République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Quelques Applications du modéle de Black-Scholes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique
Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : ASSPA

par

Khadidja **A**bdelhak [1]

Sous la direction de

Mlle F. Benziadi

Soutenu le 21 mai 2017 devant le jury composé de

S. Rahmani	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Présidente
F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Rapporteur
M. Laouni	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Examinateur
N. Ait ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Examinatrice

1. G-mail : khadidjaabdelhak15@gmail.com

Table des matières

" Certes, il y'a des travaux pénibles, mais la joie de la réussite n'a t-elle pas à compenser nos douleurs ? "

Jean de la bruyère

REMERCIMENTS

En préambule de ce mémoire, je tiens tout d'abord à remercier Dieu, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Mlle ***Fatima Benziadi*** *pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de la réalisation de ce travail. Je n'oublierai pas, bien évidemment, mes enseignants que je remercie chaleureusement pour tous ces agréables moments passés ensemble et pour l'intérêt qu'ils m'ont dressé tout au long de mon cursus universitaire ainsi que pour leur aide.*

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'exécution de ce travail notamment Dr. ***Abdelhalim Azzouz*** *et Prof.* ***Monique Jean Blanc*** *de l'université d'Evry et enfin Dr* ***Hassan Rais*** *de l'université Paul Sabatier de Toulouse pour leurs aides précieuses et leurs encouragements à entreprendre ce projet.*

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à ma famille tout particulièrement mes parents qui m'ont accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction générale

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : Finance d'entreprise (corporate finance) et finance de marché (market finance) La finance d'entreprise utilise essentiellement des modéles mathématiques simples, alors que la finance de marché s'appuie sur des modèles mathématiques complexes. De ces modèles, on s'intéressera, dans mémoire, au modèle de Black et Scholes.
Le prix d'une option se fond tout simplement sur des probabilités que le prix de la valeur sous-jacente soit au dessus ou au dessous de prix d'élevé à la date d'échéance. Ces probabilités sont utilisées par des différents modèles d'évaluation dans le plus connu est la formule de Black et Scholes.
En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule analytique pour des options sur

actions qui ne versent pas des dividendes.
Le modèle de Black et Scholes est considéré comme le plus grand succès dans le domaine de la théorie financière. Ce modèle a eu un impact important sur les méthodes utilisées par les traders, tant en terme de valorisation que de stratégies de couverture. Ces travaux constituent aussi un point de départ du fantastique développement de l'ingénierie financière dans les années 80 et 90. Le point fort du modèle réside en la possibilité d'estimer la volatilité d'un actif sous-jacent comme une fonction du prix de l'option et du temps, sans réference directe aux caractéristiques de l'investisseur comme la fonction d'utilité ou le rendement espéré.

Fisher Black

 Fisher Black était un économiste américain, particulièrement connu pour sa contribution à l'élaboration du modèle de Black-Scholes.

Né le 11 janvier 1938, décédé le 30 août 1995, Fisher Black obtient son doctorat en mathématiques appliquées de l'université de Harvard en 1959, et sa thèse ne sera reconnue qu'en 1964, après avoir travaillé sur un système d'intélligence artificielle (IA) dans une société tout en étant étudiant au MIT.

Avant de briller au MIT, il a commencé sa vie professionnelle en tant qu'enseignant à l'université de Chicago. A partir des années 1970, il commença à s'intéresser à la politique monétaire, et en 1973 il publia son travail : The Pricing of Options and Corporate Liabilities avec Myron Scholes, dans « Journal of Political Economy ». Ouvrage dans lequel il présenta le modèle mis en place afin d'évaluer le prix d'actions.

Suite à la parution de cet ouvrage, Fisher Black acquiera une forte notoriété et c'est en 1984 qu'il rejoint Goldman Sachs. Il décèda suite à une longue maladie, deux ans avant de pouvoir recevoir le prix Nobel, décerné a son co-auteur Myron Scholes en 1997.

Myron scholes

Myron Scholes est un lauréat du prix Nobel de Sciences Economiques (1997) grâce à son travail et à l'élaboration d'une méthode d'évaluation des produits dérivés (modèle de Black Scholes).

Né le 1 juillet 1941 au Canada, il a étudié l'économie à l'université de Chicago. Il obtient son MBA (Master of Business Administration) en 1964 et un doctorat en philosophie cinq ans plus tard.

Après sa thèse, il a accepté un poste d'enseignant au MIT, où il a rencontré Fisher Black. En 1973, il a quitté le MIT pour intégrer l'université de Chicago afin de travailler avec Eugène Fama, Merton Miller et Fisher Black.

Àpartir de 1981 et jusqu'à 1996, Myron Scholes a travaillé en tant qu'enseignant chercheur à l'université de Stanford, où il exerce à ce jour comme professeur de Finance.

En parallèle à son activité d'enseignant chercheur, Scholes est également un investisseur. En 1994, il fonde avec plusieurs collègues un Hedge Funds, qui a connu un très fort succès dans un premier temps, avec des rendements annuels de plus de 40%, et qui s'est totalement écroulé en quelques mois.

Scholes a également été impliqué dans l'affaire LTCM, affaire dans laquelle il a été accusé d'avoir utilisé de manière illégale un abri fiscal afin d'éviter d'avoir à payer des impôts sur les bénéfices des investissements des entreprises.

Il est actuellement président d'un Hedge Funds (Platinum Grove Asset Management) qui pèse entre 4 et 5 milliards de dollars avec un rendement moyen annuel de 9,5%.

Le modèle Black-Scholes est un modèle mathématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu ; par opposition au "modèle Cox Ross-Rubinstein" qui suit un processus stochastique en temps discret. Ce modèle connaît ce succès car il possède de nombreux avantages : sa simplicité d'application et de formulation, son importante utilisation par les opérateurs du marché mais aussi et surtout parce qu'il permet de calculer un paramètre important en finance : la volatilité. La volatilité mesure la variation moyenne dans le temps d'un actif financier et donne donc une information cruciale sur le risque. Parmis les applications de ce modèle, on s'intéresse dans ce mémoire à l'évaluation des options exotiques.

Le but de ce travail est établir les formules d'évaluation de quelques options exotiques en appliquant le célébre modèle de Black-Scholes. Pour bien étaler cette application, on partage ce mémoire en trois chapitres :
Le premier chapitre, est un *chapitre introductif* qui présente les différentes caractéristiques des options.
En chapitre 2, on donne une brève description du modèle de Black-Scholes, en expliquant les formules d'évaluation des options.
Le chapitre 3 est consacré à l'étude de quelques applications du modèle de Black-Scholes aux options exotiques, qui constitue le coeur de cet mémoire.

Chapitre 1

Théorie des options

Introduction

Les marchés financiers (Finacial Markets en englais) sont des marchés où sont effectuées des transactions sur des actifs financiers, et de plus en plus, leurs produits dérivés. Le marchés est un lieu où se rencontrent l'offre et la demande d'un certain bien.
Les marchés financiers permettent d'échanger des contrats financiers et de produits dérivés sur ses contrats. Sur ces marchés, des intervenants achètent et vendent des biens divers, à un prix qui dans la plupart du temps, semble varier de manière assez aléatoire en fonction de l'offre et de la demande. Ces biens s'appelent de manière générale des actifs qui peuvent être une devise, une action, une obligation..., ou bien encore un produit dérivé.
Un produit dérivé (ou un contrat dérivé) est un instrument financier sous-jacent d'un actif qui permet de fixer le prix de ce dernier pour une période donnée. La valeur d'un produit dérivé dépendra donc de la valeur de son actif sous-jacent au cours du temps. Initialement ces produits avaient pour but de couvrir les entreprises contre des risques financiers tel qu'une flambée du prix des matières ou un risque de change.
Voici les différentes formes qui peuvent prendre ses contrats :

– Les CFD
– Les futures (contrats à terme en Français).

- Les forwards (contrats de gré à gré).
- Les warrants turbos.
- Les Swaps.
- Les options.

L'un des premiers marchés à options est raporté par **L'encyclopédie Diderot** et **D'alembert** en 1752 sur la *Bourse de Commerce* d'Amsterdam. Celle-ci propose trois types de transactions, sur trois marchés différents : marché à comptant, marché à terme (les négociants échangent des marchandises qu'ils ne détiennent pas encore) et marché des options (l'acquisition d'un droit, sans obligation, d'acheter des marchandises à terme, moyennant le paiement d'une prime).
Les options peuvent être utilisées :

- En couverture de risque baisse ou hausse du prix du sous-jacent (par exemple un producteur de pétrole peut choisir d'acheter des puts afin de se prémunir d'une baisse trés importante des cours).
- Pour spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent (c'est en ce sens qu'elles sont distribuées comme rénumération sous le nom stock options).
- Pour spéculer sur la volatilité.
- Pour déterminer la valeur de l'option (la valorisation).

Les options se négocient sur un marché appelé **Monep** (Marché d'options négociables de Paris).

1.1 Les options

1.1.1 Définition

En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation d'acheter (call) ou de vente (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance.
Si, dans les marchés financiers, les biens échangés sont des actifs financiers (actions,

obligations), l'option donne le droit pour l'acheteur d'acheter (call) ou de vendre (put) l'actif financier défini dans le contrat. Les prix fixés à l'avance et la durée de validité de l'option sont définis dand le contrat. Le vendeur s'engage à respcter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie l'acheteur lui donne de l'argent. Si l'option n'est pad exercée, le vendeur a gagné un mantant égal au prix de l'option.
Le terme Stock option désigne généralement une rénumération versée par une entreprise, à ses employés sous la forme d'option d'achat sur des actions de cette même entreprise.

1.1.2 Les principaux d'un contrat d'option

Il existe deux types d'options échanges sur les marchés, les options d'achat (call) et les option de vente (put).

Call :

Un call accorde à son acheteur le droit d'acheter, pendant une période (ou à une échéance) et à un prix convenue à l'avance, une certaine quantité d'actifs sous-jacents. Lorsque l'acheteur exerce son call et fait valoir son droit d'achat, le vendeur du call est obligé de livrer les actifs sous-jacents au prix fixé au préable. Grâce au call, l'acheteur fixe à l'avance le prix d'achat de l'actif sous-jacent. L'acheteur du call verse une prime au vendeur pour rénumérer son obligation de ventee. Elle reste définitivement acquise au vendeur même si l'acheteur décide de ne pas exercer son option.
Anticipation :l'acheteur d'un call anticipe en général une hausse du sous-jacent. Il exercera son option d'achat si le cours du sous-jacent évolue dans un sens favorable à ses anticipations et dépasse le prix d'exercice.

Put :

Un Put accorde à son acheteur le droit de vendre, pendant une période à un prix convenue à l'avance, une certaine quantité d'actifs sous-jacents. Lorsque l'acheteur exerce son put et fait valoir son droit de vente, le vendeur du put est obligé d'acheter

l'actif sous-jacent au prix fixé au préable. Grâce au put, l'acheteur fixe à l'avance le prix de vente de l'actif sous-jacent. L'acheteur du call verse une prime au vendeur pour rénumérer son obligation de vente. Elle reste définitivement acqise au vendeur même si l'acheteur décide de ne pas exercer son option.
Anticipation : l'acheteur d'un put anticipe en général une baisse du sous-jacent. Il execera son option d'achat si le cours du sous-jacent évolue dans un sens favorable à ses anticipations et dépasse le prix d'exerice.

1.1.3 Les caractéristiques d'une option

Actif sous-jacent :

C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'option peut être un actif physique (matiére premiéres ou agricoles), un instument financiers (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice bourcier ou climatique.

1. **Une option sur action :**
   Une option sur action est le plus souvent négociée sur un marché dérivé organisé. Une option sur actions peut être une option d'achat (call) ou de vente (put). Elle posséde des caractéristiques habituelles d'une option avec un prix d'exercice, une prime, une quantité et une date d'échéance.
   La valeur d'une option sur action varie principalement en fonction de l'évolution du cours de l'action et de maturité de l'option.
2. **Une option sur devise :**
   Une option sur devise est une option qui donne le droit mais non obligation d'acheter ou de vendre un certain montant en devises, à un cours donné, moyennant le paiement d'une prime, pendant une période ou à une date déterminée. une option sur devises peut être ainsi utilisée par des importateurs (call sur le devise d'importation) ou des exportateurs (put sur le devise d'exportateur) pour couvrir le risque de change. Une option sur devises est le plus souvent négociée de gré à gré offrant de cette manière la possibilité à chaque entreprise d'obtenir des caractéristiques de l'option sur devises qui correspondent parfaitement à ses

attentes.

3. **Une option sur indices :**
   L'option sur indice est une option dont l'actif sous-jacent est un indice boursier. L'option sur indice s'achète ou se vend sur marché dérivé le plus souvent organisé. Cette option permet soit de profiter avec un effet de levier important de la hausse d'un marché action ou de se couvrir (ou se bénéficier) de la baisse d'un marché.
4. **Une option sur futures :**
   Lorsqu'un marché organisé cote des contrat futures, il cote aussi souvent des options portant sur ses contrats futures. En régle général, l'échéance d'une option portant sur un contrat futures se situe peu avant la date d'échéance du futures sous-jacent. Quant un call est exercé par le détenteur de l'option, ce dernier se retrouve en position longue (achat) sur le contrat futures et reçoit du vendeur un montant égal à la différence entre le prix futures et le prix d'exercice et le prix futures.

Dates d'echéance :

C'est la date de fin de validité du contrat. Pour les contrats d'options, les dates d'échéance sont standardisées (le 3éme vendredi du mois d'échéance).
Par ailleurs, il faut distinguer deux types d'options selon le mode d'exercice :

Européenne : l'exercice se fait à l'échéance uniquement.

Américaine : l'exercice se fait jusqu'à l'échéance. L'option peut être exercée pendant toute la durée du contrat.

Le prix d'exercice (ou strike) :

C'est le prix auquel l'acheteur de l'option peut :

– Acheter l'actif sous-jacent (call)

– Vendre l'actif sous-jacent (put)

Ce prix d'exercice est déterminé lors de la négociation de l'option et n'est pas modifiable pendant toute la durée de vie de l'option.
Le prix d'exercice est également le prix auquel le vendeur devra livrer les actions dans cas d'un call, ou le prix auquel il devra les acheter dans le cas d'un put. Attention, le vendeur n'aura l'obligation de le faire que si l'acheteur demande l'exercice de l'option.

L'exercice :

L'acheteur d'une option acquiert un droit d'acheter pour le call et un droit de vendre pour le put. C'est lui qui va décider de faire valoir (d'exercer) ou non ce droit en fonction de la réalisation de ses anticipations.

	Acheteur d'une option	Vendeur d'une option
CALL	L'acheteur de call décide d'acheter le sous-jacent au prix d'exercice	Le vendeur de call doit vendre le sous-jacent au prix d'exercice (si l'acheteur exerce son droit)
PUT	L'acheteur de put décide de vendre le sous-jacent au prix d'exercice	Le vendeur de put doit acheter le sous-jacent au prix d'exercice (si l'acheteur exerce son droit)

A quel moment est-il intéressant d'exercer son option ?

CALL	prix d'exercice $<$ cours de l'action
PUT	prix d'exercice $>$ cours de l'action

La prime (le prix de l'option) :

En contrepartie de l'engagement d'acheter ou de vendre des actions à un prix déterminé, le vendeur de l'option demande une rétribution : la prime, c'est-à-dire le prix

de l'option. La prime est versée par l'acheteur au vendeur lors de la conclusion de l'engagement et reste acquise au vendeur de l'option même si l'acheteur décide de ne pas exercer son droit.
Contrairement au prix d'exercer, la prime de l'option n'est jamais fixe ; elle varie au gré des transactions selon l'offre et la demande.
Exemple :
La prime de l'option s'applique par titre et doit donc être *multipliée par la taille du contrat*. Pour un call A avec une échéance en septembre, de prix d'exercice 100 euro, la prime s'élevant à 0.45 euro, l'investisseur reçoit le droit d'acheter l'action A au prix 100 euro.

$$\text{la prime} = 0.45 \times 10 \text{ ou } 100 \text{ (selon la taille du contrat)}$$

La quotité de négociation :

Pour les option sur actions la quotité représente la quantité de titres sur laquelle porte un contrat d'option :

- 100 titres par contrat pour les options de type Américain.
- 10 titres par contrat pour les options de type Européen.

Le multiplicateur :

Pour le options sur indice on parle de multiplicateur : c'est le montant par lequel on multiplie l'indice pour obtenir la valeur sur laquelle porte le contrat.
Option sur indice CAC40 $=$ 10 euro $\times indice$.

1.1.4 La valeur d'une option et ses déterminants

La valeur d'une option :

Le prix d'une option (la prime) varie constamment et elle est le resultat de deux composantes principales :

1. **La valeur intrinsèque :**
   la valeur intrinsèque représente le profil qui serait obtenu immédiatemment si

l'on décidait d'exercer l'option. C'est la différence possitive ou nulle entre le cours côté du titre support et le prix d'exercice.

La valeur d'un call = sup(cours de l'action - prix d'exercice, 0)

La valeur d'un put = sup(prix d'exercice- cours de l'action, 0)

2. **La valeur temps :**
   La valeur temps se mesure par la différence entre le prix de marché d'option et sa valeur intrinséque. Elle est nulle à l'échéance pour une option européenne.

   La prime d'une option = valeur intrinsèque + valeur temps

Les déterminants de la valeur d'une option :

Les facteurs principaux qui entrent dans le calcul du prix d'une option sont :

- Le prix de l'actif sous-jacent.
- Le prix d'exercice de l'option.

La volatilité de l'actif sous-jacent ces facteurs peuvent jouer en sens inverse suivant qu'il s'appliquent à l'option d'achat ou à l'option de vente, ou bien jouer dans le même sens :

- Le prix du call (option d'achat) est une fonction croissante du prix de l'actif sous-jacent.
- le prix du put (option de vente) est une fonction décroissante du cours de l'actif sous-jacent.
- Le prix du call est une fonction décroissante du prix d'exercice.
- Le prix du put est une fonction croissante du prix d'exercice d l'option.
- Le prix d'une option, call ou put, est une fonction croissante du délai d'expiration et également une fonction croissante de la volatilité de l'actif sous-jacent.

1.1.5 Les stratégies de base d'une options

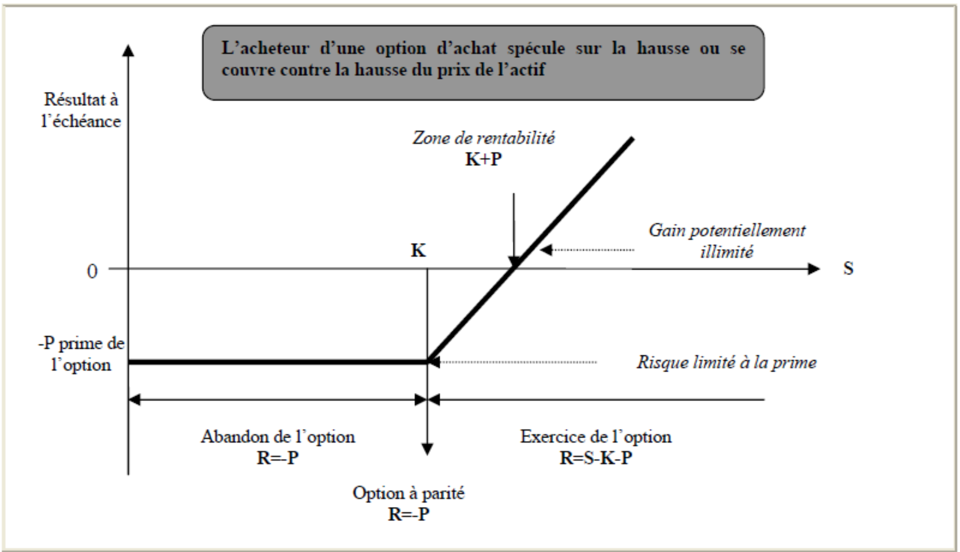
L'achat d'une option (call) :

1. **L'achat d'une option d'achat :**
   L'achat d'une option d'achat confère le droit d'acheter, à (ou jusqu'à)

l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie du versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option.
Soient :

- **K :** le prix d'exercice de l'option,
- **S :** le cours de l'actif sous-jacent sur le marché comptant à la date d'achat,
- **S0 :** le cours de l'actif sous-jacent à la maturité de l'option,
- **P :** la prime versée lors de l'achat de l'option,

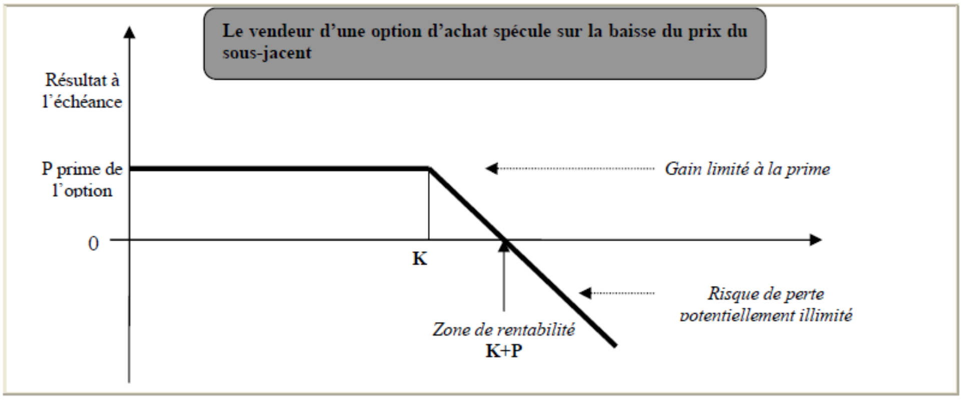
Le résultat **R** à léchéance est :



Une option d'achat est dite **en dehors de la monnaie** si son prix d'exercice $K > S0$, **dans la monnaie** si $S0 > K$ **à la monnaie** si $S0 = K$.

2. **Vente d'une option d'achat :**
Le vendeur de l'option d'achat est dans la position symétrique de celle de l'acheteur. Il reçoit immédiatement la prime en contrepartie de laquelle il s'engage sur la durée du contrat à vendre l'actif sous-jacent à la demande de l'acheteur. S'agissant d'un jeu à somme nulle, son résultat à l'échéance est

l'opposé de celui de l'acheteur :

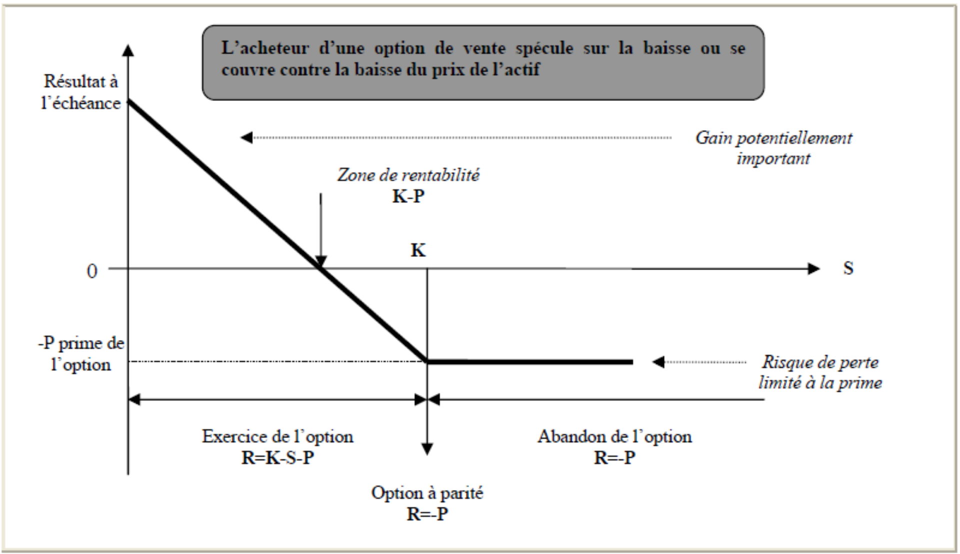


Option de vente (put) :

1. **L'achat d'une option de vente :**
   L'achat d'une option de vente confère le droit de vendre, à (ou jusqu'à) l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie au versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option.
   Soient :

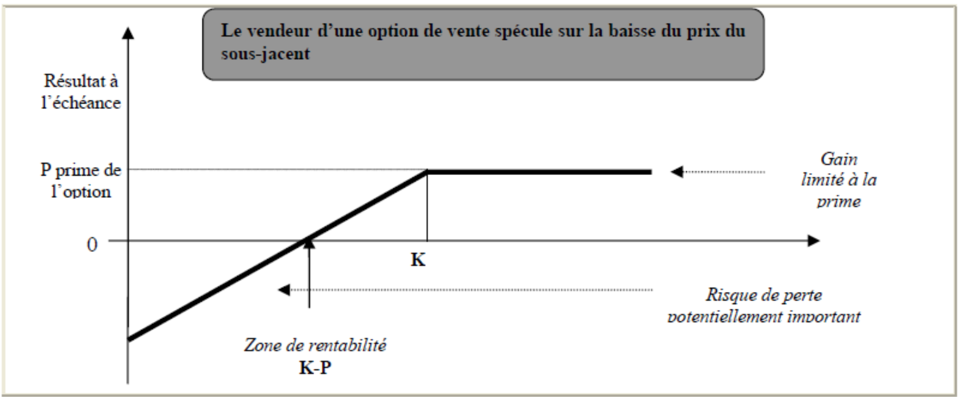
   - **K :** le prix d'exercice de l'option,
   - **S0 :** le cours de l'actif sous-jacent sur le marché comptant à la date d'achat,
   - **S :** le cours de l'actif sous-jacent à la maturité de l'option,
   - **P :** la prime versée lors de l'achat de l'option,

   Le résultat **R** à léchéance est :



2. **Vente d'une option de vente :**

   Le vendeur de l'option d'achat est dans la position symétrique de celle d l'acheteur. Il reçoit imméditemant la prime en contrepartie de laquelle il s'engage sur la durée du contrat à vendre l'actif sous-jacent à la demande de l'acheteur. S'agissant d'un jeu à somme nulle, son résultat à l'échéance est l'opposé de celui de l'acheteur :



1.1.6 Les options exotiques

Les options exotiques sont des produits complexes, qui contituent un marché d'une réelle importance depuis les années 1990. Leur nom vise surtout à les différencier des options standards (Vannila en Anglais) Européennes ou Américaines. Ce sont des options qui ne sont traitées que sur les marchés de *gré à gré* (Over the counter) à la différence des options standards traitées dans les marchés organisés. Elles sont aussi très développés dans le marchés sue devise (FOREX).
Les options exotiques visent à répondre à des besoins spécifiques d'assurance des grands groupes financiers, des compagnier d'assurance, fonds de pension...
Ce produits exotiques sont aussi parfois crées à la demande par des banques pour des Hedges Funds pour répondre à des problèmes spécifiques comme des problèmes de couvertures ou de liquidités sur certains marchés financiers étroits. Les CDS sont un de produits exotiques.
La notion d'exotisme est bien sûr toute relative, car au fur et à mesure qu'un produit financier devient très liquide il perd progressivement son caractère d'exotisme.
L'intérêt pour les options exotiques provient de la réduction de l'investissement par rapport à l'option classique qu'elles offrent souvent. Les options barières sont un exemple d'une telle réduction, puisque l'option pourra être exercéé dans un nombre de configuration moindre que l'option classique, par exemple seulement si le sous-jacent est passé en dessus d'une barière définie dans le contrat. Pour le vendeur de l'option, la principale difficulté sera de mettre en place une stratégie de couverture efficace, car le delta de telles options présente souvent des discontinuités, notamment au voisinage de la barière.
Dans la pratique, les professionnels ont l'habitude de distinguer les options exotiques en deux catégories. D'une part, les options dont le remboursement à l'échéance est conditionné par le chemin suivi par le cours de l'actifs sous-jacent dans le temps «path-dependent», et d'autre part les options indépendantes du chemin suivi «non path-independent».

Options exotiques non dépendant du chemin suivi par le cours :

Les Options Binaires :

Pourquoi les options binaires sont dites «binaires» ? Tout simplement parce qu'il n'y a seulement deux résultats possibles sur l'investissement : soit l'investisseur détermine le bon, et repart avec une somme définie au départ, soit sa vision était erronée, et ne repart avec rien du tout. Contrairement aux options classiques où le gain/perte à la fin est plus ou moins élevé en fonction du cours du sous-jacent, le rendement des options binaires est connu dès le départ.

Un Call binaire et une option qui paye un nominale connu à son détenteur, si le cours du support à l'échéance dépasse un prix d'exercice fixé dans le contrat et rien sinon. Un Put binaire a les mêmes caractéristiques, mais le nominal est payé si le cours est inférieur au prix d'exercice.

C'est un produit très spéculatif au voisinage de l'échéance, car il est du type tout au rien.

La famille des options binaires regroupe 4 types d'options :

- **L'option all or nothing (Tout ou rien) :** (Aussi appelée «*Cash or nothing*»)
  Le détenteur d'une telle option reçoit un coupon fixe, déterminé à l'avance, si l'option arrive à l'échéance dans la monnaie. Dans le cas contraire, la prime de l'option est perdue.
- **L'option « asset or nothing » (actif ou rien) :** Cette option présente quasiment les mêmes caractéristiques que l'option « *all or nothing* », à la seule exception, que si elle arrive à l'échéance le coupon versé ne sera pas un montant fixé mais la valeur de l'actifs sous-jacent ou un multiple de celui-ci.
- **L'option gap :** Cette option permet de recevoir un coupon représentant la différence entre la valeur de l'actif sous-jacent et une constante déterminée à l'avance si l'option arrive dans la monnaie.
- **L'option « Contingent premium » :** Aussi appelée option à prime contingente, ou « Capitalized option ». Dans sa version « standard », elle présente la particularité de définir une prime contingente qui est retranchée au prix d'exercice lors du remboursement final. A l'opposé, les options à prime contingente dite complexe,

définissent une ou plusieurs zones de cours de l'actif sous-jacent à l'échéance, dans lesquelles un montant cash, ou prime contingente complexe, est ajouté au remboursement final. Nous ne traiterons ici, dans un souci de clarté, que les options à prime contingent standard. Nous pouvons interpréter l'option à prime contingent standard de la façon suivante :

– Si l'option expire en dohors de la monnaie, le remboursement est égal à zéro.
– Dans le cas contraire, le remboursement est réduit au montant de la prime contingente, en comparaison avec une option standard.

Nous pouvons regrouper dans un tableau l'ensemble de pay-off pour les différents cas :

Type	Payoff	
	Call	Put
All or nothing	$\begin{cases} N & si \quad S_T \geq K \\ 0 & si \quad S_T < K \end{cases}$	$\begin{cases} N & si \quad S_T \leq K \\ 0 & si \quad S_T > K \end{cases}$
Asset or nothing	$\begin{cases} M.S_T & si \quad S_T \geq K \\ 0 & si \quad S_T < K \end{cases}$	$\begin{cases} M.S_T & si \quad S_T \leq K \\ 0 & si \quad S_T > K \end{cases}$
Gap	$\begin{cases} (S_T - Y) & si \quad S_T \geq K \\ 0 & si \quad S_T < K \end{cases}$	$\begin{cases} (S_T - Y) & si \quad S_T \leq K \\ 0 & si \quad S_T > K \end{cases}$
Contingent premium	$\begin{cases} K - S_T - D & si \quad S_T \geq K \\ 0 & si \quad S_T < K \end{cases}$	$\begin{cases} K - S_T - D & si \quad S_T \leq K \\ 0 & si \quad S_T > K \end{cases}$

Avec les notations :

– **N :** coupon payé à l'échéance,
– **K :** prix d'exercice du sous-jacent,
– **M :** Multiple constant,
– **Y :** Constante prédéterminée à l'avance appelée montant cash,
– **D :** prime contingente.

En utilisant une fonction de Heaviside H, nous pouvons définir d'une manière générale le *payoof* d'une option binaire dans le cas d'un call :

$$X_{CallBinaire} = H(S_T - K) \cdot G$$

Et dans le cas d'un put :

$$X_{PutBinaire} = H(K - S_T) \cdot G$$

Avec G le « gain » de l'option considérée en cas de réussite de la condition :
- $G_{AllOrNothing} = N$
- $G_{AssetOrNothing} = M \cdot S_T$
- $G_{Gap} = S_T - Y$
- $G_{ContingantPremium} = K - S_T - D$

Options sur paniers :(Basket options)

Une option d'achat sur panier donne à son acquéreur la possibilité, à l'échéance de l'option (s'il celle-ci est exerçable), d'acheter un panier de devises (par exemple deutchemark, yen, franc, suise) contre une autre devise (par exemple le dollard) à un cours déterminé et inférieur au cours au comprant. Une option de vente permet à son détenteur, à l'échéance de l'option (si cell-ci es exerçable), de vendre un panier de devises (par exemple deutchemark, yen, franc, suise) contre une autre devise (par exemple le dollar) à un cours déterminé et supérieur au cours au comptant. Une option sur panier constitue donc une alternative) l'achat ou à la vente d'un ensemble d'option sur différentes devises. Le prix d'exercice de ce type d'options est féini dans la monnaie de base (le dollar dans l'exemple précité). A l'échéance, on calcule sur la base du cours au comptant et on compare le cours obtenu au prix d'exercice pour savoir si l'option est ou non exerçable.
L'intérêt d'une telle option est qu'elle est moins coûteuse que la somme d'options classiques sur.

Les option Chooser

Une « as-you-like-it » option, plus communément appelée « chooser option » spécifie les prix d'exercice de deux options standards à la date d'émission, et permet à son détenteur de décider après cette période, déterminée à l'origine (« the choose, choice date ou conversion period »), de convertir l'option en call ou en put. Après avoir décidé la conversion de la « chooser option », le profil de performance est celui d'une option standard avec un prix d'exercice connu. Pendant la première période, l'investisseur

peut attendre que l'événement générant l'incertitude se résolve et choisir, au début de la seconde période, la classe d'option optimale. En d'autre termes, cette option n'est ni un call ni un put jusqu'à ce que, à une date définie à la date d'émission (fin de la première période), le détenteur choisise sa transformation en call ou en put standard, sur un actif sous-jacent déterminé.
La prime de la « chooser option » avec le « straddle » (primes du call et du put additionnées, de même échéance et de même prix d'exercice). En comparant la « chooser option » avec le « straddle », nous observons que le remboursement final d'une « chooser option » ne sera inférieur à celui d'un « straddle » que si, après la « choise date» et la conversion en call ou en put, d'autres événements viennent inverser la tendance dans le sens opposé à celui choisi.
Précisions, en outre, que si le call et le put ont les mêmes prix d'exercice et les mêmes dates d'échéance, l'option est dite « reguler chooser » et peut être évaluée selon un modèle analitique. Si, au contraire les prix d'exercice sont différents et/ou les dates d'échéance différents, ces « complex choosers » nécessitent l'utilisation de modèles numériques pour leurs évaluations. Les options « chooser » donnent le droit, et non l'obligation, à leurs acheteurs, contre paiement immédiat d'une prime, de choisir à une date donnée du futur fixée à l'avance T_0 de recevoir soit un call soit un put de strike K et de la date prédéfinie T.

Options exotiques dépendant du chemin suivi par le cours :

Les Options Asiatiques :

L'option sur moyenne (option asiatique) est une option dont le prix d'exercice est le cours moyen de la devise pendant la durée de vie de l'option «option average Strike» ; ou dont le prix d'exercice est, à l'échéance, comparé à la moyenne des cours de la devise. L'intérêt de ce type d'option est que le détenteur d'une option sur moyenne ne subit pas de mouvement brutal du cours de la devise à l'approche de l'échéance et s'assure ainsi une protection contre un accident de marché.

Les Options Barières :

Les options à barrières sont identiques aux options vanilles à la différence près où une limite, nomméee barrière, a été ajoutée. La barrière est un seuil fixé par l'acheteur de l'option en accord avec le vendeur. L'evolution du sous-jacent face à ce seuil pourra conditionner l'existence de l'option, en particulier le rendre exerçable, ou la faire cesser d'exister. Sur ce, nous distinguons deux catégories des options à barrière :

- **Knock In :** dès que la barrière est touchée, l'option existe et à toutes les caractéristiques d'une option classique de même paramètre. Elle ne sera exerçable à l'échéance que, si, on moins une fois au cours de la vie de l'option, le spot atteint ou dépasse une barrière activante (on dit qu'il touche la barrière).
- **Knock out :** dès que la barrière est touchée, l'option n'existe plus, et ne pourra donc être exercée, cessera définitivement d'exister si, à un moment donné au cours de la vie de l'option, le spot touche une barrière désactivante.

  Dans ce deux cas, il suffit que le spot atteigne une seule fois le seuil de la barrière (ou le dépasse) avant l'échéance pour déclencher l'activation ou la désactivation. L'option peut donc être activée ou désactivée à la hausse (on parle d'option à barrière up) ou à la baisse (option à barrière down).

Nous pouvons remarquer trois points principaux dans l'utilisation des options à barrière :

- **Prix des options :** le prix des options à barrière peut être selon le niveau de la barrière, nettement plus faible que celui d'une option standard de mêmes caractéristiques.
- **Grande flexibilité :** la multiplicité des options à barrière permet d'élaborer des stratégies très précises tant en terme d'anticipation, qu'en terme de couverture : pour une classe donnée d'options standard.
- **Levier et rendement importants :** le versement d'une prime faible combiné à un «Pay-off» identique à celui d'une option standard en cas d'évolution favorable du sous-jacent permettent d'améliorer le levier de façon significative, ainsi que le rendement de l'option.

Comme les barrières restreignent les droits liés à la détention de l'option, une option à barrières aura une prime généralement inférieure à celle d'une option classique présentant les mêmes caractéristiques.

Options composées :(compound options)

Les options composées sont des options sur options. Il existe quatre principaux types d'options composées : les calls sur calls, les puts sur calls, les calls sur puts et les puts sur puts. Les options composées ont deux prix d'exercice et de dates d'exercice.
À titre d'exemple, intéressons-nous au cas d'un call sur call. A la première date d'exercice T_1, le détenteur de catte options est en droit de payer le prix d'exercice K_1 en échange du call sous-jacent. Ce call donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à ce second contrat d'option au second prix d'exercice K_2, à la seconde date d'exercice T_2. L'option composée ne devra donc être exercée à la première date d'exercice que si la valeur de l'option sous-jacente est, à cette date, supérieure au premier prix d'exercice.

Options Lookback :

Les Lookback options permettent à leur détenteur de bénéficier du cours le plus avantageux observé sur l'ensemble de la durée de vie d'une option. Deux catégories de Lookback options peuvent être distinguées : L'option Fixed Strike Lookback a un prix d'exercice fixé d'emblée. A léchéance l'option est exerçable si le prix d'exercice est supérieur au cours au comptant le plus bas observé pendant la durée de vie de l'option (pour un put) ou si le prix d'exercice est inférieur au plus haut cours au comptant observé pendant la période (pour un call). Une telle option permet à son détenteur de ne pas pâtir d'une évolution défavorable du cours au comptant à l'échéance de l'option, et fournit donc, à cet égard, une protection plus efficace qu'une option classique. L'option Floating Stricke a un prix d'exercice qui n'est pas connu qu'à l'échéance de l'option. C'est le plus bas observé pendant la durée de vie de l'option (pour un call) et le plus haut cours au comptant observé pendant la période (pour un put). Ce type d'option est plus coûteux qu'une option classique mais permet par exemple à un trésorier souhaitant couvrir son risque de change de se garantir le cours le plus avantageux sur une période donnée (c'est-à-dire le cours le plus bas s'il est en position acheteur de devises et le cours le plus élévé s'il est en position vendeur de devises). De plus, si l'acheteur de l'option anticipe une forte volatilité de la devises pendant la période de référence, il peut espérer que son option soit largement dans la monnaie à l'échéance.

Chapitre 2

Le Modèle de Black Scholes

Introduction

Pour calculer le prix d'un produit dérivé, nous avons besoin d'un modèle stochastique pour d'ecrire l'évolution incertaine du ou des titres sous-jacents. Un modèle stochastique doit refléter les observations de l'historique des prix aussi bien que possible d'un point de vue statistique. Parallélement, le modèle stochastique doit s'intégrer dans un cadre mathématique qui permet une analyse efficace des prix d'options. Un "bon" modèle doit donc représenter une capturer à la fois les propriétés statistiques de la dynamiques des prix et s'intègrer efficacement dans la théorie de l'analyse stochastique. Le célébrissime modèle de Black-Scholes est un compromis entre ces deux exigences et donne dans de nombreux cas des formules explicites de prix d'options.

2.1 Les outils de calcul stochastique

Cette section a pour but de rappeler quelques outils de calcul stochastique.

2.1.1 Processus stochastiques

Définition 2.1.1.1. *On appelle processus stochastique en temps continu une famille* $(X_t)_{t \in T}$ *de variables aléatoires indexées par un ensemble de temps* T, *définies sur un*

même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Un processus* $X_t(\omega)$ *dépend de deux paramètres* t *(généralement le temps) et de la variable aléatoire* $\omega \in \Omega$*. Pour* $t \in T$ *fixé, l'application* $\omega \in \Omega \longrightarrow X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
Pour $\omega \in \Omega$ *fixé, l'application* $t \in T \longrightarrow X_t(\omega)$ *est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, noté* $X_t(\omega)$ *ou* $X(t, \omega)$*.*

2.1.2 Variation totale et quadratique

Définition 2.1.2.1. *La variation infinitésimale d'ordre p d'un processus* X_t *défini sur [0,T] associée à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ *est définie par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^p$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ *a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence* L^p*) lorsque*

$$\pi_n = \parallel \Pi_n \parallel_\infty = \max_{i \leq n} \mid t_{i+1}^n - t_i^n \mid \longrightarrow 0.$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t *sur [0,T]. En particulier,*

- *si* $P = 1$*, la limite s'appelle la variation totale de* X_t *sur [0,T],*

- *si* $P = 2$*, la limite s'appelle la variation quadratique de* X_t *sur [0,T] et est notée* $<X>_T$*.*

2.1.3 Martingales

Définition 2.1.3.1. *Une filtration est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *telles que :*

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+s} \text{ pour tout } 0 \leq s.$$

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ *est la filtration définie par* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.

Définition 2.1.3.2. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, on dit que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $0 \leq s \leq t$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*- mesurable.*

Définition 2.1.3.3. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale en temps continu par rapport à une Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si elle vérifient les conditions suivantes :*
- *Pour tout* $t \geq 0$; X_t *est intégrable (c'est à dire :* $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$*).*
- *Pour tout* $t \geq 0$; X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *- mesurable (ou* X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *- adapté).*
- *Pour tout* $t \geq s \geq 0$; $\mathbb{E}\ [X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$.

2.1.4 Mouvement Brownien

Définition 2.1.4.1. *Un mouvement Brownien est un processus* $(B_t)_{t\geq o}$ *tel que :*
- $B_0 = 0$ *presque sûrement.*
- *B est continu, c'est à dire* $t \longrightarrow B_t(\omega)$ *est continue pour tout* ω.
- *B est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que* B_t - B_s *est indépendant de* $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_s)_{s\leq t}$.
- *les accroissements sont stationnaires (pour* $s < t$ *l'accroissement* W_t - W_s *ne dépend que de la valeur de t-s), Gaussiens, et tels que si* $s \leq t$, *on a* B_t - $B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Théorème 2.1.1. *[14]* ***"Caractérisation du mouvement Brownien" :*** *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien si et seulement s'il est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance.*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t$$

Mouvement Brownien standard

Définition 2.1.4.2. *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$X_0 = 0\ \mathbb{P}_{p\cdot s}\ ;\ \mathbb{E}(X_t) = 0\ ;\ \mathbb{E}(X_t^2) = t$$

Dans ce cas, la loi de X_t *est une loi normale.*

Définition 2.1.4.3. *On appelle $\mathcal{F}_t$ - mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifiant :*
- Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ - mesurable.
- Si $s \leq t$, X_t - X_s est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.
- Si $s \leq t$, la loi de X_t - X_s est identique à celle de X_{t-s} - X_0.

Mouvement Brownien Géométrique

Définition 2.1.4.4. *Soit B un mouvement Brownien, b et σ deux constante. Le processus*

$$X_t \;=\; X_0 exp\{(b - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t \;+\; \sigma B_t\}$$

est appellé Brownien géométrique.

Ce processus est aussi appellé processus "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t \;=\; \left\{b - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right\} t \;+\; \sigma B_t \;+\; \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

Représentations des martingales Browniennes

Théorème 2.1.2. *[14] Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle de B_t, il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) \;<\; +\infty$ et*

$$\forall t \in [0,T] \qquad M_t \;=M_0 + \int_0^T H_s dB_s \qquad p.s$$

Remarque 2.1.4.1. *Cette présentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement Brownien.*

2.1.5 Mouvement Brownien et martingales

Définition 2.1.5.1. *Si $(Xt)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard alors :*
- X_t *est une* $\mathcal{F}_t$ *- martingale.*
- X_t^2 *- t est une* $\mathcal{F}_t$ *- martingale.*
- $exp(\sigma X_t$ *-* $(\sigma^2/2)t)$ *est une* $\mathcal{F}_t$ *- martingale,* $\sigma \in \mathbb{R}$.

2.1.6 Probabilités équivalentes

Définition 2.1.6.1. *Soit* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Une probabilité* $\tilde{\mathbb{P}}_T$ *sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *est dite absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}_T(A) = 0.$$

Théorème 2.1.3. *[14]* $\tilde{\mathbb{P}}_T$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si et seulement si, il existe une variable aléatoire* Z *à valeurs positives ou nulles sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \tilde{\mathbb{P}}_T \ (A) = \int_A Z(\Omega) d\mathbb{P}(\Omega).$$

Z est appelée densité de $\tilde{\mathbb{P}}_T$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *notée* $\dfrac{d(\tilde{\mathbb{P}}_T)}{d(\mathbb{P})}$.

2.1.7 Théorème de Girzanov

Théorème 2.1.4. *[14] Soit* $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *, et soit* $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté vérifiant* $\displaystyle\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ *p.s tel que le processus* $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$L_t = exp(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds),$$

soit une $\mathcal{F}_t$ *-martingale, Alors il exist une probabilité* $\tilde{\mathbb{P}}^{(L)}$ *de densité* L_t *équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle le processus* $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$B_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t$ -mouvement Browien standard.

2.1.8 Intégration stochastique et calcul d'Itô

Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{P}p.s \;\; \forall t \leq T \;\; X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Avec :
X_0 est F_t -mesurable ;
$(K_s)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_s)_{0\leq t\leq T}$ des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$;
$\int_0^t \mid K_s \mid ds < +\infty, \mathbb{P}p.s$;
$\int_0^t \mid H_s \mid^2 ds < +\infty, \mathbb{P}p.s.$

Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X, X >_s$$

De même si (t, x) $\longrightarrow f(t,x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'(s, X_s)d_s + \int_0^t f'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(X_s)d < X, X >_s$$

Formule d'intégration par parties

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t dY_t + \int_0^t Y_t dX_t + < X, Y >_t$$

avec la convention

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_s H'_s d_s.$$

2.1.9 Equations Différentielles Stochastiques

Définition 2.1.9.1. *On appelle equation différentielle stochastique noté (EDS) de condition initiale x_0, de coefficient de diffusion σ et de coefficient de dérive b un processus X tel que pour tout $t \geq 0$,*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \qquad (1)$$

L'équation (1) sera aussi notée

$$\begin{aligned} dX_t &= b(s, X_s) ds + \sigma(t, X_t) dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

2.2 Description du modèle de Black et Scholes

Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option (call ou put) sur une action ne distrubuant pas de dividendes, et à une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option d'éliminer totalement le risque (c'est à dire se couvrir).

De plus, il repose implicitement sur les hypothèses supplémentaires, et notamment que :

- Les actifs sont divisibles à l'infini .
- L'absence d'opportunité d'arbitrage .
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant, (le cours de l'action suit un processus continue).
- Les échanges ont lieu sans coûts de transaction .

2.2.1 L'évolution des cours

Le problème proposé par Black et Scholes pour d'écrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire).

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \ (2.1)$$

Où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intêret sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intêret instantané, à ne pas confondre avec le taux annuel ou le taux une période de modèles discrets). On pose $S_0^0 = 1$, de sorte que :

$$\mathrm{S}_t^0 = \mathrm{e}^{rt} \text{ pour t} \geq 0$$

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad \text{telque : } \ S_0 > 0 \ (2.2)$$

Sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ où $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration brownienne, X_0 est une v.a de carré intégrable et (B_t) est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien standard (M.B.S) indépendant de X_0.
Où :
- B_t : un mouvement Brownien standard.
- μ : est un coéfficient de croissance.
- σ : est un coéfficient de volatilité.
- S_0 : est une valeur initiale pour S_t.

Le modèle étudié sur l'intervalle [0, T] ou T est la date d'échèance de l'option à étudier.
La solution de l'equation (2.2) est définit par :

$$\mathrm{S}_t = S_0 exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.
Cette solution est unique mais n'est pas une martingale.

Remarque 2.2.1.1. L'hypothèse selon laquelle le cours d'une action est un mouvement Brownien n'était pas réaliste car le prix de l'action ne peut pas prendre des valeurs négatives. D'où l'idée de modéliser par un mouvement Brownien géométrique .

La loi de S_t est une loi log-normale (son logarithme suit une loi normale).
Le processus (S_t) vérifie une équation de type (2.2) sauf si son logarithme est un mouvement Brownien.
Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions $(S_t)_{t \geq 0}$ de : [4]

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s) \qquad (2.3)$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),\ S_0 = x_0 \qquad (2.4)$$

Cala signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t \geq 0}$ tels que les intégrales $\int_0^t S_s d_s$ et $\int_0^t S_s dB_s$ aient un sens , et qui vérifie pour chaque t :

$$\mathbb{P}_{p.s} \quad S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

Faisons tout d'abord un calcul formel : Posons $Y_t = \log(S_t)$ *où* S_t est un processus d'It$\hat{o}$ avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$.
Appliquons la formule d'It$\hat{o}$ à $f(x) = logx$ on obtient, en supposant que S_t est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X, X >_s$$

$$log(S_t) = log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}d < S, S >_s$$

en effet :

$$\begin{aligned} < S, S >_s &= < \int_0^t \sigma S_s dB_s, \int_0^t \sigma S_s dB_s > = < \int_0^t \sigma S_s dB_s > \\ &= \int_0^t \sigma^2 S_s^2 d < B, B >_s = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds \end{aligned}$$

on a : $dS_s = S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$

$$\begin{aligned} log(S_t) &= log(S_0) + \int_0^t \frac{S_s(\mu ds + \sigma dB_s)}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds \\ &= log(S_0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\sigma^2 ds \\ &= log(S_0) + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s \end{aligned}$$

Soit en utilisant (2.4) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

On en déduit que :

$$Y_t = log(S_t) = log(S_0) + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t.$$

$$e^{log(S_t)} = e^{log(S_0)} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \ exp((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t) \quad \text{tq : S}_0 = \text{x}_0$$

Soit une solution de l'equation (2.3).
Vérifions cela.
$S_t = f(t, B_t)$ où :

$$f(t, x) = x_0 \ exp((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma x)$$

La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, B_t) \\ &= f(0, B_0) + \int_0^t f'(s, B_s)ds + \int_0^t f'(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(B_s)d < B, B >_s \end{aligned}$$

Mais comme la variation quadratique du mouvement brownnien vaut (s)
($<$ B,B $>$s$=$ s) on a :

$$\begin{aligned} S_t &= x_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t \frac{1}{2} S_s \sigma^2 ds \\ &= x_0 + \int_0^t \mu S_s ds - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_s ds \end{aligned}$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

On vient donc de démontrer l'existence d'un solution de (2.3). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cele, nous allons utiliser une propriété généralisant "la formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô. Notons que : [4]

$$S_t = x_0 \ exp((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

est une solution de (2.3) et suposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ en soit une autre.
on va chercher à exprimer la "differentielle stochastique" $X_t S_t^{-1}$.
Posons :

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = exp((-\mu + \tfrac{\sigma^2}{2})t - \sigma B_t)$$

et $\mu' = -\mu + \sigma^2$ et $\sigma' = -\sigma$
Alors

$$Z_t = exp((\mu' - \tfrac{\sigma'^2}{2})t + \sigma' B_t)$$

et le calcul établi précédemment prouve que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s(\mu' ds + \sigma' dB_s) = 1 + \int_0^t Z_s((-\mu + \sigma^2)ds - \sigma dB_s)$$

On peut alors exprimer la "differentielle" de $X_t Z_t$ grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :

$$d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d < X, Z >_t.$$

Ici on'a :

$$< X, Z >_t = < \int_0^{\cdot} X_s \sigma dB_s, -\int_0^{\cdot} Z_s \sigma dB_s >_t = -\int_0^t \sigma^2 X_s Z_s ds$$

On en déduit que :

$$d(X_t Z_t) = X_t Z_t((-\mu + \sigma^2)dt - \sigma dB_t) + X_t Z_t(\mu d_t + \sigma dt) - X_t Z_t \sigma^2 dt = 0$$

$X_t Z_t$ est donc égale à $X_0 Z_0$, ce qui entraîne que :

$$\forall t \geq 0,\, \mathbb{P}_{p\cdot s}.\; X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

Les processus X_t et Z_t étant continus, ceci prouve que :

$$\mathbb{P}_{p\cdot s}.\; \forall t \geq 0 X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *[4] Soient μ, σ deux nombres réels, $(B_t)_{t\geq 0}$ étant un mouvement brownien et T un réel strictement positif, il existe un processus d'Itô unique $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ qui vérifie pour tout*
$t \leq T$:

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \; exp((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

Remarque 2.2.1.2. *Le processus S_t que l'on vient d'expliciter servira à modèle standard pour le prix d'un actif financier. On l'appelle le modèle de Black et Scholes. Lorsque $\mu = 0$, S_t est une martingale, ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle. [4]*

2.2.2 Stratégie autofinancée

Définition 2.2.2.1. *Un portefeuille est un ensemble d'investissements possédés par un intervenant sur le marché. Ce sont des positions sur le marché, c'est à dire le nombre d'actifs et de produit dérivé qu'il possède. Il peut contenir des actions, des options, des devises ... On peut appeler cela un portefeuille initial sans l'action de gestion des risques.*

Pour la couverture d'option on s'interèsse aux portefeuilles autofinancées.

Définition 2.2.2.2. *Une stratégie autofinancée est un processus continu $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration du mouvement brownien, les composantes H_t^0 et H_t de ϕ_t représentant les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué détenues en portefeuille à la date t. La valeur du portefeuille à la date t est alors donnée par :*

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

satisfait la condition d'autofinancement :

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t \qquad \forall t \in [0,T]$$

Pour que cette égalité ait un sens, on impose les conditions suivantes :

$$\int_0^T \mid H_t^0 \mid dt < \infty \quad p.s \quad et \quad \int_0^T H_t^2 dt < \infty. \quad p.s$$

On définit $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ le cours actualisé de l'actif risqué.

Proposition 2.2.2.1. *[6] Soit $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\int_0^T \mid H_t^0 \mid dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$ p.s.. On pose $V_t(\phi)(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ et $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$. Alors, ϕ définit une stratégie auto-financée si et seulement si*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s \qquad p.s\ (2.5)$$

pour tout $t \in [0,T]$

Démonstration. Supposons la stratégie ϕ auto-financée. De l'égalité

$$d\widetilde{V}_t(\phi) = -re^{-rt} V_t(\phi) dt + e^{-rt} dV_t(\phi),$$

qui résulte de la différentiation du produit des processus (e^{-rt}) et $(V_t(\phi))$ (notons que le terme de crochet $d\langle e^{-r.}, V_.(\phi)\rangle_t$ et nul, on déduit

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\phi) &= -re^{rt}(H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= H_t d\widetilde{S}_t \end{aligned}$$

D'où l'égalité (2.5). La démonstration de la réciproque repose sur un raisonnement similaire.

2.3 Évaluation et couverture des options dans le modèle de Black-Scholes

2.3.1 Arbitrage et la probabilité sous laquelle $d\tilde{S}_t$ est une martingale :

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est une condition cruciale dans la théorie de la valorisation de produits dérivés. Nous formalisons ce concept avec :

Définition 2.3.1.1. *Une opportunité d'arbitrage sur $[0, T]$ est une stratégie de portefeuille autofinançant ϕ dont la valeur $V(\phi)$ vérifie :*

$$V_0(\phi) \;=\; 0,\; V_T(\phi) \;\geq\; 0 \; et \; \mathbb{P}[V_T(\phi)] \;>\; 0$$

Autrement dit, il existe une opportunité d'arbitrage (A.O.A) s'il est possible, en gérant un portefeuille de façon autofinancé, de gagner de l'argent (avec une probabilité positive) tout en ayant aucun risque d'en perde.

Ainsi, un arbitrage représente la gestion dynamique d'un portefeuille autofinançant permettant à partir d'un capital nul, de céer sans risque un profit sûr.
Dans les modèles en temps continu, nous serons amenés à faire des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sur les stratégies de portefeuille pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Définition 2.3.1.2. *On définit une probabilité martingale ou bien "Probabilité risque neutre" s'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale $\mathbb{P}$, sous laquelle le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$.*

Utilisant l'équation différentielle stochastique vérifiée par (S_t), on a

$$d\tilde{S}_t \;=\; (\mu - r)\tilde{S}_t d_t + \sigma \tilde{S}_t dB_t,$$

et par conséquent, si on pose $\tilde{W}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$,

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t \ (2.6)$$

D'aprés le théorème de Girsanov appliqué, en prenant $\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma}t$, il existe une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$ équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle $(\tilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard. On admettra dans la suite, que la définition de l'intégrale stochastique est invariante par le changement de probabilité équivatente. Alors, si on se place sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$, on déduit de l'intégrale (2.6) que $(\tilde{S}_t)$ est une martingale et que :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \ exp(\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$$

Remarque 2.3.1.1. *La notion économique d'A.O.A suppose qu'il est impossible de gagner de l'argent sans prendre de risque à un instant donné, est reliée à une notion mathématique "existence d'une probabilité risque-neutre".*

Théorème 2.3.1. *[11] Considérons un marché sans opportunité d'arbitrage. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
– *Le marché est complet.*
– *Il existe une unique probabilité risque-neutre $\tilde{\mathbb{P}}_T$.*

2.3.2 Pricing

La valorisation (pricing) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur, ne pas "mettre en exploitation" ou bien "augmenter la valeur" comme l'indiquent les dictionnaine, mais simplement à évaluer. Dans cette section, nous nous limitons à l'étude des options exotiques. Une option exotique est définie par une variable aléatoire positive $(\mathcal{F}_t)$-mesurable h.
Le plus souvent, h est de la forme $\mathfrak{f}(S_t)$. Comme dans le cas discret, nous allons définir la valeur de l'option en la simulant. Pour la raisons techniques, nous limiterons la classe des stratégies admissibles de la façon suivante.

Définition 2.3.2.1. *Une Stratégie $\phi = ((H_t^0, H_t))$ est dite admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée du portefeuille associée à une variable aléatoire positive de carrée intégrable sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$, définit par :*

$$\tilde{V}_t(\phi) = H_0^t + H_t\tilde{S}_t \; et \, \forall \; s \in [0,\ T]$$

Définition 2.3.2.2. *Un produit financier est dit réplicable(simulable), ou atteignable, s'il existe une stratégie auto-finançante (admisible) de couverture de ce produit.*

En d'autre termes, le produit financier S est dit réplicable si on peut construire un portefeuille qui dépend des autres produits du marché et qui à chaque instant t vaut S_t. Pour construire ce portefeuille on achète une certaine quantité de différents produits et on vent une certaine quantité d'autres produits dans le but d'avoir une valeur de portefeuille égale à S.

Remarque 2.3.2.1. *Vu que $\tilde{V}_t(\phi)$ est supposée de carrée intégrable sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$ il en est de même de $V_T(\phi) = h$.*
Donc une condition nécessaire pour que h soit simulable est que h est de carrée intégrable sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$.

Définition 2.3.2.3. *On définit le prix à l'instant t d'une option simulable h (i.e. le prix du droit à recevoir h à l'échéance) comme $V_t(\phi)$ la valeur au temps t du portefeuille associée à la stratégie ϕ simulant l'option h.*

Théorème 2.3.2.1. *[6] Dans le modèle de Black et Scholes, toute option définie par une variable aléatoire h, positive, $\mathcal{F}_T$ - mesurable et de carré intégrable sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$ est simulable.*
De plus son prix à l'instant t est donné par :

$$V_t(\phi) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$$

La valeur de l'option à l'instant t est donc définie de façon naturelle par l'expression $\tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe une stratégie admissible (H^0, H), simulant l'option. La valeur à l'instant t du portefeuille (H_t^0, H_t) est donnée par :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

, on a, par hypothèse, $V_T = h$. Soit $\widetilde{V}_t = V_t e^{-rt}$ la valeur actualisée

$$\widetilde{V}_t = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t$$

Puisque la stratégie est auto-financée, on a, d'après la proposition (2.2.2.1) et l'égalité (2.5),

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= V_0(\phi) + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t H_s \sigma \tilde{S}_s dW_s\end{aligned}$$

Sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$, $\sup^{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ est de carré intégrable, d'aprés la définition des stratégies admissibles, et l'égalité qui précède fait apparaître le processus $(\tilde{V}_t)$ comme une intégrale stochastique par rapport à (W_t). Il en résulte que $(\widetilde{V}_t)$ est une martingale de carré intégrale sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$. D'où

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{\mathbb{E}}(\tilde{V}_T(\phi)|\mathcal{F}_t)$$

et par conséquent

$$V_t(\phi) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t) \text{ (2.7)}$$

Nous avons ainsi montré que si le portefeuille (H^0,H) simule l'option définie par h, sa valeur est donnée par (2.4). Pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus (H_t^0) et (H_t) définissant une stratégie admissible, et tels que

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)} h e^{-rT}$$

Or, sous la mesure $\tilde{\mathbb{P}}_T$ le processus $\mathrm{M}_t = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$ est de façon évidente une martingale de carré intégrable. La filtration $(\mathcal{F}_t)$ filtration naturelle de (B_t), est aussi la filtration naturelle de (W_t) et, d'aprés le théorème de Représentation des Martingales, il existe un processus adapté $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $(\int_0^t K_s^2 ds) < +\infty$ et

$$\forall t \in [0,T],\ M_t = M_0(\phi) + \int_0^t K_s d\tilde{W}_s \text{ p.s.}$$

La stratégie ϕ =(H_t^0, H_t) avec $H_t = K_t/(\sigma\tilde{S}_t)$ *et* $H_t^0 = M_t - H_t\tilde{S}_t$,est alors, d'après la proposition (2.2.2.1) et l'égalité (2.5), une stratégie auto-financé dont la valeur à l'instant t est donnée par

$$\mathrm{V}_t(\phi) = M_t e^{rt} = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$$

Il est clair sur cette expression que $\mathrm{V}_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive, que $\sup_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ est de carré integrable sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$ et que $\mathrm{V}_t(\phi) = \mathrm{H}$. On a donc bien une stratégie admissible simulant h.

2.3.3 Relation de parité Call-Put

Proposition 2.3.3.1. *[4] i) Si deux actifs financiers X et Y ont le même flux terminal $X_T = Y_T$, alors $\forall t \leq T$ on a $X_t = Y_t$.*
ii) Si $X_T \leq Y_T$, alors $\forall t \leq T$ on a $X_t \leq Y_t$.
Dans la suite le marché sera supposé complet.

Définition 2.3.3.1. *Une bonde zéro-coupon est un actif qui paie à la maturité T 1 euro. On désigne par $e^{-r(T-t)}$ son prix à la date t.*

En mathématiques financières, il est possible de montrer une relation entre un Call exotique et un Put exotique, dans un marché sans arbitrage, appelée la parité Put-Call.

On considère un call et un put exotique basés sur le même actif sous-jacent S, de maturité T, et de strike K. Pour démontrer la relation de parité Put-Call, nous allons nous servir de la. On va donc construire deux portefeuilles ayant même valeur à la maturité donc ayant la même valeur à tout instant (d'aprés la proposition précédente). Tout les actifs de marchés sont échangés de manière plus ou moins fréquente et en quantités variables selon leur liquidité. Des actifs liquides sont côtés très fréquement pendant les heures d'ouverture des marchés financiers. Lintervalle de temps entre deux cotations successives peut être réduit à quelque secondes, si bien que l'on peut avoir l'impression d'une cotation "en continu". Pour d'autre actifs moins liquides, la cotation est beaucoup moins fréquente et ne peut pas dépasser une valeur par jour. Il est donc logique de s'intéresser aux modèles discret dans lesquels le temps est représenté par un nombre fini d'instants entre [0,N]. Par opposition, on appele modèles continus ou plus précisément modèles à temps continu les modèles dans lesquels la variable de temps est vue comme une variable continue parcourant un intervalle $[0, T]$.

Chapitre 3

Applications de modèle de Black Scholes

Introduction

On considère dans ce chapitre d'autres types d'options que les options standar. Le problème de valorisation de ces options est plus difficile que pour les payoffs européens. On se contente ici de décrire ces produits dérivés sans faire d'étude mathématique rigoureuse mais plutôt en se base sur des idées intuitives. On se placera le plus souvent dans le cadre du modèle de Black et Scholes.

3.1 Options Binaires

Nous allons distinguer les différentes options constituant cette famille d'option binaire. Nous utilisons l'equation de Black-Scholes et nous notons un call d'une telle option. La solution de l'équation de Black-Scholes s'écrit :

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(xe^y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)} \right) dy$$

Or, le payoff d'une option call binaire est $X_{CB} = H(S_T - K) \cdot G$.
Nous prenons donc : $f(S_T e^y) = H(S_T e^y - K) \cdot G$.

L'évaluation de ces options est directe. On sait que dans la mesure de risque neutre on a :

$$lnS_T - lnS_t \sim \mathcal{N}_{\tilde{\mathbb{P}}}((r - r_d - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t))$$

avec :

r : Le taux d'interêt sans risque.

r_d **:** Les taux des dividendes.

Les valeurs d'un produit dérivé est :

Donc

L'option all or nothing (Tout ou rien) :

Soit C_{AN} le prix d'un call binaire de type all or nothing

Plus précisément, ici : $f(S_T e^y) = H(S_T e^y - K) \cdot N$.

D'aprés le théorème de Black-scholes. La valeur de l'option est donnée par :

$$C_{AN} \;=\; \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} f(S_T e^y) | \mathcal{F}_t]$$

Ce qui peut être écrit :

$$C_{AN}(t, S_T) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} H(S_T e^y - K) N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y - (T-t)(r - \frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy$$

Or

$$S_T e^y - K > 0 \Rightarrow y \geq \ln(\frac{K}{S_T})$$

Donc :

$$C_{AN}(t, S_T) = e^{-r(T-t)} \int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y - (T-t)(r - \frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy$$

Soit,

$$C_{AN}(t, S_T) = e^{-r(T-t)} N \int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty} n(t, y) dy$$

On effectue un changement de variables, avec :

$$z = \frac{y - (T-t)(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Soit

$$z_0 = \frac{\ln(\frac{S_T}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -d_2$$

(calculé à pour : $y = \ln(\frac{K}{S_T})$), Nous obtenons :

$$C_{AN}(t, S_T) = e^{-r(T-t)} N \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

D'où le résultat :

$$C_{AN} = N \cdot e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

D'une façon similaire, on trouve que la fomrule d'évaluation d'un put est donnée par :

$$P_{AN} = N \cdot e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2)$$

L'option asset or nothing (Actif ou rien) :

Soit C_{SN} le prix d'un call binaire de type Asset or nothing
Cette option donne un payoff $X = H(S_T - K)M \cdot S_T$
Donc la fonction f s'écrit : $f(S_T) = H(S_T - K)M \cdot S_T$

$$C_{SN}(t, S_T) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} H(S_T e^y - K) \frac{M S_T e^y}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y - (T-t)(r - \frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy$$

Or,

$$S_T e^y - K > 0 \Rightarrow y \geq \ln(\frac{K}{S_T})$$

Donc :

$$\begin{aligned} C_{SN}(t, S_T) &= e^{-r(T-t)} M \cdot S_T \int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(y - \frac{(y - (T-t)(r - \frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy \\ C_{SN} &= e^{-r(T-t)} M \cdot S_T \end{aligned}$$

$$\int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{-2y\sigma^2(T-t)+(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy$$

Or, si nous posons :

$$q(y) = -2y\sigma^2(T-t) + (y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2 \ \ et \ \ a = (T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)$$

alors :

$$q(y) = -2y\sigma^2(T-t)(y^2-2ay+a^2)$$

$$q(y) = (y^2 + y(-2a-2\sigma^2(T-t)) + a^2)$$

$$q(y) = y^2 + 2y\frac{(-2a-2\sigma^2(T-t))}{2} + \left(\frac{(-2a-2\sigma^2(T-t))}{2}\right)^2 - \left(\frac{-2a-2\sigma^2(T-t))}{2}\right)^2$$

$$+a^2$$

Remplaçons a par sa valeur :

$$q(y) = \left(y + \frac{((-2(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)) - 2\sigma^2(T-t))}{2}\right)^2 -$$

$$\left(\frac{(-2(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2) - 2\sigma^2(T-t))}{2}\right)^2 + \left((T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2$$

$$q(y) = \left(y-(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2 - \left((T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2 + \left((T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2$$

$$q(y) = \left(y-(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2 - 2r\sigma^2(T-t)^2$$

Nous en déduisons :

$$C_{AN} = e^{-r(T-t)} M \cdot S_T$$

$$\int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2))^2 - 2r\sigma^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy$$

Soit :

$$\begin{aligned}
C_{SN}(t,S_T) &= e^{-r(T-t)}M\cdot S_T\int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)dy \\
C_{SN}(t,S_T) &= M\cdot S_T\int_{\ln(\frac{K}{S_T})}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)dy
\end{aligned}$$

Nous effectuons un changement de variable, avec :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{y-(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
z_0 &= \frac{\ln(\frac{x}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1
\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
C_{SN}(t,S_T) &= M\cdot S_T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dz \\
&= M\cdot S_T\cdot\mathcal{N}(z_0)
\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$C_{SN} = M\cdot S\cdot\mathcal{N}(d_1)$$

L'option « Gap » :

Soit C_{Gap} le prix d'un call binaire de type gap

Plus précisément, ici : $f(S_T) = H(S_T - K)(S_T - Y)$

$$\begin{aligned}
C_{Gap}(t, S_T) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} H(S_T e^y - K)(S_T e^y - Y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy \\
C_{Gap}(t, S_T) &= e^{-r(T-t)} S_T \int_{-\infty}^{\infty} H(S_T e^y - K) e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy \\
&- e^{-r(T-t)} Y \int_{-\infty}^{\infty} H(S_T e^y - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy
\end{aligned}$$

Or, $S_T e^y - K > 0 \Rightarrow y \geq \ln(\frac{K}{S_T})$

Donc :

$$\begin{aligned}
C_{Gap}(t, S_T) &= e^{-r(T-t)} S_T \int_{\ln \frac{K}{S_T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy \\
&- e^{-r(T-t)} Y \int_{\ln \frac{K}{S_T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(y-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy
\end{aligned}$$

Or, les deux intégrales ont été calculées précédemment dans les parties All or Nothing et Asset Or Nothing. Donc :

$$\begin{aligned}
C_{Gap}(t, S_T) &= S \cdot \mathcal{N}(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) \\
C_{Gap}(t, S_T) &= b \cdot S \cdot e^{-d_1} \mathcal{N}(b.x) - b.X.e^{-rt} \cdot \mathcal{N}(b.x - b.\sigma.\sqrt{t})
\end{aligned}$$

avec :

$$x = \frac{\ln(\frac{S \cdot e^{-d \cdot t}}{X \cdot e^{-r \cdot t}})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Où b un coefficient binaire égal à 1 pour un call, et -1 pour une put.

3.2 Options LookBack

Les options LookBack sont des options d'achats standards (call) ou de vente (put) souhaité est fixé au prix minimum (par un call) et au prix maximum (par un put), observées durant la vie d'une option (Goldman, Sosin et Gatto (1979), Garman (1989)). Les dates et les temps auxquels le temps est observé soit fixé au préalable et sont appelés les fixés. Ces options permettent alors le preneur (dépositaire) à vendre ou acheter l'option dans le meilleurs prix observés.
Si le temps de maturuté est fixé alors il n'exixte par réellement d'options puisqu'elles sont en exercice. Ceci dit, le bénéfice peut être nul si le prix est le maximum ou le minimum des prix observés.
Une formule explicite existe pour le style LookBack européen qui est fixé. En réalité, ces options sont fixés au plus au quotidien sinon sur une echelle mais grande. Ceci afffecte, la valeur de l'option puisque dans des cas non fréquent, le prix est observé dans le minimum extrême ou le maximum extrême.
On considère, en premier, un call LookBack continu fixé, le bénéfice de cette option est :

$$S_T - \min(M, M_T)$$

Où M est le cours minimum, le prix d'exercice et M_T est le minimum au temps expiration.
D'aprés le théorème de Black-scholes. La valeur de l'option est donnée par l'espérence discontinue de ce bénefice

$$C_{LB} = \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - \min(M, M_T)|\mathcal{F}_t]$$

$$C_{LB} = e^{-rT}(\mathbb{E}[S_T] - \mathbb{E}[\min(M, M_T)])$$

Ce qui peut être reformulé :

$$C_{LB} = Se^{-dT} - Mr^{-rT} \int_{\ln(M/S)}^{\infty} \mathfrak{f}(n)dn - Se^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln(M/S)} e^n \mathfrak{f}(n)dn$$

Où

$$\mathfrak{f}(n) = \frac{2}{\sigma\sqrt{T}}\mathcal{N}'\left(\frac{n-\mu T}{\sigma^2\sqrt{T}}\right) + \frac{2\mu}{\sigma}e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}n}\mathcal{N}\left(\frac{n+\mu T}{\sigma^2\sqrt{T}}\right),$$
$$\mu = r - d - \tfrac{1}{2}\sigma^2$$

le premier terme est l'attente escomptée du prix des actifs à l'arrivée ($Se^{(r-d)T}$). Le deuxième terme est la grève comptée conditionnelle sur le minimum au cours du temps restant ne plaçant pas une valeur plus basse. L'évaluation des intégrales conduit à :

$$\begin{aligned} C_{LB} &= Se^{-dT} \\ &- Me^{-rT}\left\{1 - \left[\mathcal{N}\left(\frac{\ln(M/S) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}\ln(\frac{M}{S})}\mathcal{N}\left(\frac{\ln(M/S) + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\right\} \\ &- Se^{-rT}\left\{\begin{array}{c} \frac{\frac{2\mu}{\sigma^2}+2}{\frac{2\mu}{\sigma^2}+1}e^{\mu T+\frac{1}{2}\sigma^2 T}N\left(\frac{\ln(M/S)+\mu T+\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \\ \frac{\frac{2\mu}{\sigma^2}}{\frac{2\mu}{\sigma^2}+1}e^{\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}+1\right)\ln\left(\frac{M}{S}\right)}N\left(\frac{\ln(M/S)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{array}\right\} \end{aligned}$$

Ceci peut être simplifié et réarrangé de telle sorte sorte que le prix du call continument fixé aussi bien qu'un prix rabaissé standard au temps minimum courant plus un ajustement.

$$C_{LB} = Se^{-dr}\mathcal{N}(x+\sigma\sqrt{T}) - Me^{-rT}\mathcal{N}(x)$$
$$+\tfrac{S}{B}\left(e^{-rT}(\tfrac{S}{M})^{-B}\mathcal{N}(y+B\sigma\sqrt{T}) - e^{-dT}\mathcal{N}(y)\right)$$

Où

$$B = \tfrac{2(r-d)}{\sigma^2},\; x = \tfrac{\ln(\frac{S}{M})+((r-d)-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},\; y = \tfrac{-\ln(\frac{S}{M})-((r-d)+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Pour le lookback put continuement fixé, on permute les signes des arguments à $N(.)$ ou change le signe dans la formule

$$P_{LB} = -Se^{-dT}\mathcal{N}(-x-\sigma\sqrt{T}) + Me^{-rT}\mathcal{N}(-x)$$

$$-\frac{S}{B}\left(e^{-rT}\left(\frac{S}{M}\right)^{-B}\mathcal{N}(-y - B\sigma\sqrt{T}) - e^{-dT}\mathcal{N}(-y)\right)$$

M est vu maintenant comme un maximum courant.

3.2.1 Exemple numérique

Considérons une option LookBack d'échéance 3 mois venant d'être émis, portant sur une action ne versant pas de dividendes 50 euro à ce jour. Le taux sans risque annuel est égal à 10% et la volatilité implicite de l'action est estimée à 20%. On a dans ce cas le prix d'exercice $S_{max} = S_{min} = S_0 = 50$, $r = 0.1$, $d = 0$, $\sigma = 0.2$ et $T = 0.25$. D'après les formules que nous venons de détailer, B = 0.5, x = 0.2 et y = -0.3, la valeur du put LookBack est donc 2.67 euros , La valeur du call lookback nouvellement émis ayant les mêmes caractéristiques est 5.74 euros.[12]

3.3 Options à Choix

Ce sont des options qui permettent à l'acheteur de choisir à certains dates prédéterminés, si l'option est un call ou une put standard (Rubinstein 1991).

3.3.1 Option à Choix Standard

Une option à choix standard permet à l'acheteur de choisir une date prédéterminée (τ dans le futur), si l'option est un call ou un put standard avec un prix d'exercice (K). Le payoff de l'option à choix est présenté dans le tableau suivant :

choix de temps	payoff à T	
	$S_T \leq K$	$S_T \geq K$
Call	0	$S_T - K$
Put	$K - S_T$	0

Au moment où le choix est fait la valeur de l'option à choix est :

$$Chooser_{simple} = \max\left[C(S_t, K, T-t), P(S_t, K, T-t); t\right].$$

Où C est la valeur call de l'option et P est la valeur put de l'option.
Une solution analytique pour le pricing de l'option à choix est possible car si les options sont à la fois européenes et ont le même prix d'exercice, la parité call-put peut être utilisée pour fournir une formule d'évaluation (a été prouvé par Rubinstein

en 1991). Cela peut être écrit sous la forme :

$$\max\left(C,(C - e^{-d(T-\tau)} + Ke^{-r(t-\tau)})\right) =$$
$$C(S,K,T-\tau) + \max(0, Ke^{-r(t-\tau)} - e^{-d(T-\tau)})$$

Donc le payoff d'une option à choix standard, aujourd'hui sera la même que le payoff d'acheter un call avec le prix de l'actif sous-jacent S, le prix d'exercice K et la date d'échéance T.
Acheter un put avec le prix de l'actif sous-jacent $Se^{-d(T-\tau)}$, le prix d'exercice $Ke^{-r(T-\tau)}$ et la date d'échéance τ.
Donc, la valeur d'une option à choix standard est :

$$Se^{-dT}\mathcal{N}(x) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(x-\sigma\sqrt{T}) - Se^{-dt}\mathcal{N}(-y) + Ke^{-rT}\mathcal{N}(-y+\sigma\sqrt{T})$$

Où

$$x = \frac{\ln(Se^{-dT}/Ke^{-rT})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T},\ y = \frac{\ln(Se^{-dT}/Ke^{-rT})}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

À l'instant t, l'investisseur choisira la valeur la plus élevée des deux options. C'est-à-dire qu'il choisira un call si (Cuthbertson, Nitzsche 2003) :

$$C(S_t,K,T-t) > P(S_t,K,T-t)$$

Selon la parité call-put $P + C = C + Ke^{-r(T-t)}$,
alors l'équation se réduit à :

$$C > C + Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

et $S_t > Ke^{-r(T-t)}$
L'investisseur choisira un call à l'instant t lorsque le prix actuel déppasse la valeur actuelle du prix d'exercice $S_t > Ke^{-r(T-t)} = K^*$. alors :
Dans le cas de l'option à choix simple (Cuthbertson, Nitzsche 2003 ; Rubinstein, Reiner 1992), on a :

$$P(S_t,K,T-t) = C(S_t,K,T-t) + Ke^{-r(T-t)} - S_te^{-d(T-t)}$$

Il suit que le payoff de l'option à choix simple est :

$$C(S_t, K, T-t) + \max[0, Ke^{-r(T-t)} - S_t e^{-d(T-t)}]$$

et la valeur actuelle de l'option est :

$$Chooser = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[C(S_t, K, T-t)] + e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max\{0, Ke^{-r(T-t)} - S_t e^{-d(T-t)}\}]$$

Le premier terme évalue la valeur actuelle de l'option d'achat avec le prix de l'actif sous-jacent S, le prix d'exercice K et la maturité $T - t$,le deuxième terme dans la valeur d'une option de vente avec le prix de l'actif sous-jacent $Se^{-d(T-t)}$ et maturité $T - t$.

$$Chooser = C(S_t, K, T-t) + P(S_t e^{-d(T-t)}, Ke^{-r(T-t)}, T-t)$$

3.3.2 Option à Choix Complexe

Une option à choix complexe généralise l'option à choix standard en permettant un call et un put standards qui sont choisis de telle sorte à avoir une différence entre l'exercice et le temps de de maturité. Le payoof de l'option à choix peut être écrit :

$$Chooser \max\left[C(S_t, K, T-t), P(S_t, K, T-t); t\right].$$

Où le choix d'un call (put) a un prix d'exercice $K_1\,(K_2)$ et la date d'échéance $T_1 - \tau(T_2 - \tau)$ à la date de choix.
La valeur actuelle de l'option à choix complexe est :

$$C_{CHOOSER} = e^{-r\tau}\mathbb{E}[\max\left(C(S, K_1, T_1-\tau), P(S, K_2, T_2-\tau)\right)]$$

$$C_{CHOOSER} = e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(C(S, K_1, T_1-\tau), P(S, K_2, T_2-\tau)\right)\mathfrak{f}(u)du$$

Où :

$$\mathfrak{f}(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{\frac{-v^2}{2}},\ u = \log\left(\frac{S_\tau}{S}\right),\ v = \frac{u-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\ \mu = (r-d) - \frac{\sigma^2}{2}$$

Cela, peut être évalué d'une manière similaire à une option composée donnée par :

$$C_{CHOOSER} = Se^{-dT_1}\mathcal{N}_2(x, y_1; \rho_1) - K_1 e^{-rT_1}\mathcal{N}_2(x - \sigma\sqrt{\tau}, y_1 - \sigma\sqrt{T_1}; \rho_1)$$
$$-Se^{-dT_2}\mathcal{N}_2(-x, -y_2; \rho_2) + K_2 e^{-rT_2}\mathcal{N}_2(-x + \sigma\sqrt{\tau}, -y_2 + \sigma\sqrt{T_2}; \rho_2)$$

Où :

$$x = \frac{\ln(Se^{-d\tau}/Xe^{-r\tau})}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau},\ y_i = \frac{\ln(Se^{-dT_i}/K_i e^{-rT_i})}{\sigma\sqrt{T_i}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T_i},\ \rho_i = \sqrt{\frac{\tau}{T_i}}$$

et X est une solution de l'aquation suivante :

$$Xe^{-d(T_1-\tau)}\mathcal{N}(z_1) - K_1 e^{-r(T_1-\tau)}\mathcal{N}(z_1 - \sigma\sqrt{T_1-\tau}) +$$
$$Xe^{-d(T_2-\tau)}\mathcal{N}(-z_2) - K_2 e^{-r(T_2-\tau)}\mathcal{N}(-z + \sigma\sqrt{T_2-\tau}) = 0$$

Où

$$z_i = \frac{\ln(Xe^{-d(T_i-\tau)}/K_i e^{-r(T_i-\tau)})}{\sigma\sqrt{T_i-\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T_i-\tau}$$

3.3.3 Exemple de Stratégie

Cette option peut être évaluée en utilisant le concept d'une option sur option, ou une option composée. Une option sur option est une option pour laquelle l'actif sous-jacent est une option.
Pour illustrer le prix d'une option à choix en pratique, l'exemple empirique a été analysé.

Considérons l'option à choix europééne en stock ABC avec une maturité d'un an. Le prix de l'actif sous-jacent S est de 50 euros, le taux d'intérêt sans risque est de 10%, le dividende divisé sur l'actif est de 5% et la volatilité de l'actif est de 20%. Cette option donne le choix à la date t entre un call et un put du même prix d'exercice K=50 euros et la date d'échéance T=1 an.
Comme la date de choix t varie, les valeurs de l'option à choix simple changent également et sont présentées dans le tableau 1 suivant :
Tableau 1. Relation entre la date de choix et le prix de l'option à choix

T	0.00	0.09	0.16	0.25	0.33	0.41	0.50	0.58	0.67	0.75	0.83	1.00
chooser	4.96	5.26	5.57	5.87	6.13	6.63	6.57	6.77	6.96	7.14	7.31	7.61

La relation entre deux facteurs analysés est presque linéaire.

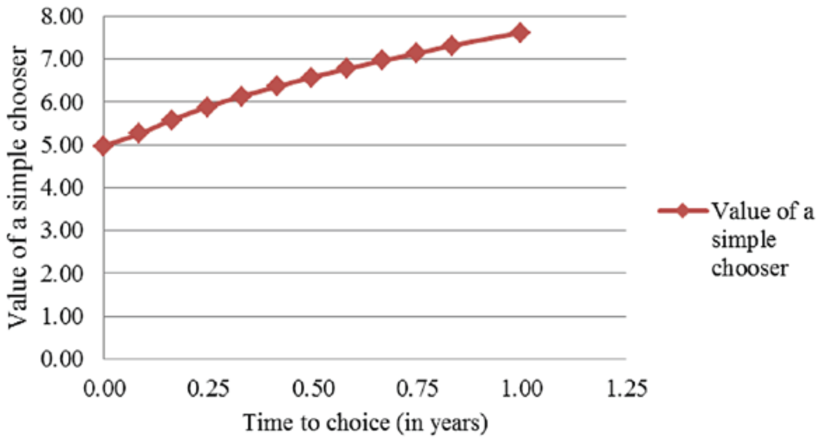


Fig.1 : Présentation graphique de la relation entre la date de choix et le prix choisis

Si le temps de choix est égal à 0, la valeur de l'option à choix est égale à la valeur d'un call simple sous les circonstances analysée. Si le temps de choix est égal à 1, la valeur de l'option à choix est à égale la valeur de l'achat simultané d'un call et d'un put pour les résultats de la stratégie optionnelle (straddle). Afin de vérifier l'etat, le modèle du prix de l'option de Black-Scholes a été utilisé et les valeurs d'un call et d'un straddle ont été calculées :

Tableau 2. La valeur d'un call simple d'une option et la stratégie optionnelle (straddle)

t = 0	t = 1
call = 4.97	call = 4.97 ; put = 2.65, straddle = 7.62

Les résultats obtenus à partir des calculs ont confirmés que aux instants de temps 0 un choix est égal à la valeur d'un call simple et les valeurs d'un straddle (voir tableau 2 et 3).

Un autre facteur important ayant une influence sur la valeur d'une option à choix est le prix d'exercice convenu avec l'option. Les résultats montrant la relation entre la valeur à choix simple et son prix d'exercice sont indiqués dans le tableau 3 et la figure 2.

K	20	30	40	50	60	70	80	90
Chooser	29.47	20.42	11.75	6.59	8.96	16.22	24.92	33.90

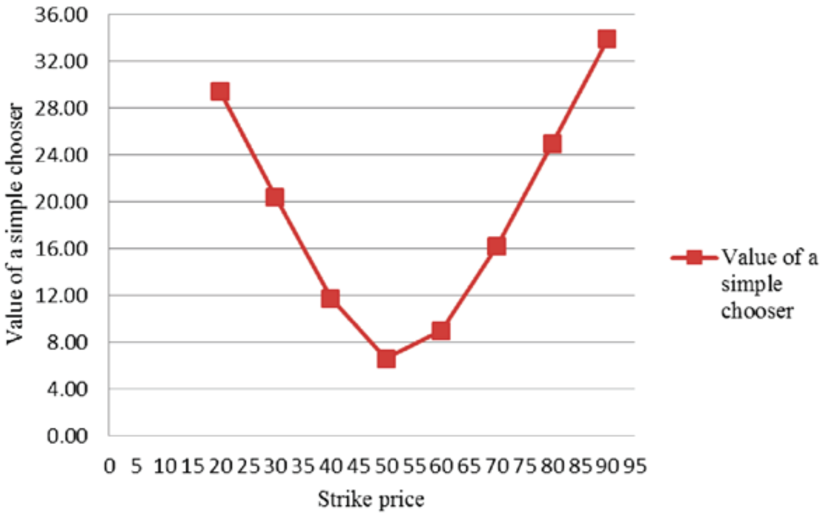


Fig.2 : Présentation graphique de la relation entre le prix d'exercice et le prix du choix

Afin de découvrir la relation et l'influence des deux facteurs analysés, le coefficient de covariance a été évalué entre la valeur d'une option à choix et son prix d'exercice et le temps de choix. Les resultats ont montré que la corrélation entre la valeur et le prix d'exercice n'est pas forte et est égale à 0.21. La correlation entre la valeur d'option et le temps du choix est très forte et est égale à 0.99. Un autre facteur qui devrait être pris en considération est la mesure de volatilité de l'actif sous-jacent car le temps de choix dépend fortement de la manière que l'actif sous-jacent ce volatile.

Conclusion

Le but de ce memoire est de fournir une introduction aux méthodes mathématiques utilisées dans la modélisation en temps continu des marchés financiers. On s'intéressera plus particulièrement aux problèmes de valorisation des options. L'objectif n'est pas de fournir un exposé complet de la théorie mais plutôt d'insister sur les idées et les techniques majeures afin de valoriser une option. De nos jours, la volatilité des marchés financiers est devenue une norme de securité. Puisque dans un contexte de mondialisation, cet environnement économique instable oblige les entreprises à gérer leurs risques de façon plus dynamiques.

Nous avons présenté dans ce mémoire, plusieurs facettes des options exotiques. Notre examen des options exotiques, réparties en deux grandes parties (non path dependent et path dependent) offre un récapitulatif précis notamment sur les éléments de « pricing » de ces options. Nous avons par la suite réalisé une simulation des principales options afin d'apporter un oeil critique sur ces dernières.

Les investisseurs devraient rapidement prendre conscience du choix sans limite de ces instruments sur mesure, leur permettant de géner très précisément leurs anticipations en terme de risque et de rentabilité espérée.

L'inconvénient majeur dont souffre le modèle de Black- Scholes réside dans le fait qu'il repose sur une volatilité constante. c'est pourquoi il a été procédé à considérer de nouveaux types d'options. A une unanimité, le modèle de Blach Scholes est fiable, souffrant de queluques irrégutalités emergentes ; le temps ne peut, par exemple, être perçu comme une fonction continue.

Bibliographie

[1] **Alexandre Popier** , "Le modèle de Black et Scholes" , Février 2001.

[2] **Binck. Fr**, "Comprendre la bourse les options".

[3] **Claudio Pacati** , "A proof of the Black and Scholes Formula" , May 30, 2012.

[4] **D.Lamberton - B.Lapeyer**, "Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance" , 1997.

[5] **Cuthbertson.K, Nitzsche.D**, "Financial engineering Derivatives and risk management", John Wiley and Sons, LTD. 776 p, 2003.

[6] **Damien Lanberton, Bernard Lapeyre** ,Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Université de Paris-Est ,3éme edition.

[7] **E.Temmam**, "Mathématiques Financères" (Partie I), Université Paris, (2005-2006).

[8] **Emmanuel BIOUX - Matthieu FOURNIL-MOUSSÉ - Loïc TONNELIER**, "Options Exotiques" ,École Internationale des Sciences du Traitement de l'Information. Version Finale - Compte Rendu - lundi 15 mars 2004.

[9] **Huyên PHAM**, "Introduction aux Mathéematiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers", Université Paris 7 Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, CNRS UMR 7599, Version : 2006-2007.

[10] **Hugo Duminil-Copin** , "Mouvement Brownien et introduction au calcul stochastique" , 13 décembre 2013.

[11] **Jean-Philippe ARGAUD**, "Méthode mathématique pour la finance ", Valorisation de produits Gestion des risques de marchés.

[12] **John Hull**, "Options,futures et autres actifs dérivés" , 28 décembre 2008.

[13] **Les Clewlow, Javier Lianos, Chris Strickland**, "Pricing exotic options in a black-Scholes World", Caracas Vanzuila The financial options research centre, Warwick business school, the université of wrawick, decembre 1994.

[14] **Monique Jeanblanc**, "Calcul stochastique" , Septembre 2006.

[15] **Mathieu Boudreault, Ph.D, F.S.A**, Une introduction aux mathématiques de l'ingeniérie financiére, Université du Québec a montréal, 6 septembre 2011.

[16] **Philippe Bougerol**, "Modèles stochastiques et Applications à la finance" , 1-4-2015.

[17] **Philippe Briand**, "Le modèle de Black-Scholes" , Mars 2003.

[18] **Raimonda Martinkute-Kauliene**, "EXOTIC OPTIONS : A CHOOSER OPTION AND ITS PRICING", 2 December 2012.

[19] **Rubinstein.M, Reiner.E**, "Exotic options", 1992.