t)). \end{array}$$

En remplaçant t par $\tau_1(t)$ dans (20) et par $\tau_2(t)$ dans (21) et (22) (on note $\tau_2(\tau_2(t)) = \tau_2^{(2)}(t))$, nous obtenons

$$\begin{array}{rl} A_1(\tau_1(t)) & = \tau_1(t), \\ A_2(\tau_2(t)) & = Q_1(0) + A_1(\tau_1(\tau_2(t))), \\ A_3(\tau_2(t)) & = Q_2(0) + A_2(\tau_2(\tau_2(t))), \end{array}$$

ainsi $A_1(\tau_1(\tau_2(t))) = \tau_1(\tau_2(t))\tau_2^{(2)}(t))$ et $A_2(\tau_2^{(2)}(t)) = Q_1(0) + A_1(\tau_1(\tau_2^2(t)))$, et finalement $A_1(\tau_1(\tau_2^2(t))) = \tau_1(\tau_2^2(t))$.

Récapitulons les équations ci-dessus. Pour tout $t_0 \geq t$ (avec T est un temps fini)

$$\begin{aligned} A_1(t) &= t \\ A_2(t) &= Q_1(0)\tau_1(t), \\ A_3(t) &= Q_1(0) + Q_2(0) + \tau_1(\tau_2(t)), \\ A_4(t) &= Q_1(0) + Q_2(0) + Q_3(0) + \tau_1(\tau_2^2(t)). \end{aligned}$$

La substitution de $A_k(t)$ en (19) rapporte :

$$\begin{cases} Z_1(t) = c_1 + m_4(t - \tau_1(\tau_2^2(t))) + (\rho_1 - 1)t + Y_1(t), \\ Z_2(t) = c_2 + m_2(t - \tau_1(t)) - m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - (1 - \rho_2)t + Y_2(t), \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes ne dépendant pas du temps.

$$\begin{aligned} (24) \qquad Y_1(t) &= Z_1(t) + m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) - (\rho_1 - 1)t - c_1, \\ (25) \qquad Y_2(t) &= Z_2(t) + m_2(t - \tau_1(t)) - m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - (\rho_2 - 1)t - c_2. \end{aligned}$$

En utulisant la propriété (a) de la proposition 1, nous prouvons réecrire (24) sous la forme suivante

$$Y_1(t) = Z_1(t) + m_4(t - \tau_2 + \tau_2(t) - \tau_2^{(2)}(t)) + \tau_2^{(2)}(t) - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t)) - (\rho_1 - 1)t - c_1.$$

Ainsi

$$(26) \quad Y_1(t) = Z_1(t) + m_4(Z_2(t) + Z_2(\tau_2^{(2)}t))) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) - (\rho_1 - 1)t - c_1$$

et (25) comme

$$Y_2(t) = Z_2(t) + m_2(t - \tau_1(t)) + m_3(t - \tau_2(t) + (t - \tau_2(t) - t - \tau_1(t - \tau_2(t)))) - (\rho_2 - 1)t - c_2,$$

$$(27) \quad Y_2(t) = Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))) - (\rho_2 - 1)t - c_2.$$

Nous allons réduire le problème à l'étude de $Z_1(t)$.

Lemme 1. Si $\lim\limits_{t \to +\infty} Z_1(t) = 0$. alors $\lim\limits_{t \to +\infty} Z(t) = 0$.

Preuve. Soit t un temps tels que : $Z_2(t) > 0$ et $a = \max\{u < t, Z_2(u) = 0\}$, alors $Y_2(a) = Y_2(t)$. En utilisant la relation (25) et le fait que $Z_2(t) = 0$ nous avons :

$Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - (\rho_2 - 1)t - [Z_2(a) m_2 Z_1(\tau_1(a))$
$+m_3 Z_1(a - \tau_1(\tau_2(a))) - (\rho_2 - 1)a] = 0,$
$Z_2(a) = 0$ car $a = \max\{u < t Z_2(u) = 0\}$ et $\tau_2(a)$ car $Z_2(a) = 0$, donc
$Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_3(a - \tau_1(a))$
$= (\rho_2 - 1)(t - a),$
$Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - \rho_2 Z_1(\tau_1(a)) = (\rho_2 - 1)(t - a),$
comme $\rho_1 < 1$ nous avons

$$Z_2(t) \leq Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) < \rho_2 Z_1(\tau_1(a))$$

donc

$$Z_2(t) < \rho_2 \sup_{\tau_2(a) \leq u \leq t} Z_1(u). \tag{28}$$

Maintenant, pour prouver la stabilité il suffit de prouver que $\lim_{t \to +\infty} Z_1(t) = 0$.

Pour toute solution fluide $Q(.)$ o a associé une suite croissante de temps t_i, comme dans Bertsimas, Gamarnik et Tsitsiklis [1], qui satisfait :

$$\begin{cases} dans \quad (t_{4m+1}, t_{4m+2}) \quad Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) \geq 0 \\ dans \quad (t_{4m+2}, t_{4m+3}) \quad Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) > 0 \\ dans \quad (t_{4m+3}, t_{4m+4}) \quad Z_1(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) > 0 \\ dans \quad (t_{4m+4}, t_{4m+5}) \quad Z_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_2(t) > 0 \end{cases}$$

et par continuité $Z_2(t_{4m+1}) = Z_2(t_{4m+2}) = 0$ et $Z_1(t_{4m+3}) = Z_1(t_{4m+4}) = 0$.

L'existence de la suite t_i est due au fait que sous les conditions nécessaires de stabilité (1), pour $i = 1, 2$ l'ensemble des points t auquels $Z_i(t) = 0$ est illimité.

S'il existe $\delta > 0$ tel que $Z(t) = 0$ pour tout $t \geq \delta$ et pour toute limite fluide $Z(.)$, alors $\lim_{i \to +\infty} t_i \leq \delta$ et le réseau est stable. Sinon, il existe une solution fluide telle que la suite associée t_i satisfait : $\lim_{i \to +\infty} t_i = \infty$ et dans tout le reste de la preuve nous considérons que nous sommes dans le deuxième cas. Pour terminer la preuve du théorème 2 nous avons besoin des inégalités suivantes :

$$\sup_{[t_{4m+2}, t_{4m+4}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})), \tag{29}$$

(30) $$\sup_{[t_{4m+4},t_{4m+5}]} Z_1(t) < m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1((\tau_1\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))],$$

(31) $$\sup_{[t_{4m+5},t_{4(m+1)+2}]} Z_1(t) < m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1((\tau_1\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))].$$

Nous allons donner la preuve de la première inégalité (29). La démonstration détaillé de la deuxuième (30) ainsi que la troisième inégalité (31) on la donnera à l'appendice.

Preuve de l'inégalité (29) : Soit $t \in (t_{4m+2}, t4m+5)$ puis $Z_2(t) > 0$ et $Y_2(t) = Y_2(t_{4m+2})$.

En utilisant (25) et le fait que $Z_2(t_{4m+2}) = 0$ nous avons :

$Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) = (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+2})$

où

$$\begin{aligned} m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) &= m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) \\ &= \rho_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2(t))), \end{aligned}$$

donc

$Z_2(t)+\rho_2 Z_1(\tau_1(t))+m_3(t-\tau_1(\tau_2(t)))-\rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) = (\rho_2-1)(t-t_{4m+2})$

ce qui implique que (quand $\rho_2 < 1$)

$$Z_1(\tau_1(t)) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \quad \text{pour tout} \quad t \in [(t_{4m+2}), \tau_1(t_{4m+5})]$$

mais la fonction $\tau_1(.)$ est continue et strictement croissaante de $[t_{4m+2}, t_{4m+5}]$ à $[\tau_1(t_{4m+2}), \tau_1(t_{4m+5})]$. D'où pour tout $t \in [(t_{4m+2}), \tau_1(t_{4m+5})]$ nous avons :

$$Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \quad \text{pour tout} \quad t \in [(t_{4m+2}), \tau_1(t_{4m+5})].$$

Par la définition de la suite $\{t_i\}$, en premier lieu nous avons $Z_1(t_{4m+2}) > 0$ ainsi $\tau_1(t_{4m+2}) < t_{4m+2}$ en second lieu nous avons $Z_1(t_{4m+4}) = 0$ ainsi $t_{4m+4} = \tau_1(t_{4m+4}) \leq \tau_1(t_{4m+5})$.

Pour conclure, nous récapitulons tous les résultat.

Nous avons

$$\sup_{[t_{4m+2},t_{4m+4}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2}))$$

et nous avons

$$\sup_{[t_{4m+4},t_{4(m+1)+2}]} Z_1(t) < m_4 Z_1(\tau_1(t_{4m+2}))$$

les deux inégalités impliquent d'une part

$$(32) \qquad Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})).$$

et d'autre part

$$(33) \qquad \sup_{[t_{4m+2}, t_{4(m+1)+2}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})).$$

La dernière inégalité (33) est valable pour tout m, donc nous remplaçons m par $(m+1)$. Nous avons

$$\sup_{[t_{4(m+1)+2}, t_{4(m+2)+2}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{4(m+1)+2})).$$

Ainsi, en utilisant (32), nous avons

$$(34) \qquad Z_1(t) < m_4 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) \text{ pour tout } t \in [t_{4(m+1)+2}, t_{4(m+2)+2}].$$

Maintenant, soit $S_m = t_{4m+2}$. Si $\lim_{i\to+\infty} t_i = \infty$ alors $\lim_{i\to+\infty} S_i = \infty$ et l'inégalité (34) implique

$$\textit{pour tout } t \in [S_m, S_{m+2}], \qquad Z_1(t) < m_4\big(\sup_{S_{m-2}\le u\le S_m} Z_1(u)\big)$$

et par itération comme $m_4 < 1$, cequi achève la démonstration du théorème.

Nous terminerons cette section par deux résultats numérique.

On suppose que les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et les temps de services suivent des lois exponentiel de paramètres μ_i.

Dans le tableau suivant nous donnons des exemples en simulation pour illustrer la stabilité du réseau quand la condition (18) du théorème 2 est vérifié.

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	Pourcentage
0.1	0.2	0.3	0.4	50 %
0.2	0.6	0.1	0.4	90 %
0.3	0.2	0.5	0.1	100 %
0.1	0.6	0.2	0.5	99 %
0.4	0.2	0.5	0.1	100 %

Le cas des moyennes $m_1 = 0.3651$, $m_2 = 0.2032$, $m_3 = 0.5006$, $m_4 = 0.1027$ le pourcentage est 100% c'est à dire tout les clients sont servis et le réseau se vide (cas de stabilitè).

Maintenant, dans le tableau suivant nous donnons des exemples en simulation pour illustrer la l'instabilité du réseau quand la condition (18) du théorème 2 n'est pas vérifié.

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	Pourcentage
0.7	0.6	0.2	0.1	45 %
0.7	0.6	0.1	0.2	0 %
0.5	0.6	0.2	0.4	14 %
0.2	0.5	0.1	0.7	0 %
0.6	0.4	0.1	0.2	0 %

Le cas des moyennes $m_1 = 0.2032$, $m_2 = 0.5006$, $m_3 = 0.1027$, $m_4 = 0.7266$ le pourcentage est 0% c'est à dire il y a blokage dans le réseau (cas de d'instabilitè).

3.4 Appendice

La preuve des inégalité (30) et (31) se fait en deux étapes.

Etape 1 : nous montrerons l'inégalité suivante :

$$Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2})). \tag{35}$$

Preuve : Par définition, $\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})$ satisfait :

$$(t_{4m+2}) < \tau_2^{(2)}(t_{4m+4}) < (t_{4m+5})$$

D'où, en utilisant la propriété de conservation (16) nous explicitons la relation (25) pour $t = t_{4m+2}$ et pour $t = \tau_2^{(2)}(t_{4m+4})$ le fait que

$$Y_2(t_{4m+4}) = Y_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})).$$

Alors

$$Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+\rho_2 Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))+m_3[\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))-\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{4m+4}))]$$
$$-\rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) = (\rho_2-1)(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})-t_{4m+2}).$$

La dernière expression peut s'écrire comme suite :
$(\rho_2-1)(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})-t_{4m+2}) =$

$$\begin{aligned}
&= (\rho_2-1)(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})-\tau_2 t_{4m+4})+\tau_2 t_{4m+4})-t_{4m+2})\\
&= -(\rho_2-1)(\tau_2 t_{4m+4})+\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})+(\rho_2-1)(\tau_2(t_{4m+4})-t_{4m+2})\\
&= -(\rho_2-1)Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+(\rho_2-1)(\tau_2(t_{4m+4})-t_{4m+2})
\end{aligned}$$

d'où

$$\rho_2[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]$$
$$+m_3[\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))-(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{4m+4})))]-\rho_2 Z_1(\tau_1(t_{4m+2})) =$$
$$= (\rho_2-1)(\tau_2(t_{4m+4})-t_{4m+2})$$

donc

$$Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) < Z_1(\tau_1(t_{4m+2}))$$

Etape 2 : Nous donnons la preuve de la deuxième inégalité (30) :

1^{er} **cas :** Si $\tau_2(t) \le t_{4m+4} \le t$ alors

$$\tau_2^{(2)}(t) \le \tau_2(t_{4m+4}) \le \tau_2(t) \le t_{4m+4} \le t$$

et

$$t_{4m+4}-\tau_2(t_{4m+4}) < t-\tau_2^{(2)}(t) < t-\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))$$

i.e.

$Z_2(t)(\tau_2(t_{4m+4})) < Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) < Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+$
$Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))$

mais t satisfait encore (comme $Y_1(t)=Y_1(t_{4m+4})$)

$$Z_1(t)+m_4[Z_2(\tau_2(t))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))]-$$
$$-m_4[Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))+Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]$$
$$= (\rho_1-1)(t-t_{4m+4}) < 0$$

d'où nous avons nécessairement

$$Z_1(t) < m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))].$$

2^{eme}**cas :** Si $t_{4m+4} < \tau_2(t) < t < t_{4m+5}$; nous avons d'une parte :

$$Y_2(\tau_2(t)) = Y_2(\tau_2(t_{4m+4}))$$

ceci implique

$$\begin{aligned}
&Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - \\
&Z_2(\tau_2(t4m+4)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) - \\
&-m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \quad (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - \tau_2(t_{4m+4})) \\
&= \quad (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - t + t - t_{4m+4} + t_{4m+4}) - \tau_2(t_{4m+4})) \\
&= \quad -(\rho_2 - 1)Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)[t - t_{4m+4}] + (\rho_2 - 1)Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\rho_2 Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + \\
&m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - \rho_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) \\
&-m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) - m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] \qquad (36)
\end{aligned}$$

$$= (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+4}).$$

Comme $\rho_2 = m_2 + m_3$ la dernière égalité peut s'écrire comme la suite :

$$\begin{aligned}
&m_2 Z_2(\tau_2(t)) - m_3 Z_1(\tau_1 \tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] \\
&-m_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - -m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) \\
&-m_3[Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]
\end{aligned}$$

$$= (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+4}).$$

D'autre parte, nous avons : $Y_1(t) = Y_1(t_{4m+4})$ alors la relation (26) nous donne : $Z_1(t) + m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))]$

$$- m_4[Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] \qquad (37)$$

$$= (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+4})$$

qui peut s'écrire comme suite :

$$\begin{aligned}
&Z_1(t) + m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+4}) \\
&= m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))
\end{aligned}$$

d'où si

$$Z_1(t) \geq m_4[Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]$$

alors

$m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+4}) \leq$
$\leq m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4}))$

nous utilisons la propriété de la fonction $\tau_i(.)$, pour $i = 1, 2$ nous avons

$$\begin{aligned}[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] &= [t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))] \\ &< [t - \tau_1(\tau_2(t))] \\ &= [Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))]\end{aligned}$$

donc

$$(38) \quad (\rho_2 - 1)(t - t_{4m+4}) + m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))] > 0.$$

D'une part la relation (36) permet d'écrire que :

$\rho_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - \rho_2[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] <$
(39) $\quad < (1 - \rho_2)(t - t_{4m+4}) - m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))$
$\quad -m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]$.

D'autre part la relation (37) se réécrit comme suit :

(40) $\quad Z_1(t) + m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] + (1 - \rho_1)(t - t_{4m+4}) =$
$= m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))]$.

Maintenant on va distinguer deux cas, selon que le terme de l'égalité (40) est positif ou non. Si

$$Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) \leq Z_2(\tau_2((t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))).$$

Alors d'après cette même égalité (40) on foeçément (puisque $\rho_1 < 1$)

$$Z_1(t) < m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))]$$

ce qui est le résultat recherché. Sinon dans le cas contraire c'est à dire on a

$$Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) > Z_2(\tau_2((t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))).$$

Alors puisque $m_4 < \rho_1 \leq \rho_2$ on a

$m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] <$
$\quad \rho_2 m_4 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - \rho_2[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))]$

et en utilisant toujours l'égalité (40) on obtient

$$Z_1(t)m_4[Z_2(\tau_2(2)(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] + (1-\rho_1)(t - t_{4m+4}) <$$
$$< \rho_2 Z_2(\tau_2(t_{4m+4})) - \rho_2[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))].$$

Ceci implique, d'après (39), que

$$Z_1(t)m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] + (1-\rho_1)(t - t_{4m+4}) <$$
$$< (1-\rho_1)(t - t_{4m+4}) - m_2 Z_1 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4})))$$
$$-m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]$$

Or $(1-\rho_2) \leq (1-\rho_1)$, donc :

$$Z_1(t)m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] <$$
$$< -m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{4m+4}))) - m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))] < 0$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité(30).

Maintenant, nous donons la preuve de la troisème inégalité (3).

Preuve : $\forall t \in [t_{4m+5}, t_{(4m+1)+2}]$ nous avons :

$$Z_1(t) > 0 \text{et} Z_2(t) \geq 0.$$

Nous pouvons alors écrire $t \in [t_{4m+5}, t_{(4m+1)+2}] = \cup_{i=0}^{i=N}(a_i, a_{i+1})$ tel que à chaque intervalle (a_i, a_{i+1}) nous avons :

$$\forall t \in (a_i, a_{i+1}), \quad Z_1(t) > 0 \text{ et } Z_2(t) > 0$$
$$\forall t \in (a_i, a_{i+1}), \quad Z_1(t) > 0 \text{ et } Z_2(t) = 0$$

Ainsi dans la suite nous distinquons deux cas :

1^{er} **cas :** Soit $[a, b] \subset (t_{4(m+1)+1}, t_{4(m+1)+2})$ tel que :

$$Z_2(a) = Z_2(b) = 0 \text{ et } \; Z_2(t) > 0 \text{ pour tout } \; t; \; a < t < b.$$

Soit $t \in [a, b]$, alors $a < \tau_2(t) < t < b$ et $Y_2(\tau_2(t)) = Y_2(a)$, ainsi en utilisant la relation (27) sur l'intervalle $(a, \tau_2(t))$ nous avons

$$Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - \rho_2 Z_1(\tau_1(a)) =$$

(41)
$$\begin{aligned} &= (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - a), \\ (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - a) &= (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - t + t - a) \\ &= -(\rho_2 - 1)Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)(t - a), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\rho_2 = m_2 + m_3$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - \\ & \qquad -(m_2+m_3)Z_1(\tau_1(a))) = \\ = & \quad -(m_2+m_3-1)Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)(t-a) \\ & m_3[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - m_3 z_1(\tau_1(a)) \\ = & \ (\rho_2 - 1)(t-a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_2[z_2(\tau_1(\tau_2(t)))]. \end{aligned}$$

Cette dernière relation est une conséquence de la propriété de conservation appliqué à la deuxième station. En utilisant la même propriété pour la deuxième station sous l'intervalle (a, t).

$Y_1(t) = Y_1(a)$ et la relation (26) implique ceci

$$\begin{aligned} & Z_1(t) + m_4[z_2(\tau_2(t)) + z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - Z_1(a) - m_4 z_1(\tau_1(a)) \\ & \qquad = (\rho_1 - 1) - (t-a) \end{aligned} \tag{42}$$

(car le fait que $Z_2(a) = Z_2(b) = 0$ entraine que $\tau_2(a) = \tau_2^{(2)}(a) = a$).
Cette égalité implique que

$$Z_1(t) < Z_1(a)$$

autrement dit, la dernière égalité implique d'une part que

$$m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] < m_4 Z_1(\tau_1(a)) \tag{43}$$

d'autre part elle peut s'écrire comme suite :

$$(\rho_1 - 1)(t-a) + m_4 Z_1(\tau_1(a)) - m_4[t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))] = Z_1(t) - Z_1(a) \geq 0$$

et comme $t - \tau_1(\tau_2(t)) < t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))$ nous avons

$$(\rho_1 - 1)(t-a) + m_4 Z_1(\tau_1(a)) - m_4[t - \tau_1(\tau_2(t))] > 0.$$

L'égalité (41) peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & m_3[z_2(\tau_2(t)) + z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] - m_3 Z_1(\tau_1(a)) = \\ & = (\rho_2 - 1)(t-a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_2[t - \tau_1(\tau_2(t))]. \end{aligned} \tag{44}$$

Or

$$[t - \tau_1(\tau_2(t))] < [t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))]$$

donc

(45) $$\rho_2 Z_1(\tau_1(a)) - \rho_2[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(t)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))] < (1-\rho_2)(t-a).$$

D'autre part la relation (42) implique que

(46) $$z_1(t) - z_1(a) + (1-\rho_1)(t-a) = $$
$$= m_4 Z_1(\tau_1(a)) - m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(t)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))].$$

En utilisant l'inégalité (46), dont les deux termes sont négatifs, et le fait que $m_4 < \rho_2$ on obtient

$$Z_1(t) - Z_1(a) + (1-\rho_1)(t-a) < (1-\rho_2)(t-a)$$

et puisque $(1-\rho_2) \leq (1-\rho_1)$ alors

$$Z_1(t) < Z_1(a).$$

2eme **cas :** Soit $[a, b] \subset (t_{4(m+1)+1}, (t_{4(m+1)+1})$ tel que $Z_2(.) = 0$.

Comme $Z_2(.)$ est une fonction positive, si elle est différentiable pour $t \in [a, b]$ alors $\dot{Z}_2(t) = 0$ ou bien

$$\begin{array}{lll}
Z_2(t) = m_2 Q_2(t) + m_2 Q_3(t) & \Rightarrow & \dot{Z}_2(t) = m_2 \dot{Q}_2(t) + m_2 \dot{Q}_3(t) \\
& \Rightarrow & \dot{Q}_2(t) = \dot{Q}_3(t) = 0, \\
Q_2(t) = Q_2(0) + \mu_1 T_1(t) - \mu_2 T_2(t) & \Rightarrow & \dot{Q}_2(t) = \mu_1 \dot{T}_1(t) - \mu_2 \dot{T}_2(t) = 0 \\
& \Rightarrow & \mu_1 \dot{T}_1(t) = \mu_2 \dot{T}_2(t), \\
Q_3(t) = Q_3(0) + \mu_2 T_2(t) - \mu_3 T_3(t) & \Rightarrow & \dot{Q}_3(t) = \mu_2 \dot{T}_2(t) - \mu_3 \dot{T}_3(t) = 0 \\
& \Rightarrow & \mu_2 \dot{T}_2(t) = \mu_3 \dot{T}_3(t),
\end{array}$$

ce qui implique

$$\mu_1 \dot{T}_1(t) = \mu_2 \dot{T}_2(t) = \mu_3 \dot{T}_3(t)$$

Ainsi nous avons d'une part :

$$\begin{array}{rcl}
Z_1(t) & = & m_1[Q_1(0) + t - \mu_1 T_1(t)] + m_4[Q_4(0) + \mu_3 T_3(t) - \mu_4 T_4(t)] \\
& \Rightarrow & \dot{Z}_1(t) = m_1(1 - \mu_1 \dot{T}_1(t)) + m_4(\mu_3 \dot{T}_3(t) - \mu_4 \dot{T}_4(t)) = 0 \\
& = & m_1 - \dot{T}_1(t) + m_4 \mu_3 \dot{T}_3(t) - \dot{T}_4(t) \\
& = & m_1 - \dot{T}_1(t) + m_4 \mu_1 \dot{T}_1(t) - \dot{T}_4(t) \\
& = & m_1 + m_4 \mu_1 \dot{T}_1(t) - \Big(\dot{T}_1(t) + \dot{T}_4(t)\Big) \\
& = & m_1 + m_4 \mu_1 \dot{T}_1(t) - \dot{B}_1(t)
\end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_2(t) &= m_2[\mu_1\dot{T}_1(t) - \mu_2\dot{T}_2(t)] + m_3[\mu_2\dot{T}_2(t) - \mu_3\dot{T}_3(t)] \\
&= \rho_2\mu_1\dot{T}_1(t) - \dot{B}_1(t) = 0
\end{aligned}$$

donc

$$\rho_2\mu_1\dot{T}_1(t) = \dot{B}_2(t) < 1,$$

le fait que $m_4 < \rho_2$ on obtient

$$Z_1(t) - Z_1(a) = \int_a^t \dot{Z}_1(u)du \leq 0.$$

Récapitulons ci-dessus, pour tout $i = 0, \ldots, N-1$

$$Z_1(t) \leq Z_1(a_i) = \text{ si } \; t \in [a_i, a_{i+1}]$$

ainsi pour tout $t \in [a_0, a_N] = [t_{4m+5}, t_{(4m+1)+2}]$, $Z_1(t) \leq Z_1(a_0) = Z_1(t_{4m+5})$

et par la deuxième inégalité

$$Z_1(t) < m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4}))Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{4m+4})))]$$

Conclusion

• Dans notre mémoire, nous avons commencé par introduire de théorié des files d'attente, puis nous avons présenté les chaînes de Markov avec un exemple concret, ainsi que la stabilité du réseau au sens probabiliste et à la fin l'étude par la méthode des limites fluides de la stabilité au réseau de files d'attente de Lu-Kumar-Bramson.

• Ce mémoire a été consacré à l'étude de l'ergodicité du réseau de file d'attente de Lu-Kumar- Bramson sous la discipline de service $FIFO$ et sous les conditions habituelles

$$\rho_1 = m_1 + m_4 < 1 \quad et \quad \rho_2 = m_2 + m_3 < 1.$$

En utilisant le critère du modèle fluide présenté par Rybko, Stolyar et Dai [4], nous montrons que si $\rho_1 \leq \rho_2$ alors le modèle fluide est stable et le réseau de file d'attente stochastique est ergodique.

Par conséquent, nous avons prouvé la conjecture de Whitt et nous avons montré que les conditions de la stabilité des réseaux multiclasses de files d'attente sous FIFO obtenues par Chen et Zhang ne sont pas optimales.

Nous espérons que ce mémoire est une bonne initiation à nous pour la poursuite de nos études pour la recherche dans le domaine des Probabilités et Statistique.

Bibliographie

[1] Bertsimas, D. ; Gamarnik, D. and Tsitsklis, J.N. - Stability conditions for multiclass fluid queueing networks, IEEE Trans. Automat. Control., 41 (1996)-11, 1618-1631.

[2] Bramson, M. - Instability of FIFO queueing networks, Ann. App. Probab., 4 (1994), 414-431.

[3] Chen, H. and Zhang, H. - Stability of multiclass queueing networks under FIFO service discipline, Math. Oper. Res., 22 (1997)-3, 691-725.

[4] Dai, J.G. - On the positive Harris recurrence of multiclass queueing networks : a unified approach via fluid limit models, Ann. App. Probab., 5 (1994), 49-77.

[5] Dai, J.G. and Whiss, G. - Stability and instability of fluid models for certain reentrant lines, Math. Oper. Res., 21 (1996), 115-134.

[6] Dumas, V.- Diverging paths in FIFO fluid networks, IEEE Trans. Automat. Control., 44 (1999)-1, 191-194.

[7] Lu, S.H. and Kumar. P.R. - Distributed scheduling based on due dates and buffer priorities, IEEE Trans. Automat. Control., 36 (1991), 1406-1416.

[8] Rybko, A.N. and Stolyar, A. - Ergodicity of stochastic processes describing the operations of open queueing networks, Problems Inform. Transmission, 28 (1992), 199-220.

[9] Whitt, W. - Large fluctuations in a deterministic multiclass networks of queues, Management Sci., 39 (1993), 1020-1028.