République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Transformé de Laplace et Applications aux Equations Différentielles Fractionnaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse et géométrie et application

par

Bekaddour **K**adda[1]

Sous la direction de

Mlle **H. A**bbas

Soutenue le 22 Mai 2017 devant le jury composé de

H.M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail :kazino035@gmail.com

Dédicace

Je dédie ce mémoire á :

ma mère et á mon père.

toutes mes frères et mes sœurs.

ma grande famille et mes amies.

tous mes collégues de la promotion "$2016 - 2017$".

tous ceux qui sont proches á mon cœur.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur ***M****lle* ***Abbas Hafida*** *pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé tout le long de mon travail, ses critiques et les conseils m'ont été précieux.*

Je voudrais également remercier les membres du jury d'avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que le personnel administratif et les enseignants du département de mathématiques de l'université Dr. Tahar Moulay - Saïda et tous mes compagnons de promotion.

Et enfin j'adresse mes sincères remerciments à mes parents, mes frères et mes soeurs, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction

La dérivation et intégration d'ordre non entier, le calcul fractionnaire qui est un vieux concept datant de l'époque de Cauchy. c'est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entiéres de α. Si α est négatif, il s'agit d'une intégration non entiére et si α est positif, on parle d'une dérivation non entiére.

L'idée pour la généralisation de la dérivée vers un ordre arbitraire est découverte dans le courier échangé entre L'Hopital et Leibnitz. Le 30 septembre 1695. L'hopital récrit à Leibniz afin de l'interroger au sujet d'une notation particuliére qu'il avait employée dans ses publications pour la niéme-dérivée d'une fonction $f(x)$. L'hopital pose alors la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $\frac{1}{2}$?. Depuis cet échange de courrier, d'autres chercheurs de renommée se sont penchés sur ce sujet comme Leibnitz et L'Hospital(1965), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), et le Ross (1975).
Plusieurs activités scientifiques comme l'organisation colloques internationaux, la parution de plusieurs ouvrages et d'une revue "Journal of fractional calculs" entièrement consacrée au sujet, témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier.
Différentes définitions de la dérivation non entiére ont été établies. Ces définitions, meme ne menant pas toujours à des résultats identiques sont équivalentes pour un large panel des fonctions. Toutefois, la définition de la dérivation non entiére peut s'établir selon les trois approches. La premiére est l'approche par limite qui est l'approche classique de Grunwald-Letnikov et qui consiste à généraliser la notion entière. La deuxiéme est l'approche de Riemann-Liouville et caputo qui, à partir des primitives, associée á la dérivation non entiére à l'intégration fractionnaire . La troisième approche est spéctrale utilisant la transformée de Laplace.
Ces derniéres années, il ya eu un développement considérable concernant l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaires.
Le travail présenté dans ce memoire s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques opérateurs de dérivations fractionnaires.
Ce mémoire se décompose de quatre chapitres partagér de la manière suivante :
Premier châpitre : Dans ce châpitre, nous rappelons la transformée de Laplace

Deuxiéme châpitre : Ce chapitre est consacré aux notions et définitions des fonctions spécifiques utiles tout au long de ce mémoire ainsi que les intégrations fractionnaires et leurs propriétés.
Troisieme châpitre :Dans ce châpitre, nous examinerons sur le dérivation fractionnaires et quelques approches de dérivations fractionnaires, avec des propriétés.
Dans le dernier châpitre, on utilise la transformation de Laplace associé á la dérivation fractionnaire et l'intégrale fractionnaire pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire.
une bibliographie est apportée à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

La trasformè de Laplace

1.1 Introduction

Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre certaines équations differentielles est d'utilisé á la transformation de Laplace.
Une analogie est donnée par les logarithmes, qui transforment les produits en sommes, et donc simplifient les calculs.
La transformation de Laplace transforme des fonctions $f(t)$ en d'autres fonctions $F(s)$, on écrit

$$F = \mathfrak{L}\{f\}$$

ou

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f\}(s)$$

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps en domaine de fréquence. Le problème ainsi obtenu sera plus simple à résoudre et la récupération de la solution du problème de départ se fera à l'aide de la transformée de Laplac inverse
La transformation de Laplace inverse transforme $F(s)$ en $f(t)$, on écrit

$$f = \mathfrak{L}^{-1}\{F\}$$

ou

$$f(s) = \mathfrak{L}^{-1}\{F\}(s)$$

On verra plus loin sur quelles fonctions ces transformations sont définies.
La propriété essentielle est que, sous certaines conditions

$$\mathfrak{L}\{f`\}(s) = s.F(s)$$

Ainsi, les équations différentielles deviennent des équations algébriques.

1.2 la transformé de Laplace

Définition 1.2.1. *La transformée de Laplace d'une fonction f réelle et continue est donnée par l'expression suivante :*

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ou le symbole $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ veut dire la transformée de Laplace de $f(t)$ On utilise aussi l'expression $F(s)$ pour décrire la transformée de Laplace :

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$

La transformée de Laplace peut être étudiée sous deux angles différents :

1. **La transformée fonctionelle** : Il s'agit de la transformée de Laplace d'une fonction spécifique, comme $\sin(wt), t, e^{-at}$etc.
2. **La transformée opérationnelle** : Ici, on s'intéresse à la transformée de Laplace de la dérivée, de la primitive... de $f(t)$.

1.2.1 L'existence de la transformée de Laplace

Définition 1.2.2. *On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ si pour tout $0 < \alpha < \beta$, l'intervalle $[\alpha, \beta]$ peut etre decoupe en un nombre fini d'intervalles (fermes) sur lesquels f est continue.*

Définition 1.2.3. *On dit que la fonction f est d'ordre exponentielle, s'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha}t$$

Théorème 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue*

1. *Il existe un unique $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que :*

   a - $\mathcal{R}e(s) > a \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}dt$ *converge simplement .*

   b - $\mathcal{R}e(s) < a \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}dt$ *diverge.*

   a est appelé abscisse de la convergence simple.

2. *Il existe un unique $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que :*

   a - $\mathcal{R}e(s) > b \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}dt$ *converge absolument .*

   b - $\mathcal{R}e(s) < b \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}dt$ *ne converge pas absolument .*

   a est appelé abscisse de la convergence absolue.

Sous ces conditions, il est simple (par une majoration) de vérifier que $\int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$ converge pour tout s vérifiant $\mathcal{R}e(s) > \alpha$ ce qui prouve l'existence de la transformée de Laplace de f. S'agissant d'une majoration, il est important de déterminer (le meilleur) $s \in \mathbb{C}$ pour que la transformée de Laplace soit convergente. On admet les théorèmes suivants :

Théorème 1.2.2. *soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Si les conditions suivantes sont réunies :*
- *f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$*
- *f est exponentielle d'ordre γ*
- *pour tout $t_0 > 0$, $\int_t^{t_0} |f(t)|dt$ existe (soit $\int_t^{t_0} |f(t)|dt < +\infty$) alors :*

$$F(p) = L[f(t)](p) \quad \textit{existe pour} \quad p > \gamma$$

Le domaine de définition de $F(p)$ contient donc l'intervalle $]\gamma, +\infty[$.

preuve :
On doit vérifier que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^x e^{-pt} f(t)dt \quad \textit{existe}$$

Une condition suffisante est que :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^x e^{-pt}|f(t)|dt < +\infty$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-pt}|f(t)|dt &= \int_0^{t_0} e^{-pt}|f(t)|dt + \int_{t_0}^x e^{-pt}|f(t)|dt \\ &\leq \int_0^{t_0} |f(t)|dt + \int_{t_0}^x ae^{\gamma t}e^{-pt}dt \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir la preuve car on a supposé que $\int_0^{t_0} |f(t)|dt$ existe et on a :

$$\int_{t_0}^x ae^{\gamma t}e^{-pt}dt = \frac{a}{\gamma - p}[e^{(\gamma-p)t}]_{t_0}^x$$

et bien sûr $\lim_{x\to+\infty} e^{(\gamma-p)x} = 0$

1.3 Exemples sur la transformeé de Laplace

1.3.1 La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac

Le dirac, s'il n'est pas physiquement réalisable (valeur infinie pendant un temps infiniment court) est utilisé pour décrire la réponse des systèmes dynamiques à des sollicitations très brèves. On peut approcher la fonction dirac par une fonction porte d'amplitude $T = 1$ sur un intervalle T. On considère donc la fonction :

$$d_0(t) = \begin{cases} 1/t & t \in]0, T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $d_0(t)$ est donnée par :

$$\mathfrak{L}\{d_0(t)\} = \int_0^\infty d_0(t) e^{-st} dt = \int_0^T \frac{e^{-pt}}{T} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{T}\right]_0^T = \frac{e^{-pt} - 1}{-pT}$$

Écrivons le développement en série de ce résultat :

$$\mathfrak{L}\{d_0(t)\} = \frac{e^{-pt} - 1}{-pT} = \frac{-1 + \sum_{k>0} \frac{(-pT)^k}{k!}}{-pT} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{(pT)}{2} + \frac{p^2 T^2}{6} - \cdots$$

La limite de cette somme lorsque $T \longrightarrow 0$ donne la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac :

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \lim_{T \to 0} \sum_{k \geq 1} \frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1$$

1.3.2 La transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $\Gamma(t)$ est définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si t<0} \\ 1 & \text{si t>0} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\mathfrak{L}(\Gamma(t)) = \int_0^\infty \Gamma(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \longrightarrow \infty$ de e^{-pt} est nulle. On a donc finalement :

$$\mathfrak{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$$

1.4 Les propriétés de la transformée de Laplace

1. **Les transformées fonctionnelles** : Une transformée fonctionnelle est tout simplement la transformée de Laplace d'une fonction spécifique de t. Dans ce qui suit, on considère que les fonctions sont nulles pour $t < 0^-$.

(a) **La transformée de Laplace de la fonction sinus** :
La fonction sinus peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(wt) = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}$$

Donc la transformée de Laplace du sinus se calcule comme suit :

$$\mathfrak{L}(\sin(wt)) = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{iwt-pt} - e^{-iwt-pt}dt = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{iwt-pt}}{iw-p} + \frac{e^{-iwt-pt}}{iw+p}\right]_0^{\infty}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \longrightarrow \infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\mathfrak{L}(\sin(wt)) = -\frac{1}{2i}(\frac{1}{iw-p} + \frac{1}{iw+p}) = \frac{w}{w^2+p^2}$$

(b) **La transformée de Laplace de la fonction cosinus** :
La fonction cosinus peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes

$$\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2i}$$

Donc la transformée de Laplace du sinus se calcule comme suit :

$$\mathfrak{L}(\sin(wt)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{iwt-pt} + e^{-iwt-pt}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{iwt-pt}}{iw-p} - \frac{e^{-iwt-pt}}{iw+p}\right]_0^{\infty}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \longrightarrow \infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\mathfrak{L}(\cos(wt)) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{iw-p} + \frac{1}{iw+p}) = \frac{p}{w^2+p^2}$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction sinus donne :

$$\frac{d\sin(wt)}{dt} = w\cos(wt)$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il vient :

$$\mathfrak{L}(\cos(wt)) = \frac{1}{w}(p\mathfrak{L}(\sin(wt)) - \sin(0)) = \frac{p}{w}\frac{w}{p^2+w^2} = \frac{p}{p^2+w^2}$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

(c) **La transformée de Laplace de l'exponentielle** :
La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{-at}$ se calcule directement par :

$$\mathfrak{L}(e^{-at}) = \int_0^{\infty} e^{-at-pt}dt = \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

2. **La transformées Opérationnelles** :

(a) **Linéarité** :
La transformation de Laplace est linéaire :

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

et

$$\mathcal{L}(kf) = k\mathcal{L}(f) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Preuve. La linéarité de la transformation de Laplace est une conséquence directe des propriétés de l'integrale.

Exemple 1.4.1. *Calculons la transformée de Laplace de la fonction f définie par :*

$$F(p) = 3\mathcal{L}[tu(t)] + 4\mathcal{L}[u(t)] = \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p}$$

(b) **Addition (Soustraction)** :
L'addition (soustraction) dans le domaine du temps correspond àune addition(soustraction) dans le domaine de Laplace. Donc, si

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s)$$

alors :

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s)$$

(c) **La transformée de Laplace de la translation** :
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$. On considére la fonction f_α définie par $f_\alpha(t) = f(t-\alpha), (\alpha > 0)$.

Proposition 1.4.1.

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = e^{-\alpha s}\mathcal{L}(f)(s)$$

(d) **La transformé de Laplace de l'homothétie**
Soit $K > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $\mathfrak{L}(f)(s)$. Soit f_k la fonction définie par :$f_k(t) = f(kt)$

Proposition 1.4.2.

$$\mathfrak{L}(f_k)(s) = \frac{1}{k}\mathfrak{L}(f)(\frac{p}{k})$$

Preuve.

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \int_0^\infty f_k(t)e^{-ts}dt = \int_0^\infty f(kt)e^{-ts}dt$$

On fait le changement de variable : $y = kt$, donc $dt = \frac{dy}{k}$.

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(y)e^{-y(\frac{s}{k})}dy = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{k}\right)$$

(e) **L'effet de la multiplication par e^{-at}** :
Théorème 1.4.1. *La transformation de Laplace de la fonction définie par $f(t)e^{-at}u(t)$ est :*

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}u(t)] = F(s+a)$$

Preuve.

$$\mathfrak{L}[f(t)e^{-at}u(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}u(t)dt = F(s+a)$$

Exemple 1.4.2.

$$f(t) = sint\, e^{-t}u(t)$$

On pose :

$$g(t) = sint\, u(t)$$

de sorte que :

$$f(t) = g(t)e^{-t}$$

comme

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

alors

$$F(s) = G(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

.

(f) **La transformée de Laplace de la dérivée** :
On s'intéresse à la transformeé de Laplace de la dériveé et à la dérivée de la transformée d'une fonction.

Théorème 1.4.2. *Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de type exponentielle à l'infini dont la dérivée est continue. Alors $\mathcal{L}(f')$ existe et elle est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$$

Preuve.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

On obtient cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{+\infty} \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-st}dt$$

Une intégration par partie est utilisée. Soit $u = e^{-st}$ et $dv = \left[\frac{df(t)}{dt}\right] dt$ on obtient :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st}f(t)|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

Le premier terme donne $f(0^-)$, puisque e^{-st} donne 1 pour l'évaluation à 0^- et 0 à l'infini.
Le côté droit de la dernière équation devient donc :

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)(e^{-st})dt = sF(s) - f(0^-)$$

Le résultat vas être généraliser au cas on'a des points de discontinuité

Corollaire 1.4.1. *Si f est de type exponentielle et admet des dérivées d'ordre k $(k \leq n)$ avec f^n continue. Alors :*

$$\mathfrak{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n\mathfrak{L}(f(t))(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots.. - f^{(n-1)}(0)$$

Preuve. On utilise une récurence sur n.
Cette formule vas nous être utile pour transformer les équations différentielles en équations algébriques simple à résoudre.

(g) **theorême de le valeur initiale et valeur finale** :
Théorème 1.4.3. *Soit :*$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

i. *Si* $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = l$ *Alors* $\lim\limits_{s\to +\infty} sF(s) = l$

ii. *Si* $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = l$ *Alors* $\lim\limits_{s\to 0^+} sF(s) = l$

Preuve. D'aprés le théorème de dérivée on'a :
$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0^+)$
(a)-
on'a
$\mid \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mid = \mid \int_0^\infty e^{-st} f'(t)d(t) \mid \leq \int_0^\infty e^{-st} \mid f'(t) \mid dt$
or il existe un M telque :$\mid f'(t) \mid \leq e^{Mt}$,
donc :

$$\mid \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mid \leq e^{(M-s)t}dt = -\frac{1}{M-s} \underset{s\to\infty}{\rightarrow} 0$$

d'ou

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)$$

(b)-

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{s\to 0^+} \lim_{T\to +\infty} \int_0^T e^{-sT} f'(t)dt$$

ou

$$\int_0^T e^{-sT} f'(t)dt = e^{-sT} f(t) \int_0^T dt + s \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\underset{s\to 0^+}{f}(T) - f(0^+)$$

d'ou

$$\lim_{s\to 0^+} sF(s) = \lim_{T\to +\infty} f(T)$$

(h) <u>**La dérivée d'une transformation de Laplace**</u> :

Théorème 1.4.4. *Si f est continue par morceaux par $[0,\infty)$ et de type exponentielle d'ordre C. Alors :*

$$\mathfrak{L}(-tf(t))(s) = F'(s)$$

Preuve. On'a : pour tout $s > c$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)dt \\ &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt \\ &= \mathfrak{L}(-tf(t))(s) \end{aligned}$$

On peut obtenir par induction le resultat :
Théorème 1.4.5. *Sous les mêmes conditions du théoreme précedent , on a :*

$$\mathfrak{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad s > c$$

Exemple 1.4.3. *Soit à calculer* $\mathfrak{L}(t\, coswt)(s)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(t\, coswt)(s) &= -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}(coswt)(s)\\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+w^2}\right)\\ &= \frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}\end{aligned}$$

(i) **La transformé d'une intégrale** :
Théorème 1.4.6. *Si* $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)U(t)]$ *et si* $\Phi(t) = \int_0^t f(u)U(u)du$ *alors :*

$$\mathfrak{L}[\Phi(t)] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (s \neq 0)$$

Preuve. Si Ψ est une primitive de f alors :

$$\Phi(t) = \Psi(t) - \Psi(0)$$

donc :

$$\Phi'(t) = \Psi'(t) = f(t)$$

On en deduit :

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)U(t)] = s\mathfrak{L}[\Phi'(t)U(t)] = s\mathfrak{L}[\Phi(t) - \Phi(0^+)] = s\mathfrak{L}[\Phi(t)]$$

Donc :

$$\mathfrak{L}[\Phi(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

Exemple 1.4.4. *Retrouver la transformée de Laplace* $t^2\, U(t)$ *à partir de la transformée de Laplace de la fonction* $f(t) = t\, U(t)$

$$\Phi(t) = \int_0^t f(u)U(u)du = \int_0^t udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

et

$$\mathfrak{L}[t^2U(t)] = 2 \times \frac{1}{s}(s) = \frac{1}{s^2}$$

(j) **L'integration de la transformée de Laplace** :

Théorème 1.4.7. *Si f est continue par morceaux sur $[0,\infty)$ et de type exponentielle d'ordre C. Si $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe Alors :*

$$\int_s^{\infty} F(u)du = \mathfrak{L}(\frac{f(t)}{t})(s) \qquad s > c$$

Preuve. Soit $F(x) = \int_0^{\infty} -e^{-xt}f(t)dt$

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} F(u)du &= \int_s^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-ut}f(t)\right) dtdu \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_s^{\infty} e^{-ut}f(t)\right) dudt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}\tfrac{f(t)}{t}dt \end{aligned}$$

ce qui donne $\int_s^{\infty} F(u)du = \mathfrak{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s)$ pour tout $\quad s > c$

Exemple 1.4.5.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\frac{sint}{t}\right)(s) &= \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - arctg(s) \\ &= arctg(\frac{1}{s}), \quad s > 0 \end{aligned}$$

(k) **La transformée du produit de convolution** :

Définition 1.4.1. *Soient les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ s'annulant sur le demi plan négatif. On définit le produit de convolution est par :*

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Proposition 1.4.3. *Le produit de convolution est commutatif*

$$f \star g = g \star f$$

Preuve.

En effet :

On utilise le changement de variables : $y = t - x$, on obtien

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_t^0 f(t-y)g(y)(-dy) \\ &= -\int_t^0 f(t-y)g(y)dy \\ &= \int_0^t g(y).f(t-y)dy \\ &= g \star f(t) \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.4. *$f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ s'annulant sur le demi plan négatif ayant des tranformées de Laplace $\mathfrak{L}(f)(s)$, $\mathfrak{L}(g)(s)$ respectivement. Alors :*

$$\mathfrak{L}(f \star g)(s) = \mathfrak{L}(f)(s)\mathfrak{L}(g)(s)$$

Preuve.
Rappelons que $(f \star g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du$
Tenant compte du fait que $f(y) = g(y) = 0$ si $y < 0$,
les calculs donnent :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(f \star g)(s) &= \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t-u)g(u)du\right] e^{-ts}dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t-u)g(u)\right] e^{-ts}dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_u^\infty f(t-u)e^{-ts}dt\right] g(u)du \end{aligned}$$

Dans l'integrale $\int_u^\infty [f(t-u)e^{-ts}dt]g(u)du$, on fait le changement de variable $v = t - u$

$$\int_u^\infty [f(t-u)e^{-ts}dt]g(u)du = \int_0^\infty f(v)e^{-(u+v)s}dv = e^{-us}\mathfrak{L}(f)(s)$$

c'est la transformée de la translation .
Finalement :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f \star g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{ts}\mathfrak{L}(f)(s)g(u)du \\ &= \mathfrak{L}(f)(s)\int_0^{\infty} g(u)e^{-us}du \\ &= \mathfrak{L}(f)(s)\mathfrak{L}(g)(s)\end{aligned}$$

■

Tableau de transformation de Laplace :

Fonction	$f(t)$	$\mathcal{L}\Big(f(t)\Big)$
impulsion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
polynme (général)	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
cosinus	$\cos(wt)u(t)$	$\frac{s}{w^2+s^2}$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(wt)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

FIGURE 1.1 – Tab de transformées de Laplace

1.5 Les applications de la transformée de Laplace

1.5.1 La résolution des équations différentielles

Commençons par une équation différentielle linéaire d'ordre n à coéfficients constants

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(t)$$

On cherche la solution de cette équation pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = y_0, y\prime(0) = y\prime_0, ..., y\prime(n-1) = y\prime_{n-1}$$

On calcule la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + ... + a_{n-1} y' + a_n y) = \mathcal{L}(f(t))$$

ce qui donne, par linéarité de la transformée de Laplace
$a_0 \mathcal{L}(y^n)(s) + a_1 \mathcal{L}(y^{n-1})(s) + ... + a_{n-1}\mathcal{L}(y\prime)(s) + a_n \mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$
Sachant que : $\mathrm{L}(\mathrm{f}^{\kappa}(t))(s) = s^{\kappa}F(s) - \Sigma_{\ell=1}^{\kappa} s^{\ell-1} f^{(\ell-1)}(0^+)$

Exemple 1.5.1. *Résoudre* $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{3t}$,
avec $x(0) = 4, x'(0) = 9.$
on'a

$$\mathcal{L}(x) = X$$

$$\mathcal{L}(x') = sX - x(0)$$

$$\mathcal{L}(x'') = s^2 X - sx(0) - x'(0)$$

L'équation devient :

$$(s^2 - 3s + 2)X = \frac{4}{s-3} + 4s - 3$$

D'où

$$X = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

$$X = \mathcal{L}(e^t + e^{2t} + 2e^{3t})(s)$$

1.5.2 Le système différentiel

Exemple 1.5.2. *Soit le système différentiel à résoudre :*

$$(s)\begin{cases} x' - y' + x - y = 2 + 3e^{2t} \\ x' + 2y' - 3x = -3 + 2e^{2t} \\ x(0)=4\,; \quad y(0)=1 \end{cases}$$

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} sX - 4 - sX + 1 + X - Y = \frac{2}{s} + \frac{3}{s-2} \\ sX - 4 + 2sY - 2 - 3X = \frac{-3}{s} + \frac{2}{s-2} \end{cases}$$

$$D'où :\begin{cases} X = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2} \\ Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \end{cases} \quad et\ donc \begin{cases} x(t) = 1 + e^t + 2e^{2t} \\ y(t) = -1 + e^t + e^{2t} \end{cases}$$

1.6 Les transformées inverses

La résolution des équations différentielles conduit souvent à la résolution des équations algébriques de type fractionaire. L'expression ainsi obtenue, notée $V(s)$ est une fraction rationnelle en s. En général, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}$$

De façon générale, La technique utilisée pour résoudre ce genre d'équation est la décomposition en fraction simple. Il y a trois différentes façon de faire, selon la valeur des racines :

1. **Racines réelles et distinctes.**

   Exemple 1.6.1.
   $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$
   On peut écrire :
   $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}$$
   Pour isoler K_1, on multiplie chaque côté par $(s+1)$. On obtient :
   $$\frac{2}{(s+2)} = k_1 \frac{(s+1)k_2}{(s+2)}$$
   Si on prend $s = -1$,
   $$k_1 = \frac{2}{s+2}|_{s=-1} = 2$$
   Pour trouver K_2, on fait le même processus, sauf qu'on multiplie par $(s+2)$ cette fois.
   $$K_2 = \frac{2}{s+1}|_{s=-2} = -2$$
   Donc
   $$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$
   qui donne la transformée inverse suivante :
   $$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$
   Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

2. **Les racines réelles et répétées**

   Exemple 1.6.2. *Soit*

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

On peut trouver les termes selon

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

La constante K_1 peut être trouvée en utilisant la première méthode montrée plus haut (ce qui donne $K_1 = 2$). Pour trouver K_2, on multiplie par $(s+2)^2$:

$$\frac{2}{s+1} = \frac{K_1}{s+1}(s+2)^2 + K_2 + K_3(s+2) \qquad (*)$$

On évalue à $s = -2$,

$$K_2 = \frac{2}{s+1}|_{s=-2} = -2$$

Pour K_3, on dérive l'équation $(*)$ par rapport à s,

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}K_1 + K_3$$

De même si $s = -2$

$$K_3 = \frac{-2}{(s+1)^2}|_{s=-2} = -2$$

3. **Les racines complexes**

   Ici encore, on démontre à l'aide d'un exemple

   Exemple 1.6.3. *Soit*

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

On peut écrire

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

Le coefficient K_1 est obtenu de la façon habituelle ;$K_1 = 0.6$. Pour K_2 et K_3, on multiplie les deux côtés par le dénominateur, $s(s^2+2s+5)$. On obtient :

$$3 = K_1(s^2+2s+5) + (K_2 s + K_3)s$$

$= (K_1 + K_2)s^2 + (2K_1 + K_3)s + 5K_1$

On a donc trois équations,

$$K_1 + K_2 = 0$$

$$2K_1 + K_3 = 0$$

$$5K_1 = 3$$

d'où on trouve que $K_2 = -0.6$ *et*$K_3 = -1.2$. *La fonction de transfert devient*

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} - 0.6\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

La transformée inverse est

$$f(t) = 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t)$$

$$= 0.6 - 0.67e^{-t}\cos(2t - 26.57°)$$

Pour transformer la solution précédente avec un sinus et cosinus à une solution où il n'y a qu'un cosinus, on se sert de relations trigonométriques. Soit :

$$g(x) = a\cos x + b\sin x$$

On peut factoriser l'équation précédente de la façon suivante :

$$\sqrt{(a^2+b^2)}(\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cos x\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\sin x)$$

Les termes devant les cosinus et sinus forment les équations d'un triangle de coté a et b et d'hypoténuse $\sqrt{(a^2+b^2)}$. *On définit :*

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

et

$$\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

On peut donc réduire l'équation précedente à :

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x)$$

Et à l'aide d'identités trigonométriques,

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos(x-\phi))$$

où

$$\phi = \arctan(\frac{b}{a})$$

On peut aussi faire ce type de problème avec des nombres complexes :

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j^2)(s+1-j^2}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j^2} + \frac{K_3}{s+1-j^2}$$

On utilise la première technique pour résoudre, $K_1 = 0.6$. Les autres coéfficients sont

$$K_2 = \frac{3}{s(s+1-j^2}|_{s=-1} = -0.15(2+j)$$

Et K_3 est le conjugué de K_2, $K_3 = -0.15(2-j)$. La fonction devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} + \frac{-0.15(2+j)}{s+1+j^2} + \frac{-0.25(2-j)}{s+1-j^2}$$

Dans le domaine du temps, la fonction est

$$f(t) = 0.6 - 0.15[(2+j)e^{(j^2+1)t} + (2-j)e^{-(1-j^2)t}]$$

$$= 0.6 - 0.15e^{(-t)}[(2+j)e^{-j^2t} + (2-j)e^{j^2t}]$$

Avec la relation d'Euler,

$$f(t) = 0.6 - 0.15e^{(-t)}[(2+j)(\cos(-2t) + j\sin(-2t)) + (2-j)e^{(1-j^2)t}]$$

$$= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(2t) - j(\sin(2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))]$$

$$= 0.6 - 0.15e^{-t}(4\cos(2t) + 2\sin(2t))$$

$$= 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t)$$

$$= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57°)$$

C'est la même solution que celle qui est obtenue plus haut.

Chapitre 2

Le calcule Fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire. On vas définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemmann-Liouville. Nous définissons certaines fonctions nouvelles telles que la fonction Gamma, la fonction Béta, la onction de Mittag-Leffler et la fonction de Mellin-Ross. Ces fonction jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire. De telles fonctions sont dites Fonction spéciales.

2.1 La fonction spéciale

Dans cette section, nous présentons certaines fonctions dites fonctions spéciales. Ces fonction jouent un role trés important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

2.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (exepté en certains points)

Définition 2.1.1. *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) \times t^{x-1} dt \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

(a) *La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ est la relation de récurence suivante :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0$$

Qu'on peut démontre par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \exp(-t) \times t^x dt \\ &= [-\exp(-t) \times t^x]_0^{+\infty} + x\int_0^\infty \exp(-t) \times t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

(b)

$$\Gamma(x) = (x-1)! \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

Comme conséquence de cette propriété, on a :

$$\Gamma(x+1) = x! \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

(c)

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(0_+) = +\infty$$

Et aussi

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

(d) $\Gamma(x)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < x \leq 1$

(e) *Si* $n \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

Exemple 2.1.1. *Pour* $x = \frac{1}{2}$ *, on a par définition :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

posons

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

2.1.2 La fonction Bêta :

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

Définition 2.1.2. *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \qquad x, y \geq 0$$

Le changement de variable

$$u = 1 - t$$

permet de montrer que la fonction Béta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x,y) = B(y,x)$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}B(x,y) &= \frac{1}{a^{x+y-1}} \int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1} dt \\ B(x,y) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \\ B(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta) d\theta\end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. *La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante :*
$\forall x, y > 0, on \quad a$:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.2}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{x-1}t_2^{y-1}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}e^{-|t_1+t_2|}dt_2\right)dt_1\end{aligned}$$

En effectuant le changement de la variable

$$t_2' = t_1 + t_2$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1 \int_0^{+\infty}(t_2'-t_1)^{y-1}e^{-t_2'}dt_2' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2' \int_0^{t_1}(t_2'-t_1)^{y-1}t_1^{x-1}dt_1\end{aligned}$$

Si on pose $t_1' = \frac{t_1}{t_2'}$, *on arrive à :*

$$\begin{aligned}&= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2'\left(\int_0^1 (t_1't_2')^{x-1}(t_2'-t_1't_2')^{y-1}t_2'dt_1'\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2'\left((t_2')^{x+y-1}B(x,y)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}(t_2')^{x+y-1}dt_2'B(x,y) \\ &= \Gamma(x+y)B(x,y)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré. ∎

2.1.3 La fonction Erreur

La fonction Erreur est définie par l'intégrale suivante :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

La fonction Erreur Complémentaire notée Erfc est définie par :

$$Erf(x) = 1 - Erf(x) \tag{2.4}$$

Comme conséquences on a :

$$Erf(0) = 0$$

et

$$Erf(\infty) = 1$$

2.1.4 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffker est nommée d'aprés le mathématicien suédois qui la défini en 1903 *cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle,* e^x*, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag-Leffler à un et à deux paramétres peuvent être définies en terme d'une dérie de puissance :*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0 \tag{2.5}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \tag{2.6}$$

De la définition (2.6)*, il en résulte que :*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \tag{2.7}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simple. Par exemple,

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x} \\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cosh(x) \end{aligned}$$

2.1.5 La fonction Mellin-ross

La fonction Mellin-Ross, $E_t(v, a)$ est étroitement liée à la fois avec la fonction incompléte gamma et la fonction Mittag-Leffler. Elle se pose lors de la recherche de l'intégrale fractionnaire d'une fonction exponentielle e^{at}.

Définition 2.1.3. *La fonction Mellin-ross est définie par :*

$$E_t(v, a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+v+1)} = t^v E_{1,v+1}(at)$$

2.2 La formule de Dirichlet

Soient $h(x; y)$ une fonction continue etα, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet.

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dx \tag{2.8}$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.
Par exemple, si on prend

$$h(x, y) = g(x) f(y)$$

et

$$g(x) \equiv 1$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy \tag{2.9}$$

où B est la fonction bêta.

2.3 L'integrale fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.3.1 L'integrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I^{(1)}f(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^{(1)}f(u)du \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt\right) du \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du\right) f(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

Plus généralement la n-ième itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt$$

pour tout entier n :
Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann rendu compte que le second membre paurrant avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

2.3.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\Re(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n - 1} f(t_n)dt_n \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad n \epsilon \mathbb{N}^\star \quad (2.11)$$

On adopte alors, la définition suivante :

Définition 2.3.1. *Soient α un réel positif et $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ une fontion continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt$$

Proposition 2.3.1. *Pour toute fonction continue f, on a :*

(a)

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad \alpha, \beta > 0 \tag{2.12}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(I_a^{\alpha-1} f(x)) \quad \alpha \geq 1 \tag{2.13}$$

Preuve. *On montre la premiére égalité.*

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f(s))ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1}ds \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt
\end{aligned}$$

D'aprés la formule de Dirichlet (2.8), *on'a :*

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\
&= I_a^{(\alpha+\beta)} f(x)
\end{aligned}$$

D'ou la premiére égalité.
On montre maintenant la deuxiéme égalité.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)
\end{aligned}$$

Puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \to (x-t)^{\alpha-1} f(t)$$

est continue, et on a Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{\alpha-1}f(t))dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2}f(t)dt \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t) \\
&= I_a^{\alpha-1}f(x)
\end{aligned}$$

d'ou le résultat. ■

De maniére générale on a :

$$D[I^\alpha f(x)] \neq I^\alpha[Df(x)]$$

En effet, on a le resultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction continue sur $J = [0, b)$. Si Df est continue alors pour tout $x > 0$ on a :*

$$D[I^\alpha f(x)] = I^\alpha[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} \tag{2.14}$$

Preuve. *Par définition, on a :*

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt$$

En faisant le changement de variable :

$$t = x - s^\lambda$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

ce qui implique :

$$dt = -\lambda s^{\lambda-1}ds$$

alors on obtient :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x^\alpha}^0 (s^\lambda)^{\alpha-1}f(x-s^\lambda)(-\lambda s^{\lambda-1})ds$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda \int_{x^\alpha}^{0} f(x-s^\lambda)ds \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{x^\alpha} f(x-s^\lambda)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{x^\alpha} f(x-s^\lambda)ds \end{aligned}$$

En utilisant la régle de Leibnitz qui stipule :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{b(t)}(t,x)dx\right) = f(t,b(t))b'(t) + \int_0^{b(t)}\frac{d}{dt}f(t,x)dx$$

On a alors :

$$D(I^\alpha f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(0)\alpha x^{\alpha-1} + \int_0^{x^\alpha}\frac{d}{dx}f(x-s^\lambda)ds\right]$$

Maintenant, si on inverse le changement de variable, i.e

$$t = x - s^\lambda$$

donc :

$$ds = -\frac{1}{\lambda}s^{1-\lambda}dt$$

On obtient

$$D(I^\alpha f(x)) = \frac{f(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_x^0 \frac{d}{dx}f(t)(-\frac{1}{\lambda}s^{1-\lambda})dt$$

Enfin, puisque

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

et

$$s = (x-t)^{\frac{1}{\lambda}}$$

l'équation précécente se réduit à :

$$D(I^\alpha f(x)) = \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\frac{d}{dx}f(t)dt$$

Ce qui implique que :

$$D(I^\alpha f(x)) = I^\alpha(Df(x)) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

∎

2.4 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 2.4.1. *Fonction puissance Considérons le monome :*

$$f(x) = x^\beta$$

En remplaçant dans la définition de lintégrale de Riemann-Luoiville, on obtient :

$$I^\alpha(x^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} t^\beta dt$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t}{x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{(\alpha-1)} x^{(\alpha-1)} x u^\beta x du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{(\alpha-1)} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

D'ou :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha = 1$.
En effet, pour $\alpha = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\beta+1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\beta+1} \\
&= \frac{1}{(\beta+1)} x^{\beta+1}
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour $\beta = 0, 1, 2$ on a :

$$I^{\frac{1}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\Pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\Pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\frac{7}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\Pi}}$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α d'une constante k est donnée par :

$$I^{\alpha}k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha} \tag{2.15}$$

Exemple 2.4.2. *considérons la fonction*

$$f(x) = e^{ax}$$

ou a est une constante. Alors, par définition, on a :

$$I^{\alpha}e^{ax} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}e^{at}dt \quad \alpha > 0$$

En faisant le changement de variable

$$y = x - t$$

On obtient :

$$I^{\alpha}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}e^{-ay}dy$$

D'ou

$$I^{\alpha}e^{ax} = E_x(\alpha,\alpha) = x^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(ax) \tag{2.16}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$I^{\frac{1}{2}}e^{ax} = E_x(\frac{1}{2},a) = a^{-\frac{1}{2}}e^{ax}Erf(ax)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

Exemple 2.4.3. *Pour $\alpha > 0$, les primitives d'ordre α des fonctions élémentaires sin et cos, sont données par :*

$$I^{\alpha}cos(ax) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}cos(a(x-y))dy := C_x(\alpha,a) \tag{2.18}$$

$$I^{\alpha}sin(ax) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}sin(a(x-y))dy := S_x(\alpha,a) \tag{2.19}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$I^{\frac{1}{2}}cos(ax) = C_x(\frac{1}{2},a) = \sqrt{\frac{2}{a}}(C(t)cos(ax) - S(t)sin(ax))$$

$$I^{\frac{1}{2}}cos(ax) = S_x(\frac{1}{2}, a) = \sqrt{\frac{2}{a}}(C(t)sin(ax) - S(t)cos(ax))$$

avec :

$$t = \sqrt{\frac{2ax}{\Pi}}$$

$$C(t) = \int_0^t cos(x^2)dx$$

$$S(t) = \int_0^t sin(x^2)dx$$

Chapitre 3

La dérivation fractionnaires

il existe plusieures définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemmann-Liouville, caputo ainsi que Grunwald-Letnikov qui sont plus utilisées.

3.1 L'pproche de Riemann-Liouville

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.

Définition 3.1.1. *Soit $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée d'ordre α au sens de Riemenn-Liouville d'une fonction f est définie par :*

$$D^\alpha f(x) = D^n(I^{(n-\alpha)} f(x)) \tag{3.1}$$

Si on suppose que :

$$\beta = n - \alpha \quad avec \quad 0 < \beta < 1$$

On a alors :

$$D^\alpha f(x) = D^n(I^\beta f(x))$$

Théorème 3.1.1. *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x).$$

Propriétés 3.1.1. *Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 \leq \beta \leq m$.*

(a) Pour $f \in L^1([a,b])$, *légalité :*

$$D_a^\alpha(I_a^\alpha f(t)) = f(t)$$

est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$

(b) Si $\alpha > \beta > 0$, *alors pour* $f \in L^1([a,b])$, *la relation :*

$$D_a^\beta(D_a^\alpha f)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x)$$

est vrai presque partout sur $[a,b]$

(c) Si $\beta \geq \alpha > 0$ *et la dérivée fractionnaire* $D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe, alors on a :*

$$D_a^\beta(I^\alpha f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x)$$

(d) Si $f \in L^1([a,b])$ *et* $I^{n-\alpha})f \in AC^n([a,b])$ *avec* $n = [\Re(\alpha)+1]$, *alors :*

$$[I_a^\alpha(D_a^\alpha f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x\to a^+} \big[\big(\frac{d}{dx}\big)^j I_a^{n-\alpha} f\big](x)$$

Exemple 3.1.1. *Fonction puissance*
Soit $n < n-1 < \alpha < n$. *Considérons la fonction monome*

$$f(x) = x\mu \quad \mu > 0$$

La dérivée d'ordre α *de* f *est donnée par :*

$$D^\alpha f(x) = D^n[I^{(n-\alpha)} x^\mu]$$

Pour $n = 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^1[I^{(1-\alpha)} x^\mu] \\ &= D^1[I^\beta x^\mu] \quad \beta = 1-\alpha \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\mu &= D^1\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+1)} x^{\beta+\mu}\right] \\ &= (\beta+\mu)\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\beta+\mu)\Gamma(\beta+\mu)} x^{\beta+\mu-1} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu)} x^{\beta+\mu-1} \end{aligned}$$

comme $\beta = 1-\alpha$, on obtient alors :

$$D^{\alpha}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha}$$

Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} D^{1}x^{\nu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} \\ &= \frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} \\ &= \mu x^{\mu-1} \\ &= \frac{d}{dx}x^{\mu} \end{aligned}$$

On retrouve alors le dérivation classique.
Si $\mu = 0$

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x^{0} &= D^{\alpha}1 \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Il est alors important de noter que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas forcément nulle.
Si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}(1-\frac{t}{x})^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt\right) \end{aligned}$$

on fait un changement de variable

$$y = \frac{t}{x}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\Gamma(\frac{1}{2})\\
&= 0
\end{aligned}$$

On remarque que la dérivée au sens de Riemann-Liouville fonction non identiquement nulle, peut étre nulle.

3.2 L'approche de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un role important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du probléme de cauchy sont exprimées par des dérivée d'ordre fractionnaire , Caputo propose une autre approche ou la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 3.2.1. *Soient $0 < n-1 < \alpha < n$ et f une fonction de classe $\mathbb{C}^n([a,b])$. La dérivée de Caputo d'ordre α de la fonction f est définie par :*

$$D^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}(D^n f(x))$$

La définition de caputo peut etre écrite comme :

$$ {}_a^cD_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(x)dx}{(t-x)^{\alpha+1-n}} \quad (n-1<\alpha<n) \qquad (3.2)$$

Exemple 3.2.1. *La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$*
Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$ alors, on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-\tau)^{\alpha-n}$$

d'ou

$$ {}_a^cD_t^p(t-\alpha)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau $$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$ \begin{aligned} {}_a^cD_t^p(t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1}(s)^{\alpha-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \end{aligned} $$

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$ {}_a^cD_t^pC = 0 $$

3.3 La relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 3.3.1. *Soient $\alpha \geqslant 0$,$n = [\alpha]+1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :*

$$ ({}^cD_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \right] $$

presque partout sur $[a,b]$.

3.4 La comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

(a) *L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.*

(b) *Une autre différence entre la définition la de Riemann et celle de Caputo et que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est* $\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$

(c) *Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville) , c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre* α *où* $(m-1) \leq \alpha \leq m$ *par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre* $(m-\alpha)$ *pour la fonction* $f(x)$ *et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordere entier* m*, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre* α *où* $m-1 \leq \alpha \leq m$ *par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier* m *de la fonction* $f(x)$ *et puis on intègre d'ordre fractionnaire* $(m-\alpha)$.

3.4.1 L'approche de Grunwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.
On sait que la dérivée d'une fonction f *est définie comme :*

$$D^1 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On peut exprimer la dérivée d'ordre n *d'une fonction* f *par la formule suivante :*

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h)$$

On peut aussi écrire cette formule comme suit :

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh)$$

avec

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$$

On peut généraliser cette formule pour α *non entier :* $0 < n-1 < \alpha < n$.
Comme

$$\begin{aligned}(-1)^m\binom{n}{m} &= \frac{-n(m-n)...(m-n-1)}{m!} \\ &= \frac{\Gamma(m-n)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-n)}\end{aligned}$$

on obtient :

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{m=0}^{n}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)}f(x-mh)$$

et

$$I^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha}\sum_{m=0}^{n}\frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)}f(x-mh)$$

Si f *est de classe* C^n*, alors en utilisant une intégration par parties on obtient :*

$$I^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1}f^{(n)}(t)dt$$

et

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \quad (3.3)$$

Pour $a = 0$*, on obtient :*

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(0)(x)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \quad (3.4)$$

Exemple 3.4.1. *Fonction puissance :*
Considérons la fonction

$$f(x) = x^\beta$$

De la définition (3.3)*, on a :*

$$D^\alpha x^\beta = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(0)x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}D^n t^\beta dt$$

On a :

$$f^{(m)}(0) = 0 \;\; m = 0, 1, ..., n-1$$

et

$$f^{(n)}(t) = D^n t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-n}$$

d'ou

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt$$

En faisant le changement de variables

$$t = sx$$

on obtient :

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$D^\alpha x^\beta + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \tag{3.5}$$

En particulier, pour $\beta = 0$ on a :

$$D^\alpha x^0 = D^\alpha 1 = \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha} \tag{3.6}$$

c'est-à-dire que la dérivée au sens de Grunwald-Letnikov d'une constante n'est pas forcément nulle.

3.5 les propriétés générales des dérivées fractionnaires

3.5.1 Linéarité :

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t)$$

3.5.2 La règle de Leibniz :

Pour n entier on a

$$\frac{d^n}{dt^n(f(t)g(t))} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)D^{(\alpha-k)}g(t) + R_n^{\alpha}(t),$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)d\tau \int_{\tau}^{t} f^{(n+1)}(\varsigma)(\tau-\varsigma)^n d\varsigma$$

avec $\lim_{n\to\infty} R_n^{\alpha}(t) = 0$.
Si f et g sont continues dans $[a;t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)D^{(\alpha-k)}g(t)$$

Chapitre 4

La transformé de Laplace des dérivés fractionnaires

4.1 Introduction

Comme dans le cas entier, la transormée de Laplace est utilisé pour la résolution des équations différentielles d'ordre entier.
Dans ce châpitre nous donnons quelques outils de base, et des formules fondamentales de la transformée de Laplace pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, Caputo et Grunwald-Letnikov.
Nous rappelons qu'une fonction $y(t)$ défini sur certains domaines J' est dit d'ordre exponentiel α s'il existe une constante $M, T > 0$ tel que $e^{-\alpha t}|y(t)| \leq M$ pour tout $t \geq T$.
Si $y(t)$ est d'ordre exponentiel α, puis $\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$ existe pour tout $Res > \alpha$.
La transformée de Laplace de $y(t)$ est alors défini comme dans chapitre (1)

$$y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \tag{4.1}$$

Nous disons que $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$ est l'unique transformée inverse de Laplace de $y(s)$.
Nous rappelons également que la transformé de Laplace est un opérateur linéaire. En particulier si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ et $\mathcal{L}\{g(t)\}$ existe alors

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} \ \ et \ \ \mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{4.2}$$

Un calcul élémentaire montre que pour tout $\Gamma > -1$, et $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{t^\mu\} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{S^{\mu+1}} \tag{4.3}$$

et

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{S-a} \tag{4.4}$$

une des propriétés les plus utiles de la transformation de laplace est le théorème de la convolution.
Ce théorème indique que la transformée de Laplace la convolution de deux fonction est le produit de leurs transformées de Laplace. Alors si $F(s)$ et $G(s)$ sont les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors

$$f * g = F(s)G(s)$$

alors

$$f * g = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-z)g(z)dz\right\} \tag{4.5}$$

4.2 La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville définie par :

$$D^{-\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds \qquad \alpha > 0 \tag{4.6}$$

qui peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$ comme suit :

$$\mathcal{L}\{D^{-\alpha}y(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\}\mathcal{L}\{y(t)\} = s^{-\alpha}Y(s) \quad \alpha > 0 \tag{4.7}$$

telle que la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \tag{4.8}$$

L'équation (4.7) est la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire.
Comme exemples nous voyons pour $\alpha > 0$,$\mu > -1$ tell que :

$$\mathcal{L}\{D^{-\alpha}t^{\mu}\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\alpha+1}} \;\; et \;\; \mathcal{L}\{D^{-\alpha}e^{at}\} = \frac{1}{s^{\alpha}(s-a)} \tag{4.9}$$

4.3 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Nous rappelons que la transformée de Laplace de y^n est donnée par :

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^nY - s^{n-1}Y(0) - s^{n-2}y'(0) - ... - Y^{n-1}(0)$$

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^nY(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}Y^k(0) \qquad (4.10)$$

Nous savons aussi à partir du chapitre (3) *que le dérivé fractionnaire de $y(t)$ de l'ordre α est*

$$D^\alpha y(t) = D^n[D^{-u}y(t)] \qquad (4.11)$$

Où n est le plus petit nombre entier supérieur à $\alpha > 0$, et $u = n - \alpha$ Remarquons que nous pouvons écrire l'équation (4.11) *comme*

$$D^\alpha y(t) = D^n[D^{-(n-\alpha)}y(t)] \qquad (4.12)$$

Maintenant, si nous supposons que la transformée Laplace de $y(t)$ existe, puis par l'utilisation de (4.10) nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} &= \mathcal{L}\{D^n[D^{-(n-\alpha)}y(t)]\} \\ &= s^n\mathcal{L}\{D^{-(n-\alpha)}y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^k[D^{-(n-\alpha)}y(t)]_{t=0} \\ &= s^n[s^{-(n-\alpha)}Y(s)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-(n-\alpha)}y(0) \end{aligned}$$

$$= s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-k-1}D^{k-(n-\alpha)}y(0) \qquad (4.13)$$

En particulier, si $n = 1$ et $n = 2$, nous avons respectivement

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - D^{-(1-\alpha)}y(0), \qquad (4.14)$$

et

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - sD^{-(2-\alpha)}y(0) - D^{-(1-\alpha)}y(0), \qquad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.15)$$

Le tableaux (4.1) *donnent un bref résumé de certaines transformées de Laplace utiles. Notez que la fonction de Mittag- Leffler est très importante, Comme cela sera plus évident plus tard, cette fonction joue un rôle important lors de la résolution des équations différentielles fractionnaires*

$Y(t)$	$y(t) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha-a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1-E^\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E$
cosinus	$\cos(wt)u(t)$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(wt)u(t)$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(wt)u(t)$

FIGURE 4.1 – Tab de transformées de Laplace

4.4 Exemples d''équations fractionnaires

Nous allons examiner trois exemples d'équations fractionnaires

Exemple 4.4.1. *Résolons*

$$D^{\frac{2}{3}}y(t) = ay(t)$$

avec a une constante, On'a $\alpha = \frac{2}{3} \leq 1$, *nous utiliserons* (4.14). *En prenant la transformée laplace des deux côtés de l'équation que nous avons*

$$\mathcal{L}\{D^{\frac{2}{3}}y(t)\} = a\mathcal{L}\{y(t)\}$$

Ce qui implique que

$$s^{\frac{2}{3}}Y(s) - D^{-(1-\frac{2}{3})}y(0) = aY(s) \tag{4.16}$$

la constante $D^{-(1-\frac{2}{3})}y(0) = D^{-\frac{1}{3}}y(0)$ *est la valeur de* $D^{-\frac{1}{3}}y(t)$ *en* $t = 0$.
Si nous supposons que cette valeur existe, et noter c_1, *alors* (4.16) *devient*

$$s^{\frac{2}{3}}Y(s) - c_1 = aY(s)$$

Résolvant pour $y(s)$ *nous obtenons*

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

En utilisant finalement le tableaux (4.1), *nous concluons que*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = c_1 t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(at^{\frac{2}{3}})$$

Dans l'exemple (1)*et autre situation similaire, on peut se demander si l'existence de C_1 est supposer.*
Nous montrerons que c'est le cas
À nouveau, en utilisant la transformée de Laplace (4.7), nous notons

$$\mathcal{L}\{D^{-\frac{1}{3}}y(t)\} = s^{\frac{-1}{3}}Y(s)$$

Comme

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

Alors

$$\mathcal{L}\{D^{-\frac{1}{3}}y(t)\} = \frac{c_1 s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

Or

$$D^{-\frac{1}{3}}y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{cs^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = C_1 E_{\frac{2}{3},1}(at^{\frac{2}{3}})$$

En $t = 0$

$$D^{-\frac{1}{3}}y(0) = c_1 E_{\frac{2}{3},1}(0) = c_1$$

Exemple 4.4.2. *Résolvons*

$$D^{\frac{4}{3}}y(t) = 0$$

On'a $1 < \alpha = \frac{4}{3} \leq 2$, *nous utiliserons* (4.15). *En prenant la transformée laplace des deux côtés de l'équation que nous avons*

$$\mathcal{L}D^{\frac{4}{3}}y(t) = 0$$

Ce qui implique que

$$s^{\frac{4}{3}}Y(s) - sD^{-(2-\frac{4}{3})}y(0) - D^{-(1-\frac{4}{3})}y(0) = 0 \tag{4.17}$$

En imitant l'exemple (1), *nous supposerons que les constantes* $D^{-(2-\frac{4}{3})}y(0)$ *et* $D^{-(2-\frac{4}{3})}y(0)$ *existe et noter* c_1 *et* c_2, *respectivement. Alors* (4.17) *devient*

$$s^{\frac{4}{3}}Y(s) - c_1 s - c_2 = 0 \tag{4.18}$$

Résolvant pour $y(s)$ *nous obtenons*

$$Y(s) = \frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}} \tag{4.19}$$

Finalement en utilisant le tableaux (4.1), *nous trouvons la transformée de Laplace inverse de* $y(s)$ *et concluons que*

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_1 s}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_2}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} \\ &= \frac{C_1}{\Gamma(\frac{1}{3})}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{C_2}{\Gamma(\frac{4}{3})}t^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Exemple 4.4.3. *Dans cet exemple, nous allons généraliser l'exemple* (4.4.1). *Résolvent l'équeation*

$$D^{\alpha}y(t) = ay(t) \qquad y_0 = C \tag{4.20}$$

Avec $0 < \alpha \leq 1$ *et* a *est une constante*
Utilisant (4.15), *Et en prenant la transformée de laplace des deux côtés de l'équation que nous avons*

$$\mathcal{L}\{D\alpha y(t)\} = a\mathcal{L}\{y(t)\} \tag{4.21}$$

Ce qui implique

$$s\alpha Y(s) - D^{-(1-\alpha)}y(0) = aY(s)$$

Comme nous l'avons fait dans les exemples précédents, Nous supposerons que la constante $D^{-(1-\alpha)}y(0)$ *Existe et l'appelle* c_1. *Alors* (4.21) *deviens*

$$s^{\alpha}Y(s) - c_1 = aY(s) \tag{4.22}$$

Résolvant pour $Y(s)$ *nous obtenons*

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\alpha} - a} \tag{4.23}$$

Puis utilisant le tableau (4.1) *Nous trouvons la transformée inverse de* $Y(s)$ *et concluons que*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c}{s\alpha - a}\right\} = c_1 t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha}) \tag{4.24}$$

Nous souhaitons maintenant trouver la valeur de c_1, *On nous donne* $y_0 = c$. *Il est intéressant de constater que*

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^{\alpha}) = 1$$

Donc depuis

$$y(t) = c_1 t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha}) \tag{4.25}$$

Alors

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = c_1 \tag{4.26}$$

Dans ce cas alors, on peut penser à la valeur initiale y_0 *comme* c_1, *ce qui implique que*

$$y_0 = D^{-(1-\alpha)}y(0) \tag{4.27}$$

4.5 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

Afin d'établir la fomule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, réecrivons la dérivée de Caputo (3.2) *sous la forme*

$$ {}_0^C D_t^p f(t) = {}_0 D_t^{-(n-p)} g(t) \qquad g(t) = f^{(n)}(t) \tag{4.28}$$

$$(n-1 < p \leq n) \tag{4.29}$$

En utilisant la formule (4.7) *de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville , on aura*

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^p f(t); s\} = s^{-(n-p)} G(s) \tag{4.30}$$

ou, grace à (4.10)

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \tag{4.31}$$

En introduisant (4.30) *dans* (4.31)*, on arrive à la formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :*

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^p f(t); s\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0) \tag{4.32}$$

$$(n-1 < p \leq n)$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction $f(t)$ *et ses dérivées en la borne inférieure* $t = 0$*, pour laquelle une certaine interprétation physique existe(par exemple,* $f(0)$ *est la position initial,* $f'(0)$ *est la vitesse initial.* $f''(0)$ *est l'accélération initiale), on peut espérer qu'il pourait etre utile pour la résolution des problémes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leurs formes traditionnelles.*
On aura besoin de lemme suivant pour l'exemple (4.5.1).

Lemme 4.5.1. $\alpha \geq \beta$, $\alpha > \gamma$, $a \in \mathbb{R}$, $s^{\alpha-\beta} > |a|$, $|s^\alpha + as^\beta| > |b|$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^\gamma}{(s^\alpha - as^\beta + b)}\} = t^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^n (-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha - \gamma\right)} t^{k(\alpha-\beta)+n\alpha}$$

Preuve.

$$\left\{\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}+as^{\beta}+b)}\right\}=\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}+as^{\beta})+\left(1+\frac{b}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\right)}=\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}+as^{\beta})}\frac{1}{\left(1+\frac{b}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\right)}$$

avec $\mid \frac{b}{s^{\alpha}+as^{\beta}} \mid < 1$ *et en utilisant* $\left[\frac{1}{(1+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}\right]$

$$\left\{\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}+as^{\beta}+b)}\right\}=\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}+as^{\beta})}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{b}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-b)^{n}\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}+as^{\beta})^{n+1}}$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace avec, $\mathcal{L}^{-1}\{s^{\gamma}\}=\frac{t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^{\gamma}}{(s^{\alpha}-as^{\beta}+b)}\}=t^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-b)^{n}(-a)^{k}\binom{n+k}{k}}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+(n+1)\alpha-\gamma\right)}t^{k(\alpha-\beta)+n\alpha}$$

■

Exemple 4.5.1. *Soit l'équation de Bagley- Torvik :*

$$(E)\begin{cases} D^{2}y(t)+2D^{\frac{3}{2}}y(t)+2y(t)=8t^{5}; \\ y(0)=0; \quad y\prime(0)=0. \end{cases}$$

En apliquant la tansformée de Laplace sur les deux cotés de l'équation ci-dessus , nous avons ;

$$\mathcal{L}\{D^{2}y(t)+2D^{\frac{3}{2}}y(t)+2y(t)\}=\mathcal{L}\{8t^{5}\}$$

$$s^{2}Y(s)-sy(0)-y\prime(0)+2\left[\frac{s^{2}Y(s)-sy(0)-y\prime(0)}{s^{\frac{1}{2}}}\right]+2Y(s)=8\frac{5!}{s^{6}}$$

Par conditions initiales ;

$$s^{2}Y(s)+2\frac{s^{2}Y(s)}{s^{\frac{1}{2}}}+2Y(s)=8\frac{5!}{s^{6}}$$

$$Y(s)[s^{2}+2s^{\frac{3}{2}}+2]=8\frac{5!}{s^{6}}$$

$$Y(s)=\frac{8\times 5!}{s^{6}(s^{2}+2s^{\frac{3}{2}}+2)}$$

En applique la transformation inverse de Lapace en les deux cotés de l'équation ci-dessus ;

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\times 5!}{s^{6}(s^{2}+2s^{\frac{3}{2}}+2)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\times 5!s^{6}}{(s^{2}+2s^{\frac{3}{2}}+2)}\right\}$$

En applique le lemme (4.5.1) ;

En prend : $\alpha = 2 \qquad \beta = \frac{3}{2} \qquad \gamma = -6$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8 \times 5! s^6}{(s^2 + 2s^{\frac{3}{2}} + 2)}\right\} = 8 \times 5! t^6 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+k}\binom{n+k}{k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k + 2(n+1) + 6)} t^{k\frac{1}{2}+2n}$$

4.6 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov

Tout d'abord, considérons le cas $0 \leq p < 1$*, quand la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov* (3.3) *avec la borne inféieure* $a = 0$ *de la fonction* $f(t)$*, qui est bornée en* $t = 0$*, peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$_0D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \qquad (4.33)$$

En utilisant la transformée de Laplace de fonction polynome

$$(P) : \mathcal{L}(t^{p-1}) = \Gamma(p) s^{-p}$$

de la transformée de Laplace de la convolution (4.5) *et de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier* (4.10) *on obtient :*

$$\mathcal{L}\{_0D_t^p f(t); s\} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}}(sF(s) - f(0)) = s^p F(s) \qquad (4.34)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov d'ordre $p > 1$ *n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non- intégrables dans la somme de la formule* (3.3)*. Les transformées de Laplace de telles foctions sont données par des intégrales divergentes. Cependant, la transformée de Laplace de la fonction polynome*(P)
Exige une continuation analytique par rapport au paramétre p. Cette approche est équivalente à l'approche de fonction généralisées(distributions).
Les intégrales divergentes dans un certain sens sont appelées des "intégrales à partie-finies". Dans ce sens, en supposant que $m < p < m + 1$*, et en utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynome* (P)*. la formule de la transformée de Laplace de la convolution* (4.5) *et celle de la dérivée entiére* (4.10)*. nous obtenons :*

$$\mathcal{L}\{_0D_t^p f(t); s\} = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(0)\mathcal{L}\{\frac{t^{-p+k}}{\Gamma(-p+m+1)}; s\} + \mathcal{L}\{\frac{t^{m-p}}{\Gamma(-p+m+1)} \star f^{(m+1)}(t); s\} \qquad (4.35)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(0)s^{p-k-1} + s^{p-m-1}(s^{m+1}F(s) - \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(0)s^{m-k} \qquad (4.36)$$

$$= s^p F(s) \tag{4.37}$$

On est arrivé à la même formule que (4.34) *Dans les applications, il est nécessaire de garder en téte que la formule* (4.37) *a lieu au sens classique seulement pour* $0 < p < 1$ *; pour* $p > 1$ *elle a lieu au sens de fonctions généralisées (distributions) et donc, la formulation d'un probléme appliqué doit étre faite aussi en langage fonctions généralisées, aussi bien que les interprétations des résultats obtenus dans ce sens.*
Un exemple d'application de la formule (4.34) est donné dans [10].

4.7 Quelques applications sur la résolutions des équations intégrales fractionnaires

4.7.1 L'equation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel est bien étudiée, et il existe de nombreuse sources consacrées à ses applications dans différents domaines. Il existe aussi d'autre types d'équations intégrales, qui apparaissent dans les applications et qui peuvent etre réduites à l'équation intégrale d'Abel. L'équation intégrale,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = f(x) \qquad (t > 0) \tag{4.38}$$

ou $0 < \alpha < 1$, *est appelée équation intégrale d'Abel. La solution de l'équation d'Abel est donnée par la formule :*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \qquad (t > 0) \tag{4.39}$$

que nous préférons à écrire sous la forme inversée,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = \varphi(t) \qquad (t > 0) \tag{4.40}$$

En terme des dérivées d'ordre factionnaire, les équation (3.38) *et* (3.40) *prennent respectivement les formes :*

$$^R_0D_t^{-\alpha} \varphi(t) = f(t) \qquad (t > 0) \tag{4.41}$$

et

$$^R_0D_t^{-\alpha} f(t) = \varphi(t) \qquad (t > 0) \tag{4.42}$$

4.7.2 Quelques équations réductibles à l'équation d'Abel

La solution de nombreuses problémes appliqués conduisent à des équations intégrales, qui a, à premiére vue n'ont rien en commun avec l'équation intégrale d'Abel, et à cause de cette impression des efforts supplémentaires sont entrepris pour le développement de la procédure analytique ou numérique pour résoudre ces équation.
Cependant, leurs transfomations à la forme de l'équation intégrale d'Abel peuvent souvent etre pratique pour obtenir rapidement la solution, ce qui est la raison pour donner quelques exemples typiques d'équations qui peuvent être réduites à l'equation d'Abel.

Exemple 4.7.1. *On considére l'équation*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s^2+y^2}}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = \frac{f(y)}{2y} \tag{4.43}$$

Posons

$$\frac{\varphi(r)}{r} = F(r^2)$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (4.43) *sous la forme :*

$$\int_0^{+\infty} F(s^2+y^2) ds \tag{4.44}$$

En effectuant le changement de variables $x = y^2, \xi = s^2$. *Alors :*

$$\begin{aligned} \xi = s^2 \quad &\Rightarrow \quad d\xi = 2sds \\ &\Rightarrow \quad d\xi = 2\xi^{\frac{1}{2}} ds \\ &\Rightarrow \quad ds = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

Par substitution dans (4.44) *on arrive à :*

$$\int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} F(x+\xi) d\xi = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{4.45}$$

Effectuant encore une autre fois le changement de variable $\tau = \frac{1}{x+\xi}$, *on aura d'une part,*

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x+\xi} \quad &\Rightarrow \quad x+\xi = \frac{1}{\tau} \\ &\Rightarrow \quad d\xi = -\frac{1}{\tau^2} d\tau \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\tau = \frac{1}{x+\xi} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\tau} - x$$
$$\Rightarrow \quad \xi^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{\tau} - x)^{-\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\xi^{-\frac{1}{2}} d\xi &= -\frac{1}{\tau^2}(\frac{1}{\tau} - x)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\
&= -\tau^{-\frac{3}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{\tau} - x)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\tau^{-\frac{3}{2}} (1 - \tau x)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\
&= -x^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} (\frac{1}{x} - \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant les bornes de l'intégral pour la nouvelle variable τ. *On'a*

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{x}$$
$$\xi \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \tau \to 0^{+0}$$

Si nous substituons dans (4.45) *nous obtenons*

$$\int_{\frac{1}{x}}^{0} -x^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{x} - \tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} F(\frac{1}{\tau}) d\tau = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{4.46}$$

aprés simplification, on trouve :

$$\int_{0}^{\frac{1}{x}} (\frac{1}{x} - \tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} F(\frac{1}{\tau}) d\tau = f(\sqrt{x}) \tag{4.47}$$

si on pose maintenant $t = \frac{1}{x}$, *et* $\psi(\tau) = \tau^{-\frac{3}{2}} F(\frac{1}{\tau})$ *on arrive à une équation d'Abel de type* (4.38) *avec* $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\int_{0}^{t} (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} \psi(\tau) d\tau = f(\frac{1}{\sqrt{t}}) \tag{4.48}$$

Par la relation (4.41), *on déduit que la solution de l'équation* (4.45) *s'écrit sous la forme*

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} {}_0^R D_t^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}} {}_0^R D_t^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{\sqrt{t}}) \tag{4.49}$$

C'est-à-dire que :

$$\varphi(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}} {}_0^R D_t^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{\sqrt{t}}) \tag{4.50}$$

Exemple 4.7.2. *(équation intégrale de Poisson)*
Soit l'équation intégrale de Poisson suivante :

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \psi(rcosw)sin^{2\mu+1}wdw)f(r) \tag{4.51}$$

Ce type d'équation peut se réduire à une équation intégrale d'Abel par le changement de variable : $x = rcosw$. *En effet,*

$$\begin{aligned} x = rcosw \quad &\Rightarrow \quad dx = -rsinwdw \\ &\Rightarrow \quad dw = \frac{-1}{rsinw}dx \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} x = rcosw \quad &\Rightarrow \quad x^2 = r^2(1 - sin^2w) \\ &\Rightarrow \quad sin^2w = \frac{r^2 - x^2}{r^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2} \end{aligned}$$

d'un autre coté on a :$w = 0 \Rightarrow x = r$ *et* $w = \frac{\Pi}{2} \Rightarrow x = 0$
En substituant dans l'équation (4.42) *on arrive à l'équation*

$$\int_0^r (1 - \frac{x^2}{r^2})^\mu \psi(x)dx = rf(r) \tag{4.52}$$

si on pose maintenant $y = \frac{1}{r^2}$, *alors l'équation* (4.49) *devient*

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1 - yx^2)^\mu \psi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{y}} f(\frac{1}{\sqrt{y}}) \tag{4.53}$$

ou plus simplement,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1 - yx^2)^\mu \psi(x)dx = g(y) \tag{4.54}$$

ou

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f(\frac{1}{\sqrt{y}})$$

puisque $(1-yx^2)^\mu = y^\mu(\frac{1}{y} - x^2)^\mu$, *alors l'équation* (4.51) *peut se mettre encore sous la forme*

$$\int_0^{\frac{1}{y}} (\frac{1}{y} - x^2)^\mu \psi(x)dx = y^{-\mu}g(y) \tag{4.55}$$

En effectuant le changement de variables $\tau = x^2, t = \frac{1}{y}$ *on obtient* $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}d\tau, y^{-\mu}g(y) = t^\mu g(\frac{1}{t})$ *et parsuite l'équation* (4.52) *s'écrit sous la forme*

$$\int_0^t (t - \tau)^\mu \psi(\sqrt{\tau}) \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = 2t^\mu g(\frac{1}{t}) \tag{4.56}$$

si on pose $\varphi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}$, $h(t) = 2t^{\mu} g(\frac{1}{t})$, *on arrive à une équation intégrale d'Abel*

$$\int_0^t (t-\tau)^{\mu} \varphi(\tau) d\tau = h(t) \tag{4.57}$$

avec $\alpha = \mu + 1$ *dont la solution est donnée par :*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} {}_0^R D_t^{\mu} h(t)$$

Conclusion

Ce memoire a pour but l'étude de quelques théorèmes et applications des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire pour quelques équations différentielles d'ordre non entier comme l'équation d'abel et quelques équations réductibles à l'équation d'Abel . On prend par exemple l'intégrale de poisson aussi on a vue la résolution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace .
dans les trois premiers châpitre nous avons rassemblé quelques outils pour notre travail la transformée de Laplace pour les équations différentielles ordinnaire(les fonctions Gamma, Béta, Mettag-Leffler...) et nous avons présenté trois approches des dérivées intégrales fractionnaires(approche de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo.)

Bibliographie

[1] ***A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo*** *Theory and applications of fractional differential Equations,* *North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).*

[2] ***A.Popier, O.Wintenberger*** *équations différentielles,* *école polytechnique, 2006-2007*

[3] ***A. Taik*** *Transformée De Laplace*

[4] ***F.Boyer,P.Fabrie*** *, Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navir-Stokes Equations and Related Models,* *Appl.Math.Sci, New York, 2013.*

[5] ***G.Cormier*** *La transformée De Laplace*

[6] ***H. Amman*** *, Ordinary Differential Equations, An Introduction to nonlinear Analysis, Studies in Mathematics,* *13, Walter de Gryter, 1991.*

[7] ***H.Hadjar*** *Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires ,Mémoire de fin d'études, Tlemcen, 2014-2015*

[8] ***J.Velu*** *Transformé De Laplace*

[9] ***J. Hale and S. Verduyn Lunel****, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences,* *99, Springer-Verlag, New York, 1993.*

[10] ***L. Gaul, S. Kempfle and P. Klein****, Transients Schwingungsverhalten bei der Dämpfungsbeschreibung mit nicht ganzzahligen Zeitableitungen,* *Z. angew. Math. Mech., vol. 70, no. 4, 1990, p.p. T139-T141.*

[11] ***N.E. Amroun*** *Transformation De Laplace*

[12] ***Erdelyi A,Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F, Higher*** *Transcendental Functions,* *Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).*

[13] ***Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993)****, Fractional integrals and derivatives : theory and applications,* *Gordon and Breach, New York.*

[14] ***S. Zhang***, *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional diffrential equations, Electron,* *J. Diff. Equ. 2006, No. 36, pp, 1-12.*