

Table des matières

1	Espaces fonctionnels	5
1.1	Espaces de Banach, Espaces de Hilbert	5
1.1.1	Compacité et Equicontinuité	6
1.1.2	Espaces de Hilbert	7
1.1.3	Dualité- Topologies faibles et compacité	9
1.1.4	Topologie faible et compacité	13
1.1.5	Espaces uniformément convexes	14
1.2	Espace $L^p, 1 \leq p \leq \infty$	15
1.2.1	Grands théorèmes de convergences	16
1.2.2	Définition et propriétés élémentaires des espace L^p	17
1.2.3	Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p	19
1.2.4	Convolution et régularisation	23
1.2.5	Suites régularisantes	24
2	Distributions et espace de Schwartz	27
2.1	Distributions	27
2.1.1	Distributions régulières	28
2.1.2	Distributions non régulières	29
2.1.3	Dérivée d'une distributions	30
2.2	Distributions tempérées	31
2.2.1	Multiplication d'une distribution par une fonction	35
2.2.2	Dérivation au sens des distributions	36
2.3	Espace de schwartz	40
2.3.1	Opérations sur les distributions tempérées :	42

2.3.2	Transformée de Fourier des distributions tempérées	43
2.4	Transformées de Fourier des distributions	44
2.4.1	Transformée de Fourier dans S'	44
3	Espaces de Sobolev	48
3.1	Motivations et théorie élémentaire	48
3.1.1	Premières propriétés	49
3.2	L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$	63
3.2.1	Injection continue	65
3.3	Théorème de Trace	66
3.3.1	Théorème de trace pour $\mathbb{R}_+^n$ et applications	66
3.3.2	Théorème de trace pour un ouvert Ω et applications	67
3.3.3	Cas de l'espace H^2	68
3.3.4	L'espace $W_0^{1,p}(I)$	68
3.3.5	Quelques applications	69
3.3.6	Convergence faible dans $L^p(I)$	70
3.4	Théorèmes d'injection continue. Injections compactes	71
3.4.1	Résultats d'injections continues	71
3.5	Résultats de compacité pour $\partial\Omega$ borné	76
3.6	Prolongement, Densité	77
3.6.1	Opérateur de prolongement	77
3.6.2	Densité	80
3.6.3	L'inégalité de Jensen	80
3.6.4	Troncature	81
3.6.5	Démonstration du théorème de densité	82

Introduction

La théorie des distributions a été développée par le mathématicien français Laurent Schwartz, lauréat de la médaille Fields en 1950. Le mathématicien russe Sergeï Sobolev a indépendamment introduit, pour l'étude des équations aux dérivées partielles, les espaces de Sobolev qui portent aujourd'hui son nom. La théorie des distributions a permis de donner des bases rigoureuses à des méthodes employées auparavant, souvent sans justification, par les physiciens et les ingénieurs. Cette théorie est vite devenue une branche importante de l'Analyse mathématique. Les espaces de distributions, et en particulier les espaces de Sobolev, sont actuellement indispensables pour la résolution de nombreux problèmes portant sur les équations aux dérivées partielles, notamment celles rencontrées en mécanique et en physique. Dans ce mémoire, on présente les bases de la théorie des distributions et surtout on développe les éléments clés des espaces de Sobolev. Ce mémoire rendra sûrement de grands services aux étudiants, il sera également précieux aux autres scientifiques qui souhaitent utiliser la théorie des distributions.

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivantes, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où $c \in C(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ sont deux fonctions données, et u est une fonction inconnue.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles, c'est trouver une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution. Cela dit, si on prouve qu'une solution u existe, sous réserve que l'ouvert Ω soit suffisamment régulier, on peut par une intégration par parties (formule de Green), prouver que u vérifie, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)\phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx. \quad (2)$$

L'idée des espace de Sobolev est d'introduire les espaces de fonction u tels que $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^2(\Omega))^d$, qui est un espace de Hilbert, et de chercher non des solutions au problème initial, mais des fonctions u de cet espace qui vérifient, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx. \quad (3)$$

De telles fonctions sont appelées solutions faibles de l'équation aux dérivées partielles.

L'intérêt est que cette fois on dispose de toute la théorie des espaces de Hilbert (théorèmes de projection sur un espace de Hilbert, théorème de Lax -Milgram...) pour prouver l'existence de solutions faibles. On ne résout donc pas le problème initial, mais une variante.

Ce memoire se divise en trois chapitres, le premier chapitre présente quelques notions préliminaires des espaces fonctionnels connus (espace de Banach, espace de Hilbert, dualité, la topologie faible, les grandes théorèmes de convergences ect...).

Le deuxième chapitre se consacre à la théorie des distributions, les espaces de Schwartz. Enfin on exposera la transformation de Fourier dans le cadre des distributions.

Dans le dernier chapitre, on présente l'espace de Sobolev proprement dit, les différents types d'injection. On le terminera par un théorème de la densité.

Chapitre 1

Espaces fonctionnels

1.1 Espaces de Banach, Espaces de Hilbert

Soit X un espace vectoriel complexe. Une fonction positive $\|\cdot\|$ définie sur X est appelée une norme si elle vérifie

- $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

et la relation $\|u\| = 0$ implique que $u = 0$. Toute norme sur X définit une distance par la formule $\|u - v\|$.

Définition 1.1.1 *Un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un espace de Banach si il est complet par rapport à la distance définie par la norme.*

Considérons quelques exemples : Considérons les espaces ℓ , $C([a, b])$ et P définis par.....
Pour $1 \leq p < \infty$, définissons les fonctions suivantes sur ces espaces :

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n|, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(a,b)} &= \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_{L^\infty(a,b)} = \text{ess sup } |f(x)|, \\ \|g\|_{L^\infty} &= \sup_{z \in D} |g(z)|, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $x \in \ell$, $f \in C([a, b])$ et $g \in P$.

Proposition 1.1.1 *Les fonctions $\|\cdot\|_{\ell^p}$ et $\|\cdot\|_{L^p(a,b)}$ sont des normes sur les espaces ℓ et $C([a, b])$ respectivement, mais ces espaces ne sont pas complets.*

Théorème 1.1.1 (Baire) *Soit X un espace de Banach représenté comme la réunion de sous-ensembles X_n , $n \geq 1$. Alors il existe un entier n_0 tel que X_{n_0} est dense dans une boule.*

Soient X, Y deux espaces de Banach. On note $L(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .

Théorème 1.1.2 (Banach–Steinhaus) *Soient X, Y deux espaces de Banach et $A_\gamma : X \rightarrow Y$, $\gamma \in \Gamma$, une famille d'opérateurs continus telle que*

$\|A_\gamma u\|_Y \leq C_n$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|A_\gamma\|_{L(X,Y)} \leq C \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma. \quad (1.3)$$

Théorème 1.1.3 (Hahn–Banach) *Pour un espace de Banach X , on note X^* le dual de X , c'est-à-dire, l'espace des fonctionnelles linéaires continues $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme*

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\|u\|_X \leq 1} |f(u)|. \quad (1.4)$$

Le théorème suivant implique, en particulier, que X^* n'est pas vide et sépare les points de X . Nous considérons ici le cas réel, mais le résultat reste vrai aussi pour le cas complexe.

1.1.1 Compacité et Equicontinuité

Une connexion topologique fondamentale entre les espaces vectoriels normés de dimension N , est qu'il existe un isomorphisme bicontinu de E sur $\mathbb{K}^N$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ce résultat est déjà connu, puisque c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass.

En revanche, en dimension infinie, on a :

Théorème 1.1.4 (F. Riesz) *Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte.*

Commençons par donner quelques éléments essentiels à la compacité en dimension infinie ;

Définition 1.1.2 Soit (K, d) un espace métrique et F un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $A \subset C(K, F)$ est équicontinue si, pour toute $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon \text{ pour tout } x, y \in K \text{ tq. } d(x, y) < \alpha(\epsilon).$$

Voici un exemple de partie équicontinue d'un usage très fréquent en Analyse : soient $L > 0$ et F un espace vectoriel normé. Soit $c > 0$; on pose

$$A_c = \left\{ f \in C^1([0, L], F) \mid \sup_{0 \leq x \leq L} \|f'(x)\|_F \leq c \right\}. \quad (1.5)$$

Alors, pour tout $f \in A_c$, $x, y \in [0, L]$

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq c|x - y| < \epsilon \text{ dès que } |x - y| \leq \alpha(\epsilon) := \frac{\epsilon}{c} \quad (1.6)$$

De façon plus générale, le même argument montre qu'étant donné $k > 0$, l'ensemble des applications k -lipschitziennes de $[0, L]$ dans F est équicontinu.

Théorème 1.1.5 (Arzéla- Ascoli) Soient (K, d) un espace métrique compact et F un espace de Banach. Soit $A \subset C(K, F)$; pour tout $x \in K$, on note

$$A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}. \quad (1.7)$$

Supposons que

a)- pour tout $x \in K$, $\overline{A(x)}$ est compact dans F ;

b)- A est équicontinue en tout point de K .

Alors $\overline{A}$ est compact dans $C(K, F)$ pour la norme du sup.

1.1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.3 Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire noté $\langle, \rangle$ ou (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive [i.e. $(u, v) \geq 0 \forall u \in H$ et $(u, v) > 0$ si $u \neq 0$]

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H$$

[Remarquons que pour établir l'inégalité de Cauchy-schwarz on n'utilise pas l'hypothèse $(u, v) > 0$ si $u \neq 0$]

Rappelons aussi que $|u| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ est une norme. [En effet $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u, v) \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$]

Rappelons enfin l'identité du parallélogramme :

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2) \quad \forall a, b \in H \quad ((1))$$

Définition 1.1.4 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme issue du produit scalaire $(\cdot, \cdot)^{1/2}$*

Exemple 1.1.1 $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad (1.8)$$

est un espace de Hilbert ; l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ que nous rencontrerons au dernier chapitre est un espace de Hilbert façonné sur L^2

Théorème 1.1.6 (projection sur un convexe fermé) *Soit $\mathbb{K} \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in \mathbb{K}$ unique tel que*

$$|f - u| = \min_{v \in \mathbb{K}} |f - v|$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in \mathbb{K} \quad (1.9)$$

$$(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

On note $u = p_K f$ la projection de f sur $\mathbb{K}$

Proposition 1.1.2 *Sous les hypothèses du théorème on a [1]*

$$|p_K f_1 - p_K f_2| \leq |f_1 - f_2| \quad \forall f_1, f_2 \in H$$

Corollaire 1.1.1 *Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. soit $f \in H$, Alors $u = p_M f$ est un opérateur linéaire .*

Remarque 1.1.7 Il faut retenir que pour caractériser des espaces de Hilbert

1/- Il est intéressant de savoir reconnaître si une norme $\|\cdot\|$ donnée sur un espace vectoriel E est une norme Hilbertienne, i.e. s'il existe un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ sur E tel que

$$(u, u) \frac{1}{2} = \|u\|^2 \quad \forall u \in E. \quad (1.10)$$

Divers critères sont connus :

a)- Théorème (Fréchet-Von Neumann-Jordan) : On suppose que la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme (1), alors $\|\cdot\|$ est une norme Hilbertienne Yosida [1]

b)- Théorème (Kakutani [1]) : Soit E un espace normé avec $\dim E \geq 3$. On suppose que tout sous-espace F de dimension 2 admet un projecteur de norme 1 (i.e. il existe $P : E \rightarrow F$ opérateur linéaire continu avec $Pu = u$ pour tout $u \in F$ et $\|P\| \leq 1$) alors la norme $\|\cdot\|$ est Hilbertienne.

c)- Théorème (de Figueiredo-Karlovitz [1]) : Soit E un espace normé avec $\dim E \geq 3$. On pose

$$Tu = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \leq 1 \\ u & \text{si } \|u\| \geq 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

On pose

$$\|Tu - Tv\| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in E \quad (1.12)$$

1.1.3 Dualité- Topologies faibles et compacité

Soit H un espace vectoriel topologique (ou juste un Banach ou un Hilbert). Il est parfois plus intéressant de se placer dans le dual d'un espace vectoriel noté H^* ou H' et essayer de voir les connexions possibles entre espace et son dual.

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual muni de la norme duale $\left(\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \right)$ et soit E'' son bidual, i.e. le dual de E' , muni de la norme

$$\|\zeta\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \zeta, f \rangle|. \quad (1.13)$$

On a une injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit : $x \in E$ fixé, l'application $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E' i.e. un élément de E'' noté

Jx . On donc,

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'. \quad (1.14)$$

Il est clair que J est une isométrie i.e. $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; en effet

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\| \quad (1.15)$$

De J on peut toujours identifier E à un sous-espace de E'' .

Donnons le célèbre théorème de Riesz Frechet :

Théorème 1.1.8 *Soit H un espace de Banach. Étant donné $\varphi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H. \quad (1.16)$$

De plus on a

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H''} \quad (1.17)$$

Définition 1.1.5 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E'' . On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$. Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E'' (à l'aide de l'isomorphisme J).*

Il est essentiel d'utiliser J dans la définition précédente. On peut trouver un exemple d'espace non réflexif E pour lequel il existe une isométrie surjective de E sur E'' .

Remarque 1.1.9 *Considérons le triplet V, H, V' .*

Le théorème de Riesz montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' . On fera très souvent cette identification mais pas toujours. Décrivons une situation typique où il n'y a pas lieu de faire cette identification :

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(,)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit V un sous-espace vectoriel, dense dans H . On suppose que V est muni d'une norme $\|\cdot\|_V$ qui est en fait un espace de Banach. On suppose que l'injection canonique de V dans H est continue, i.e.

$$|v| \leq C \|v\| \quad \forall v \in V. \quad (1.18)$$

On identifie H' et H . On peut alors plonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$. L'application $v \in V \mapsto (f, v)$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V . on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{v',v} = (f, v) \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes :

- (i) $\|Tf\|_{v'} \leq C \|f\| \quad \forall f \in H,$
- (ii) T est injective,
- (iii) $T(H)$ est dense dans V' .

A l'aide de T on plonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V' \quad (1.19)$$

où les injections canoniques sont continues et denses.

On notera qu'avec cette identification $\langle \varphi, v \rangle_{v',v}$ coïncide avec (φ, v) dès que $\varphi \in H$ et $v \in V$. On dit que H est l'espace pivot.

Supposons maintenant que V est un espace de Hilbert, avec son propre produit scalaire $(,)$ associé à la norme $\|\cdot\|$. On pourrait alors identifier V' et V via le produit scalaire $(,)$. Toutefois (1.19) devient absurde. Ceci montre qu'on ne peut pas faire simultanément les deux identifications.

Remarque 1.1.10 Si l'on fait l'identification $H' = H$, alors l'orthogonal $M^\perp$ d'un sous-espace $H \subset M$ est considéré comme un sous-espace fermé de H et

$$M^\perp = \{u \in H; (u, v) = 0 \quad \forall v \in M\}. \quad (1.20)$$

Dans un espace de Hilbert tout sous-espace fermé admet un supplémentaire topologique.

Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Définition 1.1.6 On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est

1/- continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C |u| |v| \quad \forall u, v \in H, \quad (1.21)$$

2/- coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H. \quad (1.22)$$

Théorème 1.1.11 (Stampacchia) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $M \subset H$, étant donné $\varphi \in H'$ il existe $u \in M$ unique tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in M. \quad (1.23)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in M \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in M} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \quad (1.25)$$

pour démontrer le théorème on utilisera le résultat classique suivant :

Remarque 1.1.12 On vérifie aisément que si $a(u, v)$ est une forme bilinéaire telle que

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H \quad (1.26)$$

alors la fonction $v \mapsto a(v, v)$ est convexe.

Corollaire 1.1.2 (Lax-Milgram) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive.

Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (1.27)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \quad (1.28)$$

1.1.4 Topologie faible et compacité

[1] Sur l'espace E' sont déjà définies deux topologies :

- a) La topologie forte (associée à la norme de E'),
- b) La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On pourra définir maintenant une troisième topologie faible $*$ que l'on note $\sigma(E', E)$. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x \in E}$ de E' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.7 (la topologie faible $*$) la topologie faible $*$: désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la moins fine que la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Comme $E \subset E''$, il est clair que la topologie $\sigma(E', E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Autrement dit la topologie $\sigma(E', E)$ possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie $\sigma(E', E'')$ [qui à son tour possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie forte].

Remarque 1.1.13 La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$ est séparée.

Notation 1.1.14 Étant donnée une suite (f_n) de E' on désigne par $f_n \xrightarrow{*} f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible $\sigma(E', E)$. Afin d'éviter les confusions on précisera souvent $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$, $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$ et $f_n \rightarrow f$ fortement.

Proposition 1.1.3 Soit (f_n) une suite de E' . On a

- (i) $\left[f_n \xrightarrow{*} f \text{ pour } \sigma(E', E) \right] \Leftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E]$
- (ii) Si $f_n \rightarrow f$ fortement, alors $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$.
Si $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$.
- (iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- (iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Proposition 1.1.4 Soit $\varphi : E' \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E'. \quad (1.29)$$

Remarque 1.1.15 Lorsque J n'est pas surjective de E sur E'' (i.e. $E \neq E''$) alors la topologie $\sigma(E', E)$ est strictement moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Il existe même des convexes fermés pour $\sigma(E', E'')$ qui ne sont pas fermés pour $\sigma(E', E)$. Par exemple si $\zeta \in E''$ et $\zeta \notin J(E)$, alors

$$H = \{f \in E' ; \langle \zeta, f \rangle = \alpha\} \quad (1.30)$$

est un hyperplan fermé pour $\sigma(E', E'')$, mais il n'est pas fermé pour $\sigma(E', E)$. Retenons qu'il existe deux types de convexes fermés dans E' :

a)- Les convexes fortement fermés [ou fermés pour $\sigma(E', E'')$ – ce qui revient au même. d'après le théorème]

b)- Les convexes fermés pour $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.1.16 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' ; \|f\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.

Remarque 1.1.17 On verra dans la suite (théorème 1.2.11) que la boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte. On comprend alors l'importance fondamentale de la topologie $\sigma(E', E)$ et du théorème.

1.1.5 Espaces uniformément convexes

Définition 1.1.8 On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que [1]

$$(x, y \in E, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta \right). \quad (1.31)$$

On notera que cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité (qui doit être bien ronde) et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente.

Exemple 1.1.2 On prend $E = \mathbb{R}^2$. La norme $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ est uniformément convexe tandis que la norme $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ n'est pas uniformément convexe.

Exemple 1.1.3 *Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, de même que les espaces $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$. Par contre $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ et $C(K)$ (K compact) ne sont pas uniformément convexes.*

En effet ;

Théorème 1.1.18 (Milman-Pettis) *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Exemple 1.1.4 .

1. *Tout espace de Hilbert est réflexif, de même que les espaces L^p pour $1 < p < \infty$. De manière générale : tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif d'après le théorème de Milman-Pettis.*
2. *Les espaces de Montel sont aussi réflexifs.*
3. *Les espace de suites l^1 et l^∞ ne sont pas réflexifs. L'espace $C([0, 1])$ non plus.*

Remarque 1.1.19 *Il est suprenant qu'une propriété de nature géométrique (uniforme convexité) entraîne une propriété de nature topologie (réflexivité). L'uniforme convexité est souvent un outil commode pour prouver qu'un espace est réflexif, Il convient de noter que cette propriété peut ne pas être conservée si on passe à une norme équivalente. Ainsi dans le cas du plan $\mathbb{R}^2$, la norme $\|\cdot\|_2$ est uniformément convexe, alors que les normes $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$ ne le sont pas.*

1.2 Espace $L^p, 1 \leq p \leq \infty$

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx . On suppose que les notions de fonctions intégrables, de fonctions mesurables et d'ensemble négligeables [voir par exemple Marle [1]] soit connus. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose [1]

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx. \quad (1.32)$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté on écrira souvent L^1 au lieu de $L^1(\Omega)$ et $\int f$ au lieu de $\int_{\Omega} f(x) dx$. Comme d'habitude on identifie deux fonctions de L^1 qui coïncident p.p. =presque partout.

1.2.1 Grands théorèmes de convergences

Théorème 1.2.1 (Théorème de convergence monotone Beppo Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de L^1 telle que $\sup_n \int f_n < \infty$.

Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Théorème 1.2.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit (f_n) une suite de fonction de L^1 . On suppose que

- a)- $f_n(X) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω ,
 - b)- il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n , $|f_n(X)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .
- Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Lemme 1.2.1 (Lemme de Fatou) Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 telle que

- (1) pour chaque n , $f_n(X) \geq 0$ p.p. sur Ω
 - (2) $\sup_n \int f_n < \infty$.
- Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(X)$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (1.33)$$

Notation 1.2.3 On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est-à-dire $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus \mathbb{K} \text{ où } \mathbb{K} \subset \Omega \text{ est un compact}\}$.

Théorème 1.2.4 (théorème de densité) théorème de densité L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$; c'est-à-dire $\forall f \in L^1(\Omega)$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon$.

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Théorème 1.2.5 (Tonelli) On suppose que

$$\int_{\Omega} |F(x, y)| dy < \infty \text{ pour presque tout } x \in \Omega_1 \quad (1.34)$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty. \quad (1.35)$$

Alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 1.2.6 (Fubini) *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L_y^1(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy \in L_x^1(\Omega_1). \quad (1.36)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L_x^1(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L_y^1(\Omega_2). \quad (1.37)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy. \quad (1.38)$$

1.2.2 Définition et propriétés élémentaires des espace L^p

Définition 1.2.1 *Soit $1 \leq p < \infty$; on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\} \quad (1.39)$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.40)$$

Définition 1.2.2 *On pose $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$ et on note .*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega.\} \quad (1.41)$$

Proposition 1.2.1 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme .[1]*

Remarque 1.2.7 *Si $f \in L^\infty$ on a*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p. sur } \Omega. \quad (1.42)$$

En effet il existe une suite C_n telle que $C_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$ et pour chaque n , $|f(x)| \leq C_n$ p.p. sur Ω .

Donc $|f(x)| \leq C_n$ pour tout $x \in \Omega \setminus E_n$ avec E_n négligeable. On pose $E = \bigcup_n E_n$ de sorte que E est négligeable et l'on a $|f(x)| \leq C_n$ pour tout $x \in \Omega \setminus E_n$. Par conséquent $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ pour tout $x \in \Omega \setminus E$.

Notation 1.2.8 Soit $1 \leq p < \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.2.9 (Inégalité de Hölder) Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p < \infty$.

Alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \quad (1.43)$$

Remarque 1.2.10 Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder : soient $f_1, f_2, \dots, f_k$ des fonctions telles que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1. \quad (1.44)$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}. \quad (1.45)$$

En particulier si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et l'on a l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{\alpha-1} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1); \quad (1.46)$$

Théorème 1.2.11 (Fisher-Riesz) L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Théorème 1.2.12 Soient $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ des réels (ou des complexes). Alors :

$$\sum_{k=1}^n |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.47)$$

Théorème 1.2.13 Soient $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors :

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.48)$$

Inégalité de Minkowski

Théorème 1.2.14 On fait les mêmes hypothèses que pour l'inégalité de Hölder. Alors :

$$\left(\sum |u_k + v_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum |u_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |v_k|^p \right)^{1/p} \quad (1.49)$$

$$\left(\int |f + g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \right)^{1/p}. \quad (1.50)$$

Théorème 1.2.15 Soient (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Alors il existe une sous-espace extraite (f_{n_k}) telle que

(a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \forall k$ et p.p. sur Ω , avec $h \in L^p$.

1.2.3 Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p

Nous allons distinguer l'étude des trois cas [1] :

$$1 < p < \infty$$

$$p = 1 \quad (1.51)$$

$$p = \infty \quad (1.52)$$

ÉTUDE DE L^p POUR $1 < p < \infty$

Il s'agit du cas le plus favorable : L^p est réflexif séparable et le dual de L^p s'identifie à $L^{p'}$.

En effet ;

Théorème 1.2.16 L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

La démonstration est composée en plusieurs étapes. On montre d'abord la réflexivité de L^p pour $2 \leq p \leq \infty$ en utilisant la première inégalité de Clarkson :

Soit $2 \leq p < \infty$; on a

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f, g \in L^p. \quad (1.53)$$

On montre ensuite que L^p est uniformément convexe pour $2 < p < \infty$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \|g\|_{L^p} \leq 1 \text{ et } \|f - g\|_{L^p} > \varepsilon. \quad (1.54)$$

On déduit de que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \text{ et donc } \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta \quad (1.55)$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} > 0 \quad (1.56)$$

Par conséquent L^p est uniformément convexe et donc réflexif.

Pour montrer que L^p est réflexif pour $1 < p < 2$. On utilise à cet effet la 2^e inégalité de Clarkson valable pour $1 < p < 2$:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \leq \left[\frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{(p-1)}} \quad (1.57)$$

Cette inégalité est sensiblement plus difficile à établir que la 1^{re} inégalité de Clarkson ; voir par exemple [1]

Théorème 1.2.17 (Théorème de représentation de Riesz) Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$.

Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p. \quad (1.58)$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}. \quad (1.59)$$

Remarque 1.2.18 *Le théorème est important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^p avec $1 < p < \infty$ se représente à l'aide d'une fonction de $L^{p'}$. L'application $\varphi \rightarrow u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p avec $L^{p'}$. Dans la suite on fera systématiquement l'identification*

$$(L^p)' = L^{p'}. \quad (1.60)$$

Théorème 1.2.19 (Densité) *L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Commençons par une définition et un lemme.

Définition 1.2.3 *Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L_{loc}^p(\Omega)$ si $f\mathbb{I}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.*

Lemme 1.2.2 *Soit $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tel que*

$$\int f u = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega). \quad (1.61)$$

Alors $f = 0$ p.p. sur Ω .

Théorème 1.2.20 *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

B/- ÉTUDE DE L^1

Théorème 1.2.21 *Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1. \quad (1.62)$$

On a de plus

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}. \quad (1.63)$$

Remarque 1.2.22 *Le théorème affirme que toute forme linéaire continue sur L^1 se représente à l'aide d'une fonction de L^∞ . L'application $\varphi \rightarrow u$ est une isométrie surjective qui permet d'identifier $(L^1)'$ et L^∞ on fera systématiquement l'identification*

$$(L^1)' = L^\infty. \quad (1.64)$$

Proposition 1.2.2 *L'espace L^1 n'est pas réflexif.*

En effet supposons (pour fixer les idées) que $0 \in \Omega$. Considérons la suite $f_n = \alpha_n 1_{B(0, \frac{1}{n})}$ avec n assez grand pour que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\alpha_n = |B(0, \frac{1}{n})|^{-1}$ de sorte que $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Si L^1 était réflexif il existerait une sous-suite extraite (f_{n_k}) et fonction $f \in L^1$ tels que $f_{n_k} \rightarrow f$ pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Donc

$$\int f_{n_k} \varphi \rightarrow \int f \varphi \quad \forall \varphi \in L^\infty. \quad (1.65)$$

Lorsque $\varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ on voit que $\int f_{n_k} \varphi = 0$ pour k assez grand. Il résulte de que

$$\int f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}). \quad (1.66)$$

On appliquant dans l'ouvert $\Omega \setminus \{0\}$ à la fonction f (restreinte à $\Omega \setminus \{0\}$) on obtient que $f = 0$ *p.p.* sur $\Omega \setminus \{0\}$. Donc en fait $f = 0$ *p.p.* sur Ω . Par ailleurs si l'on prend $\varphi \equiv 1$ dans il vient $\int f = 1$ – ce qui absurde.

B/- ÉTUDE DE L^∞ On a vu (Théorème 1.2.21) que $L^\infty = (L^1)'$. De ce fait, l'espace L^∞ possède quelques propriétés agréables. Entre autres, on a :

- (i) La boule unité fermée B_{L^∞} est compacte pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ Théorème
- (ii) Si (f_n) est une suite bornée dans L^∞ on peut en extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Toutefois L^∞ n'est pas réflexif (sinon L^1 le serait d'après le corollaire et on sait que L^1 n'est pas réflexif).

Le dual de L^∞ contient L^1 (puisque $(L^1)' = L^\infty$) et il est strictement plus grand que L^1 : il existe des formes φ linéaires et continues sur L^∞ qui ne sont pas du type

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^\infty \text{ avec } u \in L^1. \quad (1.67)$$

Remarque 1.2.23 *Si le dual de L^∞ ne coïncide pas avec L^1 on peut néanmoins se demander à quoi ressemble $(L^\infty)'$. En fait $(L^\infty)'$ s'identifie à l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathbb{k}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$*

Proposition 1.2.3 *L'espace L^∞ n'est pas séparable.*

1.2.4 Convolution et régularisation

Dans tout ce paragraphe, sauf à la proposition et au corollaire on prend $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 1.2.24 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \rightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.

On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy. \quad (1.68)$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}. \quad (1.69)$$

Notation 1.2.25 Étant donnée une fonction f on pose $f(x) = f(-x)$.

Proposition 1.2.4 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$.

Alors on a

$$\int (f * g)h = \int g(\tilde{f} * h). \quad (1.70)$$

Supports dans la convolution

La notion de support d'une fonction continue est bien connue : c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle ou, ce qui revient au même, l'adhérence de l'ensemble $\{x; f(x) \neq 0\}$. Quand on travaille avec des fonctions mesurables il faut être plus prudent – puisque ces fonctions sont seulement définies presque partout – et la définition précédente ne convient plus [on pourra s'en convaincre en considérant $1_\circ$]. La définition appropriée est la suivante :

Proposition 1.2.5 Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ p.p. sur ω_i . on pose $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$.

Alors $f = 0$ p.p. sur ω .

Par définition, $\text{Supp } f = \Omega \setminus \omega$.

Remarque 1.2.26 a)- Si f_1 et f_2 sont deux fonctions telles que $f_1 = f_2$ p.p. sur Ω , alors $\text{supp } f_1 = \text{Supp } f_2$.

On peut donc parler du support d'une fonction $f \in L^p$ (sans préciser quel représentant on choisit dans la classe de l'équivalence).
b)- Si f est continue sur Ω on vérifie aisément que cette définition coïncide avec la définition usuelle.

Proposition 1.2.6 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$\text{Supp } (f * g) \subset \overline{\text{Supp } f + \text{Supp } g} \quad (1.71)$$

Proposition 1.2.7 Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$f * g \in C(\mathbb{R}^N). \quad (1.72)$$

Notation 1.2.27 $C^k(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega) \quad (1.73)$$

$$C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \quad (1.74)$$

$$C^\infty_c(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) \quad (1.75)$$

(certains auteurs utilisent la notation $D(\Omega)$ ou bien $C^\infty_0(\Omega)$ au lieu de $C^\infty_c(\Omega)$)

Proposition 1.2.8 Soient $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (k entier). Alors

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \text{ et } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g. \quad (1.76)$$

En particulier si $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

1.2.5 Suites régularisantes

Définition 1.2.4 On appelle suite régularisantes (mollifiers en anglais) toute suite $(p_n)_{n \geq 1}$ de fonctions telle que

$$p_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N), \text{ Supp } p_n \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right), \int p_n = 1, p_n \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N. \quad (1.77)$$

Dorénavant on utilisera systématiquement la notation (p_n) pour désigner une suite régularisante.

Remarquons qu'il existe des suites régularisantes. En effet, il suffit de fixer une fonction $p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\text{Supp } p \subset B(0, 1)$, $p \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\int p > 0$; prendre par exemple la fonction

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{|x|^2}-1} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (1.78)$$

On considère ensuite $p_n(x) = C_{n^N} p(nx)$ avec $C = (\int p)^{-1}$.

Proposition 1.2.9 *Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$; alors $p_n * f \rightarrow f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$.*

Théorème 1.2.28 *Soit $f \in L^P(\mathbb{R}^N)$ et soit $1 \leq p < \infty$. Alors $p_n * f \rightarrow f$ dans $L^P(\mathbb{R}^N)$.*

Corollaire 1.2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert quelconque. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^P(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Signalons enfin la question délicate suivante : Quels sont les ensembles de $L^1(\Omega)$ qui sont relativement compacts pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$?

La réponse est fournie par :

Théorème 1.2.29 (Dunford-Pettis) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné (pour simplifier). Soit $\mathbb{F} \subset L^1(\Omega)$ un sous-ensemble borné.*

Alors $\mathbb{F}$ est relativement compact pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si l'on a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que} \quad (1.79)$$

$$\int_A |f| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathbb{F} \text{ et } \forall A \subset \Omega \text{ avec } |A| < \delta. \quad (1.80)$$

Fonctions à valeurs vectorielles Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit E un espace de Banach. On définit $L^P(\Omega; E)$ comme étant l'espace des fonctions définies sur Ω , à valeurs dans E , mesurables en un sens à préciser, telles que $\int_\Omega \|f(x)\|^p dx < \infty$ (modification usuelle pour $p = \infty$). La plupart des propriétés rencontrées aux sont encore valables moyennant des hypothèses convenables sur E (E séparable, ou bien E réflexif). Par exemple si E est réflexif et $1 < p < \infty$, alors $L^{p'}(\Omega; E')$ (voir par exemple Edwards [1], L.Schwartz [5] et Marale [1] si E est un Hilbert). Ces espaces jouent un rôle important dans la théorie des équations d'évolution (Ω est alors un intervalle de $\mathbb{R}$).

Théorie de l'interpolation Citons un résultat important qui est le point de départ de cette théorie.

Inégalité de Young

Théorème 1.2.30 (Young) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec

$$1 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0. \quad (1.81)$$

Alors

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.82)$$

Pour la démonstration voir par exemple [1]

Chapitre 2

Distributions et espace de Schwartz

introduction Il y a plusieurs raisons pour introduire la notion de distribution. Certaines sont d'ordre purement physique (expérimental même) alors que d'autres sont des raisons plus mathématiques.

La définition naturelle de la transformée de Fourier d'une distribution T , devrait être

$$\forall \varphi \in D, \quad \langle F(T), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle \quad (2.1)$$

Mais il y a un problème car on peut démontrer qu'une fonction à support borné a une transformée de Fourier dont le support n'est pas borné, donc si on $\varphi \in D$ est sûr que $F(\varphi)$ n'est pas dans D sauf si φ est identiquement nulle. D'où la nécessité de réduire les contraintes que l'on a imposées à l'ensemble des fonctions test.

2.1 Distributions

Nous définissons les distributions de la façon.

Définition 2.1.1 Une distribution est une application T qui à chaque fonction de fait correspondre un nombre complexe $T(\varphi)$ fini qui vérifie la propriété suivante

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi). \quad (2.2)$$

pour tous nombres complexes a et b et toutes fonctions tests φ et ψ dans D .

Remarque 2.1.1 *En termes algébriques, on voit donc qu'une distribution T est une forme linéaire sur l'espace vectoriel D . D'où la notation D' qui indique que l'espace des distributions est en fait un espace dual de l'espace vectoriel des fonctions.*

En théorie des distributions on note en général $T(\varphi)$ sous la forme $\langle T, \varphi \rangle$ et on dit que la distribution T est appliquée à φ . L'espace des distributions D' est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, il suffit pour cela de définir la somme $T_1 + T_2$ de deux distributions ainsi que le produit aT d'un nombre complexe a et d'une distribution T . On définit

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \text{Pour tout } \varphi \text{ dans } D \quad (2.3)$$

$$a \langle T, \varphi \rangle = \langle aT, \varphi \rangle \quad \text{Pour tout } \varphi \text{ dans } D, \text{ pour tout } a \text{ dans } \mathbb{C} \quad (2.4)$$

La distribution nulle, quant à elle, est définie par

$$T = 0 \Leftrightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \text{Pour tout } \varphi \text{ dans } D, \quad (2.5)$$

Remarque 2.1.2 *Remarquons qu'une telle définition est parfaitement raisonnable du point de vue expérimental puisqu'elle veut dire qu'une quantité physique est nulle si et seulement si n'importe quelle mesure représentée par φ donne un résultat nul.*

Cependant, Il n'est pas question de définir le produit de deux distributions quelconques entre elles

2.1.1 Distributions régulières

Définition 2.1.2 *Une fonction f est dite localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle borné (fini). On note $f \in L^1_{loc}$ cette propriété.*

Exemple 2.1.1 *À toute fonction localement intégrable on peut associer une distribution définie par*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx, \quad (2.6)$$

pour toute fonction test φ dans D .

Exemple 2.1.2 *Étant données deux fonctions localement intégrables f et g sont égales presque partout, les distributions associées sont égales,*

$$T_f = T_g. \quad (2.7)$$

Théorème 2.1.3

$$T_f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x. \quad (2.8)$$

Définition 2.1.3 *Une distribution T est régulière si elle est associée à une fonction localement intégrable f .*

Notation 2.1.4 *Lorsque le contexte ne prête à aucune confusion, il est très souvent plus simple de noter T_f tout simplement f .*

Exemple 2.1.3 *La fonction de Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{sin on.} \end{cases} \quad (2.9)$$

définit la distribution de Heaviside H par

$$\langle H, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \phi(x) dx, \quad (2.10)$$

et la fonction $2H(x) - 1 = \text{sgn}(x)$ définit la distribution ϵ , qui est aussi notée $\text{sgn}(x)$.

2.1.2 Distributions non régulières

En fait, toute distribution qui n'est pas associée à une fonction localement intégrable est dite non régulière.

Exemple 2.1.4 *La distribution de Dirac δ à l'origine est définie par*

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \text{ pour toute fonction test } \phi \quad (2.11)$$

.

n'est pas régulière.

Exemple 2.1.5 La forme linéaire $vp\frac{1}{x}$ définie par

$$\left\langle vp\frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x < -\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{x > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \right] \quad \text{pour toute fonction test } \phi \quad (2.12)$$

est une distribution non régulière.

2.1.3 Dérivée d'une distributions

C'est une opération qui est toujours réalisable et celà autant de fois que l'on veut sur les distributions !

Définition 2.1.4 Considérons une fonction $x \mapsto f(x)$ qui est dérivable à dérivée continue pour tout x , on dit que c'est une fonction C^1 , et on note $x \mapsto f'(x)$ sa dérivée. Les deux fonctions f et f' définissent chacune une distribution que nous noterons aussi respectivement f et f' et on a

$$\langle f', \phi \rangle = - \langle f, \phi' \rangle \quad \text{pour tout } \phi \quad (2.13)$$

On vérifie que pour une distribution régulière T_f associée à une fonction f qui est C^1 , on retrouve la formule précédente.

Exemple 2.1.6 a/- Pour une constante K on a $K' = 0$.

b/- $H' = \delta$

c/- $(\text{sign}_x)' = 2\delta$

d :/ La dérivée p -ième $\delta^{(p)}$ de δ est définie par $\langle \delta^{(p)}, \phi \rangle = (-1)^p \phi^{(p)}(0)$, pour toute fonction test ϕ

e/ Les deux distributions δ et δ' sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que si a et b sont deux nombres complexes arbitrairesfinir

Théorème 2.1.5 Formule des sauts. Soit une fonction F de classe C^1 par morceaux, on suppose pour simplifier la présentation, qu'elle n'a de discontinuité qu'en un seul point a de l'axe réel, on a

$$(Tf)' = T_{\{f'\}} + \sigma_a \delta_a. \quad (2.14)$$

où σ_a désigne le saut (fin) de la fonction au point a , défini par : $\sigma_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a - \varepsilon)$, $T_{\{f'\}}$ est la distribution régulière associée à la fonction définie presque partout $x \rightarrow f'(x)$.

La généralisation est immédiate au cas où la fonction f possède N sauts aux points $\{a_i\}_1^N$

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^N \sigma_{a_i} \delta_{a_i} \quad (2.15)$$

2.2 Distributions tempérées

Quel soit d-uple d'entiers naturels $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, quel que soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$, on note

$$x^\beta := x_1^{\beta_1} \dots x_d^{\beta_d}, \quad (2.16)$$

si ∂^α désigne la dérivée partielle d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ définie par

$$\partial^\alpha \varphi := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \varphi \quad (2.17)$$

est une fonction $|\alpha|$ fois différentiable (on utilisera aussi la notation ∂^α pour les distributions).

Qu'est-ce qu'une distribution tempérée ?

On peut voir l'espace de Schwartz comme un ensemble de fonctions test permettant de définir des « fonctions généralisées » que l'on appellera plus précisément des distributions tempérées. Celles-ci n'auront pas nécessairement des valeurs ponctuelles mais seront définies au travers de leurs valeurs contre les fonctions test.

Les distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ comprennent tout d'abord toutes les fonctions ordinaires f telles que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.18)$$

soit une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. (Notons que puisque $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est métrisable, la continuité d'une forme linéaire équivaut à sa séquentielle.)

C'est le cas par exemple si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. En effet, d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \quad (2.19)$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ s'injectait continûment dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

C'est le cas aussi pour une fonction f localement intégrable et à croissance au plus polynomiale, c'est-à-dire pour laquelle il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.20)$$

Car alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|)^k |\varphi(x)| dx \leq C q_{0,k+m}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|)^{-m} dx \quad (2.21)$$

pour $m > d$.

Définition 2.2.1 Une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Étant donnée une distribution tempérée T on note généralement $\langle T, \varphi \rangle$ l'image d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ par T . En particulier, dans les deux exemples cités ci-dessus, on identifie la fonction f avec la distribution tempérée T_f définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.22)$$

Remarque 2.2.1 Bien entendu, l'ensemble des distributions tempérées comprend aussi des objets qui ne sont pas des fonctions. Le plus célèbre d'entre eux, dont l'introduction est antérieure au développement de la théorie des distributions par L. Schwartz, est la masse de Dirac δ , définie par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (2.23)$$

C'est clairement une distribution tempérée puisque

$$\langle \delta, \varphi \rangle \leq p_{0,0}(\varphi). \quad (2.24)$$

On définit de même δ_y quel que soit $y \in \mathbb{R}^d$ par $\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y)$.

La masse de Dirac est en fait une mesure de Radon, c'est-à-dire forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues bornées.

Voici un autre exemple de distribution tempérée sur $\mathbb{R}$. Il est basé sur la fonction $f : x \neq 0 \mapsto 1/x$, qui n'est pas localement intégrable. De ce fait, on ne peut pas la voir comme une distribution tempérée. Cependant, on lui associe une distribution tempérée appelée valeur principale de $1/x$, en observant que pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$,

Définition 2.2.2

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (2.25)$$

existe et définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Remarque 2.2.2 L'expression vague de « fonction généralisée » peut être trompeuse (en laissant entendre qu'il existe en effet des fonctions d'apparence anodine qui ne sont pas des distributions tempérées). C'est le cas par exemple de la fonction analytique $x \mapsto e^{x^2}$: son défaut est de tendre beaucoup trop vite vers l'infini en $\pm\infty$; en particulier pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$ on a $\int e^{x^2} \varphi(x) = +\infty$.

L'espace $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^d)$ L'ensemble des distributions tempérées forme évidemment un espace vectoriel. Il est naturellement muni de la topologie duale faible, définie par la convergence faible * des suites : une suite de distributions tempérées $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{L}'(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si, quel que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, la suite numérique $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$.

Un exemple fondamental de convergence au sens des distributions est celui des approximations de l'unité, qui donnent une représentation de la masse de Dirac comme limite de suites de fonctions C^∞ à support compact.

Définition 2.2.3 On appelle approximation de l'unité une famille de fonctions ρ_ε pour $\varepsilon > 0$ telle que

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \rho(x/\epsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.26)$$

avec $\rho \in D(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale 1. (On suppose de plus $\rho \geq 0$.)

Notons que si $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une approximation d'unité alors par changement d'échelle on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x) dx = 1, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.27)$$

C'est cette propriété fondamentale qui permet de montrer que ρ_ϵ tend vers δ dans $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque ϵ tend vers zéro. En effet, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) (\varphi(\epsilon y) - \varphi(0)) dy. \quad (2.28)$$

Remarque 2.2.3 Cette dernière intégrale est fait prise sur un compact fixe (le support de ρ), et comme φ est continue, elle converge vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro d'après le théorème de Lebesgue.

Un autre exemple tout aussi important de convergence au sens des distributions est fourni par le lemme de Riemann-Lebesgue des distributions, il signifie en effet que la famille de fonctions $x \mapsto e^{i\zeta x}$ tend vers zéro au sens des distributions lorsque ζ tend vers $+\infty$.

Définition 2.2.4 Ainsi on a deux exemples vraiment différents de convergence au sens des distributions. Dans le premier on a un phénomène de concentration autour de 0, vu pas les distributions mais pas par les fonctions (notre que pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\rho_\epsilon(x)$ tend vers zéro), et dans le second il s'agit d'oscillations à haute fréquence, vues par les fonctions mais pas par les distributions (la limite au sens des distributions se réduisant à la valeur moyenne des fonctions, c'est-à-dire ici 0).

Problème 2.2.4 *Quid des distributions non tempérées ?*

D'après les injections continues et denses $D(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow l(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow J(\mathbb{R}^d)$, on a

$$J'(\mathbb{R}^d) \subset l'(\mathbb{R}^d) \subset D'(\mathbb{R}^d), \quad (2.29)$$

où $D'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des distributions (tout court), c'est-à-dire des formes linéaires continues sur $D(\mathbb{R}^d)$, et $l'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des distributions à support compact, qui s'avèrent être les formes linéaires continues sur $l(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.2.5 Le support d'une distribution (tempérée) T est le complémentaire de l'union de tous les ouverts ω tels que

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d); \quad \text{supp } \varphi \subset \omega \quad (2.30)$$

(sachant que le support d'une fonction φ continue est l'adhérence de l'ensemble des points où φ ne s'annule pas).

Cette définition d'apparence alambiquée est cohérente avec la notion de support pour les fonctions : si f est une fonction continue à support compact K , cela signifie que le complémentaire de K , Ω est l'intérieur de l'ensemble des points où f s'annule ; autrement dit, si $x \in \Omega$ il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $f|_{\omega} \equiv 0$, de sorte que $\int f\varphi = 0$ quelle que soit $\varphi \in D(\omega)$; réciproquement, si $x \in \omega$ tel que $\int f\varphi = 0$ quelle que soit $\varphi \in D(\omega)$ alors $f|_{\omega} \equiv 0$ et donc $x \in \Omega$. Par exemple, le support de la masse de Dirac δ est réduit au singleton $\{0\}$ (et plus généralement le support de δ_y est $\{y\}$).

Tout fonction localement intégrable s'identifie à une distribution : si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors on peut lui associer $T_f \in D'(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d). \quad (2.31)$$

On remarque en outre que l'application $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \mapsto T_f$ est injective. Par exemple, la fonction citée plus haut, $x \mapsto e^{x^2}$ peut être vue comme une distribution (mais rappelons le, pas comme une distribution tempérée).

2.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction

Pour généraliser le produit de fonctions, on peut définir le produit d'une distribution T par une fonction ψ en posant

$$\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle, \quad (2.32)$$

à condition que l'ensemble des fonctions test φ soit stable par multiplication par ψ . C'est le cas pour toute fonction ψ de classe C^∞ lorsque les fonctions test sont C^∞ à support compact : autrement dit, quelles que soient $T \in D'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in l(\mathbb{R}^d)$, $\psi T \in D'(\mathbb{R}^d)$. Si de plus T est une distribution tempérée, rien ne dit que ψT soit encore une distribution tempérée. D'après les résultats de stabilité de $l(\mathbb{R}^d)$ vus plus haut, ce sera le cas si ψ est elle même une fonction C^∞ à décroissance rapide, ou si c'est une fonction polynomiale. Si T est à support compact, alors quelle que soit $\psi \in l(\mathbb{R}^d)$, ψT est à support compact. À titre d'exemple, notons que $x\delta$ n'est rien d'autre que la distribution nulle, tandis que $xv.p.(1/x)$ s'identifie avec la fonction constante égale à 1.

Remarque 2.2.5 *En revanche, il est impossible de définir un produit $\ll$ raisonnable $\gg$ entre distributions : il n'y a en tous cas aucune chance pour qu'il prolonge le produit des distributions par les fonctions tout en étant associatif, car sinon on aurait*

$$0 = v.p.(1/x)(x\delta) = (v.p.(1/x)x)\delta = \delta. \quad (2.33)$$

Remarque 2.2.6 *Rien n'autorise à multiplier une distribution par $x \mapsto 1/x$. D'ailleurs, on montre qu'une distribution T vérifie $xT = 0$ si et seulement si $T = c\delta$, où c est une constante arbitraire. On en déduit par exemple que $xT = 1$ si et seulement si $T = v.p.(1/x) + c\delta$, où c est une constante arbitraire.*

2.2.2 Dérivation au sens des distributions

La puissance de la théorie des distributions réside sans doute dans le fait que l'on puisse dériver n'importe quelle distribution à n'importe quel ordre. La définition de la dérivée d'une distribution est simplement obtenue par généralisation de l'intégration par parties.

Définition 2.2.6 *Soient T une distribution (tempérée ou non) et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors la formule*

$$\langle \theta^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \theta^\alpha \varphi \rangle \quad (2.34)$$

définit une unique distribution $\theta^\alpha T$ (tempérée si T l'est).

Il faut prendre garde à ce qu'en général, la dérivée d'une fonction au sens des distributions ne coïncide pas avec sa dérivée au sens classique. C'est le cas notamment pour les fonctions

dérivables par morceaux. L'exemple de base est celui de la fonction de Heaviside

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.35)$$

$$x \mapsto H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

En effet, par définition

$$\langle T'_H, \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad (2.37)$$

c'est-à-dire $T'_H = \delta$ (tandis qu'au sens des fonctions, H' est définie et vaut 0 partout sauf en 0, c'est-à-dire que H' se confond avec la fonction nulle). Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 2.2.1 (Formule des sauts) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$, évenuellement discontinue en 0 mais ayant des limites finies à gauche et à droite de 0. On note

$$|f| = \lim_{x \searrow 0} f(x) - \lim_{x \nearrow 0} f(x). \quad (2.38)$$

Alors sa dérivée au sens des distributions est donnée par

$$T'_f = T_{f'} + |f| \delta. \quad (2.39)$$

La démonstration est une simple application de la formule d'intégration par parties. On vérifie facilement que la formule de Leibniz s'étend au produit d'une distribution par une fonction de class C^∞ .

La dérivation fournit de nouveaux exemples de distributions, avec notamment les dérivées de la masse de Dirac. En particulier, la dérivée première de $\delta \in \mathcal{L}'(\mathbb{R})$ est définie par

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0). \quad (2.40)$$

Remarque 2.2.7 D'après la formule de Leibniz généralisée, on a pour tout $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$,

$$(\psi \delta)' = \psi' \delta + \psi \delta'. \quad (2.41)$$

Il faut toutefois prendre garde au fait que $\psi\delta'$ ne se réduit pas simplement à $\psi(0)\delta'$: le calcul montre que

$$\psi\delta' = \psi(0)\delta' - \psi'(0)\delta, \quad (2.42)$$

de sorte que la formule de dérivation du produit ci-dessus s'écrit aussi

$$(\psi\delta)' = (\psi' - \psi'(0))\delta + \psi(0)\delta' = \psi(0)\delta'. \quad (2.43)$$

Le résultat général suivant montre que les dérivées de la masse de Dirac jouent un rôle très important.

Théorème 2.2.8 *Toute distribution dont le support est réduit au singleton $\{0\}$ est une combinaison linéaire finie de dérivées (au sens des distributions) de la masse de Dirac en 0.*

Indication Pour la première, se ramener par des changement de variable appropriés au cas $m = 0$, $d = 1$, puis en résolvant par exemple une équation différentielle, au calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$; pour la seconde, appliquer le théorème de Cauchy à la fonction

$$z; \operatorname{Re} z < 0 \mapsto \left\langle e^{z\|x\|^2}, \varphi \right\rangle \quad (2.44)$$

où $\varphi \in l(\mathbb{R}^d)$ est fixée, utiliser le premier résultat de faire un passage à la limite.

Convolution On généralise facilement la convolution des fonctions à la convolution d'une distribution tempérée avec une fonction C^∞ à décroissance rapide. En effet, si $\psi \in l(\mathbb{R}^d)$ alors quel que soit $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto \psi(x - y)$ appartient aussi à la classe de Schwartz. Par conséquent, quel que soit $T \in l'(\mathbb{R}^d)$, on peut définir une fonction $T * \psi = \psi * T$ par

$$(T * \psi)(x) = \langle T, \psi(x - \cdot) \rangle. \quad (2.45)$$

L'exemple fondamental est la convolution par la masse de Dirac :

$$(\delta * \psi)(x) = \psi(x). \quad (2.46)$$

De façon générale, $T * \psi$ définie comme ci-dessus est une fonction C^∞ , de dérivées

$$\partial^\alpha (T * \psi)(x) = \langle T, \partial^\alpha \psi(x - \cdot) \rangle. \quad (2.47)$$

Toutefois son comportement à l'infini n'est pas évident. Du coup on peut se demander si c'est même seulement une distribution tempérée. La réponse est heureusement affirmative. En effet, pour tout $\varphi \in l(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T * \psi)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle \varphi(x) dx \quad (2.48)$$

$$\left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - \cdot) \varphi(x) dx \right\rangle \quad (2.49)$$

par linéarité de T et de l'intégrale (ceci demanderait quelque justification), c'est-à-dire encore

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T * \psi)(x) \varphi(x) dx = \langle T, \psi * \varphi \rangle, \quad (2.50)$$

où $\psi(x) := \psi(-x)$. Ceci est en fait un moyen de définir $T * \psi$ directement comme une distribution tempérée, en posant

$$\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle T, \psi * \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in l(\mathbb{R}^d). \quad (2.51)$$

On voit ainsi facilement que le lien entre produit de convolution et produit ordinaire via la transformation de Fourier, exprimé dans la formule

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \mathcal{F}(\psi), \quad (2.52)$$

se généralise au produit de convolution entre $l(\mathbb{R}^d)$ et $l'(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{F}(T * \psi) = \mathcal{F}(T) \mathcal{F}(\psi). \quad (2.53)$$

En effet,

$$\langle \mathcal{F}(T * \psi), \varphi \rangle = \langle T * \psi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \psi * \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \widehat{T}, \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) \right\rangle. \quad (2.54)$$

Or, d'après (2.51) et la formule d'inversion de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(\Phi)(-x), \quad (2.55)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) = (2\pi)^d \mathcal{F}^{-1}(\psi) \varphi = \left(\mathcal{F}(\check{\psi}) \right) \check{\varphi} = \widehat{\psi} \varphi. \quad (2.56)$$

On en déduit la relation attendue :

$$\langle \mathcal{F}(\varphi * \psi), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(\psi) \mathcal{F}(T), \varphi \rangle. \quad (2.57)$$

2.3 Espace de schwartz

Définition 2.3.1 Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide si elle est indéfiniment différentiable et si pour tout $\alpha, \beta \in N^d$, $P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$. L'ensemble des fonctions à décroissance rapide est l'espace de Schwartz, noté $S(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 2.3.1 Il est facile de voir qu'une fonction est à décroissance rapide si et seulement si le produit de toutes ses dérivées par n'importe quel polynôme tend vers 0 en l'infini.

Définition 2.3.2 Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dit à croissance Lente si elle est indéfiniment différentiable et si pour tout $\alpha \in N^d$, il existe $C_\alpha \in \mathbb{R}$ et $q_\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $|\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + \|x\|)^{q_\alpha}$. Cet espace noté $O_M(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 2.3.2 Les fonctions à croissance à lente sont donc, elle et leurs dérivées, à croissance au plus polynôme à l'infini.

Proposition 2.3.1 $S(\mathbb{R}^d)$ muni de la famille dénombrable de semi-normes $(p_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta) \in N^d \times N^d}$ est un espace de Fréchet qui s'injecte continûment dans $\varphi_0(\mathbb{R}^d)$ et $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour tout $p \in [1, \infty]$.

Remarque 2.3.3 Il est parfois plus commode de remplacer les semi-normes $p_{\alpha,\beta}(f) = \sup |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$ par la famille $q_{m,\beta}(f) = \sup (1 + \|x\|^2)^m |\partial^\beta f(x)|$ avec $(m, \beta) \in N \times N^d$, on obtient bien sûr la même topologie.

Les fonctions teste sont un cas particulier de fonctions à décroissance rapide :

Proposition 2.3.2 $D(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue et à image dense.

$S(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Montel :

Proposition 2.3.3 Les compacts $S(\mathbb{R}^d)$ sont les fermés bornés.

Théorème 2.3.4 Tous les opérateurs suivants sont des applications linéaires continues de $S(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même :

- (i) Les translations τ_a pour $a \in \mathbb{R}^d$: $\tau_a f(x) := f(x - a)$,
- (ii) Les dilatations d_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $d_\lambda f(x) := f(x/\lambda)$,
- (iii) Les dérivations ∂^α pour $\alpha \in N^d$, $\partial^\alpha f(x) := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$,
- (iv) La convolution par un élément $g \in S(\mathbb{R}^d)$: $g \star f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) f(y) dy$,
- (v) La multiplication par un élément $g \in O_M(\mathbb{R}^d)$: $(gf)(x) = g(x) f(x)$,

Remarque 2.3.5 La transformation de Fourier : $\mathbb{F}(\varphi) = \hat{f}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \zeta} dx$. Cette dernière est même un isomorphisme d'algèbre de $(S(\mathbb{R}^d), \star)$ sur $(S(\mathbb{R}^d), \times)$ dont l'inverse est $\mathbb{F}^{-1} : \varphi \rightarrow (2\pi)^{-d} \check{\varphi}$.

Théorème 2.3.6 Le point (iv) peut-être précisé légèrement : en réalité si g est une fonction dont le produit avec tout polynôme est intégrable (i.e. $g \in L_S^1(\mathbb{R}^d)$ - voir le cours), alors la convolution par g définit également un opérateur linéaire continu de $S(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même (sans aucune hypothèse de régularité sur g).

Remarque 2.3.7 Les deux derniers points sont les principales différences avec $D(\mathbb{R}^d)$. La stabilité par trans-formée de Fourier un nous permettre d'étendre cette-ci à une classe particulière de distributions.

Distributions tempérées

Définition 2.3.3 La dual topologique de $S(\mathbb{R}^d)$ est noté $S'(\mathbb{R}^d)$, c'est l'espace des distributions tempérées. On le munit dans toute la suite de la topologie faible- $\star$.

L'injection à image dense $D(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^d)$ se renverse quand on passe au dual :

Proposition 2.3.4 Si $S \in S'(\mathbb{R}^d)$, la restriction T de S à $S'(\mathbb{R}^d)$, est une distribution sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant pour une certaine constante C , un certain entier $q \in \mathbb{N}$ et toute fonction test φ :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d, |\alpha| \leq q} (1 + \|x\|^q) |\partial^\alpha \varphi(x)|. \quad (2.58)$$

Inversement, une distribution T vérifiant une inégalité de la forme précédente se prolonge de façon unique en une distribution tempérée.

Proposition 2.3.5 Une distribution à support compact est tempérée. Une distribution tempérée est nécessairement d'ordre fini.

On sait que tout élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ définit une distribution. Ce résultat tombe en défaut dans le cas des distributions tempérées : il faut imposer une condition de comportement à l'infini aux fonctions pour s'assurer que celles-ci définissent bel et bien une distribution tempérée :

Proposition 2.3.6 Il existe des fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que T_f ne se prolonge pas en une distribution tempérée. Une condition suffisante pour assurer que T_f se prolonge en une distribution tempérée est l'existence de $m \in \mathbb{N}$ et de $p \in [1, \infty[$ tels que la fonction $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{-m} f(x)$ appartiennent $L^p(\mathbb{R}^d)$.

2.3.1 Opérations sur les distributions tempérées :

Proposition 2.3.7 Soit T une distribution tempérée et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La distribution $\partial^\alpha T$ est une distribution tempérée. L'opérateur $T \mapsto \partial^\alpha T$ est continu de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Proposition 2.3.8 -Définition : Soit T une distribution tempérée et g une fonction à croissance lente. L'application définie sur $S(\mathbb{R}^d)$ par $\varphi \mapsto \langle T, g\varphi \rangle$ est une distribution tempérée appelée produit de T par g et notée $g \cdot T$. L'opérateur $T \mapsto g \cdot T$ est continu de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Comme $S'(\mathbb{R}^d)$ est stable par convolution, on peut définir gratuitement le produit de convolution d'une distribution tempérée et d'une fonction à décroissance rapide :

Proposition 2.3.9 -Définition : Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in S'(\mathbb{R}^d)$. L'application définie sur $S(\mathbb{R}^d)$ par $\varphi \mapsto \langle T, \check{\psi} \star \varphi \rangle$ est une distribution tempérée appelée produit de convolution de T par ψ et notée $\psi \star T$. L'application $T \mapsto \psi \star T$ est continu de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Remarque 2.3.8 Dans le même esprit qu'une remarque effectuée précédemment, cette définition peut-être considérablement généralisée : la convolution peut-être définie exactement de la même manière avec un élément de $L_S^1(\mathbb{R}^d)$.

2.3.2 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Théorème 2.3.9 -définition : Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$. L'application définie sur $S'(\mathbb{R}^d)$ par $\varphi \mapsto \langle T, \hat{\varphi} \rangle$ est une distribution tempérée appelée transformée de Fourier de $\hat{T}$ ou $\mathbb{F}(T)$. [?, ?, ?]

Théorème 2.3.10 Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$. L'application définie sur $S(\mathbb{R}^d)$ par $\varphi \mapsto \langle T, \mathbb{F}^{-1}(\varphi) \rangle$ est une distribution tempérée appelée transformée de Fourier inverse de T et notée $\mathbb{F}^{-1}(T)$. Les applications linéaires $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^{-1}$ sont continues de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et inverses l'une de l'autre.

Comme d'habitude toutes ces définitions prolongent le cadre fonctionnel connues se généralisent :

Proposition 2.3.10 Soit T une distribution tempérée. Pour tout $k \in [1, d]$ on a $\widehat{\partial_k T} = i\zeta_k \cdot \hat{T}$ et $\partial_k \hat{T} = -i\widehat{x_k \cdot T}$.

Remarque 2.3.11 Les produits sont biens définis car les distributions sont tempérées et les fonctions polynômiales !

Proposition 2.3.11 Soient $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{\varphi \star T} = \hat{\varphi} \cdot \hat{T}$.

Théorème 2.3.12 Si T est une distribution à support compact, sa transformée de Fourier est une fonction à croissance lente, i.e. $\hat{T} \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et une expression de celle-ci est donnée par $\hat{T}(\zeta) := \langle T, e_\zeta \rangle$ où $e_\zeta : x \mapsto e^{-ix \cdot \zeta}$.

Remarque 2.3.13 On sait que l'ensemble des distributions à supports compacts coïncide avec lz dual de $\psi^\infty(\mathbb{R}^d)$: le crochet a bien un sens.

Proposition 2.3.12 Soit T une distribution à support compact. La convolution par T est un opérateur linéaire continu de $S(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même

2.4 Transformées de Fourier des distributions

2.4.1 Transformée de Fourier dans S'

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ ou de $L^2(\mathbb{R})$, la distribution $[f]$ est une distribution à croissance lente à l'infini (car elle ne croît pas à l'infini) donc dans S' . Et on a :

$$\forall \varphi \in S \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(y) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) F(\varphi)(x) dx \quad (2.59)$$

En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(y) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi yx) dx \right) \varphi(y) dy \quad (2.60)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi yx) \varphi(y) dx dy \quad (2.61)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp(-2i\pi yx) dy \right) f(x) dx \quad (2.62)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) F(\varphi)(x) dx \quad (2.63)$$

donc on a $\langle [F(f)], \varphi \rangle = \langle [f], F(\varphi) \rangle$. On peut donc généraliser à toute distribution tempérée la notion de transformée de Fourier.

Définition 2.4.1 Soit une distribution tempérée T ($T \in S'$) on appelle transformée de Fourier de T la distribution tempérée notée $F(T)$ définie par :

$$\forall \varphi \in S, \quad \langle F(T), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle. \quad (2.64)$$

La transformée de Fourier inversr $F^{-1}(T)$ est définie par :

$$\forall \varphi \in S, \quad \langle F^{-1}(T), \varphi \rangle = \left\langle \begin{matrix} T, \\ F^{-1}(\varphi) \end{matrix} \right\rangle. \quad (2.65)$$

Dans le cas où $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$, $F(f)$ existe au sens des fonctions, $[f]$ une distribution tempérée et sa transformée de Fourier est la distribution tempérée associée à la fonction $F(f)$:

$$F([f]) = [F(f)]. \quad (2.66)$$

On a bien une généralisation de la transformée de Fourier des fonctions.

Exemple 2.4.1 Transformée de Fourier d'un Dirac δ_a .

On a :

$$\forall \varphi \in S, \langle F(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, F(\varphi) \rangle = F(\varphi)(a) \quad (2.67)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi va) \varphi(v) dv = \langle [\exp(-2i\pi va)], \varphi \rangle. \quad (2.68)$$

d'où

$$F(\delta_a) = [\exp(-2i\pi va)] = \exp(-2i\pi va). \quad (2.69)$$

On omet souvent les crochets quand il est clair qu'il sagit de distributions. On a en particulier :

$$F(\delta) = 1. \quad (2.70)$$

Exemple 2.4.2 Transformée de Fourier de la distribution tempérée associée à la fonction constante égale à 1 (fonction qui n'est ni $L^1(\mathbb{R})$ ni $L^2(\mathbb{R})$ et dont la transformée de Fourier au sens des fonction n'existe pas!).

$$\langle F(1), \varphi \rangle = \langle 1, F(\varphi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varphi)(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi v 0) F(\varphi)(v) dv \quad (2.71)$$

$$= F^{-1}F(\varphi)(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad (2.72)$$

donc

$$F(1) = \delta. \quad (2.73)$$

Voici quelques résultats utiles concernant la transformée de Fourier de distributions tempérées usuelles.

$$F(\delta_0) = 1 \text{ et } F(1) = \delta_0. \quad (2.74)$$

$$F(\delta(t-a)) = e^{-2i\pi va} \text{ et } F(e^{-2i\pi ta}) = \delta(v-a). \quad (2.75)$$

$$F(\delta^{(m)}) = (2i\pi v)^m \text{ et } F(t^m) = \frac{1}{(-2i\pi)^m} \delta^{(m)}. \quad (2.76)$$

$$F\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(v-n) \text{ et } F\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-n\theta)\right) = \frac{1}{\theta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{n}{\theta}\right). \quad (2.77)$$

Les deux dernières formules, qui concernent le peigne de Dirac, ne sont pas simples à démontrer mais elle sont d'une importance capitale pour comprendre le lien entre un signal continu et le signal échantillonné.

D'une manière générale, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée a des propriétés similaires à celles vues pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ ou de $L^2(\mathbb{R})$.

Voici ces propriétés.

Théorème 2.4.1 *La transformée de Fourier est une application linéaire bijective de S' dans S' et on a :*

$$F^{-1}(F(T)) = F(F^{-1}(T)) = T. \quad (2.78)$$

et comme pour les fonctions

$$F^{-1}(T)(v) = F(T)(-v). \quad (2.79)$$

On retrouve aussi les propriétés du produit de convolution.

Théorème 2.4.2 *Si les quantités ci-dessous sont définies et dans S' alors on a :*

$$F(S * T) = F(S) F(T) \text{ et } F(S \cdot T) = F(S) * F(T). \quad (2.80)$$

Le produit de convolution et les transformée de Fourier des distributions tempérées usuelles permettent de démontrer facilement que la transformée de Fourier des distributions tempérées vérifie les mêmes propriétés que la transformée de Fourier des fonctions.

Théorème 2.4.3 *Propriétés de la transformée de Fourier des distributions tempérée*

$$F(T') = 2i\pi v F(T) \text{ et } F(T)' = F(-2i\pi t T). \quad (2.81)$$

$$F(T^{(m)})(v) = (2i\pi v)^m F(T)(v) \text{ et } \frac{d^n F(T)(v)}{dv^n} = F((-2i\pi t)^n T)(v) \quad (2.82)$$

$$F(T(t-a)) = e^{-2i\pi va} F(T) \text{ et } F(e^{2i\pi ta} T) = F(T)(v-a). \quad (2.83)$$

$$F(T(at))(v) = \frac{1}{|a|} F(T(t))\left(\frac{v}{a}\right). \quad (2.84)$$

Preuve. En effet considérons par exemple la transformée de Fourier de la dérivée T' , on sait que $T' = \delta * T$, en utilisant (1.78) et (1.74) qui donne $F(\delta') = 2i\pi v$, on obtient

$$F(T') = F(\delta' * T) = F(\delta') F(T) = 2i\pi v F(T). \quad (2.85)$$

De même, par exemple la transformée de Fourier de la translatée :

$$F(T(t-a)) = F(\delta_a * T) = F(\delta_a) F(T) = e^{-2i\pi va} F(T) \quad (2.86)$$

■

Mais il y a aussi des propriétés propres aux distributions tempérées.

Théorème 2.4.4 *Si T est une distribution tempérée à support borné alors la suite des transformées de Fourier $F(T)$ est une distribution régulière associée à une fonction de classe C^∞ .*

Théorème 2.4.5 *Si la suite de distributions tempérées T_n tend vers T alors la suite des transformées de Fourier $F(T_n)$ tend vers $F(T)$.*

Cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas des fonctions comme on peut le voir sur des exemples.

Chapitre 3

Espaces de Sobolev

3.1 Motivations et théorie élémentaire

Considérons le problème suivant. Etant donné $f \in C([a, b])$, Trouvez une fonction u satisfaisante

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Une solution classique ou forte du problème (3.1) est une fonction de classe C^2 . Il est bien connu que (3.1) peut être résolue explicitement par un calcul très simple. Ignorons cette fonctionnalité afin d'illustrer la méthode sur cet exemple.

Multiplions (3.1) par $\varphi \in C^1([a, b])$ et intégrons par parties, on obtient :

$$\int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a, b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad (3.2)$$

Notons que (3.2) a un sens dès que $u \in C^1([a, b])$ alors que (3.1) nécessite deux dérivées sur u . En fait, il suffit de savoir que $u, u' \in L^1(a, b)$ Où u' a encore un sens à préciser. Disons (pour le moment) qu'une fonction u de classe C^1 qui satisfait (3.2) est une solution faible de (3.1)

Dans ce qui suit, on donne les éléments et les étapes principales de l'approche variationnelle (souvent utile dans la théorie des équations différentielles partielles) :

Étape A : La notion de solution faible devra être précisée. Cela implique l'introduction des espaces de Sobolev.

Étape B : L'existence et l'unicité d'une solution faible est établie par une méthode varia-

tionnelles via le théorème de Lax-Milgram.

Étape C : On exige que la solution faible soit de classe C^2 (par exemple) : il s'agit d'un résultat de régularité.

Étape D : Une solution classique est récupérée en remarquant que toute solution faible qui est C^2 est une solution classique.

Effectuer l'étape D est très simple. Supposons que $u \in C^2([a, b])$, $u(a) = u(b) = 0$, et que u satisfait (3.2). Intégrons (3.2) par parties, nous obtenons ;

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a, b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad (3.3)$$

et donc

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1((a, b)). \quad (3.4)$$

Il suit, selon un résultat de densité, que $-u'' + u = f$ p.p sur (a, b) et donc partout sur $[a, b]$ puisque $u \in C^2([a, b])$.

3.1.1 Premières propriétés

Définition 3.1.1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace de Sobolev, noté $W^{m,p}(\Omega)$, est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m , au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.

Pour ces dérivées, on pose $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \sum_1^N \alpha_i$ et on utilise la notation :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}. \quad (3.5)$$

L'espace de Sobolev d'ordre m s'écrit donc :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}. \quad (3.6)$$

Remarque 3.1.1 (sur la structure des dérivées dans un espace $W^{1,p}(\Omega)$) Pour se rendre compte plus précisément de la signification de : $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on peut utiliser la notion de dérivée, au sens usuel, des fonctions absolument continues.

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, pour tout i , cette fonction u est absolument continue sur presque

toutes les parallèles au vecteur $\vec{e}_i$ de la base de $\mathbb{R}^N$ et dérivée $\partial_i u$ au sens usuel de u , qui existe alors presque partout dans Ω , est une fonction de $L^p(\Omega)$ qui est égale p.p. à la fonction dérivée au sens des distributions. Réciproquement, si $u \in L^p(\Omega)$ est absolument continue sur presque toutes les parallèles à e_i , et ceci quel que soit i , avec des dérivées $\partial_i u \in L^p(\Omega)$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Il résulte que si u est de classe C^1 dans Ω , l'appartenance $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se vérifie en montrant que les fonctions u et $\partial_i u$ sont dans $L^p(\Omega)$. Cette propriété est utilisée dans les exemples qui suivent.

Remarque 3.1.2 Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$. [5]

Remarque 3.1.3 Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, on peut, en utilisant les transformées de Fourier $\zeta \mapsto \hat{u}(\zeta)$ des fonctions u de $L^2(\mathbb{R}^N)$, donner la définition équivalente :

$$W^{m,2}(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid \zeta \mapsto (1 + |\zeta|^2)^{m/2} \hat{u}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Exemple 3.1.1 Dans la boule $\Omega = B(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$, cherchons sous quelle conditions la fonction u définie, sauf à l'origine, par $u(x, y) = xy(x^2 + y^2)^{-\beta}$, où $\beta > 0$, est un élément de $H^1(\Omega)$.

Plus précisément, montrons que $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $\beta < 1$. L'intégrale de $|u|^2$ sur B existe si $5 - 4\beta > 1$, laquelle se traduit par $\beta < 3/2$. En effet, en coordonnées polaires, l'intégrant s'écrit précisément :

$$|u|^2 r dr d\theta = r^{5-4\beta} (\sin \theta \cos \theta)^2 dr d\theta. \quad (3.7)$$

Pour la dérivée, en x par exemple, au sens habituel,

$$\partial_x u = y(x^2 + y^2)^{-\beta} - 2\beta x^2 y (x^2 + y^2)^{-\beta-1}. \quad (3.8)$$

Elle est continue sauf en $(0, 0)$. L'intégrale de son carré se compose de trois termes où les puissances de r sont d'exposants égaux à $3 - 4\beta$, donc tous supérieurs strictement à -1 , si et seulement si la condition $\beta < 1$ est réalisée. Puisque la fonction est symétrique en x et y , on en déduit que u et ses dérivées sont alors dans $L^2(B)$, ce qui implique d'ailleurs, d'après la remarque précédente que ce sont des dérivées au sens des distributions.

Ceci terminer la preuve de la condition nécessaire et suffisante énoncée ci-dessus.

Exemple 3.1.2 Soit, dans l'espace $\mathbb{R}^N$ la boule unité ouvert $\Omega = B(0, 1)$. On pose : $r^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2$. Soit u définie par $u(x) = (1-r)^\beta (-\ln(1-r))^\alpha$ où α est un réel quelconque et $\beta > 0$. On cherche les conditions sur α et β pour que u soit dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Supposons $\alpha < 0$. La fonction u est continue dans $\overline{B}$ sauf au point $x = 0$. Le logarithme étant équivalent à r^α , la fonction $|u|^p$ est sommable sur B sous la condition $N - 1 + \alpha p > 1$, c'est-à-dire $\alpha > -N/p$. La dérivée au sens ordinaire, en x_1 par exemple, s'exprime par

$$\partial_1 u(x) = \frac{x_1}{r} [1-r]^{\beta-1} |\ln(1-r)|^{\alpha-1} [\beta |\ln(1-r)| + \alpha]. \quad (3.9)$$

Sa seule singularité se situe en $x = 0$ et, comme le logarithme est équivalent à $r^{\alpha-1}$, on obtient l'appartenance à $L^p(B)$ sous la condition $1 - \alpha < N/p$. Donc, pour $p < N$, la fonction u est dans $W^{1,p}(B)$ sous la condition $0 > \alpha > 1 - N/p$.

Si $\alpha > 0$, u se prolonge continûment sur $\overline{B}$ et, quel que soit $p > 1$, u est un élément de $L^p(B)$. Si $\beta > 1$, cette dérivée est continue et bornée sur Ω , donc appartient à $L^p(B)$. Si $0 < \beta < 1$, l'utilisation de la formule de Fubini montre qu'elle appartient à L^p si $p(\beta - 1) > -1$, c'est-à-dire : $\beta > 1 - 1/p$. Sous cette condition, les dérivées ordinaires appartiennent à $L^p(B)$. Par conséquent, $u \in W^{1,p}(B)$. On laisse au lecteur l'étude du cas $p(\beta - 1) = -1$.

Exemple 3.1.3 Soit, dans $\mathbb{R}^2$, l'ouvert

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^k < y < 2x^k\}, \quad (3.10)$$

où $k > 0$ est donné. On étudie, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'appartenance de $(x, y) \mapsto u(x, y) = y^\alpha$ aux espace H^m , pour $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Si $\alpha > 0$, la fonction u est continue par prolongement sur $\partial\Omega$, donc $u \in L^2(\Omega)$. La dérivée première $\partial_y u(x, y) = \alpha y^{\alpha-1}$ ne peut être prolongée au point $x = 0$ par continuité si $\alpha < 1$. Elle est cependant dans $L^2(\Omega)$ si l'intégrale

$$\int_0^1 \left[\int_{x^k}^{2x^k} y^{2\alpha-2} dy \right] dx \quad (3.11)$$

existe, ce qui se traduit par $(2\alpha - 1)k > -1$. On en déduit que, pour tout $k > 0$, on a $u \in H^1(\Omega)$ si $\alpha > 1/2 - 1/2k$.

La dérivée d'ordre 2 appartient à $L^2(\Omega)$ si $(2\alpha - 3)k > -1$, soit encore $\alpha > 3/2 - 1/2k$. Sous cette dernière condition, on a $u \in H^2(B)$. C'est le cas, par exemple, lorsque $k = 1/6$ et $\alpha > -3/2$, cas où u peut être non bornée sur Ω .

On peut continuer. On trouve que la condition d'appartenance à $H^m(\Omega)$ peut s'écrire : $(2\alpha - 2m + 1)k > 1$. On en déduit que l'on peut choisir, m étant donné, α et k , pour obtenir cette appartenance.

Proposition 3.1.1 *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme définie par :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\sum \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p} & \text{si } 1 \leq p \leq +\infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty, \end{cases} \quad (3.12)$$

est un espace de Banach. Pour $p \in]1, +\infty[$, cet espace est uniformément convexe, c'est donc un espace réflexif. L'espace $H^m(\Omega)$, muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad (3.13)$$

est un espace de Hilbert.

Une preuve est proposée dans l'exercice. Beaucoup de propositions de ce chapitre portent sur l'approximation des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ ou sur la densité de certains sous-espaces. Pour de tels problèmes, on utilise souvent un recouvrement de l'ouvert Ω par une famille d'ouverts $\{A_j\}$.

On admettra qu'alors on peut associer à un tel recouvrement une famille de fonctions $\{(\psi_j)\}$ dit partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement de Ω par les A_j :

Définition 3.1.2 *Une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à un recouvrement ouvert $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de l'ouvert Ω est un ensemble de fonctions ψ_j vérifiant :*

- (1) *Pour tout j , la fonction ψ_j est dans $C^\infty(\Omega)$, positive et à support contenu dans A_j .*
- (2) *Pour tout compact K de Ω , un nombre fini seulement de fonctions ψ_j ne sont pas identiquement nulles sur K .*

$$(3) \quad \forall x \in \Omega, \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(x) = 1.$$

On utilise d'ailleurs une telle partition dans la proposition qui suit, permettant l'approximation par l'intérieur des fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$, lorsqu'on ne fait aucune hypothèse de régularité

sur Ω . Cette proposition permet, par exemple, de remplacer dans les calculs, notamment lors des preuves des théorèmes d'injection de Sobolev, les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ par des fonctions $C^\infty(\Omega)$. [5]

Proposition 3.1.2 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Alors le sous-espace $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

· On commence par le cas de $\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. On considère une suite régularisante $x \mapsto p_\varepsilon(x) = 1/\varepsilon^N p(x/\varepsilon)$ et un réel $\delta > 0$. Dans la section en particulier dans la preuve du théorème.

on a vu que la fonction $p_\varepsilon \star u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et ses dérivées, lesquelles satisfont à $D^\alpha(p_\varepsilon \star u) = p_\varepsilon \star D^\alpha u$, sont des éléments de $L^p(\mathbb{R}^N)$ et aussi qu'il existe ε_0 tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, on ait :

$$\|u - p_\varepsilon \star u\|_{L^p} \leq \delta \text{ et, } \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \|D^\alpha u - p_\varepsilon \star D^\alpha u\|_{L^p} \leq \delta. \quad (3.14)$$

On en déduit que $p_\varepsilon \star u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et qu'il existe une constante C_m telle que :

$$\|u - p_\varepsilon \star u\|_{W^{m,p}} \leq C_m \delta, \quad (3.15)$$

ce qui termine la démonstration dans le cas de $\mathbb{R}^N$.

• Soit maintenant un ouvert $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. On utilise un recouvrement ouvert $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ de Ω , défini par :

$$\Omega_j = \{x \in \Omega \mid |x| \leq jC_1 \text{ et } d(x, \partial\Omega) > C_2/j + 1\}. \quad (3.16)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont choisies pour $\Omega_2 \neq \emptyset$. Cette suite d'ouverts bornés est croissante et recouvre Ω . En posant alors : $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$, on définit la suite d'ouverts $\{A_j\}$ telle que : $A_j = \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega_{j-1}}$, avec : $A_0 = \Omega_2$, $A_1 = \Omega_3$.

La famille $\{A_j\}$ constitue encore un recouvrement ouvert de Ω et on vérifie facilement que, si $|j - j'| \geq 3$ alors : $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$. Soit alors $\{\psi_j\}$ une partition de l'unité associée au recouvrement $\{A_j\}$. Soit aussi ε_j assez petit pour que, ε étant donné, on ait, à la fois :

$$\forall j \geq 2, A_j + B(0, \varepsilon_j) \subset A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}, \quad (3.17)$$

$$\forall j \geq 0, \|p_{\varepsilon_j} \star (\psi_j u) - (\psi_j u)\|_{W^{m,p}} < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}. \quad (3.18)$$

On considère alors la fonction $v^{(\varepsilon)}$ définie par :

$$v^{(\varepsilon)} = \sum_0^{+\infty} (p_{\varepsilon_j} \star (\psi_j u)) . \quad (3.19)$$

Cette fonction est bien définie car la somme du second membre est localement finie. On déduit des inégalités précédentes que $v^{(\varepsilon)} \in W^{m,p}(\Omega)$.

En utilisant $u = \sum_0^{+\infty} (\psi_j u)$, on peut terminer la preuve par l'inégalité :

$$\|v^{(\varepsilon)} - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \sum_0^{+\infty} \|p_{\varepsilon_j} \star (\psi_j u) - (\psi_j u)\|_{W^{m,p}} \quad (3.20)$$

$$\leq \sum_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon . \quad (3.21)$$

Corollaire 3.1.1 (1) Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ où p et p' satisfont à la condition $1/p + 1/p' = 1$. Alors, le produit uv appartient à $W^{1,1}(\Omega)$ et :

$$\forall i \in [1, N], \quad \partial(uv) = u\partial_i v + v\partial_i u, \quad (3.22)$$

toutes les expressions figurant dans cette égalité ayant un sens, compte tenu des hypothèses.

(2) Soit u appartenant à $W^{1,1}(\Omega)$. Alors $|u|^{N-1}u \in W^{1,1}(\Omega)$ ainsi que $|u|^N$ avec :

$$\nabla(|u|^N) = N|u|^{N-2}u\nabla u \text{ et } \nabla(|u|^{N-1}u) = N|u|^{N-1}\nabla u. \quad (3.23)$$

Remarque 3.1.4 Dans (2), $W^{1,N}(\Omega)$ peut être remplacé par $W^{1,q}(\Omega)$, pour $q \in]1, \infty[$; le résultat est alors :

Soit $u \in W^{1,q}(\Omega)$. Alors $|u|^{q-1}u$ et $|u|^q$ appartiennent à $W^{1,1}(\Omega)$, avec

$$\nabla(|u|^{q-1}u) = q|u|^{q-2}u\nabla u \text{ et } \nabla(|u|^q) = q|u|^{q-2}u\nabla u. \quad (3.24)$$

Preuve du corollaire.

(1) Par proposition précédente, il existe une suite $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors, au sens du produit d'une fonction de classe C^∞ par une distribution,

on a :

$$\partial_i (u_n v) = \partial_i (u_n) v + u_n \partial_i v. \quad (3.25)$$

Passons à la limite au sens des distributions dans le membre de gauche de cette égalité. On a $u_n v \in L^1(\Omega)$ et $\|u_n v - uv\|_{L^1} \leq \|u_n - u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}} \rightarrow 0$.

On en déduit que $\{u_n v\} \rightarrow uv$ dans L^1 , a fortiori au sens des distributions.

Alors, par une propriété des distributions, $\partial_i (u_n v) \rightarrow \partial_i (uv)$ au sens des distributions. De même, puisque $u_n \rightarrow u$ et $\partial_i u_n \rightarrow \partial_i u$ dans L^p , le second membre converge au sens de $D'(\Omega)$. Le passage à la limite donne ainsi l'égalité et, en outre, l'appartenance $\partial_i (uv) \in L^1$, d'où $uv \in W^{1,1}(\Omega)$.

(2) Soit une suite $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,N}(\Omega)$. On montre facilement que le gradient de $|u_n|^N$ est donné par

$$N |u_n|^{N-2} u_n [\nabla u_n]. \quad (3.26)$$

Puisque $N |u_n|^{N-2} u_n$ converge vers $|u|^{N-2} u$ dans $L^{N/(N-1)}$ et que ∇u_n converge vers ∇u dans L^N , on en déduit que $N |u_n|^{N-2} u_n \nabla u_n$ converge vers $N |u|^{N-2} u \nabla u$ dans L^1 . En outre, puisque $|u_n|^N \rightarrow |u|^N$ dans L^1 , cette convergence a lieu aussi dans $D'(\Omega)$. Le passage à la limite nous fournit donc l'identité :

$$\nabla (|u|^N) = N |u|^{N-2} u \nabla u. \quad (3.27)$$

Enfin, en utilisant Hölder avec les exposants conjugués $N/(N-1)$ et N , on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla (|u|^N)| dx \leq N \left(\int_{\Omega} |u|^N dx \right)^{N-1/N} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^N dx \right)^{1/N}. \quad (3.28)$$

On a donc prouvé que $|u|^{N-1} u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Le raisonnement est analogue pour la deuxième affirmation concernant le gradient de $|u|^{N-1} u$.

Corollaire 3.1.2 Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, ce qui signifie que, pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$, on a $\varphi u \in W^{1,p}(\Omega)$. Soit x_0 le point $(x'_0, t) \in \Omega$ où $x'_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. On désigne par $B'(x'_0, r) \times]-r, r[$, dont l'adhérence, pour r assez petit, est incluse dans Ω . Alors, pour presque tous les couples

(x', t) et (x', t') d'éléments de $B^*(x_0, r)$, on a :

$$u(x', t) - u(x', t') = \int_{t'}^t \partial_N u(x', s) ds. \quad (3.29)$$

Preuve du corollaire

• Pour $(t, t') \in]-r, r]^2$ et $x' \in B'(x'_0, r)$, posons

$$v(x') = \int_{t'}^t \partial_N u(x', s) ds. \quad (3.30)$$

On montre que $v \in L^p(B'(x'_0, r))$. Comme $\overline{B^*(x_0, r)} \subset \Omega$, la fonction $(x', s) \mapsto \partial_N u(x', s)$ est dans $L^p(\Omega)$, donc sommable en s sur l'intervalle $[t', t]$ inclus dans $]-r, r[$. Il en résulte que v est presque partout définie sur $B'(x'_0, r)$. Ensuite, en utilisant les formules de Hölder et de Fubini, on a pour tout couple (t, t') :

$$\|v\|_{L^p(B')}^p = \int_{B''} \left| \int \partial_N u(x', s) ds \right| dx' \quad (3.31)$$

$$\leq \int_{B'} |t - t'|^{p-1} \int_t^{t'} |\partial_N u(x', s)|^p ds dx' \quad (3.32)$$

$$\leq |t - t'|^{p-1} \int_{B^*} |\partial_N u(x)|^p dx < +\infty \quad (3.33)$$

Soit $\{u_n\}$ une suite de $C^\infty(B^*) \cap W^{1,p}(B^*)$ qui converge vers u . On définit la suite $\{u_n\}$ sur B' . On peut, de même, extraire de la suite $\{u_{n_j}\}$ une sous-suite $\{u_{\sigma(n)}\}$ qui converge p.p. vers u sur B^* . Les fonctions $u_{\sigma(n)}$ étant régulières, on a :

$$u_{\sigma(n)}(x', t) - u_{\sigma(n)}(x', t') = \int_t^{t'} \partial_N u_{\sigma(n)}(x', s) ds = v_{\sigma(n)}(x'). \quad (3.34)$$

En utilisant la convergence p.p. des deux membres, on obtient la formule du corollaire.

Une autre conséquence du théorème est très, en particulier, dans les procédés de prolongement d'une fonction de $W^{m,p}(\Omega)$ en une fonction de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ lorsque Ω est un ouvert $\ll$ Lipschitzien $\gg$. Ce procédé nécessite un changement de variable pour une fonction de $W^{m,p}(\Omega)$.

Corollaire 3.1.3 Soient deux ouverts bornés Ω et Ω' de $\mathbb{R}^N$ et une fonction a réalisant une

bijection de Ω' sur Ω , a et a^{-1} étant de plus toutes deux lipschitziennes. Soit p donné ≥ 1 . Alors, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la fonction composée $u \circ a$ est dans $W^{1,p}(\Omega')$, les dérivées de u au sens des distributions sont fournies par les formules habituelles de dérivation des fonctions composées et il existe une constante $C(|\nabla a|_\infty)$, dépendant de $|\nabla a|_\infty$, telle que :

$$\|u \circ a\|_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C(|\nabla a|_\infty) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (3.35)$$

Preuve du corollaire

• Soit une suite $\{u_n\}$ de $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. La fonction $y \mapsto v_n(y) = u_n(a(y))$ est lipschitzienne dans Ω' , a fortiori sur toutes les parallèles à l'un quelconque des axes de coordonnées y_i . Comme le caractère lipschitzien implique l'absolue continuité, on en déduit que v_n est p.p. dérivable dans Ω' et que :

$$p.p. \ y \in \Omega', \ \partial_i(v_n)(y) = \sum_1^N \partial_j(u_n)(a(y)) \partial_i(a_j)(y). \quad (3.36)$$

Utilisons alors le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 Les ouverts Ω et Ω' étant bornés, soit a une bijection continue de Ω' sur Ω telle que a^{-1} soit lipschitzienne. Alors, si $u \in L^p(\Omega)$, on a $u \circ a \in L^p(\Omega')$ et il existe une constante c telle que $\|u \circ a\|_{L^p(\Omega')} \leq c \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Poursuivons la preuve du corollaire en utilisant ce résultat. En l'appliquant à $\partial_i(u_n - u)$, l'inégalité du lemme fournit :

(*)

$$\|\partial_i(u_n) \circ a - \partial_i(u) \circ a\|_{L^p(\Omega')} \leq c \|\partial_i(u_n) - \partial_i(u)\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.37)$$

Comme on sait que $\partial_i(u_n) \rightarrow \partial_i u$ dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que $\{\partial_i(u_n) \circ a\}$ converge vers $\partial_i u \circ a$ dans $L^p(\Omega')$. Il en résulte, en utilisant (*) et les hypothèses selon lesquelles les ouverts et les dérivées $\partial_i(a_j)$ sont bornés, que la suite $\{\partial_i(v_n)\}$ converge dans $L^p(\Omega')$ vers la fonction $\sum_1^N (\partial_i u \circ a) \partial_i(a_j)$ qui est dans $L^p(\Omega')$. L'inégalité (*) fournit alors, par un passage à la limite pour une sous-suite :

$$p.p. \ y \in \Omega', \ \partial_i(u \circ a)(y) = \sum_1^N \partial_i(u)(a(y)) \partial_i(a_j)(y). \quad (3.38)$$

Puisque ces dérivées, au sens p.p., sont dans $L^p(\Omega')$, ce sont, d'après la remarque des dérivées au sens des distributions. D'après le lemme, on a : $u \circ a \in L^p(\Omega')$, il en résulte que $u \circ a \in W^{1,p}(\Omega')$. Par ailleurs $\|u \circ a\|_{L^p(\Omega')} \leq c \|u\|_{L^p(\Omega)}$ et $\|\partial_i(u \circ a)\|_{L^p(\Omega')} \leq c' \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|\nabla(a)\|_{L^\infty(\Omega')}$. On en déduit l'existence d'une constante C qui ne dépend que des constantes de Lipschitz de a et a^{-1} telle que : $\|u \circ a\|_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Preuve du lemme

Dans ce qui suit, on note L la constante de Lipschitz de a^{-1} . On se sert toujours de la suite $\{u_n\}$. En recouvrant $\overline{\Omega'}$ par un nombre fini n_η de N -hypercubes C_k d'arête 2η et en polongeant $u_n \circ a$ par 0 hors de Ω' , la définition de la Riemann-intégrabilité de $|u_n \circ a|^p$ nous fournit :

$$\int_{\Omega'} |u_n(a(y))|^p dy = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_1^{n_\eta} (2\eta)^N \inf_{y \in C_k} |u_n(a(y))|^p. \quad (3.39)$$

On peut supposer que tous ces hypercubes sont tels que $\overline{C_k} \subset \Omega'$. Soit y_k le centre de C_k , d'où $x_k = a(y_k) \in \Omega$. Si $x \in \partial(a(C_k))$, les propriétés de a impliquent $y = a^{-1}(x) \in \partial C_k$. Donc, comme $|y_k - y| \geq \eta$, on a pour les distances dans $\mathbb{R}^N$: $\eta \leq |y - y_k| = |a^{-1}(x) - a^{-1}(x_k)| \leq L|x - x_k|$. On en déduit que $a(C_k)$ contient la boule de centre x_k et de rayon η/L , d'où

$\text{mes}(a(C_k)) \geq \omega_N \eta^N / L^N \geq K \text{mes}(C_k)$, où K ne dépend que de N et L . On en déduit la majoration :

$$\sum_1^{n_\eta} \text{mes}(C_k) \inf_{y \in C_k} |u_n(a(y))|^p \leq \frac{1}{K} \sum_1^{n_\eta} \text{mes}(a(C_k)) \inf_{y \in a(C_k)} |u_n(x)|^p \quad (3.40)$$

$$\leq \frac{1}{K} \int_{\Omega} |u_n(x)|^p dx. \quad (3.41)$$

Un passage à la limite, lorsque $\eta \rightarrow 0$, fournit ainsi :

(**)

$$\int_{\Omega'} |u_n(a(y))|^p dy \leq \frac{1}{K} \int_{\Omega} |u_n(x)|^p dx. \quad (3.42)$$

On peut trouver une sous-suite $u_{\sigma(n)}$ qui converge p.p. vers u . Le lemme Fatou donne alors le résultat du lemme à partir de (**).

On donne maintenant pour $W^{1,p}$ une définition utilisant des approximations de dérivées par des opérateurs de translation.

Proposition 3.1.3 *Si $1 < p < \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $u \in W^{1,p}$,

(2) $u \in L^p(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que, ω étant un ouvert d'adhérence incluse dans Ω , on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad |h| \leq d(\omega, \partial\Omega) \Rightarrow \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C |h|. \quad (3.43)$$

Dans le cas $p = 1$, la propriété (2) doit être remplacée par :

(2') Pour chaque ouvert ω d'adhérence incluse dans Ω , il existe une constante $c(\omega)$ telle que $c(\omega) \leq C$, $c(\omega) \rightarrow 0$ lorsque $|\omega| \rightarrow 0$ et $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leq c(\omega) |h|$.

Preuve de la proposition

• On suppose $1 < p < +\infty$. Montrons d'abord que (1) $\Rightarrow$ (2), lorsque la translation est parallèle à un vecteur de base.

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\omega} \subset \Omega$, e_i le i -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et $h_0 = d(\omega, \partial\Omega)$. Alors $\bar{\omega} \subset \Omega$ implique $h_0 > 0$ et, si $|h| < h_0$, on a l'implication $x \in \omega \Rightarrow x + he_i \in \Omega$. Le corollaire fournit alors, pour tout h tel que $|h| < h_0$ et pour presque tout x dans ω , l'égalité :

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^h \partial_i u(x + se_i) ds. \quad (3.44)$$

Donc, en utilisant Hölder :

$$|u(x + he_i) - u(x)|^p \leq |h|^{p-1} \int_0^h |\partial_i u(x + se_i)|^p ds. \quad (3.45)$$

Puisque $|u|^p \in L^1(\Omega)$, on peut intégrer cette inégalité sur ω , d'où, à l'aide de Fubini et on observant que l'on a $\omega + B(0, h) \subset \Omega$:

$$\int_{\omega} |\tau_{he_i} u - u|^p(x) dx \leq |h|^{p-1} \int_0^h \int_{\omega} |\partial_i u(x + se_i)|^p dx ds. \quad (3.46)$$

$$\leq |h|^p \|\partial_i u\|_{L^p(\omega)}^p. \quad (3.47)$$

L'élévation de cette inégalité à la puissance d'exposant $1/p$ fournit la propriété (2) pour la

translation τ_{he_i} .

Pour $h \in \mathbb{R}^N$, il suffit, lorsque h satisfait à la condition $\omega + B(0, h) \subset \Omega$, de remplacer ∂_i par la dérivée suivant la direction de h , à savoir $\partial_h u = \nabla u \cdot (h/|h|)$. Finalement, on a la propriété (2), la constante qui y figure étant, par exemple, $C = \left(\sum_1^N \|\partial_i u\|_{L^p(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

• Montrons maintenant (2) $\Rightarrow$ (1).

Soit u vérifiant (2). Il s'agit de prouver que $\partial_i u \in L^p(\omega)$. Soit, en posant $h = 1/n$ par exemple, la suite $\{\tau_{he_i} u - u/h\}$ de distributions sur ω . On sait que cette suite converge dans $D'(\omega)$ vers la distribution $\partial_i u$. Cela signifie :

$$(*) \quad \forall \varphi \in D(\omega), \quad \left\langle \frac{\tau_{he_i} u - u}{h}, \varphi \right\rangle \rightarrow \langle \partial_i u, \varphi \rangle. \quad (3.48)$$

Or, grâce à la limite, lorsque $h \rightarrow 0$, dans cette inégalité nous donne, l'aide de (*), l'inégalité : $\langle \partial_i u, \varphi \rangle \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\omega)}$. Or, puisque $p' < \infty$, $D(\omega)$ est dense dans $L^{p'}(\omega)$. La distribution $\partial_i u$ définit donc une forme linéaire sur $L^{p'}(\omega)$ et l'inégalité précédente devient :

$$\forall g \in L^{p'}(\omega), \quad |\langle \partial_i u, g \rangle| \leq C \|g\|_{L^{p'}(\omega)}, \quad (3.49)$$

ce qui prouve que $\partial_i u$ est continue sur $L^{p'}(\omega)$. Elle s'identifie donc à une fonction de $L^p(\omega)$ dont, en outre, la norme satisfait à $\|\partial_i u\|_{L^p(\omega)} \leq C$. Cela étant vrai pour tout ouvert ω relativement compact dans Ω , on en déduit, en utilisant une suite croissante de tels ouverts, sur lesquels les normes dans L^p de $\partial_i u$ sont uniformément bornées, que $\partial_i u \in L^p(\Omega)$. Ce résultat étant ensuite vrai quel que soit i , il en résulte $u \in W^{1,p}(\Omega)$, ce qui termine.

• Cas où $p = 1$. Pour l'implication (1) $\Rightarrow$ (2'), le raisonnement reste celui qui précède et on voit dans l'inégalité qu'on peut utiliser une constante $c(\omega) \leq \int_{\omega+B(0,h)} |\nabla u(x)| dx$ qui tend donc vers $\int_{\omega} |\nabla u(x)| dx$ quand h tend vers 0. En particulier puisque $\nabla u \in L^1$, cette intégrale tend vers 0 lorsque $\text{mes}(\omega) \rightarrow 0$ (au sens de Lebesgue).

Inversement l'inégalité de (2') donne, par un argument analogue à celui du cas $p > 1$, que ∇u est dans le dual de $C_c(\Omega)$, ce qui signifie que ∇u est une mesure. Comme cette estimation ne dépend pas du support de φ , on en déduit que ∇u est une mesure bornée.

De plus, l'inégalité $\int_{\omega} |\nabla u| \leq c(\omega)$ montre que la mesure ∇u est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui montre que $\nabla u \in L^1(\omega)$. Puisque ω est arbitraire et que $c(\omega)$ est borné indépendamment de ω , on conclut $\nabla u \in L^1(\Omega)$.

Remarque 3.1.5 Dans le cas $p = 1$, il apparaît dans la preuve précédente que la condition (2) relative à $p > 1$ implique seulement l'appartenance $u \in BV(\Omega)$, espace des fonctions à variation bornée.

Définition 3.1.3 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, borné ou non. On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$.

Trouver une caractérisation intrinsèque des fonctions de $W_0^{m,p}(\Omega)$ n'est pas évident en général et dépend fortement de la structure de Ω . Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, une méthode de troncature et de régularisation permet de montrer :

Proposition 3.1.4 L'espace $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, donc :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N). \quad (3.50)$$

Preuve de la proposition

• Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$. Alors la suite u_n , définie par $u_n(x) = \varphi(x/n)u(x)$, converge vers u dans L^p de ces expressions par :

$$\frac{1}{n^j} |D^{\alpha_1} \varphi|_\infty \left(\int_{|x| \geq n} |D^{\alpha_2}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (3.51)$$

qui tend donc vers 0 puisque $j \geq 1$. On en déduit que :

$$|D^\alpha(\varphi_n u) - D^\alpha u|_p \leq |D^\alpha(\varphi_n u) - \varphi_n D^\alpha u|_p + |\varphi_n D^\alpha u - D^\alpha u|_p \quad (3.52)$$

est la somme de deux quantités qui tendent vers 0.

On utilise ensuite une régularisation. Si p est une fonction régularisante, on lui associe $p_n(x) = n^N p(nx)$ et $u_n = p_n \star (\varphi_n u)$. Alors, $\{u_n\}$, suite de fonctions appartenant à $D(\mathbb{R}^N)$ converge vers u dans $W^{1,p}$.

D'une manière générale, on verra que, sous des conditions de régularité concernant Ω , il suffira que la prolongée $\tilde{u}$ de u par 0 hors de Ω appartienne à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ pour qu'on puisse conclure à la propriété : $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Remarque 3.1.6 On proposera plus loin un résultat de densité de $C^1(\overline{\Omega})$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ dans le cas où Ω est lipschitzien.

Injectons de Sobolev pour $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$

Rappels de définitions d'espace fonctionnels Les entiers $j \geq 0$ étant donnés, on définit la famille des espace $C_b^j(\mathbb{R}^N)$ par :

$$C_b^j(\mathbb{R}^N) = \{u \in C^j(\mathbb{R}^N) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq j, \exists K_\alpha, \|D^{(\alpha)}u\|_\infty \leq K_\alpha\}.$$

Leurs sous-espaces $C_b^{j,\lambda}(\mathbb{R}^N)$, où λ est un réel strictement positif, sont constitués des fonctions de $C_b^j(\mathbb{R}^N)$ telles que, si $|\alpha| \leq j$, alors :

$$\exists C_{\alpha,\lambda}, \forall x, y \in \mathbb{R}^N, |D^{(\alpha)}u(x) - D^{(\alpha)}u(y)| \leq C_{\alpha,\lambda} |x - y|^\lambda. \quad (3.53)$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. On désigne par $L^1(\Omega)$ les fonctions intégrables sur Ω . On définit pour $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable, } |f|^p \in L^1(\Omega)\}, \quad (3.54)$$

et $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable telle que } \exists C / |f(x)| < Cp.p.\}.$

On rappelle que les espaces L^p sont de Banach, que l'on vérifie l'inégalité de Hölder. On note la norme sur $L^p(\Omega)$ $\|\cdot\|_p$. Si Ω est borné, la suite des espaces $L^p(\Omega)$ est décroissantes.

Signalons que si (f_n) converge vers f dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite qui converge presque partout vers f . Les fonctions continues à supports compacts dans Ω sont denses. Comme pour les espaces de Hilbert, si $1 \leq p < +\infty$ on peut faire l'identification du dual de $L^p(\Omega)$ par $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On peut représenter le dual de $L^\infty(\Omega)$ par l'ensemble des mesures bornées.

Rappelons le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov :

Théorème 3.1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit F un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\delta < d(\omega, \mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta, \forall f \in F. \quad (3.55)$$

Alors $F|_\omega$ est relativement compact dans $L^\infty(\Omega)$.

Dans la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.2 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

On appelle l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$, l'ensemble des fonctions de $L^p(I)$ dont la dérivée au sens des distributions est encore une fonction de $L^p(I)$, c'est-à-dire :

Définition 3.2.1 On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ par

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ telle que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}. \quad (3.56)$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$, on note $g = u'$. Si $p = 2$ alors on note $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. Il est clair que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p. \quad (3.57)$$

Proposition 3.2.1 L'espace $W^{1,p}(I)$; est un espace de Banach. L'espace $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

La preuve est immédiate par définition et complétude des espaces L^p .

Théorème 3.2.1 Soit $u \in W^{1,p}(I)$; alors il existe une fonction $v \in C^0(\bar{I})$ telle que $u = v$ presque partout sur I et

$$v(x) - v(y) = \int_y^x u'(t) dt, \quad \forall x, y \in \bar{I} \quad (3.58)$$

Preuve. Soit $x_0 \in I$ fixé, on pose $\omega(x) = \int_{x_0}^x u'(t) dt$.

La fonction ω est continue, (par définition si $p = 1$, par Hölder sinon) et est bien prolongeable par continuité aux bornes de I . Par Fubini si $I =]a, b[$ alors pour tout $\varphi \in C_c^1(I)$

$$\int_I \omega \varphi' = \int_a^{x_0} \left(\int_{x_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx + \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx \quad (3.59)$$

$$= - \int_a^{x_0} \left(\int_{x_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx + \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx \quad (3.60)$$

$$= - \int_a^{x_0} \left(\int_a^t \varphi'(x) dx \right) u'(t) dt + \int_{x_0}^b \left(\int_t^b \varphi'(x) dx \right) u'(t) dt \quad (3.61)$$

$$= - \int_a^{x_0} \varphi(t) u'(t) dt - \int_{x_0}^b \varphi(t) u'(t) dt \quad (3.62)$$

$$= - \int_a^b \varphi(t) u'(t) dt. \quad (3.63)$$

on vérifie donc au sens des distributions que $\omega' = u'$. Sur tout segment $J \subset I$, on a au sens des distributions $(\omega - u)' = 0$ donc il existe une constante C telle que $u = \omega + C$ presque

partout, on a bien $v = \omega + C \in C^0(I)$. De plus par Chasles

$$v(x) - v(y) = \int_y^x u'(t) dt, \quad \forall x, y \in I \quad (3.64)$$

■

Proposition 3.2.2 *Soit $u \in L^p(I)$ (avec $1 < p \leq \infty$). Alors $u \in W^{1,p}(I)$ si et seulement si il existe une constante C telle que*

$$\left| \int_I u \varphi \right| \leq C \|\varphi\|_{p'}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I). \quad (3.65)$$

Preuve. L'implication est immédiate, on obtient la réciproque par représentation des espaces duaux des espaces L^p . ■

Théorème 3.2.2 (Opérateur de prolongement) *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Il existe un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ linéaire et continue tel que :*

- i) $P(u)|_I = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(I).$
 - ii) $\|P(u)\|_p \leq C \|u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(I),$
 - iii) $\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I),$
- où C ne dépend que de la mesure de I .

Preuve. Dans le cas $I =]0, +\infty[$, on fait un prolongement par réflexion.

Dans le cas $I =]0, 1[$, on introduit une fonction μ, C^1 , décroissante, qui vaut 1 si $x < \frac{1}{4}$ et 0 si $x > \frac{3}{4}$. On prolonge alors toute fonction u en $\tilde{u}$ brutalement par 0 en dehors de I . On note que $\tilde{u} = \mu \tilde{u} + (1 - \mu) \tilde{u}$. On constate que $\mu \tilde{u}$ et $(1 - \mu) \tilde{u}$ sont des fonctions de $W^{1,p}$ sur des intervalles non-bornés, on peut alors appliquer le premier cas. ■

Théorème 3.2.3 (Densité) *Soit $u \in W^{1,p}(I)$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Il existe une suite de fonctions régulières à supports compacts qui converge vers u .*

Preuve. En utilisant l'opérateur de prolongement on peut se ramener au cas où $I = \mathbb{R}$. On montre alors le résultat par convolution et troncature.

On considère (ρ_n) une suite de fonctions régulières, $(\zeta_n) = (\zeta(\frac{x}{n}))$ une suite de fonctions de troncatures, et on étudie $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$. ■

3.2.1 Injection continue

Théorème 3.2.4 *L'espace $W^{1,p}(I)$ s'injecte de manière continue dans $L^\infty(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

De plus si I est borné, alors

i) l'injection de $W^{1,p}(I)$ dans $C^0(I)$ est compacte pour tout $1 < p \leq \infty$,

ii) l'injection de $W^{1,1}(I)$ dans $L^q(I)$ est compacte pour tout $1 \leq q < \infty$.

Preuve. 1) injection continue

On peut supposer $I = \mathbb{R}$ par prolongement.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit $G(t) = |t|^{p-1}t$. On note que G est C^1 et $G'(t) = p|t|^{p-1}$. Si u est C^1 alors

$$G(u)(x) = \int_{-\infty}^x p |u(s)|^{p-1} u'(s) ds. \quad (3.66)$$

Donc par Hölder $\|u\|_\infty^p \leq p \|u\|_p^{p-1} \|u'\|_p$. On conclut par densité.

2) injection compacte pour $p > 1$

On note que pour tout u dans la boule unité de $W^{1,p}(I)$

$$|u(x) - u(y)| \leq \left| \int_x^y u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_p |x - y|^{\frac{1}{p'}}, \quad (3.67)$$

On conclut par Ascoli.

3) injection compacte pour $p = 1$

Soit $h \in \mathbb{R}$, et $\omega \subset I$ tel que $\forall x \in \Omega, x + h \in \omega$

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)| dx = \int_\omega \left| \int_x^{x+h} u'(t) dt \right| dx \quad (3.68)$$

$$\leq \int_\omega |h| \int_0^1 |u'(x+hs)| ds dx \quad (3.69)$$

$$\leq \int_0^1 |h| \int_\omega |u'(x+hs)| ds dx \quad (3.70)$$

$$\leq |h| \|u'\|_1. \quad (3.71)$$

Donc

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx \leq (2 \|u\|_\infty)^{q-1} \int_\omega |u(x+h) - u(x)| dx \leq C |h| (2 \|u\|_\infty)^{q-1} \|u'\|_1. \quad (3.72)$$

On en déduit la compacité dans $L^q(\omega)$ par le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. De plus comme I est borné, en choisissant ω assez grand on a $\|u\|_{L^q(I \setminus \omega)} \leq C \|u\|_\infty^q \varepsilon$, on obtient alors compacité dans $L^q(I)$.

On déduit dans le cas d'un intervalle non-borné de l'injection continue dans L^∞ et la densité des fonctions régulières à support compact. ■

Proposition 3.2.3 *Si I est non-borné et $u \in W^{1,p}(I)$ alors*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (3.73)$$

Conclusion 3.2.5 *On déduit des résultats précédents que dans tous les cas les fonctions de $u \in W^{1,p}(I)$ sont définies aux bornes de I .*

3.3 Théorème de Trace

Étant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nous introduisons les notations

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \bar{\Omega} \subset \Omega_1, \exists f_1 \in C^m(\Omega_1) \text{ t.q. } f_1|_{\bar{\Omega}} = f\}, \quad (3.74)$$

et

$$C_0^m(\bar{\Omega}) = \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \bar{\Omega} \subset \Omega_1, \exists f_1 \in C_0^m(\Omega_1) \text{ t.q. } f_1|_{\bar{\Omega}} = f\} \quad (3.75)$$

3.3.1 Théorème de trace pour $\mathbb{R}_+^n$ et applications

Dans cette section, nous traitons le cas où

$$\begin{cases} \Omega = \mathbb{R}_+^n := \{x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \\ \Gamma := \partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \end{cases} \quad (3.76)$$

Proposition 3.3.1 *L'espace $C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^n)$.*

On peut bien-sûr parler de la trace d'une fonction v de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$: on définit $\gamma_0(v)$ par

$$\gamma_0(v)(x') = v(x', 0), \text{ pour tout } x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (3.77)$$

Il est clair que l'on a $\gamma_0(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. On a le lemme important suivant.

Lemme 3.3.1 *Pour toute $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, on a γ_0 définie par s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, telle que*

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}_+^n), \quad \|\gamma_0(v)\|_{0, \mathbb{R}^{n-1}} \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^n}. \quad (3.78)$$

Remarque 3.3.1 *Nous utiliserons également la notation $u|_{\partial\mathbb{R}_+^n}$ à la place de $\gamma_0(u)$.*

Théorème 3.3.2 *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour tous u et v dans $H^1(\mathbb{R}_+^n)$, on a les égalités (formules de Green)*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}_+^n} v(x) \partial_j u(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) \partial_j v(x) dx, & 1 \leq j \leq n-1, \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} v(x) \partial_n u(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) \partial_n v(x) dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0(v)(x') \gamma_0(u)(x') dx'. \end{cases} \quad (3.79)$$

Théorème 3.3.3 *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. On a l'égalité*

$$H_0^1(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in H^1(\mathbb{R}_+^n) \mid \gamma_0(u) = 0\}. \quad (3.80)$$

3.3.2 Théorème de trace pour un ouvert Ω et applications

Nous admettrons le résultat suivant, dont la démonstration est plus technique, que difficile.

Théorème 3.3.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega$ est une sous-variété fermée de classe C^k (avec $k \geq 1$) et de dimension $(n-1)$. Alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application qui à v dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ associe $\gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}$ se prolonge en un opérateur linéaire continu γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur de trace.*

Théorème 3.3.5 *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$ on a l'égalité (formule de Green)*

$$\int_{\Omega} v(x) \partial_j u(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \partial_j v(x) dx - \int_{\Omega} \gamma_0(v)(x') \gamma_0(u)(x') v_j \sigma(dx'), \quad (3.81)$$

où $v = (v_1, \dots, v_n)$ est la normale unitaire à $\partial\Omega$ dirigée vers l'intérieur de Ω et où σ désigne la mesure naturelle sur $\partial\Omega$.

Théorème 3.3.6 Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. On a l'égalité

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(u) = 0\}. \quad (3.82)$$

Remarque 3.3.7 Les résultats précédents s'étendent au cas où la frontière $\partial\Omega$ est seulement C^1 par morceaux (penser au cas où Ω est l'intérieur d'un rectangle de $\mathbb{R}^2$ ou bien d'un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$).

3.3.3 Cas de l'espace H^2

Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est assez régulière et soit $u \in H^2(\Omega)$. En particulier u est dans $H^1(\Omega)$ et on peut donc définir sa trace $\gamma_0(u)$ sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert. Les fonctions $\partial_j u$, pour $1 \leq j \leq n$ sont également dans $H^1(\Omega)$ et on peut donc définir leurs traces $\gamma_0(\partial_j u)$ sur le bord de Ω . On définit la dérivée normale intérieure de u le long de $\partial\Omega$ (au sens faible) par

$$\gamma_1(u) = \sum_{j=1}^n \nu_j \gamma_0(\partial_j u), \quad (3.83)$$

et on utilisera également les notations ν et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (comme ci-dessus, le vecteur normal unitaire le long de $\partial\Omega$ est dirigé vers l'intérieur et noté $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$).

Si $u, v \in H^2(\Omega)$ et si la frontière est assez régulière, on a la formule de Green

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} \langle du, dv \rangle dx + \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot u) v \sigma(dx) \quad (3.84)$$

3.3.4 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 3.3.1 Pour $1 \leq p < \infty$, on définit et on note $W_0^{1,p}(I)$, la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Par densité on sait que si $I = \mathbb{R}$, $W_0^{1,p}(I) = W^{1,p}(I)$. On montre que $W_0^{1,p}(I)$ est l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}(I)$ qui s'annule aux bornes de I .

Théorème 3.3.8 Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I .

Preuve. L'implication est immédiate par l'injection continue dans $L^\infty(I)$.

Pour la réciproque, on considère une fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 & \text{si } |t| < 1 \\ \varphi(t) = t & \text{si } |t| > 2. \end{cases} \quad (3.85)$$

On pose alors pour $u \in W^{1,p}(I)$ tel que $u = 0$ sur ∂I , $u_n = \frac{\varphi(nu)}{n}$. On montre que la suite (u_n) convient. ■

Proposition 3.3.2 (Inégalité de Poincaré) On suppose que I est borné. Alors il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|u'\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I). \quad (3.86)$$

Preuve. Il suffit de montrer que $u(x) = \int_a^x u'(t) dt$ si $I = [a, b]$ et $u \in W_0^{1,p}(I)$. On conclut par l'inégalité de Hölder. ■

3.3.5 Quelques applications

On s'intéresse à un problème de la forme

$$\begin{cases} -u'' + au' + bu = f & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = \alpha & u(1) = \beta \end{cases} \quad (3.87)$$

On peut donner un sens à cette équation pour $f \in L^2(]0, 1[)$ et $u \in H^1(]0, 1[)$. On parle alors de formulation faible :

$$\begin{cases} u \in H^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 u'v' + a \int_0^1 u'v + b \int_0^1 uv = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases} \quad (3.88)$$

On traite alors d'abord le cas des conditions de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} u \in H^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 u'v' + a \int_0^1 u'v + b \int_0^1 uv = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \end{cases} \quad (3.89)$$

On constate que ce problème est de la forme

$$\begin{cases} u \in H \\ A(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H' \end{cases} \quad (3.90)$$

avec A une forme bilinéaire et H un espace de Hilbert. On peut essayer de voir si les conditions de Lax-milgram peuvent s'appliquer.

En faisant apparaître une fonction régulière satisfaisant les conditions aux bornes du problème initial, on montre comment conclure sur l'existence de solutions faibles.

On étudiera aussi la régularité des solutions.

3.3.6 Convergence faible dans $L^p(I)$

Dans cette partie $1 < p < \infty$, et on note $q = p'$, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 3.3.2 On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^p(I)$ vers f si et seulement si

$$\forall g \in L^q(I), \quad \int_I f_n g \rightarrow \int_I f g, \quad (3.91)$$

on note alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(I)$.

On parlera alors de convergence forte dans $L^p(I)$ si $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ et on notera $f_n \rightarrow f$. Il est évident que la convergence forte implique la convergence faible. La réciproque est fausse. Par contre en cas de convergence faible signalons les résultats suivants.

Proposition 3.3.3 Soit (f_n) une suite telle que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(I)$. Soit (g_n) une suite telle que $g_n \rightarrow g$ dans $L^q(I)$ alors

$$\bullet \quad \left(\|f_n\|_p \right) \text{ est bornée,} \quad (3.92)$$

$$\bullet \quad \liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|, \quad (3.93)$$

$$\bullet \quad \int_I f_n g_n \rightarrow \int_I f g. \quad (3.94)$$

Les résultats précédents sont optimaux, on ne peut rien dire du produit de deux fonctions qui convergent faiblement.

Théorème 3.3.9 Soit (f_n) une suite bornée de $L^p(I)$ alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement.

Preuve. On peut faire une preuve utilisant la séparabilité de $L^q(I)$ et un procédé diagonal.

On va faire une preuve utilisant les espaces de Sobolev. On se place d'abord dans le cas où I est un intervalle borné, $I = [a, b]$.

Soit donc une suite (f_n) bornée dans $L^p(I)$. On introduit alors les fonctions :

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt. \quad (3.95)$$

On montre que les fonctions F_n sont bornées dans $W^{1,p}(I)$. Par injection compacte dans $C^0(I)$ on montre alors qu'il existe une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction $F \in C^0(I)$. Par convergence au sens des distributions, par densité des fonctions régulières dans $L^q(I)$, on montre que $F \in W^{1,p}(I)$ et que à une sous-suite près $f_n \rightarrow F'$.

Pour passer à un intervalle I non-borné, on utilise un procédé diagonale pour montrer qu'il existe une fonction f et une sous-suite telles que sur tout intervalle $[-k, k]$ inclus dans I on est convergence faible vers f . Ensuite on montre que $f \in L^p(I)$. ■

Remarque 3.3.10 *On déduit de la démonstration précédente que toute suite bornée de $W^{1,p}(I)$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans L^p et dont la dérivée converge faiblement.*

3.4 Théorèmes d'injection continue. Injections compactes

3.4.1 Résultats d'injections continues

Théorème 3.4.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, de classe C^k . Alors, on a les injections continues suivantes :*

1/- Si $N > kp$:

$$W^{k-1/p,p}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^{(N-1)p/(N-kp)}(\partial\Omega). \quad (3.96)$$

2/- Si $N = kp$:

$$\forall q < \infty, W^{k-1/p,p}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega). \quad (3.97)$$

3/- Si $N < kp$, alors, $[N/p]$ désignant la partie entière de N/p (supposé non entier) :

$$\forall \lambda \leq [N/p] + 1 - N/p, W^{k-1/p,p}(\partial\Omega) \hookrightarrow C_b^{k-[N/p]-1,\lambda}(\partial\Omega). \quad (3.98)$$

Si $N/p \in \mathbb{N}$, $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega) \hookrightarrow C_b^{k-N/p-1,\lambda}(\partial\Omega)$ quel que soit $\lambda < 1$.

Remarque 3.4.2 Si on étend la formule $W^{k,p}(\mathbb{R}^{N-1}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{N-1})$ dans le cas $kp > N-1$ à des exposant k non entiers, en particulier dans la situation présente, on trouve bien la condition :

$$q \leq \frac{(N-1)p}{N-1-(1-1/p)p} = \frac{(N-1)p}{N-p}. \quad (3.99)$$

On peut faire des remarques similaires dans les autres cas, $kp > N$ et $kp = N$. En fait, on montrera, une fois définis les espaces $W^{s,p}$ où s est > 0 et non entier, l'existence d'injections analogues pour tout s non entier.

Dans ce qui suit, on note $(\mathbb{R}^N)^+$ l'ouvert $\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[$. On débutera les preuves du théorème par ce cas particulier.

Preuve. des assertions (1) et (2) dans le cas où $\Omega = (\mathbb{R}^N)^+$.

• Assertion (1). On suppose dans ce paragraphe que $k = 1$ et donc que $p < N$.

Soit C une constante telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, il existe pour u un relèvement $U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)$, (donc $U(x', 0) = u(x')$) tel que :

$$\|U\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)} \leq C \|u\|_{1,p}. \quad (3.100)$$

Soit $\gamma = (N-1)p/(N-p)$, d'où $\gamma - 1 = (N(p-1))/(N-p)$. On écrit :

$$|U(x', 0)|^\gamma \leq \gamma \int_0^\infty |U(x', y)|^{\gamma-1} |\partial_N U(x', y)| dy. \quad (3.101)$$

En utilisant Hölder, on obtient :

$$|U(x', 0)|^\gamma \leq \gamma \left(\int_0^\infty |\partial_N U(x', y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |U(x', y)|^{Np/(N-p)} dy \right)^{1/p'} \quad (3.102)$$

Finalement, en intégrant par rapport à x' et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient pour la norme de u dans $L^\gamma(\mathbb{R}^{N-1})$:

$$\|u\|_\gamma^\gamma \leq \|\partial_N U\| \left(\int_{\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[} |U(x)|^{Np/(N-p)} dx \right)^{1/p'} \quad (3.103)$$

$$\leq C \|U\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)}, \quad (3.104)$$

ce qui donne le résultat souhaité dans l'affirmation (1) pour $k = 1$.

- Pour la suite de l'affirmation (1) dans le cas de $(\mathbb{R}^N)^+$, on fait une preuve par récurrence sur k .

Supposons donc que l'assertion 1 soit démontrée pour $k-1$. Soit $u \in W^{k-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$. Alors, par définition, on a $u \in W^{k-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $\partial_i^{k-1}u \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ pour tout $i \leq N-1$.

Par le théorème d'injection, puisque $(k-1)p < N-1$, on a $u \in L^{(N-1)p/(N-1-(k-1)p)}$.

L'appartenance $\partial_i u \in W^{k-1-1/p,p}$ implique, par l'hypothèse de récurrence, $\partial_i u \in L^{(N-1)p/(N-(k-1)p)}$.

Ainsi, on a

$$u \in L^p \text{ et } u \in L^{(N-1)p/(N-1-(k-1)p)} \quad (3.105)$$

et, puisque

$$(N-1)p/(N-(k-1)p) \in [p, (N-1)p/(N-1-(k-1)p)], \quad (3.106)$$

on en déduit $u \in L^{(N-1)p/(N-(k-1)p)}$.

Finalement, on a $u \in W^{1,(N-1)p/(N-(k-1)p)}$. On en déduit encore par le théorème d'injection que $u \in L^{(N-1)p/(N-kp)}$. L'assertion (1) est donc prouvée dans le cas de $(\mathbb{R}^N)^+$.

- On montre (2).

- Si $k = 1$, $p = N$, $W^{1,N}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)$ pour tout $q < \infty$. En utilisant l'inégalité (3.38) avec γ quelconque, on obtient $W^{1,1/N,N} \hookrightarrow L^q$ pour tout $q < \infty$.

- Supposons maintenant $k \geq 2$ et $kp = N$. Alors, on a $(k-1)p < N$, ce qui implique :

$$W^{k-1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}) \hookrightarrow L^{(N-1)p/(N-(k-1)p)}(\mathbb{R}^{N-1}) = L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}). \quad (3.107)$$

Mais u et ∇u appartiennent à $W^{k-1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, d'où il résulte que $u \in W^{1,N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Par le théorème d'injection de Sobolev pour les espaces $W^{1,N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$, on en déduit que $u \in L^q(\mathbb{R}^{N-1})$ pour tout $q < \infty$. L'assertion (2) est donc prouvée dans le cas de $(\mathbb{R}^N)^+$.

Preuve des assertions (1) et (2) dans le cas général.

- Soit maintenant Ω un ouvert de classe C^k .

Montrons, en reprenant les conditions de la régularité de Ω , la continuité des injections sur $W^{k,p}(\Omega)$ dans les cas (1) et (2). Soient Ω_i des ouverts qui recouvrent Ω , $\{O_i\}$ des ouverts de

$\mathbb{R}^{N-1}$ et $\{a_i\}$ des fonctions de classe C^k sur O_i , tels que pour tout $i \geq 1$:

$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_N) \mid x_N > a_i(x'), x' \in O_i\}, \quad (3.108)$$

$$\Omega_i \cap \partial\Omega = \{(x', a_i(x')) \mid x' \in O_i\}. \quad (3.109)$$

Soit (φ_i) une partition de l'unité C^k subordonnée au recouvrement de Ω par les Ω_i . Les hypothèses de régularité uniforme de l'ouvert Ω entraînent qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall i, \|a_i\|_{C^k(O_i)} + \|\varphi_i\|_{C^k(\Omega_i)} \leq C_1, \quad (3.110)$$

$$\text{et } \forall q \geq 1, \exists c_q, \forall u \in L^q(\Omega), \sum_i \int_{\Omega_i \cap \Omega} |u(x)|^q dx \leq c_q \int_{\Omega} |u(x)|^q dx. \quad (3.111)$$

Notons que cette propriété entraîne aussi l'existence d'une constante C_3 telle que :

$$\forall u \in W^{k-1/p,p}(\partial\Omega), \sum_i \|u_i\|_{W^{k-1/p,p}(\partial\Omega \cap \Omega_i)} \leq C_3 \|u\|_{W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)}. \quad (3.112)$$

Soit $u \in W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$. Ainsi, la fonction $u_i = \varphi_i u$ satisfait à l'appartenance $u_i \in W^{k-1/p,p}(\partial\Omega \cap \Omega_i)$.

Soit $v_i \in W^{k-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$. On en déduit que $v_i \in L^q(\mathbb{R}^{N-1})$ pour $q < (N-1)p/(N-kp)$, d'où l'on déduit que $u_i \in L^q(\Omega_i \cap \partial\Omega)$.

En outre, il existe des constantes toutes désignées par C , telles que :

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq \sum_i \|u_i\|_{L^q(\Omega_i \cap \partial\Omega)} \leq \sum_i \|v_i\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-1})} \quad (3.113)$$

$$\leq C \sum_i \|u_i\|_{W^{k-1/p,p}(\Omega_i \cap \partial\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)}. \quad (3.114)$$

Preuve de l'assertion (3) dans le cas de $(\mathbb{R}^N)^+$.

- On suppose aussi pour commencer que $k = 1$ et $p > N$.

Soit C une constante telle que, pour $u \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, il existe $U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)$ avec $U(x', 0) = u(x')$, et

$$\|U\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)} \leq C \|u\|_{W^{1-(1/p),p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \quad (3.115)$$

On utilise le théorème d'injection dans l'espace $C_b^{0,\lambda}$ à savoir :

$$U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[) \Rightarrow u \in C_b^{0,1-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1}). \quad (3.116)$$

Alors, pour tout $t \in [0, \delta]$ où $\delta > 0$ et pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{N-1})^2$, on a :

$$|U(x, t) - U(y, t)| \leq C \|U\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)} |x - y|^{1-(N/p)}. \quad (3.117)$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient le résultat (3) pour $k = 1$.

• Soit maintenant $k > 1$ et supposons pour commencer que $kp > N \geq (k-1)p$. Soit D un opérateur différentiel portant sur les variables x_i autres que x_N . Si D est de degré inférieur ou égale à k , on a $DU \in L^p(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)$ donc, par le théorème de trace appliqué successivement à chaque dérivée d'ordre inférieur ou égale à $k-1$, on obtient $u(x', 0) \in W^{k-1,p}(\mathbb{R}^{N-1})$.

D'autre part si D est homogène de degré $k-1$, l'appartenance de U à $W^{k-1,p}$ entraîne celle de Du à $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ et, par la première partie de la preuve, $Du \in C_b^{0,1-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Finalement, $u \in W^{k-1,p}$ et Du appartient donc à $C_b^{0,1-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1})$ et, par conséquent, on obtient $u \in C_b^{k-1,1-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Si $kp > N$ et si N/p n'est pas un entier, soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $jp > N > (j-1)p$ (autrement dit $j = [N/p] + 1$). On a $D^{(k-j)}u \in W^{j-(1/p),p}(\mathbb{R}^{N-1})$ et, par ce qui précède, $D^{k-j}u \in C_b^{0,j-N/p}(\mathbb{R}^{N-1})$. On en déduit que :

$$u \in C_b^{k-j,j-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1}) = C_b^{k-1-[N/p],[N/p]+1-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1}). \quad (3.118)$$

Le cas où $N/p \in \mathbb{N}$ est laissé au lecteur.

Preuve de (3) dans le cas général.

• Dans le cas général d'un ouvert C^k , on définit u_i et v_i comme dans les preuves de (1) et (2). On a donc $v_i \in C_b^{k-1-[N/p],[N/p]+1-(N/p)}(\mathbb{R}^{N-1})$. On écrit alors, en posant $X(\Omega_i) = C_b^{k-1-[N/p],[N/p]+1-(N/p)}(\Omega_i \cap \partial\Omega)$:

$$\|u\|_{X(\partial\Omega)} = \sup_i \|u_i\|_{X(\Omega_i)} \leq \sup_i \|v_i\|_{X(\mathbb{R}^{N-1})} \quad (3.119)$$

$$\leq C \sup_i \|v_i\|_{W^{k-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \quad (3.120)$$

$$\leq C \sup_i \|v_i\|_{W^{k-1/p,p}(\partial\Omega \cap \Omega_i)} \leq C \|u\|_{W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)}. \quad (3.121)$$

On passe à présent à la compacité de certaines de ces injections : ■

3.5 Résultats de compacité pour $\partial\Omega$ borné

Théorème 3.5.1 *On suppose que $\partial\Omega$ est borné et C^k .*

(1) *Soit $p > 1$ et $N - 1$ la dimension de $\partial\Omega$. On suppose que $kp < N$. Alors, l'injection de $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$ dans $L^q(\partial\Omega)$ est compacte pour tout $q < (N - 1)p / (N - kp)$.*

(2) *Si $kp = N$, l'injection de $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$ est compacte dans tous les $L^q(\partial\Omega)$.*

(3) *Si $kp < N$, l'injection de $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$ dans $C^{k-1-[N/p],\lambda}(\partial\Omega)$ est compacte pour tout $\lambda < [(N/p) + 1] - N/p$.*

Preuve. du théorème

• Dans le premier cas, il suffit de montrer que l'injection de $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$ dans $L^q(\partial\Omega)$ est compacte, puis d'utiliser le lemme. Il suffit de montrer le résultat avec $k = 1$, et pour des fonctions de $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$ à support dans un compact fixe. Soit donc $\{u_n\}$ une suite bornée dans $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ à support dans un compact fixe. Par la continuité du relèvement de $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ dans $W^{1,p}((\mathbb{R}^N)^+)$, il existe $\tilde{u}_n$ égale à u_n sur le bord telle que $\tilde{u}_n$ est bornée dans $W^{1,p}((\mathbb{R}^N)^+)$. Soit $\psi \in D(\mathbb{R}^{N-1})$, égale à 1 sur tous les supports des u_n , et $\varphi \in D(\mathbb{R})$, égale à 1 en 0. Alors la suite des v_n définie par $v_n(x) = \tilde{u}_n(x) \psi(x') \varphi(x_N)$ a la même trace que $\tilde{u}_n$ et est support dans un compact fixe de $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, +\infty[$.

Par le théorème de compacité pour les bornés de $W^{1,p}(\Omega)$ lorsque Ω est borné, $\{v_n\}$ est relativement compacte dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. On a pour n et m deux indices d'une sous-suite convergent dans L^p , encore notée $\{v_n\}$:

$$|u_n - u_m|^p(x', 0) \leq p \int_0^1 |v_n - v_m|^{p-1} (|v_{n,N} - v_{m,N}|)(x', s) ds \quad (3.122)$$

et, en intégrant par rapport à x' et en utilisant hölder

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})}^p \leq p \|v_n - v_m\|_p^{p-1} (\|v_{n,N}\|_p + \|v_{m,N}\|_p) \quad (3.123)$$

qui tend vers 0 quand $n, m \rightarrow \infty$. La suite $\{u_n\}$ est donc de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$, donc elle converge dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ vers $x' \mapsto u(x', 0)$.

Supposons $kp > N$. Il suffit de montrer que l'injection

$$W^{k-1/p,p}([-1, 1]^{N-1} \times \{0\}) \hookrightarrow C([-1, 1]^{N-1} \times \{0\}) \quad (3.124)$$

est compacte et d'utiliser le lemme

Soit $\{u_n\}$ une suite bornée de $W^{k-1/p,p}([-1, 1]^{N-1} \times \{0\})$, et $\tilde{u}_n$ une suite bornée de $W^{k,p}([-1, 1]^{N-1} \times \{0\})$ qui vaut u_n sur le bord. Par la compacité de l'injection de $W^{k,p}([-1, 1]^{N-1} \times \{0\})$ dans $C([-1, 1]^{N-1} \times [0, 1])$. En particulier, elle converge dans $C([-1, 1]^{N-1} \times [0, 1])$, ce qui donne le résultat. ■

3.6 Prolongement, Densité

3.6.1 Opérateur de prolongement

Certaines opérations fondamentales de l'analyse ont un sens uniquement pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (par exemple la convolution, la transformation de Fourier, etc ...). Il est donc utile de pouvoir prolonger une fonction $u \in W^{1,p}(I)$ en une fonction $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Définition 3.6.1 *Étant donnée une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et J un intervalle tel que $I \subset J$. On dit que $\tilde{f}$ est un prolongement de f sur J si $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.*

Théorème 3.6.1 (Opérateur de prolongement) *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Il existe un opérateur de prolongement $p : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ linéaire et continue tel que*

- i)- $Pu|_I = u$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.
- ii)- $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.
- iii)- $\|Pu\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

Preuve. Commençons par $I = (0, \infty)$. Supposons $u \in W^{1,p}(0, \infty)$, le prolongement par réflexion de u est défini par

$$Pu(x) = u^*(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x > 0 \\ u(-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.125)$$

Au début, il est évident que $Pu|_I = u$. De plus $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2 \|u\|_{L^p(0, \infty)}$.

Ensuite, posons

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.126)$$

Ainsi v est définie presque partout sur $\mathbb{R}$ et on constate que $v \in L^p(\mathbb{R})$. De plus

$$u^*(x) = u(0) = \int_0^x v(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.127)$$

En effet, en utilisant le théorème pour $x > 0$

$$\int_0^x v(t) dt = - \int_x^0 v(t) dt = \int_x^0 u'(-t) dt = \int_0^{-x} u'(t) dt = u(-x) - u(0) = u^*(x) - u(0) \quad (3.128)$$

Par conséquent, en utilisant le lemme, on constate que $u^* \in W^{1,p}(I)$ avec $(u^*)' = v$, et de plus,

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2 \|u\|_{W^{1,p}(0,\infty)}. \quad (3.129)$$

On conclut de ce que précède que dès qu'on arrive à prolonger sur $]0, \infty[$, on passe à $\mathbb{R}$ par réflexion. Supposons maintenant que I est borné. Soit $I = (0, 1)$; à l'aide d'un changement de variable on peut toujours à se ramener au cas de l'intervalle borné $]a, b[$.

Soit η une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \eta(x) \leq 1$ et

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/4 \\ 0 & \text{si } x > 3/4 \end{cases} \quad (3.130)$$

Au début on fait un prolongement de ηu à la fonction $\eta \tilde{u}$ sur $]0, \infty[$ telle que

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (3.131)$$

Montrons maintenant le lemme suivant : ■

Lemme 3.6.1 *Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors*

$$\eta \tilde{u} \in W^{1,p}(0, \infty) \text{ et } (\eta \tilde{u})' = u' \eta + u \eta' \quad (3.132)$$

Preuve. On a

$$\int_0^\infty |\eta \tilde{u}|^p = \int_0^1 |\eta \tilde{u}|^p = \int_0^1 |\eta u|^p \leq \int_0^1 |u|^p \text{ donc } \|\eta \tilde{u}\|_{L^p(0,\infty)} \leq \|u\|_{L^p(I)} \quad (3.133)$$

ce qui donne $\eta \tilde{u} \in L^p(0, \infty)$ il reste à montrer l'existence de $(\eta \tilde{u})'$ dans $L^p(0, \infty)$. Pour cela, soit $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$, donc

$$\int_0^\infty \eta \tilde{u} \varphi' = \int_0^1 \eta u \varphi' = \int_0^1 u ((\eta \varphi)' - \eta' \varphi) \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 u' (\eta \varphi) - \int_0^1 u \eta' \varphi \quad (\eta \varphi \in C_0^1(I)) \\ &= - \int_0^1 (u' \eta + u \eta') \varphi \end{aligned} \quad (3.135)$$

si on pose

$$\tilde{u}' = \begin{cases} u' & \text{sur } I \\ 0 & \text{sur } [1, \infty[\end{cases} \quad (3.136)$$

on obtient $\int_0^\infty \eta \tilde{u} \varphi' = - \int_0^\infty (\tilde{u}' \eta + \tilde{u} \eta') \varphi$, ce qui donne l'existence de $(\eta \tilde{u})'$. Par la suite, on montre que $(\eta \tilde{u})' \in L^p(0, \infty)$.

$$\|\tilde{u}' \eta + \tilde{u} \eta'\|_{L^p(0,\infty)} = \|u' \eta + u \eta'\|_{L^p(I)} \quad (3.137)$$

$$\leq \|u' \eta\|_{L^p(I)} + \|u \eta'\|_{L^p(I)} \quad (3.138)$$

$$\leq \|\eta\|_\infty \|u'\|_{L^p(I)} + \|\eta'\|_\infty \|u\|_{L^p(I)} \quad (3.139)$$

on obtient $\|\eta \tilde{u}\|_{W^{1,p}(0,\infty)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}$.

Par réflexion, on obtient $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ prolongement de $\eta \tilde{u}$ vérifiant

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)} \text{ et } \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}. \quad (3.140)$$

On procède de manière analogue pour $(1 - \eta) u$. On la prolonge d'abord à $] - \infty, 1[$ en la posant égale à 0 sur $] - \infty, 0]$ et on la prolonge ensuite à $\mathbb{R}$ par réflexion mais cette fois-ci par rapport au point 1. On obtient ainsi une fonction $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ qui prolonge $(1 - \eta) u$ et qui vérifie :

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)} \text{ et } \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}. \quad (3.141)$$

Ensuite on prend $Pu := v_1 + v_2$ qui remplit les assertions du théorème. ■

Remarque 3.6.2 Si $u \in W^{1,p}(I)$, $I =]a, b[$, prolongement par zéro à l'extérieure de I ne donne pas en général une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Remarque 3.6.3 Le prolongement Pu n'est pas unique, il dépend du choix de la fonction η .

3.6.2 Densité

Définition 3.6.2 (Convolution) Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$. On définit la convolution de ρ et g par

$$\rho \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y) g(y) dy, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.142)$$

3.6.3 L'inégalité de Jensen

Si $f > 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ et $\phi \geq 0$ une fonction continue et convexe, alors

$$\phi\left(\int fg\right) \leq \int f\phi(g) \quad (3.143)$$

Propriétés 1. $\rho \star g(x) = g \star \rho(x)$.

2. Si $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\rho \star g(x) \in L^p(\mathbb{R})$, de plus

$$\|\rho \star g(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\rho\|_{L^1} \|g\|_{L^p} \quad (3.144)$$

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ (resp. $C_0^1(\mathbb{R})$), alors, $f \star \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ (resp. $C^\infty(\mathbb{R})$) avec $(f \star \varphi)' = f \star \varphi'$ (resp. $(f \star \varphi)^{(m)} = f \star \varphi^{(m)}$, $m \geq 2$).

4. Si f et φ sont de support compact, alors $f \star \varphi$ est de support compact.

Preuve. 1. Il suffit de faire un changement de variable.

2. On a d'après l'inégalité de Jensen

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{|\rho(y)|}{\|\rho\|_{L^1}} g(y-x) dy \right|^p \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|\rho(y)|}{\|\rho\|_{L^1}} |g(y-x)|^p dy \quad (3.145)$$

d'où

$$\frac{1}{\|\rho\|_{L^1}^p} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \rho(y) g(y-x) dy \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\rho(y)|}{\|\rho\|_{L^1}} |g(y-x)|^p dy dx \quad (3.146)$$

et l'inégalité en découle. ■

Théorème 3.6.4 (Densité) Soit $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$. Il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$u_n|_I \rightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(I) \quad (3.147)$$

Nous allons tout d'abord énoncer une technique très courante en analyse fonctionnelle que nous utiliserons plus loin : les suites régularisantes

Définition 3.6.3 On appelle suite régularisante toute suite fonctions $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(\phi_n) \subset]-1/n, 1/n[, \quad \int \phi_n = 1, \quad \phi_n \geq 0. \quad (3.148)$$

Ces fonctions vérifient : pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, Alors $\phi_n \star f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\phi_n \star f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$.

Convolution

Soit $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors

$$\eta \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ et } (\eta \star v)' = \eta \star v' \quad (3.149)$$

Preuve. D'après la deuxième propriété, on a $\eta \star v \in L^p(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} (\eta \star v) \varphi' dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \eta(y) v(x-y) \varphi' dx dy = - \int_{\mathbb{R}} \eta(y) \int_{\mathbb{R}} v'(x-y) \varphi dx dy = - \int_{\mathbb{R}} (\eta \star v') \varphi dx \quad (3.150)$$

d'où $(\eta \star v)' = \eta \star v'$ et puisque $v' \in L^p(\mathbb{R})$ alors $(\eta \star v)' \in L^p(\mathbb{R})$ par conséquent $\eta \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. ■

3.6.4 Troncature

On fixe une fonction $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq \zeta \leq \infty$ telle que

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases} \quad (3.151)$$

On pose ensuite pour tout $n \geq 1$, $\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right)$. On sait que grâce au théorème de la convergence dominée que $\forall u \in L^p(\mathbb{R})$, $\zeta_n u \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R})$. De plus par la définition de ζ , on constate que $\zeta_n u$ est à support compact.

3.6.5 Démonstration du théorème de densité

On peut toujours supposer que $I = \mathbb{R}$ sinon on fait un prolongement sur tout $\mathbb{R}$ par le théorème la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ consiste à trouver pour tout élément $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ une suite u_n dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ convergente vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Soit ρ_n une suite régularisante. On pose $u_n = \zeta_n(\rho_n \star u)$ et on montre que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

$$u_n - u = \zeta_n(\rho_n \star u) - u = \zeta_n(\rho_n \star u) - \zeta_n u + \zeta_n u - u \quad (3.152)$$

donc

$$\|u_n - u\|_{L^p} = \|\zeta_n(\rho_n \star u) - \zeta_n u + \zeta_n u - u\|_{L^p} \quad (3.153)$$

$$\leq \|\zeta_n(\rho_n \star u) - \zeta_n u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \quad (3.154)$$

$$\leq \|\zeta_n\|_\infty \|\rho_n \star u - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \quad (3.155)$$

d'où $\|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0$. En effet, $\|\rho_n \star u - u\|_{L^p} \rightarrow 0$ par régularisation et convolution, $\|\zeta_n u - u\|_{L^p} \rightarrow 0$ par troncature. Il reste à montrer $\|u'_n - u'\|_{L^p} \rightarrow 0$. On a

$$u'_n - u' = (\zeta_n(\rho_n \star u))' - u' = \zeta'_n(\rho_n \star u) + \zeta_n \rho_n \star u' - \zeta_n u' + \zeta_n u' - u' \quad (3.156)$$

$$\|u'_n - u'\|_{L^p} = \|\zeta'_n(\rho_n \star u) + \zeta_n \rho_n \star u' - \zeta_n u' + \zeta_n u' - u'\|_{L^p} \quad (3.157)$$

$$\leq \frac{1}{n} \|\zeta'\|_\infty \|\rho_n \star u\|_{L^p} + \|\zeta_n\|_\infty \|\rho_n \star u' - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \quad (3.158)$$

d'où $\|u'_n - u'\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Conclusion

Ce mémoire était pour moi une occasion de s’empreigner de nouveau dans le monde merveilleux de l’analyse fonctionnelle. De la topologie, vers les espaces de Sobolev, qui ont un rôle important en théorie des EDP.

La théorie des distributions constitue un premier pas vers l’introduction des espaces de Sobolev sur l’espace tout entier, cela se fait grâce à la transformée de Fourier des distributions. Cet outil permettra d’identifier les Sobolev par la simple vérification que la fonction soit dans un espace particulier prise avec un poids.

Le passage entre les espaces de Sobolev sur un intervalle vers un les espaces de Sobolev défini sur l’espace tout entier et inversement se fait à l’aide des théorèmes de prolongement et de trace. Une autre idée consiste à prédire la norme dans l’espace de Sobolev (ou la contrôler) consiste à faire appel aux théorèmes d’injections selon les cas.

Bien entendu, ayant fait l’analyse des distributions et les espaces de Schwartz, on voulait introduire les espaces de Sobolev d’ordre non entier, et qui servira à la résolution des équations aux dérivées partielles fractionnaires à conditions non locales mais on a suffisamment développé la théorie des Sobolev entier laissant à d’autres le soin de continuer dans cet axe.

Bibliographie

- [1] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle et applications. Ed. Masson 1986.
- [2] F. Demengel, G. Demengel, Espaces fonctionnels. EDP Sciences, 2007.
- [3] R. S., Strichartz, A guide to distribution theory and Fourier transforms. World Scientific Publishing Co. Inc. 2003.
- [4] C., Zuily, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus, Dunod, 2002.
- [5] R. A., Adams, Sobolev spaces, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.