République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Invariance de L'indice des Opérateurs Fermés dans un Espace Métrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse, Géometrie et applications

par

Haddi **M**ohammed[1]

Sous la direction de

Mr B. Saadli

Soutenue le 22 juin 2017 devant le jury composé de

Dr O. Benihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Dr G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mlle H. Abbes	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

[1]e-mail : haddi@gmail.fr

Dédicaces

***J**e rends grâce a notre dieu le tout misècorde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoire venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humit et de gratitude à :*

***M**es parents, les êtres les plus chers a mon cœur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.*

***M**es très chères frères, ma trés chère sœur **Haddi Rokaya** et toute ma famille.*

***M**es amies et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.*

***T**ous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.*

***J**e désire aussi remercier mon ami **Habib Benziadi**, son soutien et ses conseils m'ont beaucoup aidés .*

***T**ous ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment.*

Remerciements

***L**ouanges A Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maître Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons .*

***J**e tiens à remercier M.A **B. Saadli** pour la bienveillance avec laquelle il a encadré ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.*

***J**e tiens à remercier également le docteur **O.Benihi** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.*

***J**e remercie le docteur **G.Djellouli**, Mlle **H.Abbes** d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'être membres du jury.*

***J**e désire aussi remercier tous les professeurs de Math à l'université Dr Tahar Moulay - Saïda pour son aide durant toutes ces années.*

***Q**ue soient , enfin, je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail.*

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que le travail de ***Tosio Kato*** [18] sur des opérateurs strictement singuliers a été le point de départ d'un domaine intéressant et complexe dans la théorie des opérateurs, c'est-à-dire les perturbations de ***Fredholm*** et de ***semi-Fredholm*** entre deux espaces de Banach X et Y . Désignons par semi-Fredholm $\mathfrak{F}(X,Y)$, semi-Fredholm supérieurement $\mathfrak{F}_+(X,Y)$, semi-Fredholm inférieurement $\mathfrak{F}_-(X,Y)$, il a été l'objet de nombreux travaux d'étude et d'analyse de ces opérateurs, en particulier l'inclusion entre toutes ces classes et le problème de stabilité. La difficulté d'étude de ces questions provient du fait que leurs propriétés sont directement liées à la géométrie des espaces de Banach.

Dans ce mémoire, nous présentons la classe des opérateurs ***semi-Fredholm*** $\mathfrak{F}_\pm\,(X,Y)$, agissant entre les espaces de Banach et d'autres classes d'opérateurs qui s'y rattachent. Nous nous intéressons à la structure algébrique et topologique de $\mathfrak{F}_\pm\,(X,Y)$, ainsi qu'avec certaines propriétés de perturbation et la stabilité de l'indice.

Ce mémoire est divisé en trois chapitre

Le premier chapitre est consacré aux conceptes liés a la théories de groupes quotiont et la théorie des opérateurs linéaire tels que on présente certaines notions plus spécifiques, commes les quotients, les sommes directes, les opérateurs adjoints, compacts et à image fermée, que nous utiliserons dans le developpement des opérateurs de ***Fredholm*** et ***semi-Fredholm***. On donne quelques informations de base sur les opérateurs à image fermée,

Dans le deuxième chapitre, on va étudie l'opérateur semi régulier qui est un opérateur borné à image fermée avec des conditions spécifiques sur les noyaux itérés et les images itérées de cet opérateur,

L'objet du dernier chapitre traite des opérateurs de ***Fredholm*** et ***semi-Fredholm*** on introduit l'application indice d'un tel opérateur en développant quelques unes de leurs propriétés et caractérisations. en présente une généralisation de l'application indice à une famille d'opérateurs de ***Fredholm*** indexée par un ensemble compact et connexe. De plus on parle sur l'invariance et la complitude de l'indice dans le cas des opérateurs bornés.

Chapitre 1

Concepts liés aux théorie des groupe quotient et théorie des opérateurs

1.1 Concepts liés aux théorie des groupe quotient

L'objectif de ce chapitre est de formaliser cette situation pour un groupe quelconque. Autrement dit, éytant donné un groupe G et un sous-groupe H, à quelles conditions peut-on définir un ensemble quotient G/H et une application canonique $\pi : G \to G/H$, de telle sorte que la loi de G induise sur G/H une loi interne le munissant d'une structure de groupe et que π soit un morphisme de groupes.

On va montrer qu'à tout sous-groupe H d'un groupe G est associée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur G. Si cette relation d'équivalence satisfait certaines conditions de compatibilité, la loi interne de G induit une loi interne sur l'ensemble des classes d'équivalence $G/\mathcal{R}$ qui munit cet ensemble d'une structure de groupe et la projection canonique $\pi : G \to G/\mathcal{R}$ est un morphisme de groupes. On montrera qu'inversement, à toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur un groupe G et satisfaisant les conditions de compatibilité, est associé un sous-groupe H de G tel que la relation $\mathcal{R}$ soit la relation associée au sous-groupe H. Ceci conduit à la notion de sous-groupe normal. Pour plus de détail le lecteur peut se reporter à [4], [11] et [8].

1.2 Classes modulo un sous-groupe

On considère un groupe G, H un sous-groupe de G, et on définit sur G la relation

$$(x\mathcal{R}y) \iff (x^{-1}y \in H).$$

Proposition 1.2.1.

1. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Soit x un élément de G, sa classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ est l'ensemble*

$$xH = \{xh, h \in H\}.$$

Définition 1.2.1. *La relation $\mathcal{R}$ est appelée relation d'équivalence à gauche modulo H, et xH la classe à gauche de x modulo H.*

Remarque 1.2.1.

1. *On définit une relation d'équivalence à droite modulo* H *par*

$$(xRy) \Longleftrightarrow (xy^{-1} \in H)$$

et la classe à droite de x *modulo* H *est l'ensemble*

$$Hx = \{hx, h \in H\}.$$

Lorsque nous aurons à considérer les relations à gauche et à droite modulo H*, nous noterons ces deux relations respectivement* ${}_H\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}_H$ *.*

2. *Quel que soit* h *dans* H*, on a*

$$Hh = H = hH$$

et H *est la classe à droite et à gauche de l'élément neutre de* G *modulo* H*.*

3. *Si le groupe* G *est abélien, en notant sa loi additivement, les relations d'équivalences définies ci-dessus s'écrivent*

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow ((x-y) \in H),$$

et les relations d'équivalences (resp. les classes) à gauche et à droite modulo H *coïncident.*

Notation 1.2.1. *On note* $(G/H)_g$ *(resp.* $(G/H)_d$ *) l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de* G *pour la relation à gauche (resp. à droite) modulo* H*. Ces ensembles sont aussi appelés ensembles quotients à gauche (resp. à droite) modulo* H*.*

Définition 1.2.2. *Soient* G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G*. On appelle indice de* H *dans* G*, qu'on note* $[G : H]$*, le cardinal de l'ensemble* $(G/H)_g(ou(G/H)_d)$*.*

Théorème 1.2.1. *(de Lagrange). Si* G *est un groupe fini, pour tout sous-groupe* H *de* G *on a*

$$|G| = |H|[G : H].$$

1.3 Groupes quotients

Proposition 1.3.1. *Soient* G *un groupe et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence définie sur* G*, compatible avec la loi de* G*. Alors l'ensemble quotient* $G/\mathcal{R}$*, muni de la loi induite par la loi de* G *(définie par* $(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow \overline{xy}$ *), est un groupe.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition (1.2.1), qui assure que la loi sur le quotient est bien définie, et de la remarque (1.2.1). Une autre façon de dire les choses est la suivante : notant $\pi : G \longrightarrow G/\mathcal{R}$ l'application de passage au quotient, la loi sur le quotient $G/\mathcal{R}$ est définie par

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy).$$

On est donc amené à déterminer les relations d'équivalences compatibles avec la loi de G. ■

Proposition 1.3.2. *Pour tout sous-groupe H d'un groupe G, la relation $\mathcal{R}_H$ (resp. ${}_H\mathcal{R}$) est compatible à droite (resp. à gauche) avec la loi de composition de G.*
Réciproquement, si une relation $\mathcal{R}$ définie sur un groupe G est compatible à droite (resp. à gauche) avec la loi de composition du groupe G, alors il existe un unique sous-groupe H de G tel que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_H \qquad (resp. \mathcal{R} =_H \mathcal{R}).$$

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal (ou distingué) dans G si

$$\mathcal{R}_H =_H \mathcal{R}.$$

On note alors H/G

1.4 Sous-groupes normaux et morphismes

Théorème 1.4.1. *Soient G et G' deux groupes et f un élément de $Hom(G, G')$.*
Alors f induit un isomorphisme f de $G/\mathfrak{N}(f)$ sur $\mathfrak{R}(f)$.

Remarque 1.4.1. *Le théorème ci-dessus peut être démontré à partir du théorème de factorisation des applications. En effet, on sait que si E et E' sont des ensembles et $f : E \to E$ est une application, on définit sur E une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si*

$$f(x) = f(y).$$

On considère $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E et l'application $\overline{f}$ définie comme ci-dessus est une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $\mathfrak{R}(f)$. Il suffit alors de vérifier que l'application $\overline{f}$ est un morphisme de groupes.

Théorème 1.4.2. *Soient G un groupe, H un sous-groupe normal de G,*

$$\pi : G \to G/H$$

la projection canonique.
i. Le morphisme π induit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes (resp. sous-groupes normaux) de G contenant H et les sous-groupes (resp. sous-groupes normaux) de G/H.
ii. Si K est un sous-groupe de G, alors HK est un sous-groupe de G contenant H et

$$\pi(K) = HK/H.$$

Théorème 1.4.3. *(de passage au quotient). Soient G et G' deux groupes, H (resp. H') un sous-groupe normal de G (resp. G'),*

$$\pi : G \to G/H \qquad (resp. \pi : G' \to G'/H')$$

la projection canonique. Pour tout $f \in Hom(G, G')$ tel que $f(H) \subseteq H'$, il existe un unique $\widehat{f} \in Hom(G/H, G'/H')$ tel que

$$f \circ \pi = \pi \circ f.$$

Convention. L'expression « le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g\downarrow & & \downarrow g' \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array}$$

est commutatif » signifie que les applications $f,\ f',\ g,\ g'$ satisfont à la condition

$$g' \circ f = f' \circ g.$$

Preuve. Démonstration du théorème (1.4.3). Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi\downarrow & & \downarrow \pi' \\ G/H & \xrightarrow{\overline{f'}} & G'/H' \end{array}$$

Si le morphisme $\overline{f}$ existe et fait commuter le diagramme, il doit vérifier

$$\overline{f}(\pi(x)) = \pi'(f(x))$$

et, tout élément de G/H s'écrivant $\pi(x)$ pour $x \in G$, cette égalité impose l'unicité de $\overline{f}$. Montrons que l'égalité ci-dessus définit bien une application $\overline{f}$, i.e. que $\overline{f}(\pi(x))$ est indépendant du représentant x choisi dans G pour décrire sa classe dans G/H. Si

$$\pi(x) = \pi(y),$$

on a $xy^{-1} \in H$, donc

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in f(H) \subseteq H'$$

D'où

$$\pi'(f(x)) = \pi'(f(y)).$$

Montrons que $\overline{f}$ est un morphisme de groupes. On a

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}(\pi(x)\pi(y)) & = & \overline{f}(\pi(xy)) \\ & = & \pi'(f(xy)) \\ & = & \pi'(f(x)f(y)) \\ & = & \pi'(f(x))\pi'(f(y)) \\ & = & \overline{f}(\pi(x))\overline{f}(\pi(y)) \end{array}$$

■

Remarque 1.4.2. *En particulier, si $H \subseteq \mathfrak{N}(f)$, il existe un unique morphisme $\overline{f} \in Hom(G/H, G')$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$. On dit que f factorise à travers π.*

1.5 Quotient d'un espace vectoriel normé

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On rappelle que E/F est le quotient de E par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F.$$

Pour les opérations évidentes, E/F est un espace vectoriel et l'application quotient $\pi : E \to E/F$ est linéaire.
Pour

$$\xi = \pi(x) \in E/F$$

on pose

$$\begin{aligned} \|\xi\| &= \inf\{\|y\| : \ \pi(y) = \xi\} \\ &= \inf\{\|x - y\| : \ y \in F\} \end{aligned}$$

Théorème 1.5.1. ***(Quotient d'un espace vectoriel normé)***
1. *L'application $\xi \mapsto \|\xi\|$ est une norme sur E/F ;*
2. *$\pi : E \longmapsto E/F$ est continue, de norme ≤ 1 ;*
3. *$\pi : E \longmapsto E/F$ est une application ouverte ;*
4. *Si E est un espace de Banach, alors E/F l'est aussi*

Lemme 1.5.1. *Soit $F \subseteq E$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(E, \|.\|_E)$ et $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient associée. Alors*

$$(\pi U_E) = U_{E/F}.$$

Proposition 1.5.1. *Soit $F \subseteq E$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(E, \| \cdot \|_E)$. Alors,*
1. *$\| x + F \|_{E/F} \leq \| x \|_E$ pour tout $x \in E$;*
2. *Pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\overline{x} \in E$ tel que*

$$\overline{x} + F = x + F$$

et

$$\| \overline{x} \|_E < \| x + F \|_{E/F} + \varepsilon.$$

Preuve. " $\subseteq$ " Soit $x \in U_E$,

$$\|\pi(x)\|_{E/F} = \|x + F\|_{E/F} \leq \|x\|E \leq 1,$$

donc $\pi(x) \in E/F$ et $\pi(U_E) \subseteq U_{E/F}$.
" $\supseteq$ " Soit $x + E \in U_{E/F}$, alors par le point (2) de la proposition (1.5.1), il existe $\overline{x} \in E$ tel que

$$\pi(\overline{x}) = \overline{x} + F = x + F$$

et

$$\|\overline{x}\|_E < \|x + F\|_{E/F} + \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En d'autres termes, il existe $\widehat{x} \in U_E$ tel que

$$\pi(\widehat{x}) = \widehat{x} + F = x + F.$$

Par conséquent, $U_{E/F} \subseteq \pi(U_E)$. ∎

1.5.1 Propriété universelle de l'espace quotient

Soient E et F des espaces normés et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Soit encore $H \subseteq \mathfrak{N}(A)$ un sous-espace fermé de E et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient.

Alors, il existe un unique opérateur linéaire $S : E/H \longrightarrow F$ tel que $A = S \circ \pi$. Autrement dit le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ \pi \downarrow & \nearrow_{\exists! S} & \\ E/H & & \end{array}$$

De plus,

$$\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(A);$$

S est une application ouverte si et seulement si A est une application ouverte ; S est borné si et seulement si A est borné et si A est borné, alors

$$\|S\| = \|A\|.$$

Preuve. 1. L'existence et l'unicité d'une application linéaire $S : E/H \longrightarrow F$ tel que

$$A = S \circ \pi$$

et de même image que A constitue la propriété universelle algébrique du quotient.
2. Montrons que S est une application ouverte si et seulement si A est une application ouverte. Supposons d'abord que S soit une application ouverte. π est aussi une application ouverte par la proposition (1.5.1) . Par conséquent,

$$A = S \circ \pi$$

est aussi une application ouverte en tant que composition de deux applications ouvertes. Réciproquement, supposons que A soit une application ouverte et soit U un ouvert de E/H. Alors,

$$S(U) = S(\pi(\pi^{-1}(U))) = A(\pi^{-1}(U)).\pi^{-1}(U)$$

est un ouvert de E puisque π est continu et donc

$$S(U) = A(\pi^{-1}(U))$$

est un ouvert de F puisque A est ouverte. Par conséquent S est une application ouverte. Montrons que S est borné si et seulement si A est borné. Par le lemme (1.5.1).

$$\pi(U_E) = U_{E/H}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sup\{\|S(x+H)\|/\ x+H \in U_{E/H}\} &= \sup\{\|S(\pi(x))\|\ /x \in U_E\} \\ &= \sup\{\|Ax\|\ /\ x \in U_E\} \end{aligned}$$

Ainsi S est borné si et seulement si A est borné et si A est borné, alors $\|S\| = \|A\|$ ■

1.5.2 Théorème d'isomorphisme

Soient E et F des espaces de Banach et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné. Supposons de plus que $\mathfrak{R}(A)$ soit un fermé de F. Alors :

$$E/\mathfrak{N}(A) \simeq A(E)$$

Preuve. Le noyau de A est fermé en tant que pré-image par une application continue du fermé $\{0_F\}$ de F. Nous pouvons donc considérer l'espace quotient $E/\mathfrak{N}(A)$ ainsi que l'unique opérateur induit $S : E/\mathfrak{N}(A) \longrightarrow F$ tel que

$$A = S \circ \pi,$$

fourni par la propriété universelle du quotient. Il vient,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(S) &= \{x + \mathfrak{N}(A) \ / \ x \in E \text{ et } S \circ \pi(x) = 0\} \\ &= \{x + \mathfrak{N}(A) / \ x \in \mathfrak{N}(A)\} \\ &= \{0 + \mathfrak{N}(A)\} \end{aligned}$$

L'opérateur S est donc un opérateur linéaire borné et injectif de l'espace de Banach $E/\mathfrak{N}(A)$ dans l'espace de Banach $A(E)$. Il s'agit donc d'un isomorphisme. D'où l'assertion.
Finalement, en application de la propriété universelle du quotient, nous obtenons un test de continuité des opérateurs linéaires de rang fini entre deux espaces normés. ■

1.5.3 Projections

Définition 1.5.1. 1. *On dit qu'un sous-espace fermé F d'un espace normé E admet un supplémentaire topologique s'il existe un sous-espace fermé H de E tel que*

$$E = F \oplus H$$

2. *On dit qu'un opérateur $P : E \longrightarrow E$ est une projection si*

$$P(P(x)) = P(x), \qquad \forall x \in E$$

de plus ;

$$E = P(E) + (I - P)E = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{N}(P)$$

Corollaire 1.5.1. *F et H sont des espaces supplémentaires dans E, alors $F \simeq E/H$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du premier théorème d'isomorphie appliqué à la projection d'image F et de noyau H. ■

1.6 Concepts liés à la théorie des opérateurs

Dans le cas d'un opérateur borné, on pouvait toujours supposer que son domaine est l'espace tout entier. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même ; le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérations algébriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin. Donc l'étude des domaines est indispensable pour ce type d'opérateurs voir [14], [16], [7], [15] *et* [17].

1.6.1 Opérateurs bornés

Définitions

Un opérateur A sur un espace de Banach E est une application linéaire de E dans lui même.

Un opérateur continu ou borné est un opérateur tel que

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| < +\infty.$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur E. [14]

Topologies sur les opérateurs bornés

On peut définir plusieurs topologies sur l'espace des opérateurs, on en utilisera principalement deux :

1. La topologie en norme d'opérateur

2. La topologie faible qui est la plus petite topologie rendant continues les applications $\alpha_{x,l}$ définies sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$\alpha_{x,l}(A) = l(A(x))$$

pour $x \in E,\ l \in E^*$.

Spectre d'un opérateur

L'ensemble résolvante d'un opérateur A est l'ensemble

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda I - A \in GL(E)\}.$$

L'ensemble résolvante est un ouvert de $\mathbb{C}$.

On définit le spectre

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \varrho(A).$$

On définit alors la résolvante de A comme

$$R_\lambda(A) = (\lambda I \ - A)^{-1}.$$

Théorème 1.6.1. ***(Identité de la résolvante)***. *Soit A un opérateur sur un Banach E, on a :*
1. *Pour λ et μ dans une même composante connexe de $\varrho(A)$*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) \tag{1.1}$$

De plus sur cette composante connexe, les résolvantes commutent.
2. *$\lambda \to R_\lambda(A)$ est analytique en sur $\varrho(A)$.*

Preuve. *Soit $\lambda \in \varrho(A)$, on définit la série*

$$R(z) = R_\lambda(A)(I + \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda - z)^n R_\lambda^n(A))$$

qui converge en norme si $|z-\lambda| < ||R_\lambda(A)||^{-1}$ *et vérifie*

$$R(z)(zI-A) = (zI\ -A)R(z) = I$$

d'où

$$R(z) = R_z(A).$$

L'égalité de (1.1) *et la commutativité sont immédiates.* ■

Adjoints

Si E est un espace de Hilbert, on rappelle que si $A \in \mathcal{L}(E)$ alors $\exists! B \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$< Ax,\ y >=< x,\ By > .$$

On note alors $B = A^*$, c'est l'adjoint de A.

Définition 1.6.1. ***(Opérateur auto-adjoint, normal, unitaire)****. On rappelle les définitions suivantes :*
1. A *est auto-adjoint si*

$$A^* = A$$

2. A *est normal s'il commute avec son adjoint*
3. A *est unitaire si*

$$AA^* = I.$$

Théorème 1.6.2. *Si A est auto-adjoint alors*
1. $\sigma(A)$ *est inclus dans* $\mathbb{R}$
2. *Les sous espaces propres de A sont orthogonaux.*

Opérateurs compacts

Parmi les opérateurs bornés, on distingue les opérateurs compacts, et on note leur espace vectoriel $\mathcal{K}(E)$. Ce sont opérateurs qui envoient les parties bornés de E sur des parties relativement compactes de F.

Exemple 1.6.1. *Les opérateurs de rang finis sont compacts par le théorème de Riesz.*
On a plusieurs propriétés et caractérisation intéressantes de la compacité des opérateurs :

Proposition 1.6.1. *Si (x_n) (suite à valeur dans un Hilbert $\mathcal{H}$) converge faiblement vers x, et si A est compact, alors $A(x_n)$ converge vers Ax au sens de la norme.*

Preuve. *La suite $||x_n||$ est bornée par le théorème de Banach-Steinhaus.* On *raisonne ensuite par l'absurde.* ■

Proposition 1.6.2. *Si A_n est une suite d'opérateurs compacts qui converge vers A pour la norme d'opérateur, alors A est compact.*

Proposition 1.6.3. *Si A ou B est compact, alors AB est compact.*

Proposition 1.6.4. *Sur un Hilbert séparable, A est compact si et seulement si il est la limite au sens de la norme d'opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Théorème 1.6.3. ***(Théorème Analytique de Fredholm)****. Soit D une domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathcal{K}(\mathcal{H})$ une fonction analytique, alors on a l'alternative suivante :*
1. *$\forall z \in D,\ (I\ - f(z))$ n'est pas inversible*
2. *$I - f(z)$ est inversible en dehors d'un ensemble discret de D, et cet inverse est une fonction méromorphe sur D dont les résidus sont de rang fini. De plus, $I - f(z)$ est toujours injective.*

Corollaire 1.6.1. ***(Alternative de Fredholm)****. Soit A un opérateur compact sur $\mathcal{H}$, alors $I - A$ est inversible si et seulement si $I - A$ est injective.*

Théorème 1.6.4. ***(Hilbert-Schmitt)****. Soit A un opérateur compact auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Alors il existe une base de Hilbert de vecteurs propres que l'on peut ordonner de manière à ce que la suite des valeurs propres tende vers 0.*

Proposition 1.6.5. *Soient $E, F, \mathcal{H}, G$ des espaces de Banach et des opérateurs bornés*

$$E \underset{S}{\longrightarrow} F \underset{A}{\longrightarrow} H \underset{R}{\longrightarrow} G$$

tel que A soit compact. Alors
1. *$\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(E, F)$.*
2. *la composition $R \circ A \circ S$ est un élément de $\mathcal{K}(E, F)$.*

Opérateurs non bornés

Un opérateur non continu ne peut pas être défini sur $\mathcal{H}$ tout entier, on cherche alors à le définir sur un domaine $D(A)$ qui ait des bonnes propriétés, comme par exemple qu'il soit dense.

Exemple 1.6.2. 1. *Sur $\mathbb{R}$, la dérivée seconde est définie sur $\mathcal{H}^2$.*
2. *(Les Potentiels) Sur $L^2(E)$, si V est une fonction de E dans $\mathbb{C}$, la multiplication par V dans $L^2(E)$ est définie sur*

$$\{f \in L^2(E),\ \int_X V(x)f(x)dx < \infty\}.$$

Si V est finie presque partout, alors ce domaine est dense.

Définition 1.6.2. ***(Opérateur fermé)****. A est fermé si et seulement si son graphe est fermé. Si l'opérateur est fermé, on garde les mêmes définitions de spectre, résolvante. De plus si l'opérateur est défini sur un domaine dense, on conserve l'identité de la résolvante.*
On traitera maintenant avec des opérateurs fermés dont le domaine de définition est dense.

1.6.2 Opérateurs à image fermée :

Théorème 1.6.5. *Soient E, F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{B}(E, F)$. Alors A est d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que*

$$\|Ax\| \geq cont.d(x, \mathfrak{N}(A)) \qquad \forall x \in E$$

Preuve. Soit
$$\widehat{E} = E/\mathfrak{N}(A).$$
Comme E est un espace de Banach, $\widehat{E}$ reste un espace de Banach, muni de la norme définie par
$$\|\widehat{x}\| = d(x, \mathfrak{N}(A)).$$
Ainsi, nous pouvons définir $\widehat{A} : \widehat{E} \longrightarrow F$ par
$$\widehat{A}(\widehat{x}) = A(x).$$
Comme $A \in \mathcal{B}(E, F)$, $\widehat{A} \in \mathcal{B}(E, F)$. De plus, $\widehat{A}$ est injective et
$$\mathfrak{R}(\widehat{A}) = \mathfrak{R}(A).$$

Supposons que A soit un opérateur à image fermée. Alors, par linéarité (et donc continuité) de $\widehat{A}$, nous pouvons affirmer que $\widehat{A}^{-1} : A \longrightarrow \widehat{E}$ est un opérateur fermé entre espaces de Banach. Ainsi, par le théorème du graphe fermé, $\widehat{A}^{-1}$ est un opérateur borné et $\widehat{A}^{-1}$ est un opérateur borné et
$$\|A(x)\| = \|\widehat{A}(\widehat{x})\| \geq \|\widehat{A}^{-1}\|^{-1}\|\widehat{x}\|^{-1} = \|\widehat{A}^{-1}\|^{-1} d(x, \mathfrak{N}(A))$$
ce qui est la relation cherchée si l'on pose
$$cont = \|\widehat{A}^{-1}\|^{-1}$$
Réciproquement, supposons qu'il existe *cont* tel que :
$$\|Ax\| \geq cont.d(x, \mathfrak{N}(A)) \qquad \forall x \in E.$$
Soit (x_n), une suite telle que
$$A(x_n) \longrightarrow Ax = y.$$
Ainsi, $(\widehat{x}_n)$ est une suite de Cauchy. Comme nous venons d'affirmer que $\widehat{E}$ est un espace de Banach, $(\widehat{x}_n)$ converge vers un $\widehat{x} \in \widehat{E}$
Par conséquent,
$$A(x_n) = \widehat{A}(\widehat{x}_n) \longrightarrow \widehat{A}(\widehat{x}) = Ax = y$$
Ainsi, A est un opérateur à image fermée. ∎

Théorème 1.6.6. *Soit $A \in \mathcal{B}(E, F)$, comme précédemment. Si il existe un sous-espace fermé F_0 tel que $\mathfrak{R}(A) \oplus F_0$ est fermé, alors A est un opérateur à image fermée.*

Preuve. Posons $A_0 : E \times F_0 \longrightarrow F$, l'opérateur défini par
$$A_0(x, y_0) = Ax + y_0.$$
Muni de la norme donnée par
$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|,$$

$E \times F_0$ est un espace de Banach. Comme $A \in \mathcal{B}(E,F)$, A_0 est un opérateur linéaire borné d'image

$$\mathfrak{R}(A_0) = \mathfrak{R}(A) + F_0.$$

Par hypothèse,

$$\mathfrak{R}(A_0) = \mathfrak{R}(A) + F_0$$

est fermé. De plus,

$$\mathfrak{N}(A_0) = \mathfrak{N}(A) \times \{0\},$$

car $y_0 < \mathfrak{R}(A), \quad \forall y_0 \in F_0$. On utilise le théorème précédent pour affirmer qu'il existe $cont > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A_0(x,0)\| \geq cont.\ d((x,0), \mathfrak{N}(A_0)) \\ &= cont. d(x, \mathfrak{N}(A)). \end{aligned}$$

Par le même théorème, on conclut que $\mathfrak{R}(A)$ est fermée. ∎

Corollaire 1.6.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(E,F)$, comme avant. Si $\mathfrak{R}(A)$ admet un supplémentaire, alors A est un opérateur à image fermée. Ce corollaire s'applique en particulier lorsque la codimension de l'image est finie.*

Preuve. Il s'agit d'un résultat immédiat du théorème précédent, vu que si $\mathfrak{R}(A)$ admet un supplémentaire, il existe F_0 tel que

$$\mathfrak{R}(A) \oplus F_0 = F$$

qui est fermé. Par le théorème, $\mathfrak{R}(A)$ doit donc être fermée. ∎

Théorème 1.6.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(E,F)$, comme avant. Si $A(B)$ est fermé dans F pour tout sous-ensemble fermé et borné BE, alors A est d'image fermée.*

Preuve. Ab absurdo, supposons que $\mathfrak{R}(A)$ ne soit pas fermée. Par la preuve du théorème (1.6.5), on peut construire une suite (x_n) telle que $A(x_n)$ converge vers 0 avec

$$d(x_n, \mathfrak{N}(A)) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit (z_n), une suite de $\mathfrak{N}(A)$ telle que

$$\|x_n - z_n\| < 2, \qquad \forall n \in \forall.$$

Posons à présent V, la fermeture de l'ensemble $\{x_n - z_n | n \in \mathbb{N}\}$. Comme V est un sous-ensemble fermé et borné de E, $A(V)$ est fermé dans F par hypothèse du théorème.
Remarquons également que

$$A(x_n) = A(x_n - z_n),$$

ainsi $0 \in A(V)$. Nous avons donc l'existence d'un $u \in V \cap \mathfrak{N}(A)$ tel que

$$\|u - (x_{n_0} - z_{n_0})\| < 1/2$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Cela implique

$$d(x_n, \mathfrak{N}(A)) < 1/2,$$

ce qui contredit

$$d(x_n, \mathfrak{N}(A)) = 1.$$

Ainsi, $\mathfrak{R}(A)$ est fermée. ∎

Lemme 1.6.1. *Soit E un espace de Banach, $A \in \mathcal{K}(A)$, alors $I - A$ est à image fermée et*

$$\dim(\mathfrak{N}(I - A)) = co\dim(\mathfrak{R}(I - A)) < \infty.$$

Preuve. Nous divisons cette preuve en 2 parties :
1. Vérifions d'abord que $(I-A)(B)$ est fermé dans E pour tout sous-ensemble fermé et borné BE. Soit B, un sous-ensemble fermé et borné de E et considérons une suite (x_n) d'éléments de B telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (I - A)(x_n) = y$$

Comme A est compact, la suite $A(x_n)$ admet une sous-suite convergente $A(x_{n_i})$.Ainsi, il existe $x_0 \in B$ avec :

$$x_0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n_i} = \lim_{n \longrightarrow \infty} ((I - A)(x_{n_i}) + A(x_{n_i}))$$

Et donc

$$y = (I - A)(x_0) \in (I - A)(B).$$

Ainsi, $(I - A)(B)$ est fermé dans E.
2.Vu que nous venons de vérifier que $(I - A)$ satisfait les hypothèses du théorème précédent, par celui-ci, nous pourrons conclure que $\mathfrak{R}(I - A)$ est fermée.
Il reste à vérifier que $n(I - A) < \infty$ et $d(I - A) < \infty$.
3.La première assertion est facile à montrer Comme

$$x = \mathcal{K}(x), \qquad \forall x \in \mathfrak{N}(I - K),$$

l'opérateur identité est compact sur $\mathfrak{N}(I - K)$. Ainsi, $n(I_K) < \infty$.
■

Chapitre 2

Opérateurs semi-réguliers

2.1 Métrique du gap

Soit X un espace vectoriel normé.
Si M et N sont des sous-espaces vectoriels de X, on note

$$\delta(M,N) = \sup_{x\in M, \|x\|\leq 1} d(x,N) = \sup_{x\in M, x\neq 0} \frac{d(x,N)}{\|x\|}$$

La métrique du *gap* est définie par

$$\hat{\delta}(M,N) = \max\{\delta(M,N), \delta(N,M)\}.$$

Proposition 2.1.1. *Si M et N sont des sous-espaces vectoriels de X, alors*
(i) $0 \leq \delta(M,N) \leq 1$.
(ii) $\delta(M,N) = \delta(\overline{M}, \overline{N})$.
(iii) $\delta(M,N) = 0$ *si, et seulement si,* $M \subseteq \overline{N}$.
(iv) Si N est fermé, alors $\delta(M,N) = \|\pi_{|M}\|$ où π est la surjection canonique de X sur X/N.

Preuve. (i) est clair.
(ii) Comme $d(x,N) = d(x,\overline{N})$ pour tout $x \in X$, on a

$$\delta(M,N) = \delta(M,\overline{N}).$$

En outre, on a aussi

$$\delta(M,\overline{N}) \leq \delta(\overline{M},\overline{N})$$

D'autre part,

$$d(x,\overline{N}) = \|x+\overline{N}\| \leq \delta(M,\overline{N})\|x\| \ \textit{ pour tout } x \in M$$

donc

$$d(x,\overline{N}) \leq \delta(M,\overline{N})\|x\| \textit{ pour tout } x \in \overline{M}.$$

Ce qui entraîne que

$$\delta(\overline{M},\overline{N}) \leq \delta(M,\overline{N}) \leq \delta(\overline{M},\overline{N})$$

et par suite

$$\delta(\overline{M},\overline{N}) = \delta(M,\overline{N}) = \delta(\overline{M},\overline{N}).$$

(iii) Découle immédiatement du fait que $d(x,N) = 0$ si, et seulement si, $x \in \overline{N}$.

(iv) Si N est fermé alors

$$\|\pi_{|M}\| = \sup_{x\in \overline{\mathrm{B}}_M} \|\pi(\chi)\| = \sup_{x\in \overline{\mathrm{B}}_M} \|x+N\| = \delta(M,N)$$

Ce qui termine la preuve. ■

Le lemme suivant découle immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 2.1.1. *Si M et N sont des sous-espaces vectoriels de X, alors*

(i) $0 \le \hat{\delta}(M,N) \le 1$.

(ii) $\hat{\delta}(M,N) = \hat{\delta}(\overline{M},\overline{N})$.

(iii) $\hat{\delta}(M,N) = 0$ *si, et seulement si,* $\overline{M} = \overline{N}$.

La métrique du gap vérifie une sorte d'inégalité triangulaire comme le montre le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit $M_1,\ M_2,\ M_3$ des sous-espaces vectoriels fermé d'un espace de Banach X. alors*

$$\delta(M_1,M_3) \le \delta(M_1,M_2) + \delta(M_2,M_3) + \delta(M_1,M_2)\delta(M_2,M_3).$$

Preuve. Soit $x \in M_1$ vérifiant $\|x\| < 1$. Alors il existe $y \in M_2$ telle que

$$\|x-y\| \le \delta(M_1,\ M_2)$$

Il vient que

$$\|y\| \le \|x\| + \|x-y\| < 1 + \delta(M_1,\ M_2)$$

et par conséquent, il existe $z \in M_3$ telle que

$$\|x-y\| \le (1+\delta(M_1,\ M_2))\delta(M_2,\ M_3).$$

D'où

$$\begin{aligned} d\{x,M_3\} &\le \|x-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\| \\ &\le \delta(M_1,M_2) + \delta(M_2,M_3) + \delta(M_1,M_2)\delta(M_2,M_3). \end{aligned}$$

Ce qui établit l'inégalité. ■

Proposition 2.1.2. *Soient $M,\ L$ deux sous espaces fermés de X alors*

$$\delta(M,L) = \delta(L^{\perp},M^{\perp}) \text{ et } \hat{\delta}(M,L) = \hat{\delta}(L^{\perp},M^{\perp}).$$

Preuve. En utilisant le Corollaire 2.1.1 vient

$$\delta(M,L) = \sup_{x\in \overline{B}_M} d\{x,L\} = \sup_{x\in \overline{B}_M} \sup_{g\in \overline{B}_{L^\perp}} |g(x)| = \sup_{g\in \overline{B}_{L^\perp}} \sup_{x\in \overline{B}_M} |g(x)| = \sup_{g\in \overline{B}_{L^\perp}} d(g,M^{\perp}) = \delta(L^{\perp},M^{\perp})$$

la deuxième égalité se déduit de la première. ■

Lemme 2.1.2. *Soient M, L deux sous espaces d'un espace de Banach X de dimension finie telle que* $\dim M > \dim L$ *alors il existe $m \in M$ telle que $\|m\| = 1 = d(m, L)$.*

Corollaire 2.1.2. *Soit M, L deux sous espaces de X.*
(i) Si $\delta(M, L) < 1$ alors $\dim M \leq \dim L$.
(ii) Si $\hat{\delta}(M, L) < 1$ alors $\dim M = \dim L$.

Preuve. L'inégalité est évidente si $\dim L = \infty$. Supposons que L est un sous-espace de dimension finie tel que $\dim L < \dim M$ et $\delta(M, L) < 1$. On choisit un sous espace $M_0 \subset M$ telle que $\dim M_0 = \dim L + 1$. Alors, d'après lemme précédent, il existe $m \in M_0$ telle que $\|m\| = 1 = d\{m, L\}$, ce qui est absurde car $\delta(M, L) < 1$. ∎

Proposition 2.1.3. *Soient M et N deux sous-espaces vectoriels de X. Alors, pour tous $x \in X$ et $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $x_0 \in X$ vériffiant $x - x_0 \in M$ et*

$$d(x_0, N) \geq (1 - \epsilon)\frac{1 - \delta(N, M)}{1 + \delta(N, M)}\|x_0\|.$$

Preuve. Si $x \in M$ on prend $x_0 = 0$. Supposons que $x \notin M$ et soit $0 < \epsilon < 1$ alors il existe $x_0 \in X$ tel que $x - x_0 \in X$ et $d(x_0, \ M) \geq (1 - \epsilon)\|x_0\|$. On pose $\alpha = d(x_0, N)$ et $\delta = \delta(N, \ M)$. Alors il existerait $y \in N$ tel que $\|x_0 - y\| \leq \alpha + \epsilon\|x_0\|$. D'autre part, on a $d(y, M) \leq \delta\|y\|$, donc

$$\begin{aligned}
(1 - \epsilon)\|x_0\| &\leq d(x_0, M) \\
&\leq \|x_0 - y\| + d(y, M) \\
&\leq \alpha \ + \epsilon\|x_0\| + \delta\|y\| \\
&\leq \alpha \ + \epsilon\|x_0\| + \delta(\alpha + \epsilon\|x_0\| + \|x_0\|) \\
&\leq (1 + \delta)\alpha + (\epsilon + (1 + \epsilon)\delta))\|x_0\|.
\end{aligned}$$

Donc $(1 + \delta)\alpha \geq (1 - \epsilon)\|x_0\| - (\epsilon + (1 + \epsilon)\delta))\|x_0\|$, d'où

$$\alpha = d(x_0, N) \geq (\frac{1 - \epsilon - \delta}{1 + \delta} - \epsilon)\|x_0\|. \tag{2.1}$$

Maintenant, comme $\dfrac{1 - \delta}{2 + \delta}\epsilon < \epsilon$, alors en remplaąant ϵ par $\dfrac{1 - \delta}{2 + \delta}\epsilon < \epsilon$ dans 2.1, on obtient

$$d(x_0, N) \geq (1 - \epsilon)\frac{1 - \delta}{1 + \delta}\|x_0\|.$$

∎

2.2 Conorme d'un opérateur

Pour $T \in \mathcal{L}(X, \ Y)$, le nombre réel positif donné par

$$\gamma(T) = \inf_{x \not\subset \mathfrak{N}(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x + \mathfrak{N}(T)\|} = \inf\{\|Tx\| : x \in X, \ \|x + \mathfrak{N}(T)\| = 1\}$$

si T est non nul, et $\gamma(T) = \infty$ si $T = 0$, est appelé *conorme* de T.

Il est clair que si $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ est injectif, alors $\gamma(T) = m(T)$.

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$, on note par $\overline{T}$ l'opérateur de $X/\mathfrak{N}(T)$ dans $\overline{\mathfrak{R}(T)}$ induit par T, i.e. $\overline{T}(x + \mathfrak{N}(T)) = Tx$.

Définition 2.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$.*

(i) Le module d′ injectivité est défini par

$$\mathrm{m}(T) = \inf\{\|Tx\| : x \in X \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

(ii) Le module de surjectivité est défini par

$$\mathrm{q}(T) = \sup\{r \geq 0 : \mathrm{B}_Y(0,\ r) \subseteq TB_X\}.$$

On note que pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$, $\mathrm{m}(T) \leq \|T\|$ et $\mathrm{q}(T) \leq \|T\|$. En effet, pour tout $x \in X$ de norme 1, $\mathrm{m}(T) \leq \|Tx\| \leq \|T\|$, et pour tout réel r positif tel que $\mathrm{B}_Y(0,\ r)$ est inclus dans $TB_X \subseteq \mathrm{B}_X(0,\ \|T\|)$, on a $r \leq \|T\|$.

Proposition 2.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$. Alors :*

(i) T est injectif à image fermée si, et seulement si, $\mathrm{m}(T) > 0$.

(ii) T est surjectif si, et seulement si, $\mathrm{q}(T) > 0$.

Lemme 2.2.1. *Si $T \in L(X,\ Y)$ alors $\gamma(T) = m(\overline{T})$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} m(\overline{T}) &= \inf\{\|\overline{T}(x + \mathfrak{N}(T))\| : \|x + \mathfrak{N}(T)\| = 1\} \\ &= \inf\{\|Tx\| : \|x + \mathfrak{N}(T)\| = 1\} = \gamma(T). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2. *Soit $T \in L(X,\ Y)$. Alors $\mathfrak{R}(T)$ est fermé si, et seulement si, $\gamma(T) > 0$.*

Preuve. L'équivalence est évidente si $T = 0$. Si $T \neq 0$ alors $\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(\overline{T})$ et $\mathcal{R}(\overline{T})$ est fermé si et seulement si $m(\overline{T}) > 0$. ■

Proposition 2.2.3. *Pour tout $T \in L(X,\ Y)\gamma(T) = \gamma(T^*)$.*

Preuve. On a $\gamma(T) = 0$ si, et seulement si, $\gamma(T^*) = 0$.

Supposons que $\gamma(T) > 0$, et donc $\mathfrak{R}(T)$ est fermé. Alors on a la factorisation suivante $T = i\overline{T}\pi$ où

$$\pi : X \to X/\mathfrak{N}(T)$$

est la surjection canonique, $\overline{T}$ est bijectif et

$$i : \mathfrak{R}(T) \to Y$$

est l'injection canonique. Par suite

$$T^* = \pi^* \overline{T}^* i^*$$

Notons par

$$J : Y^*/\mathfrak{N}(T^*) \to \mathfrak{R}(T)^*$$

l'isomorphisme induit par i^*, il vient

$$\gamma(T) \ = \ m(\overline{T}) = \|\overline{T}^{-1}\|^{-1} = \|((\overline{T})^*)^{-1}\|^{-1} = \ m((\overline{T})^*) = m(\pi^*(\overline{T})^*J) = \gamma(\pi^*(\overline{T})^*i^*) = \gamma(T^*).$$

∎

Corollaire 2.2.1. *Soit $T \in L(X,\ Y)$. Alors*

$$\gamma(T) = \sup\{cont \geq 0 : TB_X \supset B_{\mathfrak{R}(T)}(0,\ cont)\}.$$

En particulier, si T est surjectif alors $q(T) = \gamma(T)$.

Preuve. Supposons d'abord que $\mathfrak{R}(T)$ est fermé. Avec les notations de la proposition 2.2.3 , on a $T = i\overline{T}\pi$. Donc

$$\gamma(T) = m(\overline{T}) = \|\overline{T}^{-1}\|^{-1} = q(\overline{T}).$$

Comme $q(\pi) = \|\pi\| = 1$, alors $q(\overline{T}) = q(\overline{T}\pi)$. Or,

$$\begin{aligned} q(\overline{T}\pi) \ &= \ \sup\{cont \geq 0 : \overline{T}\pi B_X \supseteq B_{\mathfrak{R}(T)}(0,\ cont)\} \\ &= \ \sup\{cont \geq : TB_X \supseteq B_{\mathfrak{R}(T)}(0,\ cont)\}. \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{R}(T)$ est non fermé, alors $\gamma(T) = 0$. Supposons qu'il existe un réel $cont > 0$ telle que $B_{\mathfrak{R}(T)}(0,\ cont) \subseteq TB_X$. Alors il vient

$$B_{\mathfrak{R}(T)}(0,\ cont) \subseteq \overline{T}\pi B_X \subseteq \overline{T}B_{x/\mathfrak{N}(T)}.$$

Ce qui se traduit par $cont\|x + \mathfrak{N}(T)\| \leq \|Tx\|$ pour tout $x \in X$. Ceci contredit le fait que $\mathfrak{R}(T)$ est non fermé. ∎

Proposition 2.2.4. *Soit T un opérateur borné sur X. Alors T est injectif à image fermée (resp. surjectif) si, et seulement si, $T - \lambda$ est injectif à image fermée (resp. surjectif) pour tout $|\lambda| < \gamma(T)$.*

Preuve. Supposons que T est injectif à image fermée, alors $\gamma(T) > 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \gamma(T)$, alors

$$\|(\lambda - T)x\| \geq \|Tx\| - |\lambda|\|x\| \geq (\gamma(T) - |\lambda|)\|x\|.$$

Par suite $T - \lambda$ est injectif à image fermée. Le cas des opérateurs surjectifs se déduit par dualité. ∎

2.2.1 Coeur algèbrique

Dans toute cette section, on dénote par E un espace vectoriel.
L'existence du Coeur algébrique d'une application linéaire $T : E \to E$ découle du lemme de Zorn.

Lemme 2.2.2. *(Lemme de Zorn) Soit Ω un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leq$. Si tout sous-ensemble de Ω totalement ordonné, possède un majorant, alors Ω possède un élément maximal.*

Notons par Ω l'ensemble des sous-espaces K de E satisfaisant $TK = K$. Il est clair la réunion d'une famille de sous-espaces de Ω, totalement ordonnée, est un sous-espace de Ω. En appliquant le lemme de Zorn, on obtient que Ω possède un élément maximal. Cet élément est unique, en effet si K et L sont deux éléments maximaux, alors $K + L$ est un élément de Ω plus grand que K et L. D'où, $K = L = K + L$.

Définition 2.2.2. *On appelle coeur algébrique d'une application linéaire $T : E \to E$, qu'on note Co (T), le plus grand sous-espace, M, de X tel que $T(M) = M$.*

Proposition 2.2.5. *Soit $T : E \to E$ une application linéaire. Alors Co $(T) = \{x \in E : \exists \{u_n\}_n \subset E$ tel que $x = u_0$ et $Tu_{n+1} = u_n\}$.*

Preuve. Soit $M = \{x \in X : \exists \{u_n\}_n \subset X$ tel que $x = u_0$ et $Tu_{n+1} = u_n\}$. Il est clair que M est un sous-espace vectoriel de E. Comme $T\text{Co}(T) = \text{Co }(T)$, on obtient que Co $(T) \subseteq M$. Pour établir l'autre inclusion, il suffit de montrer que $T(M) = M$.
Soit $x \in M$ alors il existe une suite $\{u_n\}_n$ dans E vérifiant $u_0 = x$ et $Tu_{n+1} = u_n$.
Si on pose $u_0 = Tx$ et $u_n = u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, alors on vérifie facilement que $Tu_{n+1} = u_n$ pour tout $n \geq 0$. D'où, $Tx \in M$.
Réciproquement, soient $x \in M$ et $\{u_n\}_n$ une suite dans E vérifiant $u_0 = x$ et $u_n = Tu_{n+1}$. Considérons la suite donnée par $w_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Alors il vient $Tw_{n+1} = Tu_{n+2} = u_{n+1} = w_n$ pour tout $n \geq 0$.
Ce qui montre que $Tx = u_1 \in M$. ■

Définition 2.2.3. *On appelle image généralisée d'une application linéaire $T : E \to E$ le sous-espace de E, $\mathcal{R}^\infty(T) = \bigcap_{n=0} \mathfrak{R}(T^n)$.*
Il est clair pour toute opérateur linéaire $T : E \to E$, Co $(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$.

Proposition 2.2.6. *Soit $T : E \to E$ une opérateur linéaire. S'il existe un entier $m \geq 0$ tel que*
$\mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^m) = \mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^{m+k})$ *pour tout $k \geq 0$,*
alors Co $(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$.

Preuve. Montrons que $T\mathcal{R}^\infty(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$. Comme $\mathcal{R}^\infty(T)$ est un sous-espace invariant par T, alors il suffit d'établir que $\mathcal{R}^\infty(T) \subseteq T\mathcal{R}^\infty(T)$. Soient $y \in \mathcal{R}^\infty(T)$ et $(x_k)_k$ une suite dans E telle que $y = T^{m+k}x_k$ pour tout $k \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, posons $z_k = T^m x_1 - T^{m+k-1}x_k$. Alors il vient que

$$Tz_k = T^{m+1}x_1 - T^{m+k}x_k = y - y = 0,$$

et par conséquent $z_k \in \mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^m) = \mathrm{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^{m+k-1})$, pour tout $k \geq 1$. Cela entra ∧ ine que $T^m x_1 = z_k + T^{m+k-1}x_k \in \mathfrak{R}(T^{m+k-1})$ pour tout $k \geq 1$. D'où, $T^m x_1 \in \mathcal{R}^\infty(T)$. Finalement, $y = T^{m+1}x_1 = TT^m x_1 \in T\mathcal{R}^\infty(T)$. ■

Théorème 2.2.1. *Soit $T : E \to E$ une opérateur linéaire. Si l'une des conditions suivantes est vériffiée :*
(i) $\mathfrak{N}(T)$ est de dimension finie,
(ii) $\mathfrak{R}(T)$ est de codimension finie,
(iii) $\mathfrak{N}(T) \subseteq \mathfrak{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$,
alors $Co(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$.

Preuve. Il est clair que si T vérifie (i), alors Co $(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$.
(ii) Supposons que codimR $(T) < \infty$, alors $X = F \oplus \mathfrak{R}(T)$ avec $\dim F < \infty$. Posons $D_n = \mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^n)$, alors $D_{n+1} \subseteq D_n$ pour tout $n = 0, 1, \cdots$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que les sous-espaces D_n sont deux à deux distincts pour $n = 1, 2 \cdots, k$. On peut supposer que $D_{j+1} \not\subset D_j$. Ainsi il existe $w_j \in X$ vérifiant $T^j w_j \in D_j$ et $T^j w_j \not\subset D_{j+1}$. Posons $w_j = u_j + u_j$ où $u_j \in F$ et $u_j \in \mathfrak{R}(T)$. Si $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0$ alors

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j,$$

et par suite

$$T^k w_1 = T^k w_2 = \cdots T^k w_{k-1} = 0$$

et

$$T^k(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j) = \lambda_k T^k w_k = T^k(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j) \in T^k(\mathfrak{R}(T)) = \mathfrak{R}(T^{k+1}).$$

D'où $\lambda_k T^k w_k \in D_{k+1} = \mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^{k+1})$ et puisque $T^k w_k \not\subset D_{k+1}$, on a nécessairement $\lambda_k = 0$. De proche en proche on montre que $\lambda_{k-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$; ce qui montre que $k \leq \dim F$. Finalement, pour m assez grand on a

$$\mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^m) = \mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^{m+k}) \forall k \geq 0,$$

et par suite Co $(T) = \mathfrak{R}^\infty(T)$.
(iii) Si $\mathfrak{N}(T) \subseteq \mathfrak{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$, alors

$$\mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^m) = \mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{R}(T^{m+k}) = \mathfrak{N}(T) \forall k \geq 0$$

et $Co(T) = \mathfrak{R}^\infty(T)$. ■

2.3 Opérateurs semi-réguliers

Définition 2.3.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit semi-régulier si $\mathfrak{R}(T)$ est fermé et $\mathfrak{N}(T^n) \subseteq \mathfrak{R}(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Il est clair que tout opérateur surjectif, ou injectif à image fermée, est semi-régulier.

Théorème 2.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur semi-régulier.*
Alors $\gamma(T^n) \geq \gamma(T)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Supposons que $\gamma(T^n) \geq [\gamma(T)]^n$ pour un certain $n \geq 1$ et soit $x \in X$. Alors

$$\|T^{n+1}x\| = \|TT^n x\| \geq \gamma(T)\|T^n x + \mathfrak{N}(T)\|. \tag{2.2}$$

D'autre part, $\mathfrak{N}(T) = T^n(\mathfrak{N}(T^{n+1}))$. Donc

$$\|T^n x + \mathfrak{N}(T)\| = \|T^n x + T^n\mathfrak{N}(T^{n+1})\| = \inf_{u \in \mathfrak{N}(T^{n+1})} \|T^n(x-u)\|.$$

Or, pour $u \in \mathfrak{N}(T^{n+1})$, on a

$$\|T^n(x-u)\| \geq \gamma(T^n)\|x - u + \mathfrak{N}(T^{n+1})\| = \gamma(T^n)\|x + \mathfrak{N}(T^{n+1})\|.$$

D'où,

$$\|T^n x + \mathfrak{N}(T)\| \geq \gamma(T^n)\|x + \mathfrak{N}(T^{n+1})\|. \tag{2.3}$$

Enfin, par 2.2 et 2.3, on obtient

$$\|T^{n+1}x\| \geq \gamma(T)^{n+1}\|x + \mathfrak{N}(T^{n+1})\|$$

Par conséquent $\gamma(T^{n+1}) \geq [\gamma(T)]^{n+1}$. Il découle du théorème précédent que si $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur semi-régulier, alors $\mathfrak{R}(T^n)$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposition 2.3.1. *Soit T, $S \in \mathcal{L}(X)$ deux opérateurs commutant entre eux. Si TS est semi-régulier, alors T et S sont semi-réguliers.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathfrak{N}(T^n) \subset \mathfrak{N}((TS)^n) \subseteq \mathfrak{R}(TS) \subseteq \mathfrak{R}(T).$$

Montrons que $\mathfrak{R}(T)$ est fermé. Soit $\{x_k\} \subseteq X$ une suite telle que $\lim Tx_k = v$. Alors $\lim STx_k = Sv$, et donc $Sv = STu$ pour un certain $u \in X$. Par conséquent,

$$v - Tu \in \mathfrak{N}(S) \subseteq \mathfrak{N}(ST) \subseteq \mathfrak{R}(ST) \subseteq \mathfrak{R}(T),$$

ce qui termine la preuve. ■

Comme le montre l'exemple suivant, la réciproque de la proposition précédente n'est en général vrai.

Exemple 2.3.1. *Soit H un espace de Hilbert qui a une base orthonormale $\{e_{i,j} : i,\ j \in \mathbb{Z}$ et $ij \leq 0\}$. Considérons les opérateurs $T \in \mathcal{L}(H)$ et $S \in \mathcal{L}(H)$ définis par*

$$Te_{i,j} = \begin{cases} 0 \quad si\ i = 0\ et\ j > 0 \\ e_{i+1,j} \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

et

$$Se_{i,j} = \begin{cases} 0 \quad si\ \ j = 0\ et\ i > 0 \\ e_{i,j+1} \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

Alors

$$TSe_{i,j} = STe_{i,j} = \begin{cases} 0 \quad si\ i = 0.et\ j \geq 0\ ou\ j = 0\ et\ i \geq 0, \\ e_{i+1,j+1} \qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

Par suite, $ST = TS$ et on vérifié facilement que

$$\mathfrak{N}(T) = \overline{Vect\{e_{0,j} : j > 0\}} \subseteq R^\infty(T) \text{ et } \mathfrak{N}(T) = \overline{Vect\{e_{i,0} \ : i > 0\}} \subset R^\infty(S).$$

En outre, T et S sont à image fermée, donc S et T sont semi-réguliers.

D'autre part, comme $e_{0,0} \in \mathfrak{N}(TS)$ et $e_{0,0}$ n'appartient pas à $\mathcal{R}(TS)$, alors TS n'est pas semi-régulier.

Théorème 2.3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ alors les assertion suivantes sont équivalentes :*
(i) T est semi-régulier,
(ii) T^n est semi-régulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,
(iii) T^n est semi-régulier pour un certain entier $n \geq 1$.

Avant de prouver ce théorème, on a besoin d'abord d'établir les deux résultats suivants :

Lemme 2.3.1. *Soient B un espace vectoriel et $T : B \to B$ une application linéaire. Alors*

$$\mathfrak{R}(T^m) \cap \mathfrak{N}(T^n) = T^m \mathfrak{N}(T^{n+m})$$

pour tous $m, \ n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $x \in \mathfrak{R}(T^m) \cap \mathfrak{N}(T^n)$. Alors $x = T^m y$ pour un certain $y \in E$. Comme $x \in \mathfrak{N}(T^n)$, on a $y \in \mathfrak{N}(T^{n+m})$. D'où, $x \in T^m \mathfrak{N}(T^{n+m})$. L'autre inclusion est claire. ∎

Proposition 2.3.2. *Soient E un espace uectoriel et $T : B \to B$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathfrak{N}(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$.
(ii) $\mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathfrak{R}(T)$.
(iii) $\mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$.
(iv) $\mathfrak{N}(T^n) = T^m(\mathfrak{N}(T^{n+m}))$ pour tous $n, \ m \in \mathbb{N}$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). On a $\mathfrak{N}(T) \subseteq \mathfrak{R}(T)$. Supposons que $\mathfrak{N}(T^k) \subseteq \mathfrak{R}(T)$ et soit $x \in \mathfrak{N}(T^{k+1})$. Alors $T^k x \in \mathfrak{N}(T) \subseteq \mathfrak{R}(T^{k+1})$, et donc $T^k x = T^{k+1} y$ pour un certain $y \in E$. Par suite, $Ty - x \in \mathfrak{N}(T^k) \subseteq \mathfrak{R}(T)$. D'où, $x \in \mathfrak{R}(T)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que $\mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathfrak{R}(T^m)$. Soit $x \in \mathfrak{N}(T^n)$ pour un entier $n \geq 1$. Alors $x \in \mathfrak{R}(T)$, et donc $x = Ty$ pour un certain $y \in E$. Par suite, $T^n x = T^{n+1} y = 0$ et $y \in \mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathfrak{R}(T^m)$ D'où, $x = Ty \in \mathfrak{R}(T^{m+1})$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). On a $T^m(\mathfrak{N}(T^{n+m})) \subseteq \mathfrak{N}(T^n)$. Inversement, soit $x \in \mathfrak{N}(T^n)$. Alors il existe $y \in X$ tel que $x = T^m y$. Il vient *alors* que $y \in \mathfrak{N}(T^{n+m})$ et $x \in T^m \mathfrak{N}(T^{n+m})$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathfrak{N}(T) = T^m(\mathfrak{N}(T^{m+1}))$. Donc $\mathfrak{N}(T) \subset \mathfrak{R}(T^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. ∎

Preuve. du *Théorème* 2.3.2. (i) $\Rightarrow$ (ii) découle immédiatement de la Proposition 2.3.2 et du Théorème 2.3.1 (ii) $\Rightarrow$ (iii) est claire.

(iii) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence directe de la proposition précédente. ∎

Théorème 2.3.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors T est semi-régulier si, est seulement si, T^* est semi-régulier.*

Preuve. Il est clair que si T, ou T^*, est semi-régulier, alors $\mathfrak{R}(T)$ et $\mathfrak{R}(T^*)$ sont fermés, et d'après le Théorème 2.3.1, $\mathfrak{R}(T^n)$ et $\mathfrak{R}(T^{n*})$ sont fermés. Ainsi, en utilisant la Proposition 2.3.2, on obtient

$$\mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathfrak{R}(T) \Leftrightarrow \mathfrak{N}(T^*) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T) \Leftrightarrow \mathcal{N}^\infty(T^*) \subseteq \mathfrak{R}(T^*).$$

Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.3.3. *Soit T un opérateur semi-régulier, alors*
(i) $\mathfrak{R}(T^n)$ est fermé pour tout $n \geq 1$,
(ii) $\mathcal{R}^\infty(T)$ est fermé,
(iii) $\mathrm{K}(T) = Co(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$
(iv) Pour tout $x \in X$, $Tx \in$ Co (T) si, et seulement si, $x \in$ Co (T).

Preuve. (i) On a $\mathfrak{R}(T)$ est fermé. D'autre part, comme $\mathfrak{N}(T) \subseteq \mathfrak{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\overline{T}(\mathfrak{R}(T^n)/\mathfrak{N}(T)) = \mathfrak{R}(T^{n+1})$$

Ce qui montre que $\mathfrak{R}(T^n)$ est fermé pour tout $n \geq 1$.

(ii) découle de (i).

(iii) D'après les Propositions 2.3.2 , on a $Co(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$. D'autre part, comme $Co(T)$ est fermé et vérifie $T\mathrm{Co}(T) = \mathrm{Co}\ (T)$, alors $\mathrm{Co}\ (T) \subseteq \mathrm{K}(T)$, et par conséquent, $Co(T) = \mathrm{K}(T)$.

(iv) Soit $x \in X$ tel que $Tx \in \mathrm{Co}\ (T)$. Comme $T\mathrm{Co}(T) = \mathrm{Co}\ (T)$, alors il existe $y \in Co(T)$ satisfaisant $Tx = Ty$. Par suite, $x - y \in \mathfrak{N}(T) \subseteq Co(T)$, et donc $x \in Co(T)$. ■

Théorème 2.3.4. *Soit T un opérateur borné sur X. Alors T est semi-régulier si, et seulement si, il existe un sous-espace fermé M de X telle que $TM = M$ et l'opérateur de X/M dans X/M, induit par T, soit injectif à image fermé.*

Preuve. Si T est semi-régulier, alors il est clair que le sous-espace $M = Co(T)$ vérifie les propriétés du théorème.

Inversement, soit M un sous espace fermé telle que $TM = M$ et l'opérateur $\overline{T}$ de X/M dans lui même, défini par $\overline{T}(x + M) = Tx + M$, est injectif à image fermée.
Alors $M \subseteq Co(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$. En outre, comme $\overline{T}$ est injectif, on a $T^{-1}M = M$, et donc $\mathfrak{N}(T) \subseteq M \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$. D'autre part,

$$\mathfrak{R}(\overline{T}) = (\mathfrak{R}(T) + M)/M = \mathfrak{R}(T)/M,$$

et puisque $\mathfrak{R}(\overline{T})$ est fermé, alors $\mathfrak{R}(T)$ l'est aussi. Notons que d'après la preuve du théorème précédent, si $T \in \mathcal{L}(X)$ est semi-régulier, alors $T/Co(T)$ est un opérateur injectif à image fermée. ■

Chapitre 3

Opérateurs de *Fredholm*

3.1 Opérateurs de *Fredholm* et opérateurs *semi-Fredholm*

Définition 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$. On dira que :*

(i) T est un opérateur de ***Fredholm*** *si $\dim \mathfrak{N}(T)$ et codim$\mathfrak{R}(T)$ sont finis. L'ensemble des ces opérateurs est noté par $\mathcal{F}(X,\ Y)$, ou $\mathcal{F}(X)$ lorsque $X = Y$.*

(ii) T est un opérateur ***semi-Fredholm*** *supérieurement si $\dim\mathfrak{N}(T)$ est fini et $\mathfrak{R}(T)$ est fermé. semble des ces opérateurs est noté par $\mathfrak{F}_+(X,\ Y)$, ou $\mathfrak{F}_+(X)$ lorsque $X = Y$.*

(iii) T est un opérateur ***semi-Fredholm*** *inférieurement si codim$\mathfrak{R}(T)$ est fini. L'ensemble des ces opérateurs est noté par $\mathfrak{F}_-(X,\ Y)$, ou $\mathfrak{F}_-(X)$ lorsque $X = Y$.*

(iv) T est un opérateur ***semi-Fredholm*** *si $T \in \mathfrak{F} \pm (X,\ Y) = \mathfrak{F}_+(X,\ Y) \cup \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$.*

Remarque 3.1.1. *Comme l'image d'un opérateur est fermée si elle est de codimension finie, alors*

(i) $\mathcal{F}(X,\ Y) = \mathfrak{F}_+(X,\ Y) \cap \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$.

(ii) l'image de tout opérateur ***semi-Fredholm*** *inférieurement est fermée.*

(iii) $\mathcal{F}(X)$ est un ensemble non-vide puisqu'il contient l'identité. Par contre, $\mathcal{F}(X,\ Y)$ peut-être vide lorsque $X \neq Y$.

Pour tout $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$, on note $\alpha(T) = \dim(\mathfrak{N}(T))$ et $\beta(T) = \text{codim}\ (\mathfrak{R}(T))$. L'*indice* de tout opérateur ***semi-Fredholm*** $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ est défini par

$$Ind(T) = \alpha(T) - \beta(T), \tag{3.1}$$

et dans ce cas, on a $Ind(T) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Il est clair que $Ind(T)$ est fini si, et seulement si, T est ***Fredholm***.

Exemple 3.1.1. *(i) Dans le cas où X et Y sont de dimension finie, tous les opérateur sont de* ***Fredholm*** *et leur indice égale à $\dim X - \dim Y$.*

(ii) Tout opérateur inversible de $\mathcal{L}(X,\ Y)$ est de ***Fredholm*** *d'indice zéro.*

(iii) Si $K \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, alors $K - \lambda$ est un opérateur de ***Fredholm*** *pour tout complexe non-nul $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(iv) Tout opérateur injectif à image fermée est ***semi-Fredholm*** *supérieurement d'indice négatif.*

(v) Tout opérateur surjectif est de ***semi-Fredholm*** *inférieurement d'indice positif.*

Théorème 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ un opérateur à image fermée. Alors $\alpha(T^*) = \beta(T)$ et $\beta(T^*) = \alpha(T)$. En plus, on a :*

*(i) T est **semi-Fredholm** supérieurement si, et seulement si, T^* est **semi-Fredholm** inférieurement ;*

*(ii) T est **semi-Fredholm** inférieurement si, et seulement si, T^* est **semi-Fredholm** supérieurement ;*

*(iii) T est **semi-Fredholm** si, et seulement si, T^* est **semi-Fredholm**.*

*(iv) T est **Fredholm** si, et seulement si, T^* est **Fredholm**.*

Et dans tous ses cas, on a $Ind(T^*) = -Ind(T)$.

Preuve. Comme $\mathfrak{R}(T)$, et donc aussi $\mathfrak{R}(T^*)$, est fermé, alors

$$\mathfrak{N}(T^*) = \mathfrak{R}(T)^{\perp} \cong (Y/\mathfrak{R}(T))^* \ et\ X^*/\mathfrak{R}(T^*) \cong \mathfrak{N}(T)^*$$

Par conséquent, $\alpha(T^*) = \beta(T)$ et $\beta(T^*) = \alpha(T)$. Maintenant, les autres assertions se vérifient facilement. ■

Théorème 3.1.2. *Soient $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*

(i) Si $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $S \in \mathfrak{F}_+(Y, Z)$, alors $ST \in \mathfrak{F}_+(X, Z)$.

(ii) Si $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $S \in \mathfrak{F}_-(Y,\ Z)$, alors $ST \in \mathfrak{F}_-(X, Z)$.

(iii) Si $T \in \mathcal{F}(X,\ Y)$ et $S \in \mathcal{F}(Y, Z)_y$ alors $ST \in \mathcal{F}(X, Z)$.

Preuve. Montrons l'assertion (ii). Soient M et N des sous-espaces fermés de dimension finie tels que $Y = \mathfrak{R}(T) \oplus M$ et $Z = \mathfrak{R}(S) \oplus N$. Alors il vient que $Z = (\mathfrak{R}(ST) + SM) \oplus N$, et comme SM est de dimension finie, on obtient que $ST \in \mathfrak{F}_-(X, Z)$. Les assertions (i) et (ii) se déduisent de (i) par dualité. ■

Corollaire 3.1.1. *Soit T un opérateur borné sur X.*

(i) Si $T \in \mathfrak{F}_+(X)$ alors $T^n \in\in \mathfrak{F}_+(X)$ pour tout $n \geq 1$.

(ii) Si $T \in \mathfrak{F}i_-(X)$ alors $T^n \in\in \mathfrak{F}_-(X)$ pour tout $n \geq 1$.

(iii) Si $T \in \mathcal{F}(X)$ alors $T^n \in\in \mathcal{F}(X)$ pour tout $n \geq 1$.

Théorème 3.1.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*

(i) Si $ST \in \mathfrak{F}_+(X, Z)_y$ alors $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$.

(ii) Si $ST \in \mathfrak{F}_-(X,\ Z)_y$ alors $S \in \mathfrak{F}_-(Y,\ Z)$.

(iii) Si $ST \in \mathcal{F}(X, Z)_y$ alors $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $S \in \mathfrak{F}_-(Y, Z)$.

Preuve. (ii) Comme $\mathfrak{R}(ST) \subseteq \mathfrak{R}(S)$, on obtient que codimR $(S) \leq$ codim$\mathfrak{R}(ST)$. D'où $S \in \mathfrak{F}_-(Y,\ Z)$. Les assertions (i) et (ii) se déduisent de (i) par dualité. ■

Soient $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Si T est bijective et S est de ***Fredholm***, alors ST est de ***Fredholm*** et $Ind(ST) = Ind(S)$

Lemme 3.1.1. *Soient $T : X \to Y$ un opérateur borné et M un sous-espace de X de codimension finie n. Alors T est de **Fredholm** si, et seulement si, la restriction $T_0 : M \to Y$ est de **Fredholm**. de plus $Ind(T) = Ind(T_0) + n$.*

Preuve. Il suffit de prouver le resultat pour $n = 1$ et faire un raisonnement par récurence pour $n \in \mathbb{N}$.

-Si $n = 1$ posons $X = M \oplus vect(x_1)$ donc
$\mathfrak{R}(T) = \{Tx : x \in X\} = \{Tm + \alpha Tx_1 : m \in M,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$

-Si $Tx_1 \in \mathfrak{R}(T_0)$ alors $\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(T_0)$ en effet soit $x = m + \alpha x_1 \in X = M \oplus vect(x_1)$ alors

$$Tx = Tm + \alpha Tx_1 \in \mathfrak{R}(T_0)\text{i.}e\mathfrak{R}(T) \subset \mathfrak{R}(T_0).$$

$$Tx_1 \in \mathfrak{R}(T_0) \Rightarrow \exists m \in M : Tx_1 = T_0 m$$

Soit

$$\mathfrak{N}(T) = \mathfrak{N}(T_0) + \mathfrak{N}(x_1 - m)$$

doù T est de ***Fredholm*** $\Leftrightarrow$ T_0 est de ***Fredholm*** et $Ind(T) = Ind(T_0) + 1$.

-Si $Tx_1 \notin \mathfrak{R}(T_0)$ alors

$$\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(T_0) \oplus vect(Tx_1)$$

dans ce cas $\mathfrak{N}(T) = \mathfrak{N}(T_0)$. Alors : T est de ***Fredholm*** $\Leftrightarrow$ T_0 est de ***Fredholm*** et on a $\alpha(T) = \alpha(T_0)$ et $\beta(T_0) = \beta(T) + 1$ i.e

$$\text{Ind}(T) = \alpha(T) - \beta(T) = \text{Ind}(T_0) + 1.$$

■

Soit $T : X \to Y$ un opérateur de ***Fredholm***. Alors $\mathfrak{N}(T)$ et $\mathfrak{R}(T)$ admettent des supplémentaires, on peut alors écrire

$$X = \mathfrak{N}(T) \oplus X_0 etY = \mathfrak{R}(T) \oplus Y_0.$$

On peut alors définir un isomorphisme de $X_0 \times Y_0$ dans Y noté $\widetilde{T}$ par

$$\widetilde{T}((x_0, y_0)) = Tx_0 + y_0$$

$\widetilde{T}$ est dit l'isomorphisme associé à T.

Théorème 3.1.4. *Soient $T : X \to Y$ et $S : Y \to Z$ (Z est aussi un espace de Banach) deux opérateurs de **Fredholm**. Alors $Ind(ST) = Ind(S) + Ind(S)$.*

Preuve. Soient $\widetilde{T}$ la bijection associée à T, et T_0 la restriction de T à X_0. comme $\tilde{T}$ est un isomorphisme et $S \in \mathcal{F}(Y, Z)$ alors l'opérateur $S\tilde{T}$ est de ***Fredholm*** avec $Ind(S\tilde{T}) = Ind(S)$.

En identifiant X_0 à $X_0 \times \{0\}$, on obtient que ST_0 est la restriction commune de ST et $S\widetilde{T}$ à X_0.

Par le lemme précédent $S\tilde{T}$ est de ***Fredholm*** si, et seulement si, ST_0 est de ***Fredholm*** si, et seulement si, ST est de ***Fredholm***, de plus

$$\begin{aligned} Ind(ST) &= Ind(ST_0) + \dim(X/X_0) = Ind(S\tilde{T}) - \dim(X_0 \times Y_0/X_0 \times \{0\}) + \alpha(T) \\ &= Ind(S) + \alpha(T) - \dim(Y_0) = Ind(S) + \alpha(T) - \beta(T) = Ind(S) + Ind(S). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.5. *Soient $T \in \mathfrak{F}_{-}(X,\ Y)$ et $S \in \mathfrak{F}_{-}(Y,\ Z)$ (ou $T \in \mathfrak{F}_{+}(X,\ Y)$ et $S \in \mathfrak{F}_{+}(Y,\ Z)$. Alors : $Ind(ST) = Ind(S) + Ind(S)$.*

Preuve. -Si $\alpha(S) < \infty$ et $\alpha(T) < \infty$ alors $T \in \mathcal{F}(X,\ Y)$ et $S \in \mathfrak{F}(Y,\ Z)$ d'où

$$Ind(ST) = Ind(S) + Ind(S).$$

-Si $\alpha(T) = +\infty$ alors $Ind(T) = +\infty$. on a $ST \in \mathfrak{F}_{-}(X,\ Z)$ alors $\beta(ST) < \infty$, et comme $\mathfrak{N}(T) \subset \mathfrak{N}(ST)$ alors $\alpha(ST) = +\infty$ i.e

$$Ind(ST) = +\infty = Ind(S) + Ind(T)$$

car

$$\beta(S) < \infty \Rightarrow Ind(S) = +\infty$$

ou $Ind(S) < \infty$ et dans les deux cas

$$Ind(S) + Ind(T) = +\infty.$$

-Si $\alpha(T) < \infty$ et $\alpha(S) = +\infty$ on a

$$Ind(T) \in \mathbb{Z} \text{ et } Ind(S) = +\infty$$

il suffit donc de montrer que $Ind(ST) = +\infty$ ie de montrer que $\alpha(ST) = +\infty$ car $\beta(ST) < \infty$ puisque $ST \in \mathfrak{F}_{-}(X, Z)$. On a

$$\mathfrak{N}(ST)/\mathfrak{N}(T) \cong \mathfrak{R}(T) \cap \mathfrak{N}(S)$$

il suffit donc montrer que

$$\dim(\mathfrak{R}(T) \cap \mathfrak{N}(S)) = +\infty,$$

ceąi est assurée du fait que $\beta(T) < \infty$. ∎

Proposition 3.1.1. *Soit $K : X \to X$ un opérateur compact, alors $Id_X - K$ est un opérateur de **Fredholm** d'indice nul.*

Preuve. évident. ∎

Remarque 3.1.2. *Dans le théorème suivant nous obtenons une caractérisation importante des opérateurs de **Fredholm** utilisant les opérateurs compact.*

Théorème 3.1.6. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. les assertions suivantes sont équiua-lentes :*

*i) T est de **Fredholm**.*

ii) il existe un opérateur borné $S : Y \to X$ tel que $Id_Y - TS$ et $Id_X - ST$ sont des opérateurs de rang fini.

iii) il existe un opérateur borné $S : Y \to X$ tel que $Id_Y - TS$ et $Id_X - ST$ sont compacts.

Preuve. ($i \Rightarrow ii$) Soient X_0 et Y_0 les sous-espaces associés à la bijection $\widetilde{T}$ et T_0 la restriction de T à X_0. T_0 est un isomorphisme de X_0 *dans* $\mathfrak{R}(T)$.

Soit $P : Y \to Y$ la projection sur $\mathfrak{R}(T)$ paralèllement *à* Y_0. Définissons l'opérateur borné $S : Y \to X$ par $S = T_0^{-1}P$.

On a

$$(ST)^2 = T_0^{-1}PTT_0^{-1}PT = T_0^{-1}P^2T = T_0^{-1}PT = ST$$

alors ST est un projecteur avec $\mathfrak{N}(ST) = \mathfrak{N}(T)$ et $\mathrm{R}(ST) = X_0$, d'où $Id_X - ST$ est un projecteur et

$$\mathfrak{R}(Id_X - ST) = \mathfrak{N}(T)$$

de dimension fini.

Et on a

$$(TS)^2 = TT_0^{-1}PTT_0^{-1}P = TT_0^{-1}PP = TT_0^{-1}P^2 = TT_0^{-1}P = TS$$

alors TS est un projecteur avec

$$\mathfrak{N}(TS) = \mathfrak{N}(T) = \mathfrak{N}(TT_0^{-1}P) = Y_0$$

et

$$\mathfrak{R}(TS) = \mathfrak{R}(TT_0^{-1}P) = \mathfrak{R}(T)$$

par définition de P sur $\mathfrak{R}(T)$ paralèllement à Y_0. Ceąi entraine que $Id_Y - TS$ est un projecteur d'image Y_0 de dimension fini.

($ii \Rightarrow iii$) $Id_Y - TS$ et $Id_X - ST$ sont des opérateurs de rang fini donc ils sont compacts.

($iii \Rightarrow i$) On suppose qu'il existe un opérateur borné $S : Y \to X$ telle que $K_1 = Id_X - ST$ et $K_2 = Id_Y - TS$ soient compact alors $ST = Id_X - K_1$ et $TS = Id_Y - K_2$ sont de ***Fredholm*** d'où : $ST \in \mathfrak{F}_+(X, X)$ et $TS \in \mathfrak{F}_-(Y,\ Y)$ alors $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ i.e T est de ***Fredholm***. ■

3.2 Algèbre de Calkin

Définition 3.2.1. *Soient $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs bornés et $\mathcal{K}(X)$ l'idéal fermé de $\mathcal{L}(X)$. L'algèbre quotient $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ formé des classes $T + \mathcal{K}(X)$, avec $T \in \mathcal{L}(X)$ est dite algèbre de Calkin et noté $\chi(X)$.*

Théorème 3.2.1. *Soit $T : X \to X$ un opérateur borné. Alors T est un opérateur de **Fredholm** si et seulement si $\pi(T)$ est inversible dans l'algèbre de Calkin. où $\pi : \mathcal{L}(X) \to \chi(X)$ est la projection canonique i.e $\pi(T) = T + \mathcal{K}(X)$.*

Preuve. Supposons que T est de ***Fredholm*** alors d'aprés le théorème précèdent il existe un opérateur borné $S : X \to X$ tel que $Id - TS$ et $Id - ST$ soient compact. Ainsi

$$\pi(Id - ST) = \pi(Id - TS) = 0$$

donc

$$\pi(Id) = \pi(ST) = \pi(TS)$$

i.e
$$\pi(Id) = \pi(S)\pi(T) = \pi(T)\pi(S)$$
enfin $\pi(T)$ est inversible dans l'algèbre de Calkin.

Réciproquement supposons qu'il existe $\pi(S) \in \chi(X)$ tel que
$$\pi(Id) = \pi(S)\pi(T) = \pi(T)\pi(S)$$
donc
$$\pi(Id - ST) = \pi(Id - TS) = 0$$
i.e que $Id - TS$ et $Id - ST$ sont compact, d'où d'aprés le théorème précedent T est de ***Fredholm***. ■

Lemme 3.2.1. *Soient $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et M un sous-espace fermé de X, alors $T(M)$ est fermé.*

Preuve. $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ alors $\mathfrak{N}(T)$ admet un supplémentaire M_1 dans X i.e
$$X = \mathfrak{N}(T) \oplus M_1$$
Soit
$$M = M \cap M_1 \oplus M_0$$
où M_0 est un sous-espace de X de dimension finie. Alors
$$T(M) = T(M \cap M_1) + T(M_0).$$
-On a T/M_1 est injectif à image fermé donc $T(M \cap M_1)$ est fermé, or $T(M_0)$ est de dimension finie alors
$$T(M \cap M_1) + T(M_0)$$
est fermé i.e $T(M)$ est fermé. ■

Lemme 3.2.2. *Soit $T : X \to X$ un opérateur borné. Alors $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ si, et seulement s'il existe un sous-espace M fermé de codimension finie tel que la restriction T/M est borné inférieurement.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Si $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ alors comme dans le lemme précèdent $X = \mathfrak{N}(T) \oplus M$, M est fermé de codimension finie et T/M est injectif à image fermé.

($\Leftarrow$)M est de codimension finie on peut donc écrire $X = N \oplus M$.

- T/M est injectif alors $\mathfrak{N}(T/M) = \{0\} = \mathfrak{N}(T) \cap M$ par suite $\mathfrak{N}(T)$ est de dimension fini.

- $X = N \oplus M$ alors $T(X) = T(N) + T(M)$. comme T/M est borné inférieurement alors $(T/M)(M) = T(M)$ fermé et on $T(N)$ de dimension fini alors $T(N) + T(M) = \mathfrak{R}(T)$ est fermé, enfin $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$. ■

Remarque 3.2.1. *Le théorème suivant montre que les pértubations par des opérateurs compacts n'ont plus d'influence sur les opérateurs **semi-Fredholm** dans le sens que si l'on somme un opérateur **semi-Fredholm** et un operateur compact le resultat reste **semi-Fredholm**.*

Théorème 3.2.2. *Soient $T : X \to Y$ un opérateur borné et $K : X \to Y$ un opérateur compact. Alors on a :*

i)$T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y) \Rightarrow T + K \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$.

ii) $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y) \Rightarrow T + K \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$.

iii) $T \in \mathfrak{F}(X,\ Y) \Rightarrow T + K \in \mathfrak{F}(X,\ Y)$.

Autrement dit si $\mathcal{F}(X,\ Y)_y\mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ sont non vides alors :

i) $\mathfrak{F}_+(X,\ Y) + \chi(X,\ Y) \subset \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$.

ii) $\mathfrak{F}_-(X,\ Y) + \chi(X,\ Y) \subset \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$.

iii) $\mathcal{F}(X,\ Y) + \chi(X,\ Y) \subset \mathcal{F}(X,\ Y)$.

Preuve. i) Supposons que $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$, alors d'aprés le lemme précédent il existe un sous-espace $M_1 \subset X$ fermé de codimension finie tel que T/M_1 est borné inferieurement, i.e

$$\exists cont > 0 : \|Tx\| \geq cont \forall x \in M_1 : \|x\| = 1$$

Comme K est compact, alors pour $\epsilon = cont/2$, il existe un sous-espace fermé M_2 tel que : $\|K/M_2\| < cont/2$. Soit alors $M = M_1 \cap M_2$.

M est un sous-espace fermé de codimension finie. Soit $x \in M : \|x\| = 1$

On a

$$\|(T + K)x\| \geq \|Tx\| - \|Kx\|$$

et comme

$$x \in M = M_1 \cap M_2$$

on a $\|Tx\| > cont$ et $\|Kx\| < cont/2$ alors $\|(T + K)x\| \geq cont/2$ donc $T + K/M$ est borné inférieurement d'où par le lemme précèdent $T + K \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$.

ii) Si $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ alors $T^* \in \mathfrak{F}_+(Y^*, X^*)$ et comme $K^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$ on a $T^* + K^* \in \mathfrak{F}_+(Y^*, X^*)$ i.e $T + K \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$.

iii) Si $T \in \mathcal{F}(X,\ Y)$ alors $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ d'où $T + K \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $T + K \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$, enfin $T + K \in \mathcal{F}(X,\ Y)$. ■

Théorème 3.2.3. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur* ***semi-Fredholm****. Alors pour tout opérateur compact $K : X \to Y$ on a $Ind(T + K) = Ind(T)$*

Preuve. - Dans un premier cas supposons que $T \in \mathfrak{F}(X,\ Y)$ et soit $K \in \mathcal{K}(X,\ Y)$, il existe un opérateur borné $S : Y \to X$ et un opérateur $K_1 \in \mathcal{K}(X) : ST = Id_X + K_1$ d'où

$$Ind(ST) = Ind(S) + Ind(T) = Ind(Id_X + K_1) = 0$$

i.e

$$Ind(T) = -Ind(S).$$

$$S(T + K) = ST + SK = Id_X + K_1 + SK = Id_X + (K_1 + SK)$$

et comme $\chi(X)$ est un idéal de $\mathcal{L}(X)$ alors $K_1 + SK \in \mathcal{K}(X)$ i.e

$$S(T + K) = Id_X + (K_1 + SK) \in \Phi(X,\ Y)$$

et

$$Ind(S(T + K)) = Ind(S) + Ind(T + K) = 0$$

i.e
$$Ind(S) = -Ind(T+K)$$
enfin
$$Ind(T+K) = Ind(T).$$
-Si $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $T \not\subset \mathcal{F}(X,\ Y)$ alors
$$T+K \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y) \ et\ T+K \notin \mathcal{F}(X,\ Y)$$
d'où
$$Ind(T+K) = Ind(T) = -\infty.$$
-Si $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $T \notin \mathcal{F}(X,\ Y)$ alors de même $T+K \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $T+K \notin \mathcal{F}(X,\ Y)$ ie
$$Ind(T+K) = Ind(T) = +\infty.$$

■

Remarque 3.2.2. *Maintenant nous allons montrer que $\mathcal{F}(X,\ Y)$, $\mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ sont stables par des petites perturbations. Autrement dit les ensembles $\mathcal{F}(X,\ Y)$, $\mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ sont des ouverts.*

Théorème 3.2.4. *Soit $T \in \mathcal{F}(X,\ Y)$. Alors il existe $e > 0$ telle que $T+S \in \mathcal{F}(X,\ Y)$ et* $\mathrm{Ind}(T+S) = \mathrm{Ind}(T)$ *pour tout opérateur borné $S : X \to Y$ avec $\|S\| < e$.*

Preuve. $T \in \mathcal{F}(X,\ Y)$ alors il existe $U : Y \to X$, un opérateur borné et $K_1 : X \to X$, $K_2 : Y \to Y$ deux opérateurs compacts : $UT = Id_X - K_1$ et $TU = Id_Y - K_2$. Prenons $e = \|U\|^{-1}$ et soit $S : X \to Y$ un opérateur borné telle que $\|S\| < e$.

On a $\|SU\| \leq \|S\|\|U\| < e.\ \|U\| = 1$ et de même $\|\ US\ \| < 1$ alors les opérateurs $Id_X + US$ et $Id_Y + SU$ sont inversibles respectivement dans les algèbres $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(Y)$ donc de ***Fredholm*** d'indice nul.

On a
$$U(T+S) = UT + US = Id_X - K_1 + US = (Id_X + US) - K_1 \in \mathcal{F}(X,\ Y)$$
car $Id_X + US$ est inversible donc de ***Fredholm*** d'où $T+S \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$. Et
$$(T+S)U = TU + TU = Id_Y - K_2 + SU = (Id_Y + SU) - K_2 \in \mathcal{F}(X,\ Y)$$
donc $T+S \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ enfin $T+S \in \mathcal{F}(X,\ Y)$ et
$$Ind(U(T+S)) = Ind(U) + Ind(T+S) = Ind((Id_X + US) - K_1) = Ind(Id_X + US) = 0$$
d'où
$$Ind(T+S) = -Ind(U)$$
et on a
$$Ind(UT) = Ind(Id_X - K_1) = 0.$$
Enfin
$$T+S \in \mathcal{F}(X,\ Y) \ et\ Ind(T+S) = Ind(T)$$

■

Théorème 3.2.5. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors on a :*

i) Si $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ alors il existe $e > 0$ telle que pour tout opérateur borné $S : X \to Y$ avec $\|S\| < e$, on a $T + S \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$. De plus $\alpha(T + S) \leq \alpha(T)$.

ii) Si $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ alors il existe $e > 0$ telle que pour tout opérateur borné $S : X \to Y$ avec $\|S\| < e$, on a $T + S \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$. De plus $\beta(T + S) \leq \beta(T)$.

Preuve. On suppose que $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ donc $\dim(\mathfrak{N}(T)) < \infty$, alors $\mathfrak{N}(T)$ admet un supplémentaire, on écrit $X = \mathfrak{N}(T){+}M$. T/M est borné inférieurement alors il existe $cont > 0$ tel que

$$\|Tx\| \geq cont\|x\|,\ \forall x \in M.$$

Prenons $e = cont/2$. Soit $S \in \mathcal{L}(X,\ Y) : \|S\|\langle cont/2$ et soit $x \in M$. On a $\|Sx\|\langle cont/2\|x\|$ alors

$$\|(S + T)x\| \geq \|Tx\| - \|Sx\| \geq cont\|x\| - cont/2\|x\| \geq cont/2\|x\|$$

et donc $T + S/M$ est borné inférieurement d'où $T + S \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$.

On a $\mathfrak{N}(T + S) \cap M = \{0\}$ (car $T + S/M$ est injective) et $\dim(\mathfrak{N}(T + S)) < \infty$ alors

$$\dim(\mathfrak{N}(T + S)) \leq codim(M) = \dim \mathrm{N}(T)$$

i.e $\alpha(T + S) \leq \alpha(T)$.

ii) Soit $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ alors $T^* \in \mathfrak{F}_+(Y^*, X^*)$ donc d'aprés i)

$$\exists e > 0 : \|S^*\| < e \Rightarrow T^* + S^* \in \mathfrak{F}_+(Y^*, X^*)$$

Soit $S \in \mathcal{L}(X,\ Y) : \|S\| < e$ alors $\|S^*\|\langle e$(car $\|S^*\| = \|S\|$) d'où $T^* + S^* \in \mathfrak{F}_+(Y^*, X^*)$ i.e $T + S \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\alpha(T^* + S^*) \leq \alpha(T^*)$ ie $\beta(T + S) \leq \beta(T)$. ■

Corollaire 3.2.1. *les ensembles $\mathcal{F}(X,\ Y)_y\mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(X,\ Y)$ et l'indice est continue sur $\mathcal{F}(X,\ Y)$.*

Remarque 3.2.3. *Si $T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ alors $\mathfrak{R}(T)$ n'admet pas toujours un supplémentaire. Le théorème suivant a résolu le problème (ie quand $\mathfrak{R}(T)$(ou $\mathfrak{N}(T)$) admet un supplémentaire si*

$$T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)\ (ou\ T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y))).$$

Théorème 3.2.6. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i)$T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $\mathfrak{R}(T)$ admet un supplémentaire dans Y.

ii) il existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $Id_X - ST$ soit de rang fini.

iii) il existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $Id_X - ST$ soit compact.

Preuve. $(i \Rightarrow ii)$ Soit $Q \in \mathcal{L}(Y)$ une projection de Y sur $T(X)$.

$T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ alors $\mathfrak{N}(T)$ admet un supplémentaire M dans X, on écrit $X = \mathfrak{N}(T) + M$.

La restriction $T/M : M{-}\to T(X)$ est bijective, soit $S_0 : T(X){-}\to M$ son inverse.

Définissons alors l'opérateur borné $S = S_0 Q$.

$$(Id_X - ST)(X) = (Id_X - ST)(\mathfrak{N}(T)) + (Id_X - ST)(M) = \mathfrak{N}(T) + (Id_X - ST)(M)$$

or $(Id_X - ST)/M = 0$ alors $(Id_X - ST)(X) = \mathfrak{N}(T)$ de dimension finie.

$(ii \Rightarrow iii) Id_X - ST$ est un opérateur borné de rang fini alors $Id_X - ST$ est compact. ■

Théorème 3.2.7. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors les assertions suivantes sont équiualentes :*

i)$T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\mathfrak{N}(T)$ admet un supplémentaire dans Y.

ii) il existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $Id_X - ST$ soit de rang fini.

iii) il existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $Id_X - ST$ soit compact.

Preuve. La démonstration est analogue àla démonstration du théorème précédent. ■

Corollaire 3.2.2. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors :*

i)$T \in \mathfrak{F}_+(X,\ Y)$ et $\mathfrak{R}(T)$ admet un supplémentaire si, seulement, si $\pi(T) = T+, \chi(X)$ est inversible à gauche dans l'algèbre de Calkin.

ii) $T \in \mathfrak{F}_-(X,\ Y)$ et $\mathfrak{N}(T)$ admet un supplémentaire si, et seulement, si $\pi(T) = T + \mathcal{K}(X)$ est inversible à droite dans l'algèbre de Calkin.

3.3 Homotopie des Opérateurs *semi-Fredholm*

Nous allons définir l'espace métrique $\mathfrak{F}$ de tous les opérateurs ***semi-Fredholm*** avec distance $d(A, B)$, ou de façon équivalente $g(A, B)$, ou $p(A, B)$

Définition 3.3.1. *$A, B \in \mathfrak{F}$ seront appelés homotopes s'il existe application continue f, $0 \leq t \leq 1$ de l'intervalle unité $I : 0 \leq t \leq 1$ dans $\mathfrak{F}$ tel que $f_0 = A,\ f_1 = B$. Nous allons utiliser le symbole $A \sim B$ Express homotopie de A et B. Clairement $A \sim B$ si et seulement si ils ont le même chemin-composante de $\mathfrak{F}$.*
Il est naturel de se demander pour un système complet d'invariants d'homotopie, ou pour une caractérisation de chemin-composante de $\mathfrak{F}$. Cette question est tout à fait répondu par le théorème suivant. L'invariance de ind(A) postulé dans ce théorème, est clairement liée à un résultat de Athinson [4][1], qui a été généralisé de diverses manières par Nagy [2], Krein et Gokberg [6], Dieudonné [9], Kato [18], et d'autres.

Théorème 3.3.1. *L'indice ind(A), comme introduit dans la définition 3.1, constitue un système complet d'invariants d'homotopie. En d'autres termes, en a*

$$A \sim B \text{ si et seulement si } ind(A) = ind(B).$$

Pour chaque $|ind| \leq \dim \mathcal{H}$ il existe des opérateurs $A \in \mathfrak{F}$ avec $ind(A) = ind$.
La démonstration du théorème 3.3.1. Sera approché en prouvant une série des lemmes.

Définition 3.3.2. *Soit A semi-Fredholm, on définit la constante $c(A)$ par*

$$c(A) = \inf_{\|u\|=1, u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathfrak{R}(A)^{\perp}} \|Au\|.$$

Lemme 3.3.1. *Nous avons $c(A^*) = c(A)$ pour chaque opérateur semi-Fredholm A*

Lemme 3.3.2. *Soit $A,\ B \in \mathfrak{F}$, et soit*

$$\delta(B, A) < [2 + c^{-2}(A)]^{-\frac{1}{2}},$$

alors, en a

$$dim\mathfrak{N}(B) \leq \dim \mathfrak{N}(A)$$

en outre, si

$$g(A, B) < [2 + c^{-2}(A)]^{-\frac{1}{2}},$$

alors, nous avons

$$dim\mathfrak{N}(B) \leq \dim \mathfrak{N}(A) et \ \dim \mathfrak{N}(B^*) \leq \dim \mathfrak{N}(A^*)$$

Athinson [1] a un résultat semblable pour les opérateurs bornés, qu'il appelle le " premier théorème de la stabilité ".

Preuve. La deuxième partie du lemme est la conséquence immédiate de la première partie, car en a l'inégalité

$$g(A, B) \geq \max[\delta(B, A), \delta(B^*, A^*)].$$

Pour prouver la première partie, il suffit de établir le lemme suivant. ■

Lemme 3.3.3. *Nous avons*

$$\delta(\mathfrak{N}(B), \mathfrak{N}(A)) \leq [2 + c^{-2}(A)]^{\frac{1}{2}} \delta(A, B). \tag{3.2}$$

Preuve. Nous avons d'abord remarquer que le lemme suivant est vrai. ■

Lemme 3.3.4. *Si A est **semi-Fredholm**, alors*

$$\mathfrak{G}(A) = \mathfrak{G}(\hat{A}) \oplus \mathfrak{M}(A),$$

où $\hat{A}$ désigne la restriction de A dans $\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{N}(A)^{\perp} = \mathfrak{D}(\hat{A})$, et $\mathfrak{M}(A)$ dénote l'ensemble de tous $\dot{u} = \{u, 0\} \in \mathfrak{G}(A)$ c.à.d. de tous $\dot{u} = \{u, 0\}$ avec $u \in \mathfrak{N}(A)$.

Preuve. Si $\dot{v} = \{v, Av\} \in \mathfrak{G}(A)$, alors $v = u + w$, $u \in \mathfrak{N}(A)$, $w \in \mathfrak{N}(A)^{\perp}$, et $\hat{A}w = Aw = Av$. En conséquence $\dot{v} = \{u, 0\} + \{w, \hat{A}w\}$ avec $\dot{u} = \{u, 0\} \in \mathfrak{M}(A)$, $\dot{w} = \{w, \hat{A}w\} \in \mathfrak{G}(\hat{A})$. Il est évident aussi que pour tous les $(\dot{u}, \dot{w}) = (u, w) = 0$, pour tous $\dot{u} \in \mathfrak{M}(A)$, $\dot{w} \in \mathfrak{G}(\hat{A})$ parce que $\dot{u} = \{u, 0\} \in \mathfrak{M}(A)$ si et seulement si $u \in \mathfrak{N}(A)$, tel que $w \perp \mathfrak{N}(A)$. ■

Preuve. du Lemme 3.3.3 : En a

$$\begin{aligned}
\delta(\mathfrak{N}(B), \mathfrak{N}(A)) &= \sup_{\|u\|=1} \|(1 - P_{\mathfrak{N}(A)}) P_{\mathfrak{N}(B)} u\| \\
&= \sup_{\|u\|=1, u \in \mathfrak{N}(B)} \|(1 - P_{\mathfrak{N}(A)}) u\| \\
&= \sup_{\|\dot{u}\|=1, \dot{u} \in \mathfrak{M}(B)} \|(1 - P_{\mathfrak{M}(A)}) \dot{u}\|.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\dot{u} \in \mathfrak{M}(B)$ nous obtenons

$$\|(1 - P_{\mathfrak{M}(A)}) \dot{u}\| = \|(1 - P_{\mathfrak{G}(A)})(1 - P_{\mathfrak{M}(A)}) \dot{u}\|^2 + \|P_{\mathfrak{G}(A)}(1 - P_{\mathfrak{M}(A)}) \dot{u}\|^2.$$

Le premier terme est estimée facilement comme suit.

$$\begin{aligned}
\|(1-P_{\mathfrak{G}(A)})(1-P_{\mathfrak{M}(A)})\dot{u}\|^2 &= \|(1-P_{\mathfrak{M}(A)})(1-P_{\mathfrak{G}(A)})\dot{u}\|^2 \\
&\leq \|(1-P_{\mathfrak{G}(A)})\dot{u}\|^2 = \|(1-P_{\mathfrak{G}(A)})P_{\mathfrak{G}(B)}\dot{u}\|^2 \\
&\leq [\delta(B,A)]^2\|\dot{u}\|^2 = [\delta(B,A)]^2.
\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le fait que $\mathfrak{M}(B) \subset \mathfrak{G}(B)$ $\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{G}(A)$ d'après le lemme 3.3.4, qui Implique que $P_{\mathfrak{G}(B)}\dot{u} = \dot{u}$ pour tous $\dot{u} \in \mathfrak{M}(B)$ et que $P_{\mathfrak{G}(A)}$ et $P_{\mathfrak{M}(A)}$ comute. concernant le second terme nous remarquons d'abord que

$$\|P_{\mathfrak{G}(A)}(1-P_{\mathfrak{M}(A)})\dot{u}\|^2 = \|P_{\mathfrak{G}(\hat{A})}\dot{u}\|^2$$

D'après le lemme 3.3.4. Soit

$$P_{\mathfrak{G}(\hat{A})}\dot{u} = \{v, \hat{A}v\} = \dot{v}, \quad v \in \mathfrak{N}(A)^{\perp} \cap \mathfrak{D}(A),$$

alors

$$\|P_{\mathfrak{G}(\hat{A})}\dot{u}\|^2 = \|\dot{v}\|^2 = \|v\|^2 + \|\hat{A}v\|^2 \leq (1+c^{-2}(A))\|\hat{A}v\|^2.$$

en revanche soit $(1-P_{\mathfrak{M}(A)})\dot{u} = \dot{w}$,alors nous avons

$$\dot{w} = \{(1-P_{\mathfrak{N}(A)})u, 0\} = \{w, 0\},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\dot{w} - \dot{v} &= \{w-v, \hat{A}v\}, \quad \|\hat{A}v\|^2 \leq \|w-v\|^2 + \|\hat{A}v\|^2 = \|\dot{w}-\dot{v}\|^2 \\
&= \|(1-P_{\mathfrak{M}(A)})\dot{u} - P_{\mathfrak{G}(\hat{A})}\dot{u}\|^2 \\
&= \|(1-P_{\mathfrak{M}(A)})(1-P_{\mathfrak{G}(A)})\dot{u}\|^2 \leq [\delta(B,A)]^2.
\end{aligned}$$

Comme résumé nous obtenons

$$\|P_{\mathfrak{G}(A)}(1-P_{\mathfrak{M}(A)})\dot{u}\|^2 \leq (1+c^{-2}(A))[\delta(B,A)]^2$$

Comme une estimation pour le second terme ci-dessus, et nous avons donc l'estimation souhaitée 3.2, et le lemme est prouvé.
Il est clair du lemme 3.3.4. Que nous devons avoir

$$r(A) = r(B), \quad r(A^*) = r(B^*)$$

chaque fois que

$$g(A,B) < \min\{[2+c^{-2}(A)]^{-\frac{1}{2}}, [2+c^{-2}(B)]^{-\frac{1}{2}}\}.$$

cela veut dire que pour une famille continue A_t , $0 \leq t \leq 1$ des opérateurs ***semi-Fredholm***, nous devons avoir $ind(A_t)$ constante, indépendante de t, chaque fois que seulement $c(A_t)$, $0 \leq t \leq 1$, est minorée par une constante positive. Dans ce cas, nous avons même $r(A_t) = const$, $r^*(A_t) = const$. Individuellement. ∎

3.4 Invariance de $ind(A)$ Réduction au cas des Opérateurs Bornés

Notre inttention dans ce paragraphe est de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. *Si $A \in \mathfrak{F}$, et B fermé, et*

$$p(A,B) < c^2(A)(1+c^2(A))^{-1}$$

alors, nous avons $B \in \mathfrak{F}$ et $ind(A) = ind(B)$. En d'autres termes pour chaque $A \in \mathfrak{F}$ il existe un voisinage ouvert dans l'espace de tous les opérateurs fermés de métrique $p(A,B)$ tel que tous les opérateurs dans ce voisinage ont le même indice que A. Cela implique notamment que $\mathfrak{F}$ est une partie ouverte de l'espace $\mathfrak{K}$ de tous les opérateurs fermé ou-dessous de la métrique. Nous préparons la preuve du théorème 3.4.1. Par une série des lemmes. Si A est fermé, alors l'auto-adjoint positive défini un opérateur $R_A = (1+A^*A)^{-1}$ a une unique racine carrés définie positive auto-adjoint, que nous dénotez par S_A.

Lemme 3.4.1. *S_A, AS_A sont bornés, et $\|S_A\| \leq 1$, $\|AS_A\| \leq 1$.*

Preuve. L'affirmation pour S_A est triviale. Mais

$$\|AR_Au\|^2 \leq (R_Au,u) = \|S_Au\|^2$$

Pour tous $u \in \mathcal{H}$. En conséquence nous obtenons $\mathfrak{R}(S_A) \subset \mathfrak{D}(AS_A)$, et $\|AS_Av\| \leq \|v\|$ pour tous $v \in \mathfrak{R}(S_A)$. Mais $\mathfrak{R}(S_A)$ est clairement dense. Par conséquent, l'affirmation reste suit en prenant la fermeture, et le lemme est prouvé. ∎

Lemme 3.4.2. *Si A est **semi-Fredholm**, alors AS_A aussi est **semi-Fredholm**, et $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(AS_A)$, $\mathfrak{N}(A^*) = \mathfrak{N}((AS_A)^*)$.*

Preuve. Nous observons que $\mathfrak{N}(A)$ est l'espace de tous $u \in \mathcal{H}$ satisfaire $R_Au = u$. En effet $R_Au = u$ est équivalent à

$$u \in \mathfrak{D}(A^*A), \quad u = u + A^*Au, \ \textit{or} \ A^*Au = 0 \ \textit{or} \ Au = 0.$$

Maintenant R_A est borné auto-adjoint, et soit son espace propre $\mathfrak{N}(A)$ ainsi que le complément orthogonal $\mathfrak{N}(A)^\perp$ invariant. Et donc fait la racine carrée S_A, comme est bien connu. Conséquence $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(AS_A)$. Il est aussi clair que $u \in \mathfrak{N}((AS_A)^*)$ Si et seulement si $(u, AS_Av) = 0$ pour tous $v \in \mathcal{H}$ c.à.d pour tous $(u, AR_Aw) = 0$ pour tous $w \in \mathcal{H}$, c.a.d. si $u \in \mathfrak{N}(A^*R_{A^*}) = \mathfrak{N}(A^*)$. Donc $\mathfrak{N}((AS_A)^*) = \mathfrak{N}(A^*)$. Finalement

$$(AS_A)^*AS_Au = S_AA^*AS_Au = A^*AR_Au \ \textit{pour tous} \ u \in \mathfrak{R}(S_A)$$

Et donc pour tous $u \in \mathcal{H}$. D'où

$$\|AS_Au\|^2 = (u, A^*AR_Au) = (u,u) - (u, R_Au),$$

Et nous obtenons

$$(u, (A^*A+1)u) = (1+c^2(A))(u,u) \ \textit{pour tous} \ u \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{N}(A)^\perp,$$

et donc

$$(u, R_A u) \leq (1 + c^2(A))^{-1}(u, u),$$

en outre, parce que R_A et S_A laisser $\mathfrak{N}(A)^\perp$ invariant. En combinant les estimations ci-dessus nous obtenons

$$\|AS_A u\|^2 \geq c^2(A)(1 + c^2(A))^{-1}\|u\|^2.$$

c.à.d. AS_A est ***semi-Fredholm***. ∎

nous remarquons que nous avons aussi prouvé le suivre

Corollaire 3.4.1. *Nous avons*

$$c(AS_A) \geq c(A)(1 + c^2(A))^{-\frac{1}{2}}.$$

Définition 3.4.1. *Si A, B sont fermés, alors nous définissons l'opérateur*

$$V_{A,B} = S_A S_B + (AS_A)^* B S_B.$$

Lemme 3.4.3. *L'opérateur $V_{A,B}$ satisfait aux relations suivantes*

$$V_{A,A} = 1, \quad V_{B,A} = V_{A,B}^*.$$

Et

$$| \, \|V_{A,B}u\|^2 - \|u\|^2 \, | \leq p(A, B)\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Preuve. Nous avons

$$V_{A,A}u = R_A u + S_A A^* A S_A u = S_A S_A^{-2} S_A u = u, \quad u \in \mathfrak{R}(S_A),$$

et donc $V_{A,A}u = u$ pour tous $u \in \mathcal{H}$, en prenant fermeture. Egalement

$$V_{A,B}^* = S_B S_A + (BS_B)^* A S_A = V_{B,A}.$$

En outre soit $u \in \mathcal{H}$, $x = S_B u$, $y = BS_B u$, alors

$$\begin{aligned}
| \, \|V_{A,B}u\|^2 - \|u\|^2 \, | &= | \, \|V_{A,B}u\|^2 - \|V_{B,B}u\|^2 \, | \\
&= | \, \|S_A x + (AS_A)^* y\|^2 - \|S_B x + (BS_B)^* y\|^2 \, | \\
&= | \, (x, (R_A - R_B)x) + (y, (R_{B^*} - R_{A^*})y) + 2Re(x, (A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*})y) \, | \\
&\leq \|x\|^2 \|R_B - R_A\| + \|y\|^2 \|R_{B^*} - R_{A^*}\| + 2\|x\|\|y\|\|B^* R_{B^*} - A^* R_{A^*}\| \\
&\leq (\|x\|^4 + \|y\|^4 + 2\|x\|^2\|y\|^2)^{\frac{1}{2}} p(A, B) = (\|x\|^2 + \|y\|^2) p(A, B).
\end{aligned}$$

nous vous Aussi $\|x\|^2 + \|y\|^2 = (u, V_{B,B}u) = \|u\|^2$, qui proves 3.3. Donc le lemme est prouvé.
∎ En particulier, nous observons le suivre.

Corollaire 3.4.2. *Si $p(A, B) < 1$, alors $V_{A,B}$ possède un inverse borné défini dans tous $\mathcal{H}$. En effet, on obtient alors*

$$\|V_{A,B}u\|^2 \geq (1 - p(A, B))\|u\|^2,$$
$$\|V_{A,B}^* u\|^2 = \|V_{B,A}u\|^2 \geq (1 - p(A, B))\|u\|^2,$$

c.à.d

$$\mathfrak{N}(V_{A,B}) = \mathfrak{N}(V_{A,B}^*) = \mathfrak{R}(V_{A,B})^\perp = \{0\},$$

Lemme 3.4.4. *Nous avons*

$$\|BS_BV_{B,A} - AS_A\| \leq p(A,B).$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{H}$ alors

$$\begin{array}{rcl} BS_BV_{B,A}u - AS_Au & = & BS_BV_{B,A}u - AS_AV_{A,A}u \\ & = & BS_B(S_BS_A + (BS_B)^*(AS_A))u - AS_A(S_AS_A + (AS_A)^*(AS_A))u \\ & = & (BR_A - AR_A)S_Au + (R_{A^*} - R_{B^*})AS_Au. \end{array}$$

En conséquence

$$\begin{array}{rcl} \|BS_BV_{B,A}u - AS_Au\| & \leq & \|BR_B - AR_A\|\|S_Au\| + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|\|AS_Au\| \\ & \leq & p(A,B)[\|S_Au\|^2 + \|AS_Au\|^2]^{\frac{1}{2}} = p(A,B)[(u, V_{A,A}u)]^{\frac{1}{2}} = p(A,B)\|u\|, \end{array}$$

ce qui prouve le lemme. (Il suffit d'utiliser

$$\pi(A,B) = [\|AR_A - BR_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

Au lieu de $p(A,B)$. Nous avons alors

$$p^2(A,B) = \pi^2(A,B) + \pi^2(A^*,B^*).)$$

■

Lemme 3.4.5. *Si A, B sont fermés, puis*

$$\|V_{A,B}(AS_B)^*(AS_A) - (AS_A)^*(AS_A)\| \leq p(A,B).$$

Preuve évidente.

Lemme 3.4.6. *Si A est* ***semi-Fredholm*** *et B est fermé, et si*

$$p(A,B) < c^2(A)(1 + c^2(A))^{-1}.$$

alors

$$K = V_{A,B}(BS_B)^*(AS_A)$$

A image fermé et $\mathfrak{N}(K) = \mathfrak{N}(A)$. Aussi

$$dim\mathfrak{N}(K) = dim\mathfrak{N}(K^*) \tag{3.4}$$

Preuve. Définir l'opérateur $H = (AS_A)^*(AS_A)$. Cleary $H,\ K$ deux sont limitées. En outre h est auto-adjoint, et nous avons $\mathfrak{N}(K) \supset \mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}(A)$ En outre, il est clair que

$$c(H) = c^2(A)(1 + c^2(A))^{-1},$$

comme peut être dérivé facilement. Aussi nous obtenons

$$\|H - K\| \leq p(A,B),$$

D'après le lemme 3.4.5.

Ecrivons $K = H - Z$ avec $\|Z\| \leq p(A, B)$ Maintenant
(45) $\|Ku\| = \|(H - Z)u\| \geqq (c(H) - p(A, B))\|u\| = c_0\|u\|, \quad u \in \mathfrak{N}(H)^\perp, \quad c_0 > 0$
Cela montre que nous devons avoir $\mathfrak{N}(K) = \mathfrak{N}(H)$ et que l'image de K doit être fermé. Mais $K^* = H - Z^*$ permet également l'estimation

$$\|K^*u\| \geqq c_0\|u\|, \quad u \in \mathfrak{N}(H)^\perp, \tag{3.5}$$

Pour des raisons analogues. Nous remarquons que K^* transforme $\mathfrak{N}(H)^\perp$ en elle-même, et en outre que la restriction L de K^* à $\mathfrak{N}(H)^\perp$ a une inverse bornée, définie dans l'ensemble de $\mathfrak{N}(H)^\perp$. En effet, nous obtenons $\mathfrak{R}(L) \subset \mathfrak{R}(K^*) \subset \mathfrak{N}(H)^\perp$, bien sur, et $Lu = 0$ Si et seulement si $u = 0$, par 3.5. Aussi $\mathfrak{R}(L)$ doit être fermé, en raison de 3.5. Supposer $\varphi \in \mathfrak{N}(H)^\perp$ est orthogonale à $\mathfrak{R}(L)$. Puis $(K\varphi, u) = (\varphi, Lu) = 0$ pour tous les $u \in \mathfrak{N}(H)^\perp$, c'est à dire, $K\varphi = H\varphi - Z\varphi \in \mathfrak{N}(H)$ mais $H\varphi \perp \mathfrak{N}(H)$, ainsi $H\varphi = w$ où w est la composante de $Z\varphi$ en $\mathfrak{N}(H)^\perp$. Maintenant

$$c(H)\|\varphi\| \leqq \|H\varphi\| = \|w\| \leqq \|Z\varphi\| \leqq p(A, B)\|\varphi\|,$$

Et donc $\varphi = 0$, en raison de $c(H) > p(A, B)$. Ainsi $\mathfrak{R}(L) = \mathfrak{N}(H)^\perp$. Maintenant $K^*z = 0$ peut être écrit comme $K^*y = Z^*x$, où x, y sont les composantes du z au $\mathfrak{N}(H)$ et $\mathfrak{N}(H)^\perp$ respectivement. Egalement $Z^*x = -K^*x \perp \mathfrak{N}(H)$. Conséquence nous obtenons

$$Kz = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad z = x + L^{-1}Z^*x \quad \textit{pour une} \quad x \in \mathfrak{N}(H)$$

.
Elle établit une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathfrak{N}(H)$ Et de $\mathfrak{N}(K^*)$ qui est linéaire et donc des garanties que 3.4 est vrai, ∎

Preuve.du théorème 3.4.1
(a) Soit $|ind(A)| < \infty$, alors les deux opérateurs

$$V_{A,B}(BS_B)^*(AS_A), \quad V_{A^*,B^*}(B^*S_{B^*})^*(A^*S_{A^*})$$

Les deux sont des ***semi-Fredholm***, et ont l'indice zéro, d'après le lemme 3.4.6. Ainsi, les adjoints

$$(AS_A)^*(BS_B)V_{B,A}, \quad (A^*S_{A^*})^*(B^*S_{B^*})V_{B^*,A^*}$$

. Doivent avoir leur noyau de dimension finie, ce qui implique que les noyau $\mathfrak{N}(BS_B)$, $\mathfrak{N}(B^*S_{B^*})$, c.à.d. les noyau $\mathfrak{N}(B)$, $\mathfrak{N}(B^*)$ (d'après le lemme 3.4.2), sont aussi de dimension finie. En conséquence nous pouvons appliquer le théorème à des opérateurs ci-dessus pour obtenir des

$$ind(K) = ind(V_{A,B}) + ind((BS_B)^*) + ind(AS_A) = ind(A) - ind(B) = 0$$

en particulier parceque le lemme 3.4.3et son corollaire implique que $V_{A,B}$ est ***semi-Fredholm*** d'indice zéro. Ainsi, le théoreme3.4.1
(b) Soit maintenant $ind(A) = -\omega$, $\omega > 0$, infinie. Alors nous concluons comme avant que $\dim \mathfrak{N}(B) < \infty$. En revanche l'opérateur $(A^*S_{A^*})^*B^*S_{B^*} = \dot{K}$ maintenant doit satisfaire la relation $\mathfrak{N}(\dot{K}) = \omega$. Depuis $\dot{K} = AS_AB^*S_{B^*}$ et parce que $\dim \mathfrak{N}(AS_A) = \dim \mathfrak{N}(A) < \infty$, il

s'ensuit que

$$\dim \mathfrak{N}(B^* S_{B^*}) = \dim \mathfrak{N}(B^*) = \omega,$$

c.à.d. que $ind(B) = -\omega$,

$\blacksquare$

3.5 Complétude de L'indice de $ind(A)$

Dans cette section nous allons montrer que deux opérateurs $A,\ B \in \mathfrak{F}$ ayant le même indice ind peut toujours être reliés par une courbe continue dans $\mathfrak{F}$, c.à.d. que les parties ouvertes de $\mathfrak{F}$ formé par tous les opérateurs avec un indice donné ind sont trajectoriel connecté.
Il suffit pour accomplir ceci pour le cas $ind \leq 0$, parce que si $ind > 0$
alors $ind(A^*) = -ind(A) < 0$, et tout raccordement ensuite $A^*,\ B^*$ également définir une connexion entre A et B , si nous prenons la famille des opérateurs adjoints.
si $ind(A) \leq 0$, alors $\dim \mathfrak{N}(A) < \infty$ et $\dim \mathfrak{N}(A) < \dim \mathfrak{N}(A^*)$, soit $\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^r$ est une base orthonormée de $\mathfrak{N}(A)$ *et soit* $\psi^1, \psi^2, ..., \psi^r$ un système orthonormé de r éléments dans $\mathfrak{N}(A^*)$. Alors nous définissons

$$A_t u = Au + \sum_{k=1}^{r} t\psi^k(\varphi^k, u), \quad u \in \mathfrak{D}(A), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Lemme 3.5.1. *A_t est continue dans $o \leq t \leq 1$, et $A_t \in \mathfrak{F},\ 0 \leq t \leq 1,\ A_0 = A$.*

Preuve. Soit $u \in \mathfrak{D}(A),\ u = v + w,\ v \in \mathfrak{R}(A^*),\ \omega \in \mathfrak{N}(A)$ alors

$$\begin{aligned} \|A_t u\|^2 &= \|Au\|^2 + t^2 \sum_{k=1}^{r} \mid (\varphi^k, u) \mid^2 \\ &= \|Av\|^2 + t^2 \sum_{k=1}^{r} \mid (\varphi^k, w) \mid^2 \\ &\geq c^2(A)\|v\|^2 + t^2\|\omega\|^2 \geq \min\{c^2(A), t^2\}\|u\|^2. \end{aligned}$$

Cela signifie que A_t satisfait à la condition (ii"). Nous avons
$\mathfrak{N}(A_t) = \{0\},\ t > 0$, Et donc A_t sera ***semi-Fredholm***, si elle est fermée. Supposer

$$u^n \in \mathfrak{D}(A_t) = \mathfrak{D}(A), \quad u^n \to u, \quad v^n = A_t u^n \to v$$

Pour toute $t > 0$ fixe. Décomposer

$$u^n = x^n + y^n; \quad u = x + y; \quad x, x^n \in \mathfrak{N}(A); \quad y, y^n \perp \mathfrak{N}(A);$$
$$v^n = \omega^n + \chi^n; \quad v = \omega + \chi; \quad \omega^n, \omega \in \mathfrak{N}(A^*); \quad \chi^n, \chi \perp \mathfrak{N}(A^*).$$

Alors nous obtenons

$$x^n \to x, \quad y^n \to y,\ omega^n \to \omega, \quad \chi^n \to \chi.$$

Mais $v^n = A_t u^n$ rendements

$$\omega^n = t\sum_{j=1}^{r}\psi^j(\varphi^j, x^n), \quad \chi^n = Ay^n.$$

En passant à la limite on en conclure que

$$y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{N}(A)^{\perp}, \quad Ay = \chi; \quad x \in \mathfrak{N}(A), \quad \omega = t\sum_{j=1}^{r}\psi^j(\varphi^j, x),$$

Et c'est ainsi que

$$u = x + y \in \mathfrak{D}(A); \quad v = \omega + \chi = Ay + t\sum_{j=1}^{r}\psi^j(\varphi^j, x) = Au + t\sum_{j=1}^{r}\psi^j(\varphi^j, u) = A_t u.$$

En conséquence A_t est fermé et donc dans $\mathfrak{F}$. Nous obtenons

$$A_t^* u = A^* u + t\sum_{j=1}^{r}\varphi^j(\psi^j, u), \quad u \in \mathfrak{D}(A);$$

$$A_t^* A_t u = A^* A u + t^2\sum_{j=1}^{r}\varphi^j(\psi^j, u), \quad u \in \mathfrak{D}(A^* A),$$

En particulier parce que

$$(\psi^j, Au) = 0, \quad u \in \mathfrak{D}(A), \quad A^*\psi^j = 0, \quad j = 1, ..., r.$$

Nous savons aussi que $\mathfrak{N}(A^*A) = \mathfrak{N}(A)$. En conséquence $R_{A_t}u = R_A u$ si $u \in \mathfrak{N}(A)^{\perp}$; $R_{A_t}u = (1+t^2)^{-1}u, \ si \ u \in \mathfrak{N}(A)$et donc

$$\|R_{A_t} - R_{A_{t'}}\| \leq | t^2 - t'^2 | \, [(1+t^2)(1+t'^2)]^{-1}.$$

Également

$$A_t R_{A_t} u = AR_A u \quad si \quad u \in \mathfrak{N}(A)^{\perp}; A_t R_{A_t} u = t(1+t^2)^{-1} \quad si \quad u \in \mathfrak{N}(A),$$

Ce qui signifie que

$$\|A_t R_{A_t} - A_{t'} R_{A_{t'}}\| \leq tt'[(1+t^2)(1+t'^2)]^{-1}.$$

Enfin

$$R_{A_{t^*}} u = AA^* u + t^2\sum_{j=1}^{r}\psi^j(\psi^j, u)$$

Ce qui donne à nouveau

$$\|R_{A_{t^*}} - R_{A_{t'^*}}\| = | t^2 - t'^2 | \, [(1+t^2)(1+t'^2)]^{-1}.$$

Cela signifie que $A_t, \ 0 \leq t \leq 1$ est continue et donc le lemme 3.5.1. Est prouvé. ∎
Le résultat essentiel du lemme 3.5.1 peut être exprimée comme suit

Lemme 3.5.2. *Tout opérateur $A \in \mathfrak{F}$ tel que $ind(A) \leq 0$ peuvent être connecté à un opérateur A_1 aussi d'indice ≤ 0 et à la propriété supplémentaire que $\mathfrak{N}(A_1) = \{0\}$.*

Lemme 3.5.3. *(Cf.j.v.Neumann [10]). Si $A \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}(A) = \{0\}$ alors $A = T_A H_A$ où H_A désigne la racine carrée positive de A^*A et $T_A = AH_A^{-1}$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathfrak{R}(A)$.*

Preuve. De la définition de H_A, on obtient : $\mathfrak{D}(H_A) = \mathfrak{D}(A)$ Et $\|Au\| = \|H_A u\|$ pour tous $u \in \mathfrak{D}(A)$.
Il est essentiel dans la preuve de ces deux faits que la fermeture de la restriction de A à $\mathfrak{D}(A^*A)$ coïncide avec A. D'où il suit que $\mathfrak{N}(H_A) = \mathfrak{N}(A) = \{0\}$. Puis que H_A est auto-adjoint, H_A^{-1} existe et est un opérateur borné défini partout dans $\mathcal{H}$. Par conséquent $T_A = AH_A^{-1}$ est aussi défini partout dans $\mathcal{H}$ et qui satisfait aux équation $\|T_A u\| = \|u\|$ pour tous $u \in \mathcal{H}$. En plus $\mathfrak{R}(T_A) = \mathfrak{R}(A)$ et le lemme est prouvé. ∎

Lemme 3.5.4. *Soit $H \in \mathfrak{F}$ est un auto-adjoint, l'opérateur défini positif sur $\mathcal{H}$. Alors $H \sim I$*

Preuve. Sans perte de généralité supposer que $H \geq I$. Alors soit

$$H_t = \int_0^{\infty} \min(\lambda, \frac{1}{t}) dE_\lambda, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Lorsque E_λ désigne une famille spectrale de H. Il est clair que H_t est ***semi-Fredholm*** Pour $0 \leq t \leq 1$, et

$$H_1 = \int_1^{\infty} dE_\lambda = I, \quad H_0 = H$$

Afin de prouver la continuité de H_t soit $\varphi_t(\lambda) = Min(\lambda, 1/t)$; alors :

$$\begin{aligned} R_{H_t} &= R_{H_{t^*}} \\ &= \int_1^{\infty} [1 + \varphi_t^2(\lambda)]^{-1} dE_\lambda \\ &= \int_1^{\infty} Max(t^2(1+t^2)^{-1}, (1+\lambda^2)^{-1}) dE_\lambda \\ &= \int_1^{\infty} \varphi_t(\lambda)[1 + \varphi_t(\lambda)]^{-1} dE_\lambda \\ &= \int_1^{\infty} Max(t(1+t^2)^{-1}, \lambda(1+\lambda^2)^{-1}) dE_\lambda \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que chaque fois $ind(H_t, H_{t'}) < \epsilon$ toutes les fois que $|t - t'| < \delta(\epsilon)$ c.à.d H_t Est continue dans t et le lemme est démontré. ∎

Lemme 3.5.5. *Si $A \in \mathfrak{F}, \mathfrak{N}(A) = \{0\}$ alors $A \sim T_A$.*

Preuve. soit H_t connecter H_A à I (cf. Lemme précédent) et soit $A_t = T_A H_A$,$0 \leqq t \leqq 1$ puis $A_0 = A$ et $A_1 = T_A$ et clairement $A_t \in \mathfrak{F}$ pour tous les t dans $[0, 1]$. Il reste à montrer est que A_t continue. Mais $A_t^* A_t = H_t T_A^* T_A H_t = H_t^2$ et d'où $R_{A_t} = R_{H_t}$ et $A_t R_{A_t} = T_A H_t R_{H_t}$ de sorte que la continuité de R_{A_t} et de $A_t R_{A_t}$ est une conséquence de la continuité de H_t. Enfin, puis que $T_A T_{A^*} = I - P_{\mathfrak{N}(A^*)}$ nous avons

$$A_t A_t^* + 1 = T_A(H_t^2 + 1)T_A^* + P_{\mathfrak{N}(A^*)}$$

Et donc $R_{A_t^*} = T_A R_{H_t} T_A^* + P_{\mathfrak{N}(A^*)}$ ce qui donne

$$\|R_{A_t^*} - R_{A_{t'}^*}\| \leq \|R_{H_t} - R_{H_{t'}}\|$$

et encore la continuité de $R_{A_t^*}$, découle de celle de H_t. Mettre ces résultats ensemble, nous voyons que la continuité de A_t découle de la continuité de H_t et le lemme est prouvé. ■

Lemme 3.5.6. *Chaque transformation unitaire U de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$ peut être liée à l'identité.*

Preuve. Le théorème spectral pour les rendements des transformations unitaires $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda$. Où E_λ est une famille spectrale, $E_0 = 0$ *et* $E_{2\pi} = 1$. Alors ensemble $U_t = \int_0^{2\pi} e^{i(1-t)\lambda} dE_\lambda$. Il est clair que $U_0 = U$ *et* U_t est unitaire pour tous t dans $[0,1]$ ce qui implique que U_t est ***semi-Fredholm*** dans cet intervalle. Aussi $U_1 = \int_0^{2\pi} dE_\lambda = I$ et

$$1 + U_t^* U_t = 1 + U_t U_t^* = 2$$

Et donc $R_{U_t} = R_{U_t^*} = \frac{1}{2}$ et $U_t R_{U_t} = \frac{1}{2} U_t$. Par Conséquent

$$p(U_t, U_{t'}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\|U_t - U_{t'}\| \leq \sqrt{2\pi} \mid t - t' \mid$$

Ce qui implique que U_t est continue dans t pour t dans $[0,1]$.

■

Preuve. du Corollaire de Lemme 3.5.6 Deux opérateurs unitaires peuvent toujours être reliés par une famille d'opérateurs unitaires, continue par rapport à la norme $\| \;\; \|$. ■

Lemme 3.5.7. *Si $A \in \mathfrak{F}$ et U_t est une famille continue d'opérateurs unitaires pour t dans $[0,1]$, alors $U_0 A$, $U_1 A \in \mathfrak{F}$ et $U_t A$ est un lien entre eux.*

Preuve. Posons $A_t = U_t A$, alors $A_t^* A_t = \; A^* A$, $A_t A_t^* = u_t A A^* U_t^*$. D'où

$$R_{A_t} = R_A, \;\; A_t R_{A_t} = U_t A R_A, \;\; R_{A_t^*} = U_t R_{A^*} U_t^*.$$

Cela montre clairement que A_t est continue dans t. Le fait que $A_t \in \mathfrak{F}$ suit à la fois du lemme 3.5.1. ■

Lemme 3.5.8. *Soient T_1 et T_2 sont deux isométries telles que $codim\mathfrak{R}(T_1) = codim\mathfrak{R}(T_2)$ alors $T_1 \sim T_2$.*

Preuve. Soit U est la transformation unitaire défini comme suit

$$Uu = \begin{cases} T_1 T_2^{-1} u & pour \;\; u \in \mathfrak{R}(T_2), \\ Wu & pour \;\; u \perp \mathfrak{R}(T_2), \end{cases}$$

Lorsque W est une transformation unitaire de $\mathfrak{R}(T_2)^\perp$ sur $\mathfrak{R}(T_1)^\perp$. (L'existence de W résulte de $codim\mathfrak{R}(T_1) = codim\mathfrak{R}(T_2)$.)Clairement U est unitaire, et d'où peut être associé à I comme a été montré dans lemme 3.5.6. En outre, d'après le lemme 3.5.7. $T_1 = UT_2 \sim T_2$ Qui démontre le lemme. ■

Théorème 3.5.1. *Si A, $B \in \mathfrak{F}$ et $ind(A) = ind(B)$ alors $A \sim B$.*

Preuve. Du lemmes précédents

$$B \sim B_1 \sim T_{B_1} \sim T_{A_1} \sim A_1 \sim A$$

Lorsque $B_1,\ A_1$ sont définies comme dans le Lemme 3.5.2. Et $T_{B_1},\ T_{A_1}$ comme dans le lemme 3.5.3. ■

Lemme 3.5.9. *Pour chaque ind telle que* $\mid ind \mid \leq \omega = \dim \mathcal{H}$ *il existe un opérateur* $A \in \mathfrak{F}$ *telle que* $ind(A) = ind$.

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer que $ind \leq 0$. Soit $\{\varphi^\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{J}}$ est toute base orthogonale de $\mathcal{H}$ et soit $\mathfrak{J}'$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{J}$ avec puissance $\omega = -ind$. Si $\omega < \dim \mathcal{H}$ il est clair que le complément de $\mathfrak{J}'$ dans $\mathfrak{J}$ en doit avoir la même puissance que $\mathfrak{J}$; si $\omega = \dim \mathcal{H},\ \mathfrak{J}'$ peuvent être choisis de telle sorte que son complément dans $\mathfrak{J}$ encore a la même puissance comme $\mathfrak{J}$. D'où, dans les deux cas, il existe une application $\alpha \mathfrak{J} \to \mathfrak{J} - \mathfrak{J}'$ qui est surjective et injective. Alors, nous pouvons définir une isométrie de $\mathcal{H}$ dans elle-même, dites T, en posons

$$T\varphi^\lambda = \varphi^{\alpha(\lambda)}.$$

Il est donc clair que, $\mathfrak{N}(T) = \{0\}$ et $\mathfrak{R}(T)^\perp$ est l'espace engendré par $\{\varphi^\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{J}'}$. Donc $ind(T) = ind$. ■

soit-nous examiner brièvement la possibilité d'une généralisation des résultats obtenus ci-dessus.
Définir $\mathfrak{F}^\infty$ comme la classe des opérateurs fermés A avec image fermé, qui satisfont la propriété suivante
Soit $A \in \mathfrak{F}$ ou, si $A \notin \mathfrak{F}$ alors $\dim \mathfrak{N}(A) \neq co\dim \mathfrak{R}(A)$. Lorsque $A \in \mathfrak{F}^\infty$ et $A \notin\ \mathfrak{F}$ nous définissons son indice ind de la manière suivante

$$ind(A) = \begin{cases} \dim \mathfrak{N}(A) & si \quad \dim \mathfrak{N}(A) > co\dim \mathfrak{R}(A). \\ -co\dim \mathfrak{R}(A) & si \quad \dim \mathfrak{N}(A) < co\dim \mathfrak{R}(A). \end{cases}$$

Nous affirmons sans preuve le théorème suivant.

Théorème 3.5.2. $\mathfrak{F}^\infty$ *est un espace métrique au-dessous des normes équivalentes* $d,\ g,\ p$ *du paragraphe 3 ; deux opérateurs contenu dans* $\mathfrak{F}^\infty$ *se trouvent dans le même composant si et seulement si ils ont le même indice. Toutes les preuves présentées dans cet article peut être facilement étendu pour couvrir ce cas plus général.*

3.6 Topologie induite par $d(A, B)$

Nous avons constaté que sur le sous-ensemble de tous les opérateurs fermé borné, la topologie induite par la métrique $d(A, B)$ coïncidé avec la topologie induite par la métrique $s(A, B) = \|A - B\|$. Ce qui suit est une preuve de ce fait, et doit être considérée comme la dernière partie de § 3 de notre document.

Lemme 3.6.1. *:si A et B sont des opérateures bornées nous avons :*

$$p(A, B) \leq 4\|A - B\|.$$

Preuve. Considérons l'identité :

$$\|(AR_A-BR_B)u\|^2+\|(R_A-R_B)u\|^2 = ((AR_A-BR_B)u,(A-B)R_Bu)-(BR_Bu,(A-B)(R_A-R_B)u).$$

alors :

$$\|AR_A-BR_B\|^2 \leq \{\|AR_A-BR_B\|+\|R_A-R_B\|\}\|A-B\|$$

et de la même façon :

$$\|R_A-R_B\|^2 \leq \{\|AR_A-BR_B\|+\|R_A-R_B\|\}\|A-B\|$$

$$\|R_A^*-R_B^*\|^2 \leq \{\|A^*R_A^*-B^*R_B^*\|+\|R_A^*-R_B^*\|\}\|A-B\|.$$

D'où

$$p^2(A,B) \leq 2\|A-B\|2p(A,B)$$

Et par conséquent,

$$p(A,B) \leq 4\|A-B\|.$$

Il reste seulement prouver l'identité. En a :

$$\begin{aligned}
\|(AR_A-BR_B)u\|^2+\|(R_A-R_B)u\|^2 &= (AR_Au,AR_Au)+(BR_Bu,BR_Bu)-(AR_Au,BR_Bu)\\
&\quad -(BR_Bu,AR_Au)+(R_Au,R_Au)+(R_Bu,R_Bu)\\
&\quad -(R_Au,R_Bu)-(R_Bu,R_Au)\\
&= (u,R_Au)+(u,R_Bu)-(AR_Au,BR_Bu)-(BR_Bu,AR_Au)\\
&\quad -(u,R_Bu)+(A^*AR_Au,R_Bu)-(u,R_Au)+(B^*BR_Bu,R_Au)\\
&= (AR_Au,(A-B)R_Bu)-(BR_Bu,(A-B)R_Au)\\
&= ((AR_A-BR_B)u,(A-B)R_Bu)\\
&\quad -(BR_Bu,(A-B)(R_A-R_B)u)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'identité. ■

Lemme 3.6.2. *Si A est un opérateur borné, et si B est un opérateur fermé, tel que*

$$p(A,B) < \frac{1}{1+\|A\|^2}$$

alors :
(i) B est borné (en fait $\|B\| \leq 2\|A\|+(1+2\|A\|^2)^{\frac{1}{2}}$),
(ii) $\|A-B\| \leq \frac{1}{4}(2+\|A\|^2+\|B\|^2)^{\frac{1}{2}}p(A,B)$.

Preuve. Soit $u \in \mathfrak{D}(B)$; alors :

$$\|Bu\| \leq \|Au\|+\|(B-A)u\|.$$

En outre :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\|A\|^2}\|(B-A)u\| &\leq \|R_{A^*}(B-A)u\| &(3.6)\\
&\leq \|R_{A^*}-R_{B^*}\|\|Bu\|+\|(R_{B^*}B-R_{A^*}A)u\| &(3.7)
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \|(B-A)u\| &\leq (1+\|A\|^2)\{\|R_{A^*}-R_{B^*}\|\|Bu\|+\|AR_A-BR_B\|\|u\|\} && (3.8)\\ &\leq (1+\|A\|^2)p(A,B)\{\|Bu\|+\|u\|\}. && (3.9)\end{aligned}$$

puisque $p(A,B)<1/[1+\|A\|^2]$ implique qu'il existe un ϵ positif tel que $p(A,B)(1+\|A\|^2)<1-\epsilon$, Il s'ensuit que

$$\|Bu\|<\|A\|\|u\|+(1-\epsilon)\|Bu\|+\|u\|$$

Et donc que B est borné puisque $\|Bu\|<(1/\epsilon)(1+\|A\|)\|u\|$. Mais puisque B est borné, est si B^* et $\|B^*-A^*\|=\|B-A\|$ nous avions :

$$\|B-A\|\leq(1+\|A\|^2)\{\|R_{A^*}-R_{B^*}\|\|B\|+\|AR_A-BR_B\|\}$$

Et donc aussi :

$$\|B^*-A^*\|\leq(1+\|A\|^2)\{\|R_A-R_B\|\|B\|+\|A^*R_{A^*}-B^*R_{B^*}\|\}.$$

Ajouter les deux inégalités. Et en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$2\|A-B\|\leq(1+\|A\|^2)2^{1/2}(1+\|B\|^2)^{1/2}p(A,B)<2^{1/2}(1+\|B\|^2)^{1/2}$$

c.à.d

$$\|B\|<\|A\|+\frac{1}{2^{1/2}}(1+\|B\|^2)^{1/2}$$

Où

$$\|B\|^2<\|A\|^2+\frac{1+\|B\|^2}{2}+2^{1/2}\|A\|.(1+\|B\|^2)^{1/2}$$

Enfin

$$\Big(\frac{(1+\|B\|^2)^{1/2}}{2}-\|A\|^2\Big)^2<1+2\|A\|^2$$

Qui établit (i). Nous avons vu juste cela

$$\|A-B\|\leq(1+\|A\|^2)(1+\|B\|^2)^{1/2}\frac{1}{2^{1/2}}p(A,B).$$

Par symétrie

$$\|A-B\|\leq(1+\|B\|^2)(1+\|A\|^2)^{1/2}\frac{1}{2^{1/2}}p(A,B).$$

Ajoutant les deux inégalités

$$\|A-B\|\leq\frac{1}{2(2)^{1/2}}(1+\|A\|^2)^{1/2}(1+\|B\|^2)^{1/2}.((1+\|A\|^2)^{1/2}+(1+\|B\|^2)^{1/2})p(A,B)$$

Qui peut aussi être écrit (en utilisant deux inégalités bien connu)

$$\|A-B\|\leq\frac{1}{4}(2+\|A\|^2+\|B\|^2)^{3/2}p(A,B).$$

■

Théorème 3.6.1. *L'ensemble des opérateurs bornés est ouvert à l'ensemble des opérateurs fermés de la topologie induite par $p(A,B)$ sur ce sous-ensemble des opérateurs bornés est équivalente à celle donnée par la norme*

$$s(A,B) = \|A - B\|.$$

Preuve. le théorème suivant à la fois des deux lemmes précédents.

$\blacksquare$

Bibliographie

[1] Acta.sci.Math, XV (1953) 38-56.

[2] B.V. Sz. NAGY, Acta Math.Sci. Hung., 3 (1952) 49-118.

[3] B.V.Sz.NAGY, Comm.Math. Helvet., 19 (1946-47) 347-366.

[4] C. Albert, Topologie, Belin et Espaces Éditions (1997).

[5] F. V. ATKINSN, Math.Sbornik, 28 (70) (1951) 3-14.

[6] GOKBERG et KREIN, Uspek.Math.Nauk, 2 (74) (74) (1957) 43-118.

[7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1983.

[8] J. Calais, Introduction à la théorie des groupes.

[9] J. Dieudonné, Bull.Math., (2) 67 (1943) 72-84.

[10] J. V. Neumann, Math Ann.of. 33 (1932) 294-310.

[11] M. Artin, Algebra, Prentice Hall, New Jersey (1991).

[12] Mat.Sbornik, Uspek, 30 (72) (1952) 219-224.

[13] Math.Sci.Hung Acta., 3 (1952) 61-66.

[14] M.S. Birman. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space.

[15] M. Takesaki, Theory of operator algebras, Encyc. Math. Sciences 124, 125, 127, Springer Verlag, 2001-2002

[16] N. Bourbaki, Théorie spectrale, Hermann, 1967. Dunod, 2003.

[17] P.Lévy-Brugl,Introduction à théorie spectrale, Dund,2003

[18] T. KATO, Journal d'Amal, 6 (1958) 261-322.