République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ.: 2016/2017

Équations différentièlles non linéaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse, géométrie et application

par

Hadjadj Ameur [1]

Sous la direction de

Dr O. Bennihi

Soutenu le 22 Juin 2017 devant le jury composé de

Mr. D. Djebouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr. O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mr. G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mr. B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail :hadjadj724@gmail.com

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier profondément mon Encadreur O. Bennihi pour la gentillesse et la patience qu'il a manifestées à mon égard. Je le remercie, aussi, pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie aussi tous les membres du jury de mon mémoire qui ont pris de leurs temps pour lire et juger ce travail ainsi que pour leur déplacement le jour de la soutenance.

Enfin, mes remerciements ne seraient pas complets sans mentionner l'ensemble de mes enseignants qui ont participé à notre formation. Qu'ils trouvent ici, l'expression de mon profond respect et de ma haute considération .

Comme je remercie aussi ma grande famille pour son soutien et pour son aide dans la préparation de ce mémoire et pour leurs encouragements.

Dédicace

À mes très chers parents, Que Dieu les gardent.

À tous mes frères et sœurs.

À tous mes amis.

À tous ceux qui sont proches de mon cœur.

et dont je n'ai pas cité les noms.

Je dédie ce modeste travail.

Hadjadj Ameur

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle important en mathématiques et plus particulièrement en dynamique de population, en engineering, en physique mathématique, en électronique, en électrodynamique, en biomathématique..... Les résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaire (EDO) ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Plusieurs auteurs ont travaillé sur les équations différentielles et leur différente applications, on cite à titre d'exemple les auteurs : Euler, Cauchy, James H Liu et al [5], Jean-Pierre Demailly [8], Jacques Hadamard [4],.... Notre intention est de présenter certains types d'équations différentielles non linéaires dans des espaces de Banach, on s'intéressera en particulier aux équations différentielles périodiques et presque périodiques, ce qui est l'une des intentions de l'analyse fonctionnelle linéaire et non linéaire.

Décrivons maintenant l'organisation de ce mémoire :
Dans le premier chapitre nous avons collecté certains préliminaires, définitions, théorèmes et autres résultats auxiliaires utilisé dans ce mémoire.
Dans le deuxième chapitre nous avons présenté un rappel sur les équations différentielles linéaires et certaines de leurs méthodes de résolution.
Dans le dernier chapitre nous avons abordé les équations différentielles non linéaires et traité deux types de solutions, les solutions périodiques et les solutions presque périodiques. Un passage a été consacré à la théorie des semi-groupes d'évolution.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduira certains théorèmes et définitions qu'on va utiliser tout au long de ce mémoire

1.1 Définitions et Théorèmes

Dans cette section on présentera quelques définitions et théorèmes important pour la compréhension des chapitres un et trois.

Définition 1.1.1 *(Équation différentielle) En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise*

Définition 1.1.2 *(Fonction de classe C^1) soit $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ et $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}^+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe C^1 si :*

1. *φ est strictement croissante.*
2. *$\varphi(0) = 0$.*

Définition 1.1.3 *(Fonction de classe C^∞) soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe C^∞ si :*

1. *φ est strictement croissante.*

2. $\varphi(0) = 0$.
3. $lim\, \varphi(r) = +\infty$ *quand* $r \to +\infty$.

Définition 1.1.4 *(Équation différentielle autonome) On appelle équation différentielle autonome une équation de la forme $y' = g(y)$. La variable x n'intervient pas dans l'équation.*

Quelques théorèmes de point fixe : En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Les théorèmes de point fixe se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.
Donnons quelques commentaires concernant certains théorèmes de points fixes

1. Le théorème de point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.
2. Le théorème de point fixe de Brouwer n'est pas constructif, il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne dans elle-même, sans apporter de méthode générale pour le trouver.
3. Le théorème de point fixe de Lefschetz est très important en topologie algébrique car il permet, d'une certaine manière, de trouver un moyen de compter les points fixes.
4. Le théorème de Knaster-Tarski est un théorème de point fixe pour une application monotone d'un treillis complet dans lui-même ; il figure parmi les exceptions qui, contrairement aux précédents, ne concerne pas une fonction continue ; en revanche, il est très intéressant dans les manipulations de structures d'ordre.

Citons maintenant certains des premiers théorèmes de points fixes :

Définition 1.1.5 *(Application contractante) Une application (opérateur) P sur un espace métrique (X, ρ) est dite contractante s'il existe $0 < r < 1$ tel que*

$$\rho(Px, Py) \leq \rho(x, y).$$

Théorème 1.1.1 *(Principe de l'application contractante)*

Soit P une application contractante sur un espace métrique complet X, alors il existe un unique point fixe x avec $Px = x$. De plus $x = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$, où x_0 est un élément quelconque de X et $x_{i+1} = Px_i$, $i = 1, 2...$

Théorème 1.1.2 *(Théorème de point fixe de brouwer)[14] Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.*

Théorème 1.1.3 *(premier théorème de point fixe de Schauder) Soit X un sous ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach Y et soit $P : X \to x$ un opérateur continu. Alors P a un point fixe dans X.*

Théorème 1.1.4 *(second théorème de point fixe de Schauder) Soit X un sous ensemble non vide, convexe et borné d'un espace de Banach Y, et soit $P : X \to x$ un opérateur compact. Alors P a un point fixe dans X.*

Théorème 1.1.5 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà) Soit $A \subset C(J, \mathbb{R}^n)$, A est relativement compact (i.e : $\overline{A}$ est compact) si et seulement si :*

1. *A est uniformément borné,*
2. *A est équicontinu.*

Chapitre 2

Équations Différentielles Ordinaires

2.1 Introduction

Les équations différentielles sont l'outil principal permettant de modéliser un mouvement. En effet, une équation différentielle est une équation liant une fonction et ses dérivées. Or les lois de la physique sur le mouvement donnent l'accélération (i.e. la dérivée seconde de la position) d'un objet, d'une particule,... en fonction des forces qui agissent dessus. Ces forces sont souvent fonctions de la vitesse de l'objet (forces de frottement) et/ou de sa position (tension d'un ressort, champs magnétique, répartition de charges...). Si l'on parvient à résoudre de façon exacte les équations ainsi obtenues, on peut connaître à chaque instant la position de l'objet que l'on étudie.

Note : Si l'étude porte sur un objet de l'espace, les x_i sont ses coordonnées (cartésiennes, polaires ou sphériques,...) mais on peut de même modéliser tout système évolutif dont les différents états peuvent être donnés par des variables quantifiables.

Un exemple célèbre est l'équation balistique qui régit la chute d'un corps soumis à la gravitation :

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases}$$

Si l'on connaît la position et la vitesse de départ, on peut tirer de cette équation une fonction donnant la position du corps à chaque instant. (On obtient une paramétrisation

de la trajectoire).
On peut améliorer un peu le modèle en tenant compte du frottement de l'air sur l'obus. Il paraît pour cela raisonnable de considérer que le frottement est proportionnel à la vitesse, et agit contre le mouvement qui est donc colinéaire aux vecteur vitesse.
On obtient alors un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} x^{''} = -fx^{'} \\ y^{''} = -g - fy^{'} \end{cases}$$

Ce système est un peu moins immédiat à résoudre que le système précédent. On peut de la même façon modéliser le mouvement d'un pendule, l'évolution d'une population, la déformation d'une poutre, d'un mur, le mouvement des vagues, l'évolution d'une réaction chimique...
L'objet de ce chapitre est de présenter différentes méthodes de résolutions.
Notons qu'il existe en réalité très peu d'équations différentielles que l'on sait résoudre de façon exacte. Elles sont en général issues de modèles simples, qui donnent une première idée du comportement de l'objet étudié. Ces équations sont donc triées en différentes classes. Chaque méthode étudiée ne s'appliquera qu'à certains types d'équations.
On verra par la suite que l'on peut s'inspirer de ces méthodes pour résoudre des problèmes plus complexes, portant notamment sur des fonctions de plusieurs variables. Les fonctions de plusieurs variables, et les équations différentielles associées (appelées Equations aux Dérivées Partielles ou EDP) sont au coeur de tous les modèles théoriques tentant d'expliquer le monde qui nous entoure.

2.2 Équations Différentielles Ordinaires

Définitions 2.2.1 *On appelle équation différentielle ordinaire une équation dont l'inconnue est une fonction* Φ *et qui relie* y *à ses dérivées, i.e. une équation du type*

$$\Phi(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y^{'}, y) = f(t).$$

Ici, f *est une fonction donnée, appelée second membre et le plus haut degré de dérivation dans l'équation (ici,* n*) est l'ordre de l'équation linéaire.*

✓ *Une équation différentielle est dite linéaire si la fonction Φ associée est linéaire. Autrement dit, une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme*

$$(E) : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = f(t)$$

où les a_i sont appelés coefficients de l'équation et sont des fonctions de t. L'adjectif linéaire porte donc sur l'inconnue y de l'équation.
Dans le cas où $f(t)$ est nulle, on dit que l'équation est homogène :

$$(H) : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0$$

Les équations homogènes jouent un rôle fondamental dans la résolution des équations différentielles linéaires, principalement parce qu'elles vérifient le principe de superposition : si deux fonctions f et g sont des solutions de (H), la fonction $f+g$ est encore une solution de (H).
✓ *L'algèbre linéaire (et le principe de superposition) nous assurent que toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire peuvent s'exprimer en fonction d'un nombre fini de solutions. Précisément*

Théorème 2.2.1 *L'ensemble des solutions d'une équation différentiel linéaire d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n.*

Il existe donc une famille de n solutions $y_1, ..., y_n$ (une base telle que toute solution s'écrit comme une combinaison linéaire des y_i : il existe $y_1, ..., y_n$ telles que chaque y_i est une solution et pour toute solution y, on a

$$y(t) = a_1y_1(t) + ... + a_ny_n(t)$$

On dit que la famille $y_1, ..., y_n$ engendre l'ensemble des solutions de (H).

Note : Le principe de superposition nous assure que toutes les fonctions de ce type sont des solutions. Pour démontrer complètement le théorème 2.2.1, il faut également montrer que ce sont les seules.

Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre n revient donc à trouver ces n solutions particulières. On sait trouver ces solutions particulières dans le cas où les coefficients a_i sont constants.

Pour des équations différentielles avec second membre (du type de(E)), on peut montrer que si l'on connait les solutions de l'équation homogène associée (i.e. l'équation obtenue en remplaçant $f(t)$ par 0), une seule solution de l'équation complète nous suffit alors pour exprimer toutes les solutions de (E). Précisément, on peut montrer que les solutions de (E) sont de la forme

$$y = y_H + y_p$$

où y_p est une solution particulière de (E) et y_H parcourt l'ensemble des solutions de (H).

Pour résoudre une équation différentielle linéaire, on commence donc par déterminer les solutions de l'équation homogène associer puis on cherche une solution particulière de l'équation complète.

Parmi les équations différentielles linéaires, les plus simples à étudier sont celles à coefficients constants, i.e. celle dont les coefficients a_i ne dépendent pas de t.

On va voir comment, à l'aide des polynômes, on peut construire la famille de fonctions qui engendrent les solutions de (H) puis on verra comment déterminer une solution particulière de l'équation complète.

Pour les équations à coefficients non constants, le problème est bien plus complexe. On se contentera donc d'étudier de telles équations à l'ordre 1, i.e. les équations de la forme

$$(N.C), : a(t)y^{'} + b(t)y = f(t)$$

On verra en particulier que, contrairement aux équations à coefficients constants, on ne pourra pas forcement trouver de solution de (N.C.) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On verra en particulier comment déterminer les intervalles de résolution et ce qu'entraine l'existence de valeurs interdites sur la nature des solutions.

2.2.1 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Équations homogènes

1. **Équations d'ordre 1 :** Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants est une équation de la forme

$$(H_1), \alpha y^{'} + \beta y = 0$$

Quitte à diviser par α (qui est non nul), on peut se ramener à une équation de la forme

$$(H_1), y^{'} = ay$$

.

Il y a de nombreuses façons de résoudre ce type d'équations.
La méthode ci-dessous a l'avantage de s'appliquer également avec des coefficients non constants (bien qu'elle soit plus difficile à mettre en œuvre).
Cette méthode consiste à transformer (H_1) en une égalité entre deux quantités que l'on sait intégrer. Il suffit pour cela de diviser par y :

$$y^{'} = ay \Longleftrightarrow \frac{y^{'}}{y} = a.$$

On reconnaît à gauche la dérivée de $ln|y|$. D'où

$$ln|y(t)| = at + b \Longleftrightarrow |y(t)| = e^{at} + b.$$

En note $A = \pm e^b$, on obtient toutes les solutions de (H_1) :

$$y(t) = Ae^{at}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. **Équations d'ordre n :** Pour les équations d'ordre n, on utilise une méthode basée sur les polynômes pour déterminer les n solutions qui engendre l'ensemble des solutions.

Précisément, si

$$(H) \quad : \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_1 y^{'} + a_0 y = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

on appelle alors polynôme caractéristique de l'équation (H) le polynôme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots.. + a_1 X + a_0.$$

C'est un polynôme degré n. Or si l'on se place dans $\mathbb{C}$, un tel polynôme peut s'écrire

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2).....(X - \alpha_n)$$

où les a_i sont les racines complexes de P, qui peuvent éventuellement être égales. Ce sont ces n racines de ce polynômes qui nous permettons de construire les n solutions de base de (H). Précisément, on peut montrer que pour chaque racine a_i de $P(X)$, la fonction

$$y_i \ : t \longmapsto e^{\alpha_i t}$$

est une solution de (H).
Si les n racines sont distinctes, les n fonction $y_1, ..., y_n$ sont les fonctions de base que l'on cherche. Autrement dit, toute solution de (H) s'écrit sous la forme

$$y \ : \ t \longmapsto A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \dots. + A_n e^{\alpha_n t}, \qquad A_i \in \mathbb{R}$$

Notes :

- Cela correspond à ce que l'on a vu à l'ordre 1. Le polynôme caractéristique d'une équation de la forme $y^{'} = ay$ est en effet le polynôme $P(X) = X - a$ dont l'unique racine est a.

- Pour une équation d'ordre n, on a n degrés de liberté pour construire une solution : les n coefficients $A_1, ..., A_n$.

Si certaines racines sont multiples, les fonctions $y_i \, : \, t \longmapsto e^{\alpha_i t}$ sont toujours des solutions de (H) mais on n'en a plus n. (Il en manque). Cependant, on peut montrer que si α est une racine double de $P(X)$, les fonctions $[t \longmapsto e^{\alpha t}]$ et $[t \longmapsto te^{\alpha t}]$ sont solutions de (H). De façon générale, si α est une racine de $P(X)$ d'ordre r, les fonctions

$$[t \longmapsto e^{\alpha t}], [t \longmapsto te^{\alpha t}], ..., [t \longmapsto t^{r-1}e^{\alpha t}], [t \longmapsto t^r e^{\alpha t}]$$

sont des solutions de (H).

Le cas non homogène

Lorsque l'on ajoute un second membre $f(t)$ non nul à une équation homogène, l'équation obtenue ne vérifie plus le principe de superposition. Cependant, on a tout de même la propriété suivante :

Proposition 2.2.1 *Si y_p est une solution de l'équation différentielle*

$$(E) \quad : \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y^{'} + a_0 y = f(t) \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

et si y_H est une solution de l'équation homogène associée, la somme

$$y = y_p + y_H$$

est encore une solution de l'équation (E).

En étudiant le problème à l'aide de l'algèbre linéaire, on peut même montrer que toutes les solutions de l'équation (E) peuvent être obtenues en ajoutant à une solution particulière de (E) l'ensemble des solutions de (H).
Autrement dit, pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on détermine les solutions de (H) à l'aide de son polynôme caractéristique, puis on cherche une solution particulière de l'équation complète.

Grâce aux formules de calcul différentiel, on peut souvent chercher une solution "à l'instinct" (solution triviale).

En effet, la première chose que l'on peut remarquer est que si y est un polynôme, toutes ses dérivées sont des polynômes (nuls à partir d'un moment). Ainsi, le membre de gauche de l'équation (E) est encore un polynôme. Autrement dit, si le second membre

$f(t)$ est un polynôme en t, on peut chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme (les inconnues étant les coefficients de ce polynôme). En calculant ses dérivées successives et en mettant le tout dans l'équation, on a une égalité entre deux polynômes. On peut alors procéder par identification.

De façon générale, si le second membre est un polynôme, on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré. Il peut arriver que cela ne donne rien. Dans ce cas, on augmente le degré du polynôme que l'on cherche et on recommence.

De même, on peut noter que si y est une fonction de la forme $P(t)e^{\alpha t}$, toutes ses dérivées ont également cette forme là. On peut appliquer la même méthode dans le cas où $f(t)$ est un polynôme pour les cas où $f(t)$ est de la forme $P(t)e^{\alpha t}$.

Enfin, cette propriété des dérivées est encore valable pour les fonctions de la forme $Acos\alpha t + Bsin\alpha t$. Là encore, si $f(t)$ est de ce type, on pourra chercher une solution particulière sous cette forme.

Enfin, à l'ordre 1, quand l'instinct ne nous donne rien, on peut appliquer la méthode de variation de la constante : la résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 produit une constante. On a vu par exemple que les solutions de l'équation $y^{'} = ay$ sont

$$y(t) = Ae^{at} \quad , \qquad A \in \mathbb{R}$$

Si l'on souhaite résoudre une équation de la forme $y^{'} - ay = f(t)$ où $f(t)$ est connue (non nulle), on peut alors chercher une solution particulière de cette équation sous la forme

$$y_p(t) = A(t)e^{\alpha t}.$$

(On fait varier la constante issue de la résolution de l'équation homogène associée). En injectant y_p dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} y_p^{'} + ay_p(t) = f(t) \quad &\Longleftrightarrow (A^{'}(t) - aA(t))e^{-at} + aA(t)e^{-at} = f(t) \\ &\Longleftrightarrow A^{'}(t) = f(t)e^{at} \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière équation, on trouve $A(t)$ et donc une solution particulière.

Conditions initiales et solution unique

D'après ce que l'on a vu plus haut, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants est engendré par n solutions indépendantes (c'est un espace vectoriel de dimension n. Autrement dit, on a n degrés de liberté pour construire une solution. D'un point de vue analytique, ces n degrés de liberté sont représentés par les n constantes $A_1, ..., A_n$ qui apparaissent dans l'expression d'une solution générale (et qui ne sont rien d'autre que les coordonnées d'une solution générale dans la base formée des n solutions données par les racines du polynôme caractéristique).
Pour déterminer une unique solution dans l'ensemble des solutions, on peut donc ajouter à l'équation différentielle n contraintes différentes. On peut par exemple imposer à la solution cherchée de passer par n points différents :

$$y(t_1) = y_1 \quad , y(t_2) = y_2 \quad , ..., y(t_n) = y_n$$

En pratique, si l'on introduit ces n contraintes supplémentaires dans l'expression générale de la solution, on obtient un système linéaire vérifié par les A_i. La résolution de ce système nous donne les coordonnées de l'unique solution cherchée.
Traditionnellement, les contraintes supplémentaires portent plutôt sur les dérivées de fonction y en un même point (souvent $t = 0$) :

$$y(0) = y_0 \ , \ y^{'}(0) = y_1 \ , ..., \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

Là encore, en introduisant ces conditions dans la solution générale, on obtient un système linéaire dont les inconnues sont les coordonnées A_i. La résolution de ce système donne l'unique solution cherchée.

Chapitre 3

Équations différentielles non linéaires

3.1 Introduction

En règle générale, les équations différentielles linéaires sont issues de modèles relativement simples. Si l'on veut des modèles un peu plus complexes (et donc plus proches de la réalité), on obtient en règle générale des équations non linéaires. Ce sont, pour la plupart, des équations que l'on ne sait pas résoudre de façon exactes. Ces équations sont résolues dans d'autres espaces que $\mathbb{R}^n$ comme les espaces de Banach et de Fréchet en utilisant la théorie des semi groupes combinée avec les théorèmes des points fixes.

3.2 Quelques outils utilisés dans la résolution des équations différentielles non linéaires

Définition 3.2.1 *(Espace de Banach) Un espace de Banach $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel normé complet. C'est à dire un espace normé dans lequel toute suite de Cauchy converge vers un élément de $\mathbb{X}$.*

Définition 3.2.2 *Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit ouvert si pour tout $x \in S$, il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule :*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in E / \|x - y\| < \epsilon\}$$

est incluse dans S.
S *est dit fermé si son complémentaire* $E \setminus S$ *est ouvert.*

Proposition 3.2.1 *Un sous ensemble* S *d'un espace normé* E *est dit fermé si et seulement si chaque suite d'élément de* S *qui converge dans* E *a sa limite dans* S.

Définition 3.2.3 *(Fermeture d'un sous ensemble) La fermeture d'un sous ensemble* S *dans un espace normé* E *noté* $\overline{S}$ *est l'intersection de tous les ensembles fermés contenant* S.

Proposition 3.2.2 *Si* S *est un sous ensemble d'un espace normé* E *alors*

$$\overline{S} = \{x \in E / \exists (x_n) \subseteq S / x_n \to x\}$$

.

Définition 3.2.4 *(Densité) Un sous ensemble* S *d'un espace normé* E *est dite dense dans* E *si* $\overline{S} = E$. *Exemple :* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Définition 3.2.5 *Un sous ensemble* S *d'un espace normé* E *est dit borné s'il est soit vide ou inclu dans une boule.*

Définition 3.2.6 *Un sous ensemble* S *d'un espace normé* E *est dit relativement compact si* $\overline{S}$ *est compact.*

Remarque 3.2.1 *Chaque relativement compact est borné.*

Proposition 3.2.3 *Un sous ensemble* S *d'un espace de Banach* $\mathbb{X}$ *est relativement compact si est seulement si tout suite dans* S *contient une sous suite qui est convergente dans* S.

Définition 3.2.7 *Un sous ensemble* S *d'un espace de Banach* $\mathbb{X}$ *est dit borné si* x^*S *est borné pour tout* $x^* \in \mathbb{X}^*$, *où* $\mathbb{X}^*$ *est le dual de* $\mathbb{X}$.

3.2.1 Calcul différentiel dans des espaces de Banach

Dérivation : Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach, $\mathbb{X}^*$ son dual, c'est à dire des fonctionnelles continues. Soit $U \subset \mathbb{X}$, un ouvert de $\mathbb{X}$, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.
Il y'a plusieurs sens possibles à donner à l'expression : $x^* \in \mathbb{X}^*$ est la dérivée de f en x_0.

Définition 3.2.8 *1. x^* est la dérivée de Gateaux de f en x_0 si et seulement si $\forall u \in \mathbb{X}$,*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}(f(x_0 + ru) - f(x_0) - rx^*(u)) = 0$$

2. x^* est la dérivée de Fréchet de f si et seulement si

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{1}{\|u\|}(f(x_0 + u) - f(x_0) - x^*(u)) = 0$$

Dans les deux cas on note par $f^{'}(x_0) = x^* \in \mathbb{X}^*$ le dérivée.

Il est clair que 2) $\Rightarrow$ 1) i.e, une fonction Fréchet dérivable est Gateau dérivable.

Définition 3.2.9 *(Espace de Fréchet) Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique réel complet (au sens uniforme) dont la topologie est induite par une famille dénombrable et séparant de semi-normes.*

3.3 Solutions périodiques et presque périodiques

3.3.1 Solution périodique d'une équation différentielle non linéaire

3.3.2 Introduction

soit $f(t,x)$ une fonction continue dans $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, on veut se donner des conditions suffisantes pour l'équation différentielle suivante

$$x' = f(t,x) \tag{3.1}$$

Cette équation a au moins une solution périodique $x(t)$. i.e, une solution $x(t)$ tel que $x(0) = x(T)$. Nous disons que $f(t,x)$ est de type K (d'après Kamke [2]) dans un ensemble $D \in \mathbb{R}^n$ si $\forall x, y \in D, x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ avec $x \leq y$ et $x_i = y_i$ tel que $f_i(t,x) \leq f_i(t,y)$ où $f = (f = f_1, ..., f_n)$, $i = 1, ..., n$

3.3.3 Résultat Principal

Le résultat principal est comme suit.

Théorème 3.3.1 *soient* $\alpha, \beta : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue telle que* $\alpha(t) \leq \beta(t)$*,* $0 \leq t \leq T$*,* $\alpha(0) \leq \alpha(T)$*,*$\beta(0) \geq \beta(T)$ *et*

$$D_{-}\alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad D^{-}\beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \qquad 0 < t \leq T. \tag{3.2}$$

soit f *une fonction de type* K *sur l'ensemble* $\{x : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), 0 \leq t \leq T.\}$ *il existe donc une solution périodique* $x(t)$ *de (3.1) avec* $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t), 0 \leq t \leq T$*. On note par* D_{-}, D^{-} *nous désignons respectivement les opérateurs différentiels inférieurs gauches et supérieurs gauches.*

Preuve : Etablissons d'abord un cas particulier où f est supposée continue Lipschitzienne par rapport à x et les inégalités dans 3.2 sont supposées strictes. Ensuite, on utilise des arguments d'approximation pour obtenir le résultat plus général. On applique le théorème 3.3.1 pour obtenir des solutions périodiques de certains systèmes linéaires et ensuite on utilise ces résultat d'existence ainsi que la théorie des points fixes pour obtenir l'existence des solutions périodiques de certain systèmes linéaires qui ne sont pas nécessairement de type K. Avant de prouver le théorème 3.3.1, nous considérons le cas particulier suivant.

Théorème 3.3.2 *soit* $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue et qui satisfait une condition de Lipschitz par rapport à* x *sur les sous-ensembles compacts de* $[0, T] \times \mathbb{R}^n$*. De plus, soient* $\alpha, \beta : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *des fonctions continues telles que* $\alpha(t) < \beta(t)$*,* $\alpha(0) \leq \alpha(T)$*,* $\beta(0) \geq \beta(T)$ *et*

$$D_{-}\alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad D^{-}\beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \qquad 0 < t \leq T. \tag{3.3}$$

Si de plus, f *est de type* K *sur* $\{x : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), 0 \leq t \leq T\}$ *alors il existe une solution périodique* $x(t)$ *de 3.1 telle que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.4}$$

Preuve 3.3.1 *soient* $[\alpha, \beta] = \{(t, x) : \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), 0 \leq t \leq T\}$. *Alors* $[\alpha, \beta]$ *est un sous-ensemble compact de* $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ *puisque* f *satisfait une condition de Lipschitz par rapport à* x *sur cet ensemble, le problème à valeur initiale*

$$x' = f(t, x), \qquad x(0) = x_0 \tag{3.5}$$

admet une solution unique $x(t; x_0)$ *pour chaque* x_0 *avec* $\alpha(0) \leq x_0 \leq \beta(0)$. *Il résulte de [2] que* $x(t; x_0)$ *existe sur* $[0, T]$ *et on a*

$$\alpha(t) \leq x(t; x_0) \leq \beta(t), \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.6}$$

définissons l'application

$$S : \{x_0 : \alpha(0) \leq x_0 \leq \beta(0)\} \to \{z : \alpha(T) \leq z \leq \beta(T) \subseteq \{x_0 : \alpha(0) \leq x_0 \leq \beta(0)\} \tag{3.7}$$

par $S(x_0) = x(T; x_0)$. *Alors* S *est continu. D'après le théorème du point fixe de Brouwer 1.1.2,* S *a un point fixe.*

A l'aide du théorème 3.3.2, nous allons prouver maintenant le théorème 3.3.1.

Preuve (théorème 3.3.1) : soient α et β comme dans le théorème 3.3.1, on définit la fonction $F(t, x)$ de la manière suivante. Pour chaque $t \in [0, T]$ et $i = 1......n$ soit

$$F_i(t, x) = \begin{cases} f_i(t, \overline{x}) - \frac{x_i - \beta_i(t)}{1+|x_i|}, & \text{si } x_i > \beta_i(t) \\ f_i(t, \overline{x}), & \text{si } \alpha_i(t) \leq x_i \leq \beta_i(t) \\ f_i(t, \overline{x}) - \frac{x_i - \alpha_i(t)}{1+|x_i|}, & \text{si } x_i < \alpha_i(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\overline{x} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ et

$$\overline{x}_i = \begin{cases} \beta_i(t), & \text{si } x_i > \beta_i(t) \\ x_i, & \text{si } \alpha_i(t) \leq x_i \leq \beta_i(t) \\ \alpha_i(t), & \text{si } x_i < \alpha_i(t) \end{cases} \tag{3.9}$$

la fonction $F(t, x)$ aussi est définie, continue et bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ de plus est de type K partout, aussi une fonction $x(t)$,

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \qquad 0 \leq t \leq T$$

est une solution de (3.1) ssi c'est une solution de

$$x^{'} = F(t, x) \tag{3.10}$$

soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ est un vecteur constant avec $\varepsilon_i > 0,\ i = 1, ...n$. soit $A(t) = \alpha(t) - \varepsilon,\ B(t) = \beta(t) + \varepsilon$. Alors

$$F_i(t, A(t)) = f_i(t, \alpha(t)) + \frac{\varepsilon_i}{1 + |A_i(t)|} > f_i(t, \alpha(t))$$

et donc

$$D_{-}A(t) = D_{-}\alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)) < F(t, A(t))$$

de même

$$D^{-}B(t) > F(t, B(t))$$

Maintenant on considère la fonction $F(t, x)$ sur l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(t, x) : A(t) \leq x \leq B(t), 0 \leq t \leq T\}$$

et soit $\delta > 0$ tel que

$$D_{-}A_i(t) - F_i(t, A(t)) < -\delta < 0 < \delta < D^{-}B_i(t) - F(t, B(t)), \qquad i = 1, ..., n.$$

En utilisant un argument d'approximation on peut trouver une fonction $G(t, x)$ qui satisfait une condition de Lipschitz par rapport à x est de type K et est tel que $|G_i(t, x) - F_i(t, x)| < \delta/2,\ i = 1, ..., n$ pour tout $(t, x) \in \mathcal{A}$ cela implique que

$$D_{-}A(t) < G(t, A(t)), \qquad D^{-}B(t) > G(t, B(t)).$$

ainsi par le théorème 3.3.2 , l'équation $x^{'} = G(t, x)$ a une solution périodique $x(t)$ tel que $A(t) \leq x(t) \leq B(t)$. On utilise le théorème d'Ascoli-Arzela (1.1.5) (i.e on choisir une suite décroissante monotone de δ converge vers 0,.. etc) on déduire que (3.10) a une solution périodique $x(t)$ tel que $A(t) \leq x(t) \leq B(t)$. Ceci est vrai pour tous les vecteurs positifs ε. On utilise le théorème d'Ascoli-Arzela (1.1.5) une fois de plus, on va déduire qu'il existe une solution périodique $x(t)$ de (3.10) tel que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$. Par la remarque au début de la preuve on conclure que $x(t)$ est une solution périodique de (3.1).

Etudions maintenant les équations de la forme

$$x^{'} = A(t)x + g(t,x) \tag{3.11}$$

appelées équations semi-linéaires où g n'est pas nécessairement du type K, mais $A(t)$ est une matrice continue $n \times n$ définit sur $[0,T]$ et $A(t)$ est de type K, i.e, si $A(t) = (a_{ij}(t))$, alors $a_{ij}(t) \geq 0, i \neq j, i = 1, ..., n, j = 1, ..., n.$

Théorème 3.3.3 *Soit $A(t)$ une matrice continue $n \times n$ du type K telle que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) < 0, i = 1, ..., n. \tag{3.12}$$

Alors, pour chaque fonction continue $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ il existe une solution $x(t)$ de

$$x^{'} = A(t)x + \phi(t) \tag{3.13}$$

tel que $x(0) = x(T)$.

Preuve : par (3.13), on peut trouver des constantes α, β, $\alpha < 0 < \beta$, telle que

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) + \phi_i(t) \geq 0 \geq \beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) + \phi_i(t), \quad i = 1, ..., n. \tag{3.14}$$

Les vecteurs constants $(\alpha, ..., \alpha)$ et $(\beta, ..., \beta)$ satisfont les inégalités différentielles souhaitées et nous concluons qu'il existe une solution $x(t)$ de (3.14) avec $x(0) = x(T)$ et $\alpha \leq x_i(t) \leq \beta, i = 1, ..., n, \quad 0 \leq t \leq T$.

Remarque 3.3.1 *Dans le cas où A est une matrice constante $n \times n$, le théorème (3.3.3), Bien sûr, vient immédiatement de la théorie de Floquet car les conditions*

$$a_{ii} < 0, a_{ij} \geq 0, \ i \neq j \quad et \quad \sum_{j=1} a_{ij} < 0$$

garantissent que toutes les valeurs propres de A doivent avoir des parties réelles négatives (toutes les valeurs propres de A doit être dans l'union des disques $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}$. D'où l'équation imperturbable $x^{'} = Ax$ a comme seule solution périodique celle triviale qui à son tour implique l'existence d'une solution périodique unique de (3.14) pour chaque ϕ.

Cependant, pour pouvoir appliquer la théorie de Floquet lorsque $A(t)$ n'est pas une matrice constante $n \times n$ on doit calculer la solution matricielle fondamentale $X(t)$ de $x^{'} = A(t)x$ et vérifiez si $X(T)$ a 1 comme valeur propre ou non. Ou bien, vérifiez si $A(t)$ est une matrice asymptotiquement stable (ici on considère $A(t)$ à définir sur $(-\infty, +\infty)$ ayant la période T), Car si $A(t)$ est une matrice asymptotiquement stable, alors le système non perturbé a pour seule solution périodique la solution triviale. Aussi il est vrai que toutes les valeurs propres de $A(t)$ ont des parties réelles négatives et puisque $A(t)$ est périodique, les parties réelles des valeurs propres ont pour borne supérieur à zéro. C'est bien connu que cela ne suffit pas pour garantir que $A(t)$ soit une matrice stable et par conséquent et donc l'unicité d'une solution périodique de $x' = A(t)x$ peut, en général, ne pas être déduite. Si d'autre part, la matrice $M(t) = \frac{1}{2}(A^T(t) + A(t))$ a toutes ses valeurs propres à parties réelles négatives, alors la solution triviale de $x^{'} = A(t)x$ est asymptotiquement stable (la fonction $v = |X|^2$ sert comme fonction de Lyapunov) et donc dans ce cas, on peut en déduire l'existence et l'unicité d'une solution périodique de 3.14 pour chaque ϕ, en d'autres termes.

Si $A(t)$ est telle que pour tout ϕ, le système 3.14 a une solution périodique unique $x(t, \phi)$ avec $|x(t, \phi)| \leq k|\phi(t)|$, où k est une constante dépendant de $A(t)$ seulement, puis l'existence d'une solution périodique du système linéaire (3.13) peut être facilement établie au moyen du théorème du point fixe de Schauder 1.1.4 (pourvu qu'il satisfasse une certaine condition de croissance par rapport à x).

3.3.4 Équations non linéaires sans retard

Dans cette sous-section, nous étudions l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle non linéaire suivante sans retard dans un espace général Banach $\mathbb{X} =$

$(\mathbb{X}, \|.\|)$

$$u^{'}(t) + A(t)u(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \tag{3.15}$$

À cette fin, nous faisons les suppositions suivantes

Supposition 3.3.1 *Pour un constant $T > 0$, $A(t+T) = A(t)$, $t \geq 0$. La fonction f est continue dans toutes les variables, T-périodique dans la première variable t et lipschitzien dans les autres variables uniformément en t.*

Remarque 3.3.2 *Nous avons utilisé "variable(s)" dans la supposition 3.3.1 parce que cela peut être utilisé pour d'autres cas où la fonction f est de plus de deux variables.*

Supposition 3.3.2 *Pour $t \in [0, T]$*

1. *Le domaine $D(A(t)) = D$ est indépendant de t et est dense en $\mathbb{X}$.*
2. *Pour $t \geq 0$, le résolvant $R(\lambda, A(t)) = (\lambda I - A(t))^{-1}$ existe pour tout λ avec $Re\lambda \leq 0$ et est compact et il existe une constante M indépendante de λ et t telle que*

$$\|R(\lambda, A(t))\| \leq M(|\lambda| + 1)^{-1}, \quad Re\lambda \leq 0.$$

3. *Il existe des constantes L et $0 < a \leq 1$ telle que*

$$\|(A(t) - A(s))A(r)^{-1}\| \leq L|t - s|^a, \quad s, t, r \in [0, T].$$

Théorème 3.3.4 *Soient les suppositions 3.3.1 et 3.3.2 satisfaites et soit $u_0 \in \mathbb{X}$. Alors, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que l'équation (3.15) a une solution mild unique (également appelée solution ici) $u : [0, \alpha] \to \mathbb{X}$ satisfaisant*

$$u(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, h)f(h, u(h))dh, \quad t \in [0, \alpha]. \tag{3.16}$$

Preuve 3.3.2 *Nous avons seulement besoin de mettre en place le cadre pour l'utilisation du principe de l'application de contraction avec $u_0 \in \mathbb{X}$ étant fixé et avec $\alpha > 0$ encore à déterminer nous définissons une application (opérateur) Q sur $C([0, \alpha], \mathbb{X})$ telle que*

$$(Qu)(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, h)f(h, u(h))dh, \quad t \in [0, \alpha].$$

En utilisant la propriété du système d'évolution U*, nous avons* $Q : C([0,\alpha],\mathbb{X}) \to C([0,\alpha],\mathbb{X})$*.*
Suivant pour $u, v \in C([0,\alpha],\mathbb{X})$ *on a*

$$(Qu)(t) - (Qv)(t) = \int_0^t U(t,h)[f(h,u(h)) - f(h,v(h))]dh.$$

Maintenant, f *est lipschitzien dans la deuxième variable et* $U(t,h)$ *est un opérateur borné, il est alors clair que nous pouvons obtenir le résultat en utilisant le principe de l'application de contraction.*

Notez que nous nous occupons de solutions périodiques ici, donc nous supposons que des solutions existent sur $[0,\infty)$*. Nous allons écrire* $u = u(\cdot, u_0)$ *pour la solution unique avec la valeur initiale* u_0*.*
Ensuite, nous donnons des résultats basiques concernant la recherche de solutions périodiques.

Lemme 3.3.1 *Soient les suppositions 3.3.1 et 3.3.2 satisfaites.*

(a) *Si* $u(t)$ *est une solution de l'équation (3.15) alors,* $u(t+T)$ *est aussi une solution .*

(b) *Soit* $u(t,u_0)$ *une solution de l'équation (3.15) avec* $u(0,u_0) = u_0$*. Alors,* $u(t,u_0)$ *est* T*-périodique si et seulement si* $u(T,u_0) = u_0$*.*

Preuve 3.3.3 **(a)** *Soit* $y(t) = u(t+T)$*. Maintenant, pour* $t \geq 0$ *on peut utiliser les formules connues [1]* $U(t,s) = U(t,r)U(r,s),\ \ 0 \leq s \leq r \leq t \leq T$ *et* $U(t+T, s+T) =$

$U(t,s)$ (Puisque l'opérateur $A(t)$ est T-périodique en t) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
y(t) &= u(t+T) = U(t+T,0)u_0 + \int_0^{t+T} U(t+T,h)f(h,u(h))dh \\
&= U(t+T,T)U(T,0)u_0 + \int_0^{T} U(t+T,h)f(h,u(h))dh + \int_T^{t+T} U(t+T,h)f(h,u(h))dh \\
&= U(t,0)U(T,0)u_0 + \int_0^{T} U(t+T,T)U(T,h)f(h,u(h))dh \\
&+ \int_0^{t} U(t+T,T+s)f(T+s,u(T+s))ds \\
&= U(t,0)U(T,0)u_0 + \int_0^{T} U(t,0)U(T,h)f(h,u(h))dh + \int_0^{t} U(t,s)f(s,y(s))ds \\
&= U(t,0)[U(T,0)u_0 + \int_0^{T} U(T,h)f(h,u(h))dh] + \int_0^{t} U(t,s)f(s,y(s))ds \\
&= U(t,0)u(T) \int_0^{t} U(t,s)f(s,y(s))ds \\
&= U(t,0)y(0) \int_0^{t} U(t,s)f(s,y(s))ds.
\end{aligned}$$

L'égalité implique que $y(t) = u(t+T)$ est aussi une solution d'équation 3.15.

(b) *Si $u(t,u_0)$ est une solution T-périodique de l'équation 3.15, alors $u(T,u_0) = u(0,u_0) = u_0$. D'autre part, si $u(T,u_0)$ alors, de (a), $y(t) = u(t+T,u_0)$ est aussi une solution d'équation 3.15 avec $y(0) = u_0$. Par unicité, $y(t) = u(t,u_0)$, ou $u(t+T,u_0)$, $\quad t \geq 0$, ainsi $u(t,u_0)$ est T-périodique.*

En conséquence, nous pouvons définir une application $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ (appelée une application Poincaré ou un opérateur Poincaré) de sorte que pour chaque $u_0 \in \mathbb{X}$ et pour la solution unique correspondante $u(t) = u(t,u_0)$ avec $u(0,u_0) = u_0$ défini

$$P(u_0) = u(T) = U(T,0)u_0 + \int_0^{T} U(T,r)f(r,u(r,u_0))dr. \tag{3.17}$$

Lemme 3.3.2 *L'équation 3.15 a une solution T-périodique si et seulement si l'application Poincaré $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ définie en 3.17 a un point fixe.*

Théorème 3.3.5 *(Théorème du point fixe de Horn) Soit $E_0 \subset E_1 \subset E_2$ un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach $\mathbb{X}$, avec E_0 et E_2 des sous-ensembles compacts et E_1 ouvert par rapport à E_2. Soit $P : E_2 \to \mathbb{X}$ un opérateur continu tel que pour un entier m, on a*

$$P^j(E_1) \subset E_2, \quad 1 \leq j \leq m-1, \tag{3.18}$$

$$P^j(E_1) \subset E_0, \quad m \leq j \leq 2m-1, \tag{3.19}$$

Alors P a un point fixe.

Définition 3.3.1 *[10] On dit que les solutions de l'équation 3.15 sont bornés si pour chaque $B_1 > 0$, il y'a $B_2 = B_2(B_1) > 0$ tel que $\{\|u_0\| \leq B_1,\ t \geq 0\}$ implique $\|u(t, u_0)\| < B_2$.*

Définition 3.3.2 *[10] On dit que les solutions de l'équation 3.15 sont ultime bornés s'il existe une liaison $B > 0$ telle que pour chaque $B_3 > 0$, il y' a un $K = K(B, B_3) > 0$ tel que $\{\|u_0\| \leq B_3,\ t \geq K\}$ implique $\|u(t, u_0)\| < B$.*

Définition 3.3.3 *Un opérateur $S : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est considéré comme un opérateur compact sur $\mathbb{X}$ si S est continu et applications un ensemble borné dans un ensemble précompact.*

Pour le rapport entre borné et ultime borné, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.3.6 *Supposons que $f(t, u)$ est continu et est lipschitzienne relativement à u. Si les solutions de l'équation 3.15 sont finalement bornés alors, elles sont aussi bornés.*

Lemme 3.3.3 *[3]*

(i) *Supposons que* $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$ *alors pour* $\beta - \alpha < \gamma < 1$*, il y a une constante* $C(\alpha, \beta, \gamma)$ *telle que*

$$\|U(t,h)\|_{\alpha,\beta} \leq C(\alpha,\beta,\gamma)(t-h)^{-\gamma}, \quad 0 \leq h < t \leq T.$$

(ii) *Pour* $0 \leq \gamma < 1$ *il y a une constante* $C(\gamma)$ *telle que pour* $g \in C([0,L],\mathbb{X})$ *(*L *est une constante) on a pour* $0 \leq s,t \leq L$

$$\| \int_0^t U(t,h)g(h)dh - \int_0^s U(s,h)g(h)dh\| \leq C(\gamma)|t-s|^\gamma \max_{0\leq h\leq L} \|g(h)\|.$$

(iii) *Soit* $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ *alors*

$$K(x,g)(t) \equiv U(t,0)x + \int_0^t U(t,h)g(h)dh, \quad 0 \leq t \leq T.$$

définit un opérateur linéaire continu de $\mathbb{X}_\beta \times C([0,T],\mathbb{X})$ *en* $C^\gamma([0,T],\mathbb{X}_\alpha)$ *pour chaque* $\gamma \in [0, \beta-\alpha)$.

Maintenant, nous prouvons que l'application de Poincaré $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ définie en (3.17) est compact.

Théorème 3.3.7 *Soient les suppositions 3.3.1 et 3.3.2 sont satisfaites et supposons que les solutions de l'équation (3.15) sont bornés alors l'application Poincaré* $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *définie dans 3.17 est un opérateur compact.*

Maintenant, nous sommes prêts à déclarer et à prouver l'existence de solutions périodiques pour l'équation (3.15) sans retard.

Théorème 3.3.8 *Soient les suppositions 3.3.1 et 3.3.2 sont satisfaites. Si les solutions de l'équation (3.15) sont ultime bornés, l'équation (3.15) a une solution T-périodique.*

3.4 Semi groupes d'évolution et solution presque périodique

3.4.1 Introduction

Les résultats de la section précédente peuvent être étendus à des solutions presque périodiques d'équations non linéaires. La première question à laquelle nous sommes confrontés consiste à associer à un semi-groupe d'équations d'évolution non linéaires donné dans des espaces de fonctions appropriées. Le prochain est de trouver des points fixes communs de ces semi-groups dans les espaces de fonctions choisis. Il s'avère qu'en utilisant des semi-groupes d'évolution, nous ne pouvons que donner des preuves simples de certains résultats dans des cas de dimensions finies, mais aussi les étendre facilement dans le cas de la dimension infinie.

3.4.2 Semi-groupes d'évolution

Dans cette sous-section, nous nous intéressons principalement à l'existence des solutions presque périodiques d'équations d'évolution de la forme

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x, x_t) \tag{3.20}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et f est un opérateur continu de $\mathbb{R} \times \mathbb{X} \times C$ dans $\mathbb{X}$. Notez que la méthode utilisée dans cette sous-section s'applique à des équations non autonomes avec des coefficients presque périodiques, non restreints aux équations périodiques ou autonomes comme dans la section précédente.
Tout au long de cette section, on désignera par $C = BUC((-\infty, 0], \mathbb{X})$ l'espace de toutes les fonctions uniformément continues et bornées de $(-\infty, 0]$ dans $\mathbb{X}$ et par x_t l'application $x(t+\theta) = x_t(\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$, où $x(\cdot)$ est défini sur $(-\infty, a]$ pour certains $a > 0$.
dans cette sous-section, nous traiterons des équations d'évolution de la forme

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \quad x \in \mathbb{X} \tag{3.21}$$

où $\mathbb{X}$ est un espace de banach 3.2.1, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires $(S(t))_{t\geq 0}$ de type ω, i.e.

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega t}\|x - y\|, \quad \forall t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{X},$$

et f est un opérateur continu de $\mathbb{R} \times \mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$. Rappelons que par mild solution $x(t)$, $t \in [s, \tau]$ de l'équation 3.21 on entend une solution continue de l'équation intégrale c.à.d

$$x(t) = S(t-s)x + \int_s^t S(t-\xi)f(\xi, x(\xi))d\xi, \quad \forall s \leq t \leq \tau. \tag{3.22}$$

Définition 3.4.1 . *L'équation 3.21 correspond à la condition (H1) si*

1. *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire $(S(t))_{t\geq 0}$ de type ω en $\mathbb{X}$,*
2. *f est un opérateur continu de $\mathbb{R} \times \mathbb{X}$ à $\mathbb{X}$,*
3. *Il existe une constante γ telle que pour chaque $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'opérateur $(-f(t,\cdot) + \gamma I)$ est accrétif en $\mathbb{X}$*

La condition suivante sera utilisée fréquemment :

Définition 3.4.2 *(condition (H2)). On dit que l'équation 3.21 satisfait à la condition (H2) si : Pour tout $u \in PP(\mathbb{X})$ ($PP(\mathbb{X})$ est un espace des toutes les fonctions presque périodiques), la fonction $f(\cdot, u(\cdot))$ appartient à $PP(\mathbb{X})$ et l'opérateur f_* prenant u en $f(\cdot, u(\cdot))$ est continu.*

Le point principal de notre étude est associé à l'équation (3.21) d'un semi-groupe d'évolution qui joue un rôle similaire à celui de l'opérateur de la monodromie pour les équations aux coefficients périodiques. Par la suite, nous désignerons par $U(t,s)$, $t \geq s$, l'opérateur d'évolution correspondant à l'équation 3.21 qui satisfait aux hypothèses du théorème 3.4.2, c'est-à-dire, $U(t,s)x$ est la solution unique de l'équation 3.22.

Proposition 3.4.1 *Considérons les conditions (H1) et (H2) satisfaites. Alors à l'équation 3.21, on peut associer un semi-groupe d'évolution $(T^h)_{h\geq 0}$ agissant sur $PP(\mathbb{X})$, défini comme suit*

$$[T^h v](t) = U(t, t-h)v(t-h), \quad \forall h \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in PP(\mathbb{X}).$$

Ce semi-groupe possède les propriétés suivantes

1. *$T^h, h \geq 0$ est fortement continu et*

$$T^h u = S^h u + \int_0^h S^{h-\xi} f_*(T^\xi u) d\xi, \quad \forall h \geq 0, \quad u \in PP(\mathbb{X})$$

où $(S^h u)(t) = S(h)u(t-h), \quad \forall h \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in PP(\mathbb{X})$.

2. $$\|T^h u - T^h v\| \leq e^{(\omega+\gamma)h} \|u - v\|, \quad \forall h \geq 0, \quad u, v \in PP(\mathbb{X})$$

3.4.3 Solution presque périodiques

Solution presque périodique d'une équation différentielle sans retard

L'idée principale qui sous-tend notre approche est l'assertion suivante.

Corollaire 3.4.1 *Considérons que toutes les hypothèses de la Proposition 3.4.1 soient satisfaites, alors une mild solution $x(t)$ de l'équation 3.20, définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$, est presque périodique si et seulement s'il existe un point fixe du semi-groupe d'évolution $(T^h)_{h\geq 0}$ défini dans la Proposition 3.4.1.*

Corollaire 3.4.2 *Supposons la condition de la Proposition 3.4.1 satisfaite, en outre, considérons $\omega + \mu$ négatif et $-f_* - \mu I$ est accrétif, alors, il existe une mild solution unique presque périodique de l'équation 3.21.*

Remarques 3.4.1
1. *Un cas particulier dans lequel nous pouvons vérifier l'accrétion de $-f_* - \mu I$ est $\omega + \gamma < 0$. En fait, cela résulte facilement des estimations ci-dessus pour $\|u - v\|$.*
2. *Il est intéressant de "calculer" le générateur infinitésimal du semi-groupe d'évolution $(T^h)_{h\geq 0}$ déterminé par la Proposition 3.4.1. A cet effet, rappelons l'opérateur L qui relie une mild solution u de l'équation $\dot{x} = \Lambda x \mid f(t)$ au terme de forçage f par la règle $Lu = f$.*
3. *On peut voir que u est une mild solution de l'équation 3.21 si et seulement si $(-L + f_*)u = 0$, c'est donc le point fixe du semi-groupe $(T^h)_{h\geq 0}$.*

Solutions presque périodiques d'équations différentielles avec retard

Dans cette sous-section, nous appliquons les résultats de la sous-section précédente pour étudier l'existence d'une mild solution presque périodique de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x, x_t) \tag{4.15}$$

où A est défini comme dans la sous-section précédente et f est un application continue définie partout de $\mathbb{R} \times \mathbb{X} \times C$ dans $\mathbb{X}$.

Définition 3.4.3 *Une fonction continue $x(t)$ définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ est appelée mild solution de l'équation 3.20 si*

$$x(t) = S(t-s)x(s) + \int_s^t S(t-\xi)f(\xi, x(\xi), x_\xi)d\xi, \quad \forall t \geq s$$

.

Soulignons que notre étude ne concerne que l'existence d'une mild solution presque périodique de l'équation 3.20 et non les mild solutions dans le cas général.

Définition 3.4.4 *(Condition $(H3)$) L'équation 3.20 satisfait la condition $(H3)$ si ce qui suit est vrai :*

1. *Pour chaque $g \in PP(\mathbb{X})$ l'application $F(t, x) = f(t, x, g_t)$ satisfait les conditions H1 et H2 avec la même constante γ.*
2. *Il existe une constante μ avec $\omega - \mu < 0$ telle que $-(\mu I + F_*)$ est accrétive pour chaque $g \in PP(\mathbb{X})$.*
3. $[x-y, f(t,x,\phi) - f(t,y,\phi')] \leq \gamma\|x-y\| + \delta\|\phi - \phi'\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{X}, \quad \phi, \phi' \in C.$

Théorème 3.4.1 *Considérons la condition $(H3)$ satisfaite. Alors pour δ suffisamment petit, l'équation 3.20 a une mild solution presque périodique.*

Théorème 3.4.2 *Si les conditions $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$ sont satisfaites, alors, pour chaque $s \in \mathbb{R}$ fixé et $x \in \mathbb{X}$ il existe une unique mild solution $x(\cdot)$ de l'équation*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx, \quad x \in \mathbb{X} \tag{3.23}$$

definie sur $[s, +\infty)$ de plus, la mild solution de l'équation 3.23 donne naissance à un semi-groupe d'operateurs non linéaires $T(t),\ t \geq 0$ on a les propriétés suivantes :

1.
$$T(t)x = S(t)x + \int_0^t S(t-\xi)BT(\xi)xd\xi, \quad \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{X} \tag{3.24}$$

2.
$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq e^{(\omega+\gamma)t}\|x-y\|,\ \forall t \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R} \tag{3.25}$$

Remarques 3.4.2 *1. Dans le cas $\omega = 0$, $\gamma = -\mu$ nous obtenons l'estimation*

$$\delta < e^{\mu} - 1 = \mu + \frac{\mu^2}{2} + ...$$

qui garantit l'existence du point fixe de T.

2. Si $\omega + \gamma < 0$, alors on peut choisir $\mu = -\gamma$ et donc on obtient l'état d'accrétion sur $-(F_* + \mu I)$. Cependant, en général, la condition $\omega + \gamma < 0$ est une restriction très forte sur les coefficients de l'équation 3.20, si f dépend explicitement de t.

Exemples

Dans les applications, on rencontre souvent des fonctions f de $\mathbb{R} \times \mathbb{X} \times C \to \mathbb{X}$ de la forme
$$f(t, x, g_t) = F(t, x) + G(t, g_t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{X}, \quad g_t \in C,$$
où F satisfait la condition ii) de la définition 3.4.4 et $G(t, y)$ est lipschitz continue avec $y \in C$, i.e.
$$\|G(t, y) - G(t, z)\| \leq \delta\|y - z\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y, z \in C$$
pour certaines constantes positives δ. Pour décrire un exemple concret, nous considérons un domaine borné Ω dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière lisse $\partial\Omega$ et supposons que

$$A(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha u$$

est un opérateur différentiel fortement elliptique dans Ω. Définissons l'opérateur

$$Au = A(x, D)u, \quad \forall u \in D(A) = W^{2m,2}(\Omega) \cap W_0^{m,2}(\Omega)$$

nous savons que l'opérateur $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique de contraction sur $L^2(\Omega)$. Soient $f, g : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions Lipschitziennes continues et définissons les opérateurs $F(t, w)(x) = f(t, x, w(x))$ et $G(t, w)(x) = g(t, x, w(x))$ où $t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$ et $w \in L^2(\Omega)$. Alors, pour toute constante positive r, le problème à valeur limite

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = A(x, D)u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + g(t, x, u(t - r, x)) \quad \textit{dans } \Omega$$

$$u(t, x) = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega$$

Correspond au paramètre abstrait de l'équation 3.20.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude de l'existence et parfois à l'unicité des solutions pour des équations différentielles non linéaires, plus précisément aux solutions périodiques et presque périodiques. Afin de mieux comprendre les différents aspects de cette étude, on s'est inspiré du livre [5].

En guise de perspectives d'avenir, on souhaite aborder d'autre type d'équations différentielles à titre d'exemple, les équations différentielles fractionnaires à retard fini ou infini ainsi que les équations semi-linéaires d'ordre entier ou fractionnaire.

Bibliographie

[1] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Math, Sci. 44, Spriger-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[2] E. Kamke, Zur, Theorie der Systeme gewohnlicher Differentialgleichungen, *Acta Math., 58 (1932), 57-85.*

[3] H. Amann, Periodic solutions of semi-linear parabolic equations, Nonlinear Analysis, *Academic Press, New York, 1978, 1-29.*

[4] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, 1923.

[5] J. H. Liu, G. M. N'Guérékata, N. V. Minh, *Topics on stability and periodicity in abstract differential equations*, (2008).

[6] J. Knezevic-Miljanovic, On problem and solution of Emden Fowler type of equation, Differential equations, Vol. 45, No. 1 (2009), 1610-1612.

[7] J. Knezevic-Miljanovic, Estimate of the first eigenvalue in the manypointwise finite problem, *Differential equations,Vol. 39, No. 12 (2003), 1708-1711.*

[8] J. P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, (1991)

[9] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, (1964).

[10] T. Burton, *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*, Academic Press, Orlando, Florida, (1985).

[11] T. Zohra, Equations Différentielles Semi Linéaires d'Ordre Fractionnaire à Domaine Dense, Univ Saida, (2011).

[12] ISA BTP, Équations différentielles, (novembre 2011).

[13] W. Hahn, Stability of Motion, Springer-Verlag, New York (1967).

[14] Y. Carrière, Le Théorème du point fixe de BROUWER, Dunias Vincent, 2002-2003