République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Méthodes Probabilistes Pour des Modèles Financiers

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique des Processus et Aplication

par

TAHIRI NADIA [1]

Sous la direction de

Dr. N.Ait Ouali

Soutenu le 24 Mai 2017 devant le jury composé de

Mr. F. Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mme. N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr. A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme. W. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : tahirinadia1213@gmail.com

Dédicaces

Ce travail modeste est dédié à :

Ma chère mère ;

La mémoire de mon père ;

Des frères tout à son nom ;

Tous mes proches de la famille Tahiri ;

Tous mes chers amis et mes collègues.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.

Je tiens à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, Dr.Nadia Ait Ouali, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce travail.

Je remercier sincèrement les membres du jury :
Dr.F.Madani, pour l'honneur qu'il ma fait de présider ce jury.

Pr.A.Kandouci qui a bien voulu accepter de juger ce travail et de faire partie du jury.

Mme.O.Benzatout, qui a mis beaucoup de bonne volonté pour lire le mémoire et qui a accepté de faire partie du jury .

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, des frères, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de Dr Moulay Tahar de Saida.

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés.

Merci à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction

Depuis 50 ans, les outils mathématiques probabilistes ont montré leur rôle central dans l'analyse et la gestion des risques financiers de tout ordre. Le coeur des outils probabilistes réside dans le calcul stochastique, qui n'est autre qu'un calcul différentiel, mais adapté aux trajectoires des processus stochastiques qui sont non différentiables (car très erratiques comme le sont les cours boursiers). Il existe de nombreux ouvrages d'introduction à ces mathématiques probabilistes, et de leurs applications à la gestion des risques. Néanmoins, la théorie mathématique sous-jacente est difficile et rentrer dans ce domaine nécessite un investissement important, qui peut décourager de nombreux étudiants

Les mathématiciens ont depuis longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de la finance. Une des caractéristiques de ces questions - il suffit de penser à la bourse pour s'en convaincre - est qu'elles font apparaître des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation. En 1901, la thèse de Louis Bachelier, théorie de la spéculation, portait déjà sur ce thème. Depuis de nombreux probabilistes se sont penchés sur ces questions rafinant sans cesse les modèles utilisés. Mais c'est sans nul doute grace aux travaux de Black Merton et Scholes que ces questions sont devenues si populaires en partie à cause de la simplicité des réponses qu'ils ont apportées.

En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule, qui porte aujourd'hui leurs noms, pour le prix d'une option européenne d'achat. Cette formule est très utilisée en pratique à tel point que la volatilité implicite qu'elle définit est devenue une véritable unité de mesure. Le modèle mathématique qui décrit le marché financier est à la fois simple et efficace. Le modèle de Black Scholes devient le paradigme de référence pour la valorisation des produits dérivés et vaudra à leurs auteurs le prix de Nobel en 1997.

En 1995, le Comité sur le contrôle bancaire a proposé des mesures pour évaluer le risque de marché Il est largement admis que le déficit prévu (ES) ou la condition de queue Les attentes mesurent également la perte attendue du niveau de confiance. Dans ce mémoire, choix optimal d'un portefeuille dynamique soumis à un risque Limite spécifiée en termes de ES uniformément sur l'intervalle de temps de l'horizon $[0, T]$.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante dont le but est de maximiser la fonction de coût en utilisant une fonction d'utilité du type logarithmique.

On commence le premier chapitre par un bref rappel sur les principales notions utilisées tout le long de ce travail, à savoir les processus stochastiques, la théorie des martingales et le mouvement Brownien. Puis nous construirons l'intégrale stochastique d'Itô ainsi nous introduisons le calcul différentiel stochastiques qui lui est associé : le calcul d'Itô.

Dans le second chapitre, on étudie le Black Scholes et nous utilisons de présentation des martingales. Nous détaillons la formule de Black et Scholes.

Le troisième chapitre expose l'article de S. Pergamenchtchikov et C. Cluppelberg concernant la consommation et l'investissement optimal dans le cas où la fonction d'utilité de type logarithmique. En utilisant le calcul stochastique nous étudions la fonction de coût puis nous donnons une solution optimale avec la contrainte liées à la mesure Expected-Shortfall ou ES

Chapitre 1

Processus stochastiques en temps continu

1.1 Processus stochastiques

Définition générale :
On appelle processus stochastique ou processus aléatoire toute famille de variables aléatoires X_t cela signifie qu'à tout $t \in T$ est associée une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un ensemble numérique E. On note le processus X_t

Un processus stochastique X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une famille de v.a, aléatoires $(X_t)_{t\in[0,T]}$. C'est donc une fonction de deux variables :

$$X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}.$$

La variable $t \in [0, T]$ représente le temps mais on aurait pu également prendre $t \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^2 \dots$. De même, l'espace d'arrivée pourrait être bien plus complexe que $\mathbb{R}$ On peut voir un processus comme une fonction qui à $\omega \in \Omega$ associe une fonction de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$, $t \to X_t(\omega)$, appelée trajectoire du processus.

On dit que X est un processus continu (p.s.) si il est continu trajectoire par trajectoire, i.e. $t \to X_t(\omega)$ est C^0

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

1.1.1 Filtration

Une Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est une collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, i.e.

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$$

pour tous $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$. $\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t. Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps. Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit $\mathcal{F}$-adapté si la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in [0, T]$. Si X est $\mathcal{F}$-adapté, la v.a. X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \in [0, t]$ et tout $t \in [0, T]$.

Démonstration

Le résultat est naturel lorsque l'on raisonne en terme d'information, la tribu $\mathcal{F}_t$ est plus grande que la tribu $\mathcal{F}_s$, donc, si X_s est connue avec l'information $\mathcal{F}_s$, il l'est avec l'information $\mathcal{F}_t$ maintenant, analytiquement, soit $\mathcal{B}$ un Borélien de $\mathbb{R}$, alors l'image réciproque de $\mathcal{B}$ par X_s,$X_s^{-1}(\mathcal{B})$ est un élément de $\mathcal{F}_s$ et est donc un élément de $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_s$. La filtration engendrée par un processus X, notée $\mathcal{F}^X$ est la suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ engendrées par $(X_t)_{t\in[0,T]}$ i.e.

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$$

pour tout $t \in [0, T]$

1.2 Espérance conditionnelle

Soit Q une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$. Nous disons que $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $\mathbb{Q}(A) = 0$. Nous notons $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.

$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace des classes d'équivalence des fonctions intégrables où f et g sont identifiées lorsque $f = g$ $\mathbb{P}$-pp. Le théorème suivant permet d'établir une relation entre deux mesures de probabilité absolument continues.
(**Théorème de Radon-Nikodyme**) Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures finies sur $\mathcal{F}$ telles que $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$. Alors il existe une fonction
$h \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A h d\mathbb{P}. \text{ Nous notons } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = h.$$

Dans le théorème qui vient, nous verrons la construction d'un outil mathématique beaucoup utilisé, appelé l'espérance conditionnelle. (**Existence et unicité de l'espérance conditionnelle**)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Il existe une et une seule variable aléatoire Y notée $E(X|\mathcal{B})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Y est $\mathcal{B}$-mesurable.

(ii) pour tout $A \in \mathcal{B}, \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$

Démonstration

– **Existence** Sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$, nous considérons les deux mesures $\mathbb{P}_{|\mathcal{B}}$ restriction de $\mathbb{P}$ à $\mathcal{B}$ (i.e $\mathbb{P}_{|\mathcal{B}}(A) = \mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$) et $\mathbb{Q}$ définie par $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P}$ avec $A \in \mathcal{B}$. Alors $\mathbb{Q} << \mathbb{P}_{|\mathcal{B}}$. En fait si $A \in \mathcal{B}$ vérifie $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $\int_A X d\mathbb{P} = 0$ donc $\mathbb{Q}(A) = 0$.

  En appliquant le théorème de Radon-Nykodym (avec $\mathcal{F} = \mathcal{B}$), il existe une fonction $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{|\mathcal{B}})$, (Y est donc $\mathcal{B}$-mesurable i.e (i)) telle que $\mathbb{Q}(A) = \int_A Y d\mathbb{P}$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ i.e (ii). D'où l'existence de $E(X|\mathcal{B})$.

– **Unicité**

  Montrons que Y est unique. Si Y et Y' vérifient (i) et (ii), alors $Y - Y'$ est $\mathcal{B}$-mesurable donc $A = \{Y - Y' \geq 0\} \in \mathcal{B}$ et par (ii)

  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A Y' d\mathbb{P}$ ce qui entraîne $\int_A (Y - Y') d\mathbb{P} = 0$ donc $Y - Y' = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.

  Le cas quelconque se déduit de la décomposition $X = X_+ - X_-$ où $X_+ = \max(X, 0)$ et $X_- = \max(-X, 0)$.

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient X une variable aléatoire à valeur réelle,

$\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ une tribu et $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{B}$. Notons par $\mathbb{E}$ l'espérance sous $\mathbb{P}$. Alors nous avons les relations suivantes :

(a) $\mathbb{E}(\alpha X + \alpha' X|\mathcal{B}) = \alpha \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \alpha' \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ Linéarité.

(b) Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$ p.s. positivité. Par conséquent si $X \leq Y$, avec (a), alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$.

(c) Si X est $\mathcal{B}$-mesurable $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$ p.s.

(d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$.

(e) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C})$

1.3 Martingales à temps continu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires dans $\mathbf{L}^1$ est :

1. une martingale si, $\forall t \geq s$, $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$
2. une surmartingale si, $\forall t \geq s$, $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$
3. une sous-martingale si, $\forall t \geq s$, $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$

[1]

1. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale alors $\forall \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$
2. Si $(X_t)_{t\leq T}$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t]$. Cette propriété est d'un usage trés fréquent en finance.
3. Si $(X_t)_{t\leq T}$ est une martingale de carré intégrable, alors, $\forall s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s]$$

1.3.1 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré. On pose

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n).$$

Une variable aléatoire $T : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est appelée temps d'arrêt si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\{T = n\} \ \in \mathcal{F}_n.$$

Il est facile de voir que cela équivaut à $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Ou encore
$\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$. De plus cela entraîne facilement que $\{T < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.
et $\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ Il est important de remarquer que la valeur $+\infty$ est autorisée. En écrivant

$$\{T = +\infty\} = \Omega \backslash \cup_{n\geq 0} \{T = n\}$$

on voit que $\{T = +\infty\} \in \mathcal{F}_n$.
Si T est un temps d'arrêt, on appelle tribu des événements antérieurs à T la tribu suivante

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathbb{F}_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

Elle vérifie : si $T = n$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$.
On peut vérifier que T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable. En effet, pour tout entier $k \geq 0$, on a pour tout $n \geq 0$, $\{T = k\} \cap \{T = n\}$ est égal à $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ si $k = n$, où est égal à l'ensemble vide, d'où $\{T = k\} \in \mathcal{F}_T$.   Soit S et T deux temps d'arrêt. Alors :

$$S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Alors on a

$$A \cap \{T = n\} = \cup_{k=0}^{n}[A \cap \{S = k\} \cap \{T = n\}].$$

Or $A \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, doù par passage à la réunion $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté, et T un temps d'arrêt. Alors la variable aléatoire

$$\mathbb{1}_{T<+\infty} X_T(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & si\ T(\omega) = n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

1.4 Le mouvement brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement brownien. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt. On appelle mouvement brownien un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :
– **continuité** : $\mathbb{P}$ p.s. la fonction $s \mapsto X_s(\omega)$ est une fonction continue.

– **indépendance des accroissements** : Si $s \leq t, X_t - X_s$ est indépendant de la tribu

$$\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$$

– **stationnarité des accroissements** : si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

Cette définition permet de caractériser la loi de la variable aléatoire X_t. Ce résultat est délicat à établir, nous renvoyons à [6] pour sa démonstration. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, alors $X_t - X_0$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne rt et de variance $\sigma^2 t$, r et σ étant des constantes réelles. Un mouvement brownien est dit standard si :

$$X_0 = 0 \ \mathbb{P} \ p.s. \qquad \mathbb{E}(X_t) = 0, \qquad \mathbb{E}(X_t^2) = t.$$

Dans la suite, lorsque l'on parlera de mouvement brownien, sans autre précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard. Dans ce cas, la loi de X_t prend la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(\frac{x^2}{2t}) dx$$

dx étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On peut démontrer une propriété précisant le caractère gaussien du mouvement brownien. On vient de voir que pour tout t, X_t est une variable aléatoire gaussienne. On a une propriété plus forte. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien,

si $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ alors $(X_{t_1}, \ldots X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Démonstration

Soit $0 \neq t_1 < \ldots < t_n$, alors le vecteur aléatoire

$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots X_{t_{n-1}})$ est composé de variables aléatoires gaussiennes (d'après le théorème 1.4.1) et et indépendantes (par définition du mouvement brownien), ce vecteur est donc un vecteur gaussien. Il en est donc de même pour $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

On aura besoin d'une définition légèrement plus précise d'un mouvement brownien par rapport à une tribu $\mathcal{F}_t$. On appellera $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :

– Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

– Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.

– Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

Le premier point de la définition précédente prouve que $\sigma(X_u, u \leq t) \subset \mathcal{F}_t$. De plus, il est facile de vérifier qu'un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.

1.5 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

1.5.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)t \geq 0$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ Nous allons donner un sens à $\int_0^t f(s,\omega)dW_s$ pour une classe de processus $f(s,\omega)$ adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires. Dans toute la suite, on fixe T un réel strictement positif et fini. On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\omega)\mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$ et ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et bornée.
L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est alors, par définition, le processus continu $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$:

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_i-1}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

Notons que $I(H)_t$ peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq p} \phi_i(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}),$$

ce qui prouve la continuité de la fonction $t \mapsto I(H)_t$. On notera $\int_0^t H_s dW_s$ pour $I(H)_t$.
[3] Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire :
- $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue,
- $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s dW_s\right)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$,
- $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.

[3] Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-brownien. Alors il existe une unique application linéaire J de H dans l'espace des $\mathcal{F}_t$-martingales continues définies sur $[0,T]$, telle que :

1. Si $(H_t)_{t\leq T}$ est un processus élémentaire, $\mathbb{P}$ p.s. pour tout
$$0 \leq t \leq TJ(H)_t = I(H)_t.$$
2. Si $t \leq T$, $\mathbb{E}\left(J(H)_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si J et J' 0 sont deux prolongements linéaires vérifiant les propriétés précédentes alors :

$$\mathbb{P}\ p.s. \qquad \forall 0 \leq t \leq T, J(H)_t = J'(H)_t$$

On note, si $H \in \mathcal{H}$, $\int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$

De plus cette intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes : [3] Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$un processus de H alors :

1. On a :
$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_0^2 ds\right) \tag{1.1}$$
2. Si τ est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt
$$\mathbb{P}\ p.s. \qquad \int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^T \mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}} H_s dW_s \tag{1.2}$$

[3] Il existe une unique application linéaire $\widetilde{J}$ de l'espace $\widetilde{H}$ dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur $[0,T]$, telle que :

1. Propriété de prolongement. Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire alors : $\mathbb{P}$ p.s.
$$\forall 0 \leq t \leq T, \widetilde{J}(H)_t = I(H)_t.$$
2. Propriété de continuité : Si $(H^n)_{n\geq 0}$ est une suite de processus de $\widetilde{H}$ telle que $\int_0^T H_s^{n^2} ds$ tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{t\leq T}\left|\widetilde{J}(H^n)_t\right|$ tend vers 0 en probabilité. On note toujours $\int_0^T H_s dW_s$ pour $\widetilde{J}(H)_t$.

Il est important de noter que dans ce cas $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ n'est pas (nécessairement)une martingale

Résumé

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté. On peut définir l'intégrale stochastique $(\int_0^t H_s dW_s)_{0\leq t\leq T}$ dès que $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty \, \mathbb{P}$ p.s. Le processus $(\int_0^t H_s dW_s)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale si $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$ Cette condition n'est cependant pas nécessaire. Remarquons, toutefois, que la condition $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 dW_s\right) < \infty$ équivalente à :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0.T]}\left(\int_0^T H_s ds\right)^2\right) < +\infty$$

et que, dans ce cas on a l'égalité :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right). \tag{1.3}$$

1.5.2 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul ”calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différencier $t \mapsto f(W_t)$ si f est une fonction deux fois continûment différentiable. L'exemple suivant prouve que le prolongement naïf du calcul différentiel usuel est voué à l'échec. Supposons que l'on veuille "différencier" $t \mapsto W_t^2$ et l'exprimer en fonction de ”dW_t”. Pour une fonction $f(t)$ différentiable nulle en 0, on a

$$f(t)^2 = 2\int_0^t f(s)\dot{f}(s)d_s = 2\int_0^t f(s)df(s).$$

Dans les cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique on ne peut avoir une formule du même type :

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s$$

En effet, d'après ce qui précéde, $\int_0^t W_s dW_s$ est une martingale
$(car \mathbb{E}(\int_0^t W_s^2 d_s) < +\infty)$, nulle en zéro. Si elle était égale à W_t^2 elle serait positive, et une martingale nulle en 0 ne peut être positive que si elle est nulle.

Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour laquelle on peut énoncer la formule d'Itô. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{P}\ p.s \forall_t \leq T \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

avec :

- $X_0 \mathcal{F}_0$-mesurable.
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$.
- $\int_0^T\ |K_s| d_s <\ +\infty\ \mathbb{P}\ p.s$
- $\int_0^T\ |H_s|^2 ds <\ +\infty\ \mathbb{P}\ p.s$

[3] Soit $(\mathcal{M}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale continue telle que :

$$\mathcal{M}_t = \int_0^t K_s ds, \quad avec \quad \mathbb{P}\ p.s \int_0^T |K_s| ds < +\infty.$$

alors :

$$\mathbb{P}\ p.s\ \forall t \leq T, M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

- La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s.$$

  alors :

$$X_0 = X'_0 \quad d\mathbb{P}\ p.s. \qquad H_s = H'_s \quad ds \times d\mathbb{P}\ p.p. \quad K_s = K'_s \quad ds \times d\mathbb{P}\ p.p.$$

- Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$, alors $K_t = 0\ dt \times d\mathbb{P}$ p.p.

La formule d'Itô prend la forme suivante (nous l'admettons sans démonstration et nous renvoyons à [7] pour une démonstration élémentaire dans le cas du brownien ou à [8] pour une démonstration complète) Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X, X >_s$$

où, par définition :

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

et :

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s.$$

De même si $(t, x) \to f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, x) (on dit dans ce cas que f est de classe $C^{1,2}$), on a :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(_0, X_0) \int_0^t f_s'(s, X_s)ds \\ &+ \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)d < X, X >_s . \end{aligned}$$

1.5.3 Exemples d'utilisation de la formule d'Itô

Commençons par traiter un exemple élémentaire. Si $f(x) = x^2$
et $X_t = W_t$, on a $K_s = 0$ et $H_s = 1$, donc :

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

On obtient :

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s$$

Comme $\mathbb{E}\left(\int_0^t W_s^2 dw_s\right) < +\infty$, on retrouve le fait que $W_t^2 - t$ est une martingale Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions $(S_t)_{t\geq 0}$ de :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dW_s) \tag{1.4}$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x_0 \tag{1.5}$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ *et* $\int_0^t S_s dW_s$ aient un sens, et qui vérifie, pour chaque t :

$$\mathbb{P}\ p.s.\ S_t = x_0 \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma dW_s.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, posons $Y_t = \log(S_t)$ où S_t est une solution de l'équation précédente. S_t est un processus d'Itô avec
$K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$. Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log(x)$ (au moins formellement car $f(x)$ n'est pas de classe C^2). On obtient en supposant que S_t est positif :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds$$

soit, en utilisant (1.5) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2)dt + \int_0^t \sigma dW_t$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \exp\Big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\Big)$$

soit une solution de l'équation (1.4). Vérifions rigoureusement cela.
$S_t = f(t, W_t)$ où :

$$f(t,x) = x_0\ exp\Big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x\Big)$$

La formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f'_s(s, W_s)ds \\ &+ \int_0^t f'_x(s, W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, W_s)d < W, W >_s \end{aligned}$$

Mais, comme $< W, W >_t = t$:

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu - \sigma^2/2)ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t S_s\sigma^2 d_s,$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s.$$

1.6 Equations différentielles stochastiques

les solutions de l'équation :

$$X_t = x + \int_0^t X_s(\mu ds + \sigma dW_s).$$

On peut considérer des équations d'une forme plus générales :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \tag{1.6}$$

On appelle ces équations des "équations différentielles stochastiques". Une solution de (1.6) porte le nom de "diffusion". Ces équations permettent de construire la plupart des modèles d'actifs utiles en finances, aussi bien lorsque l'on cherche à modéliser des actifs que des taux d'intérêt. Nous allons étudier quelques propriétés des solutions de ces équations.

1.6.1 Théorème d'Itô

Précisons, tout d'abord, ce que l'on entend par une solution de (1.6).
On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'un filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0.}$ On se donne, $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Z$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien. Trouver une solution à l'équation (1.6) signifie trouver un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ continu $\mathcal{F}_t$-adapté, qui vérifie :

– Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, X_s) ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ ont un sens :

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds < +\infty \ et \ \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P}\ p.s$$

– $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifie (1.6) c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0\, \mathbb{P}\ p.s \quad X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

On note formellement (1.6) sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t = & b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = & Z \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (1.6). [3] Si b et σ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $K < +\infty$, avec :

1. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2. $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$
3. $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$

alors, pour tout $T \geq 0$, (1.6) admet une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$. De plus cette solution $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$ vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2\right) < +\infty$$

L'unicité signifie que si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont deux solutions de (1.6), alors :

$$\mathbb{P}\ p.s. \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = Y_t$$

1.6.2 Equations différentielles stochastiques à valeurs vectorielles

On peut généraliser l'étude des équations différentielles stochastiques aux cas où le processus évolue dans $\mathbb{R}^n$. Cette généralisation est utile, dans les applications à la finance, lorsque l'on cherche à construire des modèles pour des paniers d'actions ou de devises. On se donne :

- $W = (W^1, \ldots, W^p)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien p-dimensionnel.
- $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, b(s, x) = (b^1(s, x), \ldots, b^n(s, x))$.
- $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times p}$ (l'ensemble des matrices $n \times p$),

$$\sigma(s, x) = (\sigma_{i,j}(s, x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.}$$

- $Z = (Z^1, \ldots, Z^n)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Et l'on considère l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{1.7}$$

où il faut comprendre que l'on cherche un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que $\mathbb{P}$ p.s. Pour tout t et pour tout $i \leq n$, on a presque sûrement :

$$X_t^i = Z^i + \int_0^t b^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{p} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)dW_s^j$$

Le théorème d'existence et d'unicité se généralise de la façon suivante :
[3] Si $x \in \mathbb{R}^n, |x|$ est la norme euclidienne de x et si
$\sigma \in \mathbb{R}^{n\times p}, |\sigma|^2 = \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \sigma_{i,j}^2$ On suppose que :

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$
2. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$
3. $E(|Z|^2) < +\infty$

alors il existe une solution unique à l'équation (1.7). De plus cette solution vérifie, pour tout T :

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right) < +\infty$$

Chapitre 2

Modèle de Black et Scholes

2.1 Introduction aux marchés financiers :

La raison d'être des marchés financiers est la confrontation de l'offre et de la demande de capitaux, au moyen d'instruments financiers, comme les actions, les obligations et les billets de trésorerie. Ils permettent aux entreprises de trouver de nouveaux moyens pour financer leur croissance, en dehors du crédit bancaire. Les entreprises s'adressent aux investisseurs de marché de capitaux, avec l'émission de titres cotés.

Les marchés financiers sont désormais presque complètement dématérialisés et électroniques. Les palais de la Bourse ont, pour la plupart, perdu leur fonction de confrontation physique des échanges, avec des négociateurs affichant leurs ordres en criant et en gesticulant autour de la corbeille. Les marchés financiers modernes sont des réseaux informatiques traitant les transactions entre institutions financières. Mais la perte de couleur locale est compensée par le gain en efficacité. Un particulier peut acheter des titres dans le monde entier, s'informer et suivre l'évolution des cours depuis son ordinateur personnel.

2.1.1 Actif :

L'actif est une partie du bilan qui représente, à une date donnée, l'ensemble des biens détenus par une entreprise. Il est composé de l'actif immobilisé et de l'actif circulant. L'actif circulant comprend les actifs court terme, comme les stocks de la société, les créances clients et les disponibilités (liquidités et titres de placement). L'actif immobilisé est composé d'actifs long terme, comme les actifs corporels (équipements), les actifs financiers (prêts long terme) et les actifs incorporels (brevets).

L'actif sans risque :

l'actif sans risque a des flux certains car son émetteur ne peut pas faire faillite. Il se caractérise donc par une rentabilité certaine : le taux de l'argent sans risque, dont l'écart-type est nul. Ce taux est fondamental car il sert de base à la détermination de la rentabilité exigée de tout titre financier.

L'actif risqué :

Un actif risqué est un actif qui ne peut garantir, de manière certaine, les flux de rémunération et de remboursement d'un investisseur (particuliers ou institutionnels).

2.1.2 Obligations :

Une obligation (bond) est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de défaut (default risk) est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'état (le Trésor). Celle-ci est échangée sur les marchés obligataires : à l'émission, elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du montant nominal M (la somme empruntée), puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue. À l'échéance ou maturité, les détenteurs de l'obligation la rendent à l'emetteur en échange du remboursement du nominal M.

Le prix d'une obligation dépend donc du montant nominal M, de la date d'échéance N et des coupons $I_{n1}, I_{n2} \ldots, I_N$ qui sont des montants versés par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance $n_1, n_2, \ldots, N$ et qui correspondent à des intérêts sur le nominal.

2.1.3 Produits dérivés :

Un produit dérivé (derivative) ou actif contingent est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, appelé actif sous-jacent (underlying asset). On en distingue deux grands types.

Contrat à terme (forward ou future) :

Il s'agit d'un contrat entre deux parties pour s'échanger un actif à un prix et une date fixés à l'avance. La date à laquelle l'échange doit avoir lieu est appelée échéance ou maturité (maturity) et le prix auquel l'actif sousjacent est échangé est appelé prix à terme ou prix de livraison (settlement price ou forward price).

2.1.4 Option :

Commençons par l'option européenne : il s'agit d'un titre donnant à son d'etenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix et une date fixés à l'avance. Un tel titre est appelé option d'achat (call) ou option de vente (put) de type européen. La date à laquelle l'achat (pour un call) ou la vente (pour un put) peut avoir lieu est appelée échéance ou maturité (maturity) et le prix auquel l'actif sous-jacent est échangé est appelé prix déxercice (strike).

2.2 Modèle de Black et Scholes

2.2.1 L'évolution des cours

Le modéle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modéle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r. (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modéles discrets.) On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{2.1}$$

où μ et σ sont deux constantes et (W_t) un mouvement brownien standard.

Le modéle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier. Comme nous l'avons vu (cf. chapitre 1, paragraphe 1.5.3), l'équation (2.1) se résout, explicitement

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t\right)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normale).

Plus précisément, on voit que le processus (S_t) vérifie une équation du type (2.1) si et seulement si le processus $(log(S_t))$ est un mouvement brownien (non nécessairement standard). Compte tenu de la définition 1.4.1 du chapitre 1, cela signifie que le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t, S_t/S_u$ ou (ce qui revient au même), l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu $\sigma(S_\nu, \nu \leq u)$,
- stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

2.2.2 Formule de Black Scholes

Le prix en t d'une option Européennee de payoff $h(S_T)$ est de la forme $v(t; S_t)$ avec :

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

et de plus la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad et \quad v(T,x) = h(x)$$

Dans le cadre du modèle de Black Scholes, pour certains pay-offs, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier le cas du Call et du Put.
[1] Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :

$$C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2), \quad t \in [0, T]$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1), d_1$ et d_2 donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de Parité Call Put s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T]$$

Et donc le prix du Put est donné par :

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1), \quad t \in [0, T]$$

La formule de Black-Scholes, à travers un exemple numérique

Maintenant que l'on connaît la formule de Black Scholes, on peut l'appliquer à l'évaluation d'un call européen par exemple
Soit un call sur Arcelourd, une entreprise spécialisée dans le commerce de l'acier, dont les résultats futurs semblent prometteurs. L'action vaut aujourd'hui 80 euros. Soit un call de strike 90 et de maturité un trimestre. Les taux d'intérêts sans risque pour cette période sont équivalents à 5% La volatilité implicite est estimée à 35%. Avec :
S = Prix de l'action, K = Strike de l'option ou " Prix d'exercice ",
r = taux sans risque, T = Maturité de l'option (en année), σ = volatilité implicite du sous-jacent, $N(x)$ = Fonction de répartition de la loi normale.
Donc, $S = 80, K = 90, T = 0,25, r = 0,05, \sigma = 0,35$.

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{80}{90}) + \left(0.05 + \frac{0.35^2}{2}\right) 0.25}{0.35\sqrt{0.25}} = -0.51$$

$$d_2 = d_1 - 0.35\sqrt{0,25} = -0.69$$

$$\mathcal{N}(d_1) = 0.30$$

$$\mathcal{N}(d_2) = 0.25$$

$$call = 80\mathcal{N}(d_1) - 90e^{-0.05\times0.25}\mathcal{N}(d_2) = 2.48\,euros$$

2.3 Les stratégies autofinancées

Une stratégie sera définie par un processus $\phi = (\phi)_{0\leq t\leq T} = ((\varphi_t^0, \varphi_t))$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration du mouvement brownien, les composantes φ_t^0 et φ_t de ϕ_t donnant à l'instant t les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$X_t(\phi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t \tag{2.2}$$

Dans les modèles discrets, nous avons caractérisé les stratégies autofinancées par l'égalité :

$$X_{n+1}(\phi) - X_n(\phi) = \phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$$

La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante

$$dX_t(\phi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T |\varphi_t^0| dt < +\infty \quad p.s \quad et \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty \quad p.s$$

Alors l'intégrale :

$$\int_0^T \varphi_t^0 dS_t^0 = \int_0^T \varphi_t^0 r e^{rt} dt$$

est bien définie, ainsi que l'intégrale stochastique :

$$\int_0^T \varphi_t dS_t = \int_0^T (\varphi_t S_t \mu) dt + \int_0^T \sigma \varphi_t S_t dW_t$$

puisque la fonction $t \to S_t$ est continue, donc bornée sur [0, T], presque sûrement
Une stratégie autofinancée est définie par un couple ϕ de processus adaptés $(\varphi_t^0)_{0 \leq t \leq T} et (\varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant :

1. $\int_0^T |\varphi_t^0| dt + \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty \quad p.s$
2. $\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = \varphi_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$ p.s pour tout $t \in [0, T]$

Nous noterons $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ le cours actualisé de l'actif risqué. Soit $\phi = ((\varphi_t^0, \varphi_t))_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\int_0^T |\varphi_t^0| dt + \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty p.s.$On pose : $X_t(\phi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$ et $\widetilde{X}_t(\phi) = e^{-rt} X_t(\phi)$. Alors ϕ définit une stratégie autofinancée si et seulement si :

$$\widetilde{X}_t(\phi) = X_0(\phi) + \int_0^T H_u d\widetilde{S}_u p.s \tag{2.3}$$

pour tout $t \in [0,T]$

Démonstration : Supposons la stratégie ϕ autofinancée. De l'égalité :

$$d\widetilde{X}_t(\phi) = -r\widetilde{X}_t(\phi)dt + e^{-rt}dX_t(\phi)$$

qui résulte de la différenciation du produit des processus (e^{-rt}) et $(X_t(\phi))$ (noter que le terme de crochets $d < e^{-r}, X.(\phi) >_t$ est nul), on déduit :

$$\begin{aligned}
d\widetilde{X}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\varphi_t^0 e^{rt} + \varphi_t S_t)dt + e^{-rt}\varphi_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}\varphi_t dS_t \\
&= \varphi_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\
&= \varphi_t d\widetilde{S}_t
\end{aligned}$$

D'où l'égalité (2.3). La démonstration de la réciproque repose sur un raisonnement analogue

2.4 Probabilité risque neutre

Ecart sur les changements de probabilité

On cherche à construire une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ équivalente à $\mathbb{P}$. Si $\widehat{\mathbb{P}}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors le théorème de Radon Nikodym assure l'existence d'une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable Z_T telle que $d\widehat{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{F}_T \qquad \widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$

Dire que $\widehat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes revient à dire qu'elles chargent les mêmes ensembles et donc que Z_T ne s'annule jamais, i.e. $Z_T > 0$. Alors, la densité de Radon Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\widehat{\mathbb{P}}$ est $1/Z_T$.

Pour que $(\Omega, F_T, \widehat{\mathbb{P}})$ soit toujours un espace probabilisé, il faut de plus

$$\widehat{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. X_T , $\mathcal{F}_T$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T]$$

On associe naturellement à la v.a. Z_T , le processus martingale $(Z_t)0 \leq t \leq T$ défini par :

$$Z_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T|\mathcal{F}_t]$$

Alors, pour tout t et toute variable aléatoire $X_t\mathcal{F}_t$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T]$$

En fait, Z_t est la densité de Radon Nikodym (définie à une modification p.s. près) de $\widehat{\mathbb{P}}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbb{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$. On note :

$$Z_t = \frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t$$

Si l'on considère un processus X $\mathcal{F}$-adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{Z_T}{Z_t} X_T|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]$$

En effet, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée Y_t , on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]Y_t] = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]Y_t\right]$$

2.5 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ un espace probabilisé filtré, dont la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ indexé par l'intervalle de temps $[0, T]$. Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov. [3] Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté vérifiant
$\int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$L_t = exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité $P^{(L)}$ de densité L_T par rapport à P, le processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par $W_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$, est un mouvement brownien standard.

Chapitre 3

Méthodes Probabilistes Pour des Modèles Financiers Cas où la Fonction d'utilité est Logarithmique avec ES contrainte

3.1 Consommation et investissement en temps continu

3.1.1 Modèle du marché financier

Dans ce chapitre, on considère un marché de $d+1$ actifs financier de type Black-Scholes ayant comme base $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0\leq t\leq T}, , \mathbb{P})$, consistant en un actif sans risque et d actifs risqués. Leurs prix $(S_0(t))_{0\leq t\leq T}$ et $(S_i(t))_{0\leq t\leq T}$ pour $i = 1, ..., d$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} dS_0(t) = r_t S_0(t)dt & S_0(0) = 1 \\ \\ dS_i(t) = S_i(t)d\zeta_i(t) & S_i(0) = s_i \\ \\ d\zeta_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum\limits_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t) & \zeta_i(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour tout $t \geq 0$ on note, par $W_t = (W_1(t), W_2(t), ..., W_d(t))$ un mouvement brownien standard de dimension d, par $r_t \in \mathbb{R}$ le taux d'intérêt sans risque, par $\mu_t = (\mu_1(t), \mu_2(t), ..., \mu_d(t))$ le taux de risque, par $\sigma_t = (\sigma_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq d}$ la matrice de la volatilité. Et les coefficients r_t, μ_t

et σ_t sont des fonctions déterministes mesurables.
Dans tout ce qui suit, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle engendrée par le processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ c'est-à-dire que $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_u, 0 \leq u \leq t\}$.

Soient, $\phi_t \in \mathbb{R}$ la quantité investie dans l'actifs sans risque et
$\varphi_t = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_1(d)) \in \mathbb{R}^d$ la quantité investie dans les actifs risqués à l'instant t.

Dans ce cas, une stratégie financière est définie par un processus aléatoire $(\phi_t, \varphi_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Le processus

$$X_t = \phi_t S_0(t) + \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(t) S_j(t) \quad t \geq 0 \tag{3.2}$$

S'appelle le processus richesse ou la valeur du portefeuille à l'instant t. Un processus du consommation $(c_t)_{0\leq t\leq T}$ est une vitesse de la consommation sur l'intervalle $[0, T]$, c'est-à-dire que c'est un processus non negatif progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ et presque s$\hat{u}$rement intégrable sur l'intervalle $[0, T]$.

$$\int_0^T c_t dt < \infty \text{ p.s}$$

Une stratégie financière $((\phi_t, \varphi_t))_{t\geq 0}$ avec une consommation $(c_t)_{t\geq 0}$ est dite autofinancée si le processus richesse correspondant vérifie l'équation stochastique suivante

$$X_t = x + \int_0^t \phi_u dS_0(u) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \varphi_j(u) dS_j(u) - \int_0^t c_u du \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

Où $x > 0$ est la richesse initiale et l'integrale $\int_0^t c_u du$ de ce processus représente le montant consommé sur l'intervalle $[0, T]$. Nous allons travailler avec les quantités relatives par rapport au processus de richesse. On pose

$$\pi_j(t) = \frac{\varphi_j(t) S_j(t)}{X_t} \text{ pour j=1,....,d} \quad \text{et } \upsilon_t = \frac{c_t}{X_t}$$

Alors $((\pi_t = (\pi_1(t), ..., \pi_d(t))')_{0\leq t\leq T}$ est appelée le processus de portefeuille et $(\upsilon_t)_{0\leq t\leq T}$ le processus de consommation. En tenant compte de ces définitions, nous réécrivons l'équation pour X_t comme

$$dX_t = X_t(r_t + y_t'\theta_t - \upsilon_t)dt + X_t y_t' dW_t \quad X_0 = x > 0 \tag{3.4}$$

Où $y_t = \sigma_t' \pi_t$ et

$$\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t frm[o]--)$$

avec $frm[o]-- = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$. On fait l'hypothèse que

$$\|y\|_T^2 = \int_0^T |y_t|^2 \, dt < \infty \qquad \|\theta\|_T^2 = \int_0^T |\theta_t|^2 \, dt < \infty \tag{3.5}$$

D'ailleurs, On suppose que la fonction $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ ne s'anulle pas dans $\mathcal{L}_2[0, T]$, ie

$$\|\theta\|_T^2 = |\theta_t|^2 \, dt > 0 \tag{3.6}$$

Décrivons maintenant l'ensemble des processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{T \geq 0}$ avec $\nu_t = (y_t, \nu_t)$.

3.1.2 Le processus de contr$\hat{o}$le

Introduisons, un ensemble de processus de contr$\hat{o}$le $(y_t, c_t)_{0 \leq t \leq T}$. On fait le choix d'un processus de consommation $(c_t)_{t \geq 0}$ de sorte qu'il représente du processus

$$c_t = \nu_t X_t$$

Où $(\nu_t)_{t \geq 0}$ est mesurable pour les valeurs $[0, 1]$. Pour cette consommation nous définissons le processus de contr$\hat{o}$le $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0}$ comme étant $\nu_t = (y_t, \nu_t, X_t)$, où $(y_t)_{t \geq 0}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant (3.5). Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est défini par l'équation (3.4), qui a, dans ce cas, la forme suivante (pour bien insister sur le fait que le processus de richesse correspond à certains processus ν, qu'on les note X^ν)

$$dX_t^\nu = X_t^\nu (r_t - \nu_t + y_t' \theta_t) dt + X_t^\nu y_t' dW_t, \qquad t > 0, \qquad X_0^\nu = x \tag{3.7}$$

On note l'ensemble de tels processus de contr$\hat{o}$le ν par $\mathcal{U}$.
Il est à noter que pour chaque $\nu \in \mathcal{U}$, et à l'aide de la formule d'Ito, l'équation (3.7) admet une solution.

$$X_t^\nu = x e^{R_t - V_t + (y, \theta)_t} \xi_1(y) \tag{3.8}$$

Où

$$R_t = \int_0^t r_u du, \qquad V_t = \int_0^t \nu_u du \text{ et } (y, \theta)_t = \int_0^t y_u' \theta_u du \tag{3.9}$$

De plus, $\xi(y)$ indique l'exponentiel stochastique défini comme suit :

$$\xi_t(y) = \exp\left(\int_0^t y_u' dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |y_u|^2 \, du \right) t \geq 0$$

Cependant, pour tout $\nu \in \mathcal{U}$, le processus $(X_t^\nu)_{t\geq 0}$ est positive et continu. Une généralisation normale de $\mathcal{U}$ est l'ensemble des contrôles.
Un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{t\geq 0} = ((y_t, \upsilon_t))_{t\geq 0}$ est dit admissible s'il est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|y\|_T^2 = \int_0^T |y_t|^2 \, dt < \infty \text{ et } \int_0^T \upsilon_t dt < +\infty$$

De plus on suppose que (3.4) a une solution unique forte presque sûrement positive sur l'intervalle $[0, T]$. Nous désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les processus du contrôle admissible. On définit pour une richesse initiale $x > 0$ et pour un processus du contrôle $(\nu_t)_{t\geq 0}$ dans $\mathcal{V}$, nous introduisons la fonction objectif

$$J(x, \nu) = E_x \left(\int_0^T U(c_t) dt + h(X_T^\upsilon) \right) \tag{3.10}$$

Où E_x est l'espérance conditionelle sachant que $X_0^\nu = x, U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité et $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'héritage.

3.2 La mesure ES "Expected Shorfall"

Notre mesure suivante de risque est une modification analogue du Déficit attendu, plus connue sous le nom anglais **Expected Shortfall** ou ES. On définit pour une richesse initiale $x > 0$, un processus de contrôle ν et $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$m_t(x, \nu, \alpha) = E_x(X_t^\nu / \{X_t^\nu \leq \lambda_t(x, \nu, \alpha)\}), \quad t \geq 0$$

Où $\lambda_t(x, \nu, \alpha)$ est la α-quantile de X_t^ν. Le déficit attendu (ES) est alors défini comme suit :

$$ES(x, \nu, \alpha) = xe^{R_t} - m_t(x, \nu, \alpha)$$

On calcule directement pour trouver que chaque $\nu \in \mathcal{U}$

$$m_t(x, \nu, \alpha) = xF_\alpha(|z_\alpha| + \|y\|_t) e^{R_t + (y,\theta)_t - V_t}$$

Où

$$F_\alpha(z) = \frac{1}{\int_{|z_\alpha|}^\infty e^{-t^2/2} dt} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt$$

Nous définissons la fonction du niveau de risque pour certain coefficient $0 < \zeta < 1$ comme étant

$$\zeta_t(x) = \zeta x e^{R_t}, \quad t \in [0, T]. \tag{3.11}$$

On considère tout les contrôles $\nu \in \mathcal{U}$ pour lesquels l'ES "Expected Shorfall" est bornée par la fonction de niveau (3.11) sur l'intervalle [0, T], c'est-à-dire on exige

$$\sup_{0 \le t \le T} \frac{ES_t(x, \nu, \alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1$$

Le coefficient $\zeta \in [0, 1]$ introduit un certain comportement d'aversion de risque dans le modèle. Cela signifie qu'il se comporte similairement comme une fonction d'utilité. La différence, cependant, est ce ζ qui a une interprétation claire et chaque investisseur peut choisir et comprendre l'influence de ζ.

3.3 Problème et solution

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) \text{ sous la condition } \sup_{0 \le t \le T} \frac{ES_t(x, \nu, \alpha)}{\zeta_t(x)} \le 1 \tag{3.12}$$

Premièrement, on peut définir pour $x > 0$ et $\lambda \ge 0$ la fonction suivante

$$G^*(x, \lambda) = \int_0^T \frac{(w(t) + \lambda)^2}{(\lambda \psi_\alpha(x) + x(w(t) + \lambda))^2} |\theta_t|^2 \, dt \tag{3.13}$$

Où

$$\psi_\alpha(x) = \Psi(|z_\alpha| + x) + |z_\alpha|$$

avec

$$\Psi(y) = \frac{1}{\varphi(y)} - y \text{ et } \varphi(y) = e^{\frac{y^2}{2}} \int_y^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{3.14}$$

Il est facile de remarquer directement que :

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} \le \varphi(y) \le \frac{1}{y} \tag{3.15}$$

Cela signifie que pour tout $x \ge 0$, on a

$$\psi_\alpha(x) \ge |z_\alpha|$$

On introduit la fonction suivante

$$\varrho(\lambda) = \inf\{x \geq 0 : G^*(x,\lambda) \geq 1\} \tag{3.16}$$

On peut remarque aisément que $\varrho(0) = \|\theta\|_T$ On définit la fonction $\lambda(a)$ sur l'intervalle $[0, -\ln(1-\zeta)]$ comme racine positive de l'équation

$$H(\lambda) = a \tag{3.17}$$

On donne ci-dessous une condition suffisante pour laquelle cette équation admet une racine positive unique pour $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$.

Maintenant, On définit les stratégies d'investissement optimales et on posant pour $0 \leq \kappa \leq \zeta$

$$\tilde{a}(\kappa) = \ln \frac{1-\kappa}{1-\zeta} \text{ et } \tilde{\kappa} = \lambda(\tilde{a}(\kappa))$$

On définit pour $0 \leq t \leq T$

$$\tilde{\tau}(t,\kappa) = \tau(t, \tilde{\lambda}(\kappa)) \text{ et } \tilde{y}^\kappa = \tilde{\tau}(t,\kappa)\theta_t \tag{3.18}$$

Pour introduire la consommation du taux optimal, nous utiliserons les fonctions suivantes :

$$\upsilon^\kappa(t) = \frac{\kappa}{T - t\kappa} \tag{3.19}$$

Il est à noter que pour

$$\kappa = \kappa_0 = \frac{T}{T+1} \tag{3.20}$$

Lemme 3.3.1. *Supposons que* $|z_\alpha| > \|\theta\|_T$ *et*

$$0 \leq \lambda \leq \lambda^*_{\max} = \frac{k_1 + \sqrt{k_2(\psi^2_\alpha(0) - \|\theta\|^2_T) + k_1^2}}{\psi^2_\alpha(0) - \|\theta\|^2_T} \tag{3.21}$$

où $k_1 = \|\sqrt{\omega}\theta\|^2_T$ *et* $k_2 = \|\omega\theta\|^2_T$*. Donc, l'équation* $G^*(x,\lambda) = 1$ *admet une seule racine positive.*
Maintenant, pour $0 \leq \lambda \leq \lambda^*_{\max}$ *on définit la fonction de poids suivante*

$$\varsigma(t,\lambda) = \frac{b(t,\lambda)}{c_\alpha(\lambda) + b(t,\lambda)}$$

Où

$$b(t,\lambda) = \varrho(\lambda)(w(t)+\lambda) \ \text{et}\ c_\alpha(\lambda) = \lambda\psi_\alpha(\varrho(\lambda))$$

On trouve directement que $\varsigma(t,0) = 1$ pour tout $0 \leq t \leq T$. De plus, on a

$$0 \leq \varsigma(T,\lambda) \leq \varsigma(t,\lambda) \leq \varsigma(0,\lambda) \leq 1$$

pour tout t tel que $0 \leq t \leq T$ et pour chaque $0 \leq \lambda \leq \lambda^*_{\max}$.
Pour prendre en considération la contrainte E.S, on fait intervenir la formule suivante :

$$H^*(\lambda) = -\,\|\sqrt{\varsigma_\lambda}\theta\|^2_T - f_\alpha(\|\varsigma_\lambda\theta\|_T) \tag{3.22}$$

Où $\varsigma_\lambda(.) = \varsigma(.,\lambda)$ et

$$f_\alpha(x) = \ln F_\alpha(|z_\alpha| + x)$$

On définit maintenant la fonction $\lambda^*(a)$ sur l'intervalle $[0, -\ln(1-\zeta)]$ en tant qu'une racine positive de l'équation :

$$H^*(\lambda) = a \tag{3.23}$$

Dans ce qui suit, nous donnons les conditions suffisantes pour lesquels cette équation admet une seule racine positive pour $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$.
On pose

$$\hat{\lambda}(\kappa) = \lambda^*(\tilde{a}(\kappa)), \quad \hat{\varsigma}(t,\kappa) = \varsigma(t,\hat{\lambda}(\kappa)) \text{ et } \hat{y}^\kappa_t = \tilde{\varsigma}(t,\kappa)\theta_t \tag{3.24}$$

Où $\tilde{a}(\kappa)$ est défini dans (3.18).
Pour défini la fonction d'utilité, nous posons :

$$J_1^*(\kappa) = \ln(1-\kappa) + T\ln\kappa + J_0^*(\kappa) \tag{3.25}$$

Où

$$J_0^*(\kappa) = \int_0^T w(t)\,|\theta_t|^2 \left(\hat{\varsigma}(t,\kappa) - \frac{\hat{\varsigma}^2(t,\kappa)}{2}\right) dt$$

Pour choisir le paramètre κ, on doit maximiser la fonction d'utilité, i.e. on pose

$$\kappa_1^* = \kappa_1^*(\zeta) = argmax_{0\leq\kappa\leq\zeta} J_1(\kappa) \tag{3.26}$$

Lemme 3.3.2. *La fonction $\varsigma_\lambda(t)$ est continuellement différentiable dans λ Pour tous les $0 \leq \lambda \leq \lambda^*_{\max}$ Avec dérivée partielle*

$$\varsigma_1(t,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\varsigma_\lambda(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

De plus

$$|q_\alpha| \geq 2(T+1)\|\theta\|_T, \tag{3.27}$$

Le dérivé $\dot{\phi}_1(\lambda) < 0$ *pour* $0 \leq \lambda \leq \lambda^*_{\max}$.

Supposons que dans le modèle (3.1), les coefficients satisfaient les conditions (3.5)-(3.6). On a alors

$$0 < \zeta < 1 - F_\alpha(|z_\alpha| + \|\theta\|_T)e^{\|\theta\|^2_T} \tag{3.28}$$

et pour $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$, l'équation (3.23) a une seule racine positive $\lambda(a)$ avec une valeur dans l'intervalle $[0, \lambda^*_{\max}]$. De plus, pour $0 < \alpha < 1/2$ satisfaisant la condition

$$|z_\alpha| \geq 2(T+1)\,\|\theta\|_T \tag{3.29}$$

et tel que

$$|z_\alpha| > 1 \tag{3.30}$$

La valeur optimale de $J(x,\nu)$ est donné par :

$$J(x,\nu^*) = A(x) + J^*_1(\kappa^*_1(\zeta)) \tag{3.31}$$

Où la fonction

$$A(x) = (T+1)\ln x + \int_0^T w(t) r_t dt - T\ln T \tag{3.32}$$

et le contrôle optimal dans ce cas $\nu^* = (y^*_t, \upsilon^*_t)_{0\leq t\leq T}$ a la forme suivante

$$y^*_t = \hat{y}^{\kappa^*_1}_t \text{ et } \upsilon^*_t = \upsilon^{\kappa^*_1}(t) \tag{3.33}$$

Le processus optimal de richesse $(X^*_t)_{0\leq t\leq T}$ est défini par l'équation stochastique suivante

$$dX^*_t = X^*_t(r_t - \upsilon^*_t + (y^*_t)'\theta_t)dt + X^*_t(y^*_t)'dW_t, \quad X^*_0 = x \tag{3.34}$$

Démonstration

On note en premier lieu, que la condition

$$\sup_{0\leq t\leq T} \frac{ES_t(x,\nu,\alpha)}{\zeta_t(x)} \leq 1$$

est équivalente à

$$\inf_{0\leq t\leq T} L_t^*(\nu) \geq \ln(1-\zeta) \tag{3.35}$$

où

$$L_t^* = (y,\theta)_t - V_t + f_\alpha(\|y\|_t)$$

Premièrement, on considère cette restriction, uniquement en dernier moment pour $t = T$ pour le taux de consommation (3.19) i-e

$$K^*(y) = -(y,\theta)_T - f_\alpha(\|y\|_T) \leq \tilde{a}(\kappa) \tag{3.36}$$

Pour $0 \leq \kappa \leq \zeta$. On choisit maintenant la stratégie optimale d'investissement en trouvons une solution au problème d'optimisation suivant :

$$\max_{y\in\mathcal{L}_2[0,T]} \text{ sous la condition } K^*(y) = a \tag{3.37}$$

Pour $0 \leq a \leq \tilde{a}(\kappa)$. On peut montrer que pour tout que pour $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$ la solution de ce problème est :

$$\max_{y\in\mathcal{L}_2[0,T]} I_2(y) = I_2(y^{\lambda^*}(a)) = C^*(\lambda^*(a))$$

Où $y_t^\lambda = \varsigma(t,\lambda)\theta_t$ et

$$C^*(\lambda) = \int_0^T w(t)\left(\varsigma(t,\lambda) - \frac{1}{2}\varsigma^2(t,\lambda)\right)|\theta_t|^2\,dt$$

En effet, Pour étudier le problème (3.37) pour $a = 0$, on note que

$$K^*(y) \geq \phi(\|y\|_T)$$

Où

$$\phi(x) = -x\,\|\theta\|_T - f_\alpha(x)$$

De plus, on a

$$\dot{\phi}(x) = \frac{1}{\varphi(|z_\alpha| + x)} - \|\theta\|_T$$

et de l'extrémité droite de l'inégalité (3.15) on obtient :

$$\dot{\phi}(x) \geq |z_\alpha| + x - \|\theta\|_T$$

et pour $|z_\alpha| > \|\theta\|_T$ (cette inégalité découle de la condition (3.29) et pour $x \geq 0$ la dérivée $\dot{\phi}(x) > 0$. En tenant compte en que $\phi(0) = 0$, on aura $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et

$\phi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Par conséquence, il existe seulement une fonction qui satisfait à la condition $K^*(y) = 0$, ce $y = 0$, Mais on obtient la même solution si on fait le choix $a = 0$ dans la fonction $y^{\lambda^*(0)} = 0$. sûrement, $G(0, \lambda^*_{\max}) = 1$, alors $\varrho(\lambda^*_{\max}) = 0$, $y^{\lambda^*_{\max}} = 0$ et $H^*(\lambda^*_{\max}) = 0$. De plus, du lemme (3.3.2) cela signifie que $\lambda^*(0) = \lambda^*_{\max}$, i.e $y^{\lambda^*(0)} = 0$, et de là la fonction $y^{\lambda^*(a)}$ est une solution de (3.37) pour tout $0 \leq a \leq -\ln(1-\zeta)$.

Pour choisir le paramètre a tq $0 \leq a \leq \tilde{a}(\kappa)$ on doit calculer la dérivée de $C^*(\lambda^*(a))$. On a

$$\frac{d}{da} C^*(\lambda^*(a)) = \int_0^T w(t)(1 - \varsigma(t, \lambda(a)))\varsigma_1(t, \lambda^*(a)) \left|\theta_t\right|^2 dt \dot{\lambda}^*(a)$$

Où

$$\varsigma_1(t, \lambda) = \frac{\partial \varsigma(t, \lambda)}{\partial \lambda} \tag{3.38}$$

De (3.23) on peut trouver :

$$\dot{\lambda}(a) = \frac{1}{\dot{H}^*}(\lambda(a))$$

Alors, du lemme (3.3.2) la dérivée de $C^*(\lambda^*(a))$ est positive, et de là pour obtenir la valeur maximale de $C^*(\lambda^*(a))$ on choisit a de telle façon que $a = \tilde{a}(\kappa)$. On pose maintenant $\hat{\nu}^\kappa = (\hat{y}^\kappa_t, \upsilon^\kappa_t)_{0 \leq t \leq T}$. Alors il est montré que pour chaque $\nu \in \mathcal{U}$ avec $V_T = -\ln(1-\kappa)$

$$J(x, \nu) \leq J(x, \hat{\nu}^\kappa) = A(x) + J^*_1(\kappa)$$

Il est clair que (3.26) permet de donner au paramètre κ la valeur optimale. Pour conclure la preuve de ce théorème on doit vérifier la condition (3.35) pour la stratégie ν^* définie dans (3.33). Pour cela on pose :

$$\varsigma^*(t) = \varsigma(t, \hat{\lambda}_1) \quad \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}(\kappa^*_1) \text{ et } \gamma^*(t) = \frac{\varsigma^*_t}{2\left\|\varsigma^*\theta\right\|_t}$$

En prenant cela en considération, on peut représenter la fonction $L_t(\nu^*)$ en cette forme d'intégrale suivante :

$$L_t(\nu^*) = -\int_0^t g^*(u)du - \int_0^t \upsilon^*_s ds$$

Où

$$g^*(t) = \varsigma^*_t \left|\theta_t\right|^2 \left(\frac{\beta_t \gamma^*(t)}{2} - 1\right) \text{ et } \beta_t = -\dot{f}_\alpha(\|\varsigma^*\theta\|)$$

Il est à noter que ces inégalités impliquent que :

$$\gamma^*(t) \geq \frac{\varsigma(T,\lambda_1)}{\varsigma(0,\lambda_1)\left\|\theta\right\|_t} = \frac{1+\lambda_1}{\left\|\theta\right\|_t(1+T+\lambda_1)} \geq \frac{1}{2\left\|\theta\right\|_T(1+T)}$$

De plus,en tenant en compte l'inégalité (3.15) on obtient :

$$\beta_t = \frac{1}{\varphi(\left\|\varsigma^*\theta\right\|_t)} \geq |z_\alpha| + \left\|\varsigma^*\theta\right\|_t \geq |z_\alpha|$$

Alors, la condition (3.29) implique que la fonction $g^*(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ i.e

$$L_t^*(\nu^*) \geq L_T^*(\nu^*) = \ln(1-\zeta)$$

■

Supposons que les coefficients dans le modèle (3.1) satisfaient les conditions (3.5). On a donc pour

$$\zeta > 1 - \frac{1}{T}e^{\|\theta\|_T^2}F_\alpha(|z_\alpha| + \|\theta\|_T)$$

et pour tout $0 < \alpha < 1/2$

$$|z_\alpha| \geq \|\theta\|_T \tag{3.39}$$

satisfaisant les conditions (3.39) et (3.30), la solution du problème (3.12) est donnée par

$$r_t^* = r_t + |\theta_t|^2/2, \quad t \geq 0 \tag{3.40}$$

et on définit pour $0 \leq t \leq T$

$$A(t) = 1 + T - t \quad B(t) = \int_t^T (r_t^* A(u) - \ln A(u) - 1)du \tag{3.41}$$

Démonstration :

Pour prouver ce théorème, il suffit de vérifier la condition (3.35) pour la stratégie $\nu^* = (y_t^*, \upsilon_t^*)_{0\leq t\leq T}$ avec $y_t = \theta_t$ et $\nu_t^* = 1/w(t)$ pour $t \in [0,T]$. il est facile de vérifier directement que la condition

$$\zeta > 1 - \frac{1}{T}e^{\|\theta\|_T^2}F_\alpha(|z_\alpha| + \|\theta\|_T)$$

implique que

$$L_T^*(\nu^*) \geq \ln(1-\zeta)$$

De plus, pour $0 \leq t \leq T$, on peut représenter la fonction $L_t^*(\nu^*)$ de la façon suivante :

$$L_T^*(\nu^*) = \|\theta\|_t^2 + f_\alpha(\|\theta\|_t) - V_t^* = -\int_0^t l_s^* ds - \int_0^t \upsilon_s^* ds$$

Où

$$l_t^* = \left(\frac{1}{\varphi(|z_\alpha| + \|\theta\|_t)} - 1 \right) |\theta_t|^2$$

D'autre part, de l'extrémité droite de l'inégalité dans (3.15) on obtient :

$$l_t^* \geq (|z_\alpha| + \|\theta\|_t - 1) \, |\theta_t|^2 \geq (|z_\alpha| - 1) \, |\theta_t|^2$$

et de la condition (3.30), on a on a $l_t^* > 0$ pour $0 \leq t \leq T$

$$l_t^* \geq (|z_\alpha| + \|\theta\|_t - 1) \geq (|z_\alpha - 1|) \, |\theta_t|^2$$

de plus, la fonction $L_t^*(\nu^*)$ est décroissante pour $0 \leq t \leq T$, i.e

$$L_t^*(\nu^*) \geq L_T^*(\nu^*)$$

■

Conclusion

Dans notre travail nous avons utilisé des méthodes probabilistes telles que le calcul stochastique d'Itô et la théorie du contrôle de processus stochastique pour résoudre un problème d'investissement visant une consommation optimale durant un horizon [0, T] et un héritage à une échéance T dans un marché financier de type Black-Sholes avec des coefficients déterministes.

La fonction, que nous optimizons impliquera une fonction d'utilité logarithmique. Nous examinons les problème de contrôle avec restriction pour obtenir finalement une stratégie optimale d'investissements et de consommation.

Bibliographie

[1] Romuald ELIE et Idris KHARROUBI :*Calcul stochastique appliqué à la finance*

[2] Jean-Jacques Ruch et Marie-Line Chabanol :*espérance conditionnelle martingales, 2012 - 2013*

[3] Damien Lamberton et Bernard Lapeyre :*Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*

[4] Élise Janvresse et Serguei Pergamenchtchikov et Paul Raynaud :*De Fitte Mathématiques pour la finance et l'assurance*

[5] Claudia Klüppelberg et Serguei Pergamenchtchikov :*Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for logarithmic utility functions 2009*

[6] I.I. Gihman et A.V. Skorohod :*Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires. Mir, 1980.*

[7] N. Bouleau :*Processus Stochastiques et Applications. Hermann,* 1988.

[8] I. Karatzas et S.E. ShreveBrownian :*Motion and Stochastic Calculus. Springer- Verlag, New-York,* 1988

[9] Nicole El Karoui et Emmanuel Gobet :*Les outils stochastiques des marchés financiers. Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*

[10] P. Artzner et F. Delbaen :*Term structure of interest rates The martingale approach. Advances in Applied Mathematics,* $10 : 95 - 129.$, 1989.

[11] M. Abramowitz et I.A. Stegun*Editeurs : Handbook of Mathematical Functions. Dover, 9th edition, 1970.*

[12] A. Bensoussan :*On the theory of option pricing. Acta Appl. Math, 2 :139-158, 1984.*

[13] L. Bachelier :*Théorie de la spéculation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 17 :21-86, 1900.*

[14] A. Bensoussan et J.L. Lions :*Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique. Dunod, 1978.*

[15] CERMA :*Sur les risques résiduels des stratégies de couverture d'actifs conditionnels. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 307 : 625-630, 1988.*

[16] Black.F et Scholes.M :*The pricing of options and corporate liabilites. Journal of Political Economy, vol. 81, 1973, pp. 637-659.*

[17] Comets (Francis) et Meyre (Thierry) :*Calcul stochastique et modéles de diffusions. Paris, Dunod, 2006, Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI.*

[18] Dudley (Richard M.) :*Real Analysis and Probability. -Cambridge. Cambridge University Press, 2002.*

[19] Cont (Rama) et Tankov (Peter) :Financial modelling with jump processes. - Chapman et Hall/CRC, Boca Raton, FL. 2004, Chapman et Hall/CRC Financial Mathematics Series.

[20] Basak, S. and Shapiro :Value at Risk based risk management : optimal policies and asset prices. Review of Financial Studies. 14(2), 371-405 (1999)

[21] Artzner, P.Delbaen, F.Eber, J.-M. and Heath.D *: Coherent measures of risk. Math. Finance. 9, 203-228 (1999)*

[22] Cuoco, D. He, H. and Isaenko, S :*Optimal dynamic trading strategies with risk limits. Working paper, (2005)*

[23] Dowd, K :*Beyond Value at Risk : the New Science of RiskManagement.Wiley, London.(1998)*

[24] Gabih, A., Grecksch, W. and Wunderlich, R :*Dynamic portfolio optimization with bounded shortfall risks. Stoch. Anal. Appl. 23, 579-594 (2005)*

[25] Klüppelberg, C. and Pergamenchtchikov, S :*Optimal consumption and investment with bounded downside risk for power utility functions. Invited book contribution. Available at www-m4.ma.tum.de/Papers (2008)*

[26] Yiu, K.F.C :*Optimal portfolios under a value-at-risk constrain. J. Econom. Dynam. Control 28 (7), 1317-1334. (2004)*

[27] Korn.R :*Optimal Portfolios. World Scientific, Singapore. (1997)*