

REMERCIEMENTS

A l'échéance de ce mémoire de fin d'étude. Je dois en premier lieu l'énorme remerciement à notre dieu le Miséricordieux, aussi que mes très chers parents pour leurs patience et le grand sacrifice pour l'aboutissement de mes études.

Aussi mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Dr Saâdia Rahmani qui m'a fait l'honneur d'être mon encadreur . Je la remercie profondément pour son encouragement continue et aussi d'être toujours la pour m'écouter, m'aider et me guider à retrouver le bon chemin par sa sagesse et ses précieux conseils. ainsi que son soutien moral et sa preuve de compréhension, ce qui m'a donné la force et le courage d'accomplir ce mémoire.

Aussi au jury à leur tête le président et les examinateurs pour avoir honorer de leurs présences à ma soutenance.

Sans oublier tous mes enseignants durant les années des études, aussi que toutes les personnes qui ont contribués de près ou de loin pour mener à bien mon travail.

Table des matières

1	Introduction générale	7
1.1	historique	7
1.2	Définitions et outils	8
1.2.1	La convergence presque-complète	8
1.2.2	Erreur quadratique moyenne	9
1.2.3	Inégalité de type exponentiel	9
1.2.4	Théorème de Slutsky	9
1.2.5	Théorème central limite	10
2	La modélisation par régression localement polynomiale	11
2.1	L'estimation par la méthode du noyau	11
2.1.1	L'estimateur de Nadaraya-Watson	12
2.2	L'estimation localement polynomial dans le cas réel	12
2.3	L'estimation locale linéaire dans le cas fonctionnel	15
2.3.1	Le modèle	15
2.3.2	Construction de l'estimateur local linéaire	16
3	Convergence presque-complète	19
3.1	Notations générales et hypothèses	19
3.2	Propriété asymptotique	20
3.2.1	Preuve des Théorèmes	20
3.3	Preuve des Lemmes	21
4	L'erreur quadratique et la normalité asymptotique	27
4.1	Notations générales et hypothèses	27
4.2	La convergence en moyenne quadratique	28
4.2.1	Lemme technique préliminaire :	30

4.2.2	Preuve du Théorème 4.2.1	30
4.3	La normalité asymptotique	32
4.3.1	Preuve du Théorème 4.3.1	33
4.3.2	Preuve des lemmes techniques	38
5	Application et conclusion	43
5.1	Application	43
5.2	Conclusion	46
	Bibliographie	46

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Historique

Dans la littérature statistique, et plus précisément, dans le cas multivarié, on retrouve la méthode du lissage par polynômes localement pondérés sous diverses appellations : lissage par ajustement local (Cleveland et Loader [6]), par polynômes locaux de type noyau (Wand et Jones [23]), par régression locale polynomiale (Opsomer [19]), par régression localement pondérée (Cleveland [7]) ou tout simplement par régression locale (Loader [14]). Par souci de clarté, on privilégiera, dans ce mémoire, l'emploi de la terminologie régression par polynômes locaux.

Contrairement au cas multivarié, la littérature sur la méthode d'estimation par polynômes locaux dans le cadre fonctionnel est très restreinte. En effet, Barrientos et *al.* [2] ont utilisé une modélisation locale linéaire fonctionnelle pour étudier l'opérateur de régression. La performance de la méthode locale linéaire, en faisant une comparaison avec l'estimateur de Nadaraya-Watson via la méthode de Monte-Carlo dans le cas fonctionnel, a été établie par Baíllo et Grané [1]. Une méthode alternative pour l'estimation locale linéaire fonctionnelle a été réalisée par Boj et *al.* [4].

Notons, aussi que la généralisation des résultats de Barrientos et *al.* [2] aux données spatialement dépendantes a été établie par Chouaf et Laksaci [5]. En 2016, Zhou et Lin [25] ont établi la convergence en moyenne quadratique et la normalité asymptotique de l'estimateur construit par Barrientos et *al.* [2].

L'objectif de ce mémoire, est d'établir les propriétés les plus importantes d'un estimateur local linéaire de la fonction de régression dans le cas où les observations sont indépendantes

et identiquement distribuées. Ce manuscrit est présenté en cinq chapitres, et il est organisé comme suit :

Après ce chapitre introductif destiné à un historique sur l'estimation de la fonction de régression par la méthode des polynômes locaux dans les deux cas multivarié et fonctionnel. On introduit dans la deuxième partie du même chapitre quelques outils statistiques nécessaires pour l'élaboration de nos résultats. Le deuxième chapitre, est consacrée à des généralisations sur la méthode des polynômes locaux, et l'étude des cas particuliers (local constant et local linéaire) dans le cas réel. On trouvera aussi la construction d'un estimateur local linéaire de l'opérateur de régression pour des données fonctionnelles. Dans le troisième chapitre, on établit la convergence ponctuelle presque-complète de l'estimateur local linéaire de la fonction de régression dans le cas où la variable explicative est fonctionnelle et la réponse est réelle, en précisant sa vitesse de convergence. Dans le quatrième chapitre, on établit la convergence en moyenne quadratique de l'estimateur construit en précisant les termes asymptotiquement dominants du biais et de la variance. Dans le même chapitre, on établit la normalité asymptotique. Le cinquième chapitre est consacré à quelques applications et une conclusion générale.

1.2 Définitions et outils

1.2.1 La convergence presque-complète

Définition 1.2.1. *On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Converge presque complètement vers la variable aléatoire X , si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

et la convergence presque-complète de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X est notée par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X, \text{ p.co.}$$

Définition 1.2.2. *On dit que le taux (la vitesse) de convergence presque-complète de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X est d'ordre u_n si et seulement si*

$$\forall \varepsilon_0 > 0, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n - X| > \varepsilon_0 u_n) < \infty$$

et nous écrivons

$$X_n - X = O_{p.co.}(u_n)$$

Définition 1.2.3. Soit X_n, Y_n deux suites des variables aléatoires.

La suite $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$, p.co. si et seulement si : $X_n \rightarrow 0$, p.co.

et $\exists \delta > 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(|Y_n| < \delta) < \infty$

1.2.2 Erreur quadratique moyenne

C'est un critère très répandu dans la littérature pour évaluer la précision d'une valeur estimée en un point x , et on a la définition suivante :

Définition 1.2.4. si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et X une variable aléatoire définie sur le même espace et telle que $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$, alors on dit que X_n converge dans L^2 vers X si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0$$

1.2.3 Inégalité de type exponentiel

Soit Z_1, \dots, Z_n une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées

Corollaire 1.2.1. i) Si $\forall M \geq 2$, $\exists C_m > 0$, $\mathbb{E}|Z_1^m| \leq C_m a^{2(m-1)}$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n Z_i\right| > \varepsilon n\right) \leq 2 \exp\left\{\frac{-\varepsilon^2 n}{2a^2(1+\varepsilon)}\right\}$$

ii) Supposons que les variables dépendent de n (C'est-à-dire que $Z_i = Z_{i,n}$).

Si $\forall M > 2$, $\exists C_m > 0$, $\mathbb{E}|Z_1^m| \leq C_m a_n^{2(m-1)}$ et si $u_n = n^{-1} a_n^2 \log n$ vérifie

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = O_{p.co.(\sqrt{u_n})}$$

1.2.4 Théorème de Slutsky

soit $(X_n), (Y_n)$ des suites de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P})$ et à valeurs respectivement dans \mathbf{R}^p et \mathbf{R}^q .

Théorème 1.2.1. [22] Si (X_n) converge en loi vers X , et si (Y_n) converge en probabilité vers une constante c , alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers le couple (X, c) .

1.2.5 Théorème central limite

Théorème de Lindeberg

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, indépendantes. Supposons que, pour $n \geq 1$, X_n ait une espérance finie μ_n et un écart-type

fini σ_n , et posons $S_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ et $Z_n = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)$

Si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)^2 \mathbf{1}_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon S_n\}}] = 0$

alors la loi de Z_n converge vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Chapitre 2

La modélisation par régression localement polynomiale

Avant de passer à notre objectif, qui est l'estimation de la fonction de régression par la méthode locale linéaire, il nous a paru logique de donner l'idée générale sur la méthode des polynômes locaux. Par suite, ce chapitre est divisé en trois sections. La première section présentera l'estimateur de noyau, la deuxième section est consacrée à l'estimation par la méthode des polynômes locaux dans le cas réel. La construction d'un estimateur local linéaire de la fonction de régression dans le cas fonctionnel est explicitement donné dans la dernière section.

2.1 L'estimation par la méthode du noyau

Supposons que le comportement d'une variable aléatoire Y soit lié à celui d'une autre variable aléatoire X . Il est classique d'essayer tout d'abord d'exprimer Y linéairement en fonction de X . C'est le problème bien connu de la régression linéaire. Il serait peut-être plus judicieux de tenter d'exprimer Y à travers une fonction m non nécessairement linéaire de X , c'est-à-dire de trouver une expression de la forme :

$$Y = m(X) + \varepsilon$$

où le terme ε correspond à une erreur ou un bruit de modélisation aléatoire. On peut alors chercher à déterminer m comme solution du problème de minimisation : $\min \mathbb{E}[Y - m(X)]^2$. Si le bruit ε est intégrable et centré et s'il est indépendant de la variable aléatoire X , on a

$$m(X) = \mathbb{E}[Y|X]$$

Dans ce chapitre, nous allons présenter brièvement quelques estimateurs non-paramétriques d'une fonction de régression. Nous nous focalisons essentiellement sur l'estimateur de Nadaraya-Watson et l'estimateur par la méthode des polynômes locaux.

2.1.1 L'estimateur de Nadaraya-Watson

Le premier estimateur rencontré dans la littérature est l'estimateur à noyau de Nadaraya-Watson (1964), noté $\hat{m}_n^{NW}(x)$. Il est construit à partir d'une fonction noyau K et d'une fenêtre (h_n) , de manière analogue à l'estimateur à noyau de la densité de probabilité introduit par Parzen (1962) et Rosenblatt (1956). La fenêtre (h_n) désigne une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant $h_n \rightarrow 0$ et $nh_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Le noyau est une fonction mesurable, positive et bornée telle que

$$\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} xK(x)dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |x|K(x)dx < \infty.$$

L'estimateur $\hat{m}_n^{NW}(x)$ se présente sous la forme d'une moyenne locale pondérée des valeurs Y_i . Il est défini par

$$\hat{m}_n^{NW}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}$$

Le noyau K détermine la forme du voisinage autour du point x , tandis que la fenêtre (h_n) contrôle la taille de ce voisinage, c'est-à-dire implicitement le nombre d'observations prises en compte pour effectuer la moyenne locale.

2.2 L'estimation localement polynomial dans le cas réel

L'estimation de la fonction de régression par la méthode des polynômes locaux est fondée sur une simple généralisation de l'estimateur $\hat{m}_n^{NW}(\cdot)$. L'idée maîtresse de l'approche localement polynomiale est de considérer le problème de la régression sous l'angle des moindres carrés ; en effet, la fonction de régression $m(\cdot)$ est elle même solution d'un problème de moindres carrés.

Par convenance, nous rappelons la définition de l'estimateur $\widehat{m}_n^{NW}(x)$: lorsque $K \geq 0$,

$$\widehat{m}_n^{NW}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)} = \frac{\widehat{g}_n(x)}{\widehat{f}_n(x)}.$$

Nous avons, lorsque $K > 0$,

$$\left\{ \widehat{g}_n(x) - \widehat{m}_n^{NW}(x) \widehat{f}_n(x) \right\} = 0$$

L'estimateur de la régression \widehat{m}_n^{NW} peut donc être regardé comme la solution du problème de moindres carrés pondérés suivant :

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \{Y_i - a\}^2 K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

En d'autres termes, l'estimateur \widehat{m}_n^{NW} est obtenu par une approximation des moindres carrés localement constante. Le principe de l'estimation localement polynomiale consiste en l'ajustement local d'un polynôme de degré p aux données $(X_i, Y_i) : 1 \leq i \leq n$. Commençons par la construction des estimateurs localement polynomiaux.

Soit p un entier naturel fixé. Nous cherchons à ajuster le polynôme

$$\beta_0 + \beta_1(\cdot - x) + \beta_2(\cdot - x)^2 + \dots + \beta_p(\cdot - x)^p$$

aux données (X_i, Y_i) , via la méthode des moindres carrés pondérés .

Premièrement, on suppose l'existence de la $(p+1)$ -ième dérivée de la fonction de régression $m(\cdot)$ au point x . Cette hypothèse est essentielle pour valider théoriquement la construction de l'estimateur localement polynomial. Nous pouvons alors approximer localement la fonction de régression $m(x)$ par un polynôme d'ordre p . Il s'ensuit, via le développement de Taylor autour du point x ,

$$m(x) \approx m(x) + m'(x)(z - x) + \frac{m''(x)}{2}(z - x)^2, \dots, \frac{m^{(p)}(x)}{p!}(z - x)^p \quad (2.1)$$

$$\approx \sum_{j=1}^n \frac{m^j(x)}{j!} (z - x)^j =: \sum_{i=1}^n \beta_j (z - x)^j, \quad (2.2)$$

lorsque z est situé dans un voisinage du point x . A présent, nous ajustons localement le polynôme (2.2) aux données $\{(X_i, Y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ par la méthode des moindres carrés

pondérés avec comme fonction de poids $K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)$.

Il faut minimiser par rapport au vecteur $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)^T \in \mathbb{R}^{p+1}$ la quantité suivante

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j (X_i - x)^j \right\}^2 K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right). \quad (2.3)$$

Comme pour l'estimateur \hat{m}_n^{NW} , les paramètres K et h_n déterminent la forme et la taille du voisinage autour du point x . Soit $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_p)^T \in \mathbb{R}^{p+1}$, le vecteur qui minimise l'expression (2.3). D'après l'égalité (2.2), la dérivée k -ième $m^{(k)}(x)$ peut-être donc estimer par $\hat{\beta}_k \times k!$, pour $k = 0, 1, \dots, p$. Il s'ensuit la définition suivante :

Définitions 2.2.1. *La statistique*

$$\hat{m}^{(k)}(x) = \hat{\beta}_k \times k!, \quad 0 \leq k \leq p, \quad (2.4)$$

est l'estimateur localement polynomial d'ordre p de la dérivée k -ième de la régression $m^{(k)}(x)$.

Remarque 2.2.1. – Lorsque $k = p = 0$, on retrouve bien l'estimateur \hat{m}_n^{NW} .

– Un exemple particulièrement intéressant est le cas $p = 1$ et $k = 0$. L'estimateur $\hat{m}_n^{LL}(x)$ est appelé l'estimateur local linéaire. D'après (2.3) et (2.4), il est égal à $\hat{\beta}_0$ lorsque $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ désigne le vecteur solution de l'équation des moindres carrés suivante :

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \beta_0 - \beta_1 (X_i - x) \right\}^2 K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right).$$

Plus explicitement, l'estimateur local linéaire \hat{m}_n^{LL} est défini par :

$$\hat{m}_n^{LL}(x) =: \frac{\hat{g}_{n,0}(x)\hat{f}_{n,2}(x) - \hat{g}_{n,1}(x)\hat{f}_{n,1}(x)}{\hat{f}_{n,0}(x)\hat{f}_{n,2}(x) - \hat{f}_{n,1}^2(x)}, \quad (2.5)$$

où

$$\hat{f}_{n,j}(x) =: \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{X_i - x}{h_n} \right\}^j K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right), \quad j = 0, 1, 2,$$

$$\hat{g}_{n,j}(x) =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \left\{ \frac{X_i - x}{h_n} \right\}^j K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right), \quad j = 0, 1.$$

De façon général, la régression par polynômes locaux possède de nombreux points forts dont certains sont discutés en détail par Fan et Gijbels [10] :

1. La méthode s'adapte bien aux problèmes de biais aux bornes et dans des régions de grande courbure ;
2. Elle est facile à comprendre et à interpréter ;
3. Des méthodes produisant des calculs rapides ont été développés pour son estimation ;
4. En raison de sa simplicité, elle peut s'adapter pour prendre en considération diverses hypothèses de distribution ;
5. Elle ne requière pas la présence d'hypothèses strictes sur le niveau de lissage de la courbe ;
6. Elle appartient à la famille des lisseurs linéaires ;
7. Le fait d'avoir un modèle local, permet de développer des méthodes pour choisir directement la largeur de la fenêtre de même que l'ordre du polynôme local à l'aide des réponses (p prédiction) obtenues par le modèle.

Selon Cleveland et Loader [7], aucun de ces points forts ne procure, à lui seul, une raison évidente pour choisir cette approche plutôt qu'une autre ; il s'agit plutôt de la combinaison de ceux-ci qui rend l'approche de régression par polynômes locaux attrayante.

Dans le paragraphe suivant, on va construire un estimateur local linéaire de la régression dans le cadre fonctionnel. Plus précisément, nous nous concentrerons sur l'estimation de la fonction de régression d'une variable aléatoire réelle Y conditionnée par une variable fonctionnelle X (à valeurs dans un espace de dimension infinie).

2.3 L'estimation locale linéaire dans le cas fonctionnel

2.3.1 Le modèle

Nous nous intéresserons ici à un modèle statistique où très peu d'hypothèses sont faites sur la relation entre Y et \mathcal{X} . Plus précisément, nous allons nous concentrer sur le modèle de régression non-paramétrique fonctionnel sur lequel portent l'essentiel des travaux théoriques existant dans la littérature sur des modèles non-paramétriques avec covariable fonctionnelle. Ce modèle s'écrit

$$Y = m(\mathcal{X}) + \varepsilon$$

où \mathcal{X} est à valeurs dans un espace de dimension infinie \mathcal{H} et ε un terme de bruit supposé indépendant de \mathcal{X} , l'objectif est d'estimer la fonction m à partir d'un échantillon $(\mathcal{X}_i, Y_i), i = 1, \dots, n$ de copie de (\mathcal{X}, Y) .

2.3.2 Construction de l'estimateur local linéaire

On considère le problème de minimisation suivant (\mathcal{P}_1) :

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - a - b\beta(\mathcal{X}_i, \chi))^2 K(h^{-1}|\delta(\mathcal{X}_i, \chi)|),$$

où $\beta(.,.)$ est une fonction réelle connue, définie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans \mathbb{R} telle que, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\beta(\xi, \xi) = 0$, δ contrôle la proximité entre les éléments de \mathcal{H} , K est un noyau.

Nous construisons un estimateur de la fonction de régression noté $\hat{m}(\chi)$ solution du problème de minimisation (\mathcal{P}_1) et nous avons :

$$\hat{m}(\chi) = {}^t \mathbf{u}_1 ({}^t \mathbf{Q}_\beta \mathbf{K} \mathbf{Q}_\beta)^{-1} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{K} \mathbf{Y}$$

où ${}^t \mathbf{B}_\beta$ la matrice définie par :

$${}^t \mathbf{Q}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta(\mathcal{X}_1, \chi) & \cdots & \beta(\mathcal{X}_n, \chi) \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbf{Y} = {}^t [Y_1, \dots, Y_n] \text{ et } \mathbf{u}_1 = {}^t [1, 0] \in \mathbb{R}^2$$

(où A^t désigne la matrice transposée de la matrice A).

On désigne par K la matrice diagonale des poids :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} (K(h^{-1}|\delta(\mathcal{X}_1, \chi)|)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (K(h^{-1}|\delta(\mathcal{X}_2, \chi)|)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (K(h^{-1}|\delta(\mathcal{X}_n, \chi)|)) \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\hat{m}(\chi)$ on note $K_i = K(h^{-1}|\delta(\mathcal{X}_i, \chi)|)$ et $\beta_i = \beta(\mathcal{X}_i, \chi)$.

$$\hat{m}(\chi) = (1, 0) \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 1 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_n \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 1 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

avec

$$({}^t\mathbf{Q}_\beta\mathbf{K}\mathbf{Q}_\beta)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n K_i\beta_i^2 & -\sum_{i=1}^n K_i\beta_i \\ -\sum_{i=1}^n K_i\beta_i & \sum_{i=1}^n K_i \end{pmatrix}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i(\beta_i - \beta_j)K_iK_j}$$

En posant

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i(\beta_i - \beta_j)K_iK_j$$

donc

$${}^t\mathbf{u}_1({}^t\mathbf{Q}_\beta\mathbf{K}\mathbf{Q}_\beta)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n K_i\beta_i^2 & -\sum_{i=1}^n K_i\beta_i \end{pmatrix}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}}$$

et

$${}^t\mathbf{Q}_\beta\mathbf{K}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n K_iY_i \\ \sum_{i=1}^n K_iY_i\beta_i \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} \hat{m}(\chi) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n K_i\beta_i^2 & -\sum_{i=1}^n K_i\beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n K_iY_i \\ \sum_{i=1}^n K_iY_i\beta_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}} \left[\left(\sum_{i=1}^n K_i\beta_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n K_iY_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n K_i\beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^n K_iY_i\beta_i \right) \right] \end{aligned}$$

Ce qui conduit à obtenir la solution suivante :

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} Y_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}},$$

Chapitre 3

Convergence presque-complète

Dans ce chapitre, nous étudions la convergence presque-compète de notre estimateur dans le cas où les observation sont indépendantes et identiquement distribuées. Ce chapitre est donc divisé en trois sections. Dans la première section, nous regroupons l'ensemble des hypothèses utilisées pour établir les résultats asymptotiques. Dans la deuxième section, nous énonçons les théorèmes. La démonstration détaillée de ces derniers sera donnée dans la dernière section.

3.1 Notations générales et hypothèses

(H1) $\phi_\chi(u_1, u_2) := \mathbb{P}(u_1 \leq \delta(\mathcal{X}, \chi) \leq u_2)$, et $\forall u > 0, \phi_\chi(u) := \phi_\chi(0, u) > 0$.

Dans la suite, on utilise la notation simple : $\phi_\chi(u) := \phi_\chi(-u, u)$. Donc, il est facile de déduire que $\phi_\chi(u) = \mathbb{P}(\chi \in B(\chi, u))$ où $B(\chi, u) = \{\chi' \in \mathcal{H}, |\delta(\chi, \chi')| \leq u\}$

(H2_C) $m \in \left\{ f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{|\delta(\chi, \chi')| \rightarrow 0} f(\chi') = f(\chi) \right\}$, et

(H2_L) $m \in \{f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \forall \chi' \in \mathcal{H}, |f(\chi') - f(\chi)| < C|\delta(\chi, \chi')|^\nu\}$.

(H4) Le noyau K est une fonction positive, différentiable de support $[-1, 1]$.

(H5) Le paramètre de lissage est tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h = 0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}$$

(H6) $\exists n_0, \forall n > n_0, \frac{1}{\phi_\chi(h)} \int_0^1 \phi_\chi(zh, h) \frac{d}{dz}(z^2 K(z)) dz > \mathcal{C} > 0$.

(H7) $h \int_{B(\chi, h)} \beta(u, \chi) dP(u) = o\left(\int_{B(\chi, h)} \beta(u, \chi)^2 dP(u)\right)$.

(H8) $\forall k = 2, 3, \dots, \sigma_k : \chi \rightarrow \mathbb{E}(Y^k | \mathcal{X} = \chi)$ est un opérateur continu.

Remarque 3.1.1. Notons, que, les hypothèses ((H2) – (H5)) et (H8) sont standards dans le cadre de la régression non-paramétrique fonctionnelle et elles sont des extensions de ce qui a été supposé dans le cas vectoriel. L'hypothèse (H6) précise le comportement du paramètre de lissage h en relation avec la fonction de probabilité de petite boule ϕ_χ et le noyau K .

3.2 Propriété asymptotique

On est maintenant en position de donner les résultats principaux de ce chapitre ; le premier théorème établi la convergence presque-complète de l'estimateur $\widehat{m}(\chi)$, tandis que le deuxième précise sa vitesse de convergence.

Théorème 3.2.1. Sous les conditions (H1), (H2_C), (H3) – (H8), nous avons :

$$\widehat{m}(\chi) - m(\chi) = O_{p.co.}(1).$$

Théorème 3.2.2. Sous les conditions (H1), (H2_l), (H3) – (H8), nous avons :

$$\widehat{m}(\chi) - m(\chi) = O(h^\nu) + O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right)$$

3.2.1 Preuve des Théorèmes

La démonstration des deux théorèmes est basée sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{m}(\chi) - m(\chi) &= \frac{1}{\widehat{m}_0(\chi)} [(\widehat{m}_1(\chi) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi))) - (m(\chi) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)))] \\ &\quad - \frac{m(\chi)}{\widehat{m}_0(\chi)} (\widehat{m}_0(\chi) - 1), \end{aligned}$$

où

$$\widehat{m}_l(\chi) = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}(w_{12})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} Y_j^l, \quad \text{pour } l = 0, 1,$$

et

$$\widehat{m}(\chi) = \frac{\widehat{m}_1(\chi)}{\widehat{m}_0(\chi)} \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)) = 1.$$

Ainsi, les Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 sont une conséquence directe des lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *Sous les hypothèses (H1), (H3) – (H5), on a*

(i) *Si (H2_C) est satisfaite, on a*

$$m(\chi) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)) = O(1)$$

(ii) *Si (H2_L) est satisfaite, on a*

$$m(\chi) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)) = O(h^\nu)$$

Lemme 3.2.2. *Si les hypothèses (H1), (H2_C), (H3) – (H7) sont vérifiées*

(i) *on a* $\widehat{m}_0(\chi) - 1 = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right)$

(ii) *De plus, si (H8) est vérifiée, on a*

$$\widehat{m}_1(\chi) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)) = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right)$$

Et le lemme technique préliminaire suivant

Lemme 3.2.3. *Sous les hypothèses (H1), (H3) – (H6), on a :*

(i) $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \mathbb{E}(K_1^k |\beta_1|^l) \leq Ch^l \phi_\chi(h),$

(ii) $\mathbb{E}(K_1 \beta_1^2) > Ch^2 \phi_\chi(h).$

où C est une constante générique ($0 < C < +\infty$)

3.3 Preuve des Lemmes

Preuve du lemme technique préliminaire 3.2.3

Preuve de (i) : L'hypothèse (H3) implique que

$$K_1^k |\beta_1|^l h^{-l} \leq CK_1^k |\delta(\mathcal{X}_1, \chi)|^l h^{-l}$$

et le fait que le noyau K est borné sur $[0, 1]$, on a

$$K_1^k |\beta_1|^l h^{-l} \leq C |\delta(\mathcal{X}_1, \chi)|^l h^{-l} \mathbf{1}_{[0,1]}(h^{-1} |\delta(\mathcal{X}_1, \chi)|),$$

et par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(K_1^k | \beta_1|^l h^{-l}) &\leq C \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[0,1]}(h^{-1} |\delta(\mathcal{X}_1, \chi)|)), \\
&\leq C \mathbb{P}(0 \leq h^{-1} |\delta(\mathcal{X}_1, \chi)| \leq 1) \\
&\leq C \mathbb{P}(\delta(\mathcal{X}_1, \chi) \leq h) \\
&\leq C \phi_\chi(h)
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(K_1^k | \beta_1|^l) \leq C h^l \phi_\chi(h)$$

Preuve de (ii) : En utilisant (H3), on peut remarquer que

$$\mathbb{E} K_1 \beta_1^2 > C \mathbb{E} \delta(\chi, \mathcal{X}_1)^2 K_1$$

De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(K_1 \frac{\delta(\chi, \mathcal{X}_1)^2}{h^2} \right) &= \int_0^1 t^2 k(t) dP^{|\delta(\chi, \mathcal{X})|/h}(t), \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{d}{du} (u^2 K(u)) \right) du \right) dP^{|\delta(\chi, \mathcal{X})|/h}(t), \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{[u,1]}(t) dP^{|\delta(\chi, \mathcal{X})|/h}(t) \right) \frac{d}{du} (u^2 K(u)) du,
\end{aligned}$$

La dernière équation vient du Théorème de Fubini. En outre, on peut vérifier que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbb{1}_{[u,1]}(t) dP^{|\delta(\chi, \mathcal{X})|/h}(t) &= \mathbb{P}(u \leq |\delta(\chi, \mathcal{X})|/h \leq 1) \\
&= \mathbb{P}(uh \leq |\delta(\chi, \mathcal{X})| \leq h) \\
&= \phi_\chi(uh, h)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathbb{E} \left(K_1 \frac{\delta(\chi, \mathcal{X})^2}{h^2} \right) = \int_0^1 \phi_\chi(uh, h) \frac{d}{du} (u^2 K(u)) du.$$

il suffit d'utiliser l'hypothèse (H6) pour obtenir

$$\mathbb{E}(K_1 \beta_1^2) > C h^2 \phi_\chi(h).$$

Preuve du Lemme 3.2.1

D'un coté, on a

$$\mathbb{E}(\widehat{m}_l(\chi)) = \frac{1}{\mathbb{E}(W_{12})} \mathbb{E}(W_{12}Y_2'),$$

et d'un autre coté, on a

$$\mathbb{E}(\widehat{m}_l(\chi)|\mathcal{X}_2) = \frac{1}{\mathbb{E}(W_{12})} \mathbb{E}(W_{12}\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{X}_2)),$$

qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} |m(\chi) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi))| &= \frac{1}{|\mathbb{E}(W_{12})|} |\mathbb{E}(W_{12}(m(\chi) - m(\mathcal{X}_2)))|, \\ &\leq \sup_{\chi' \in B(\chi, h)} |m(\chi) - m(\chi')|. \end{aligned}$$

Il suffit de considérer $(H2_C)$ pour obtenir le Lemme 3.2.1-(i). Cependant, si on utilise $(H2_L)$ au lieu de $(H2_C)$, on aura le résultat suivant :

$$\sup_{\chi' \in B(\chi, h)} |m(\chi) - m(\chi')| = O(h^\nu),$$

Ce qui nous amène au Lemme 3.2.1 -(ii)

Preuve

du Lemme 3.2.2 Commençons la preuve en remarquant que

$$\widehat{m}_1(\chi) = \underbrace{\frac{n^2 h^2 \phi_\chi(h)^2}{n(n-1)\mathbb{E}w_{12}}}_Q \left[\underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{K_j Y_j}{\phi_\chi(h)} \right)}_{S_1} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_i \beta_i^2}{h^2 \phi_\chi(h)} \right)}_{S_2} - \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{K_j \beta_j Y_j}{h \phi_\chi(h)} \right)}_{S_3} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \frac{K_j Y_j}{h \phi_\chi(h)} \right)}_{S_4} \right] \quad (3.1)$$

qui nous permet d'écrire

$$m_1(\chi) - \mathbb{E}m_1(\chi) = Q[S_1 S_2 - \mathbb{E}(S_1 S_2) - (S_3 S_4 - \mathbb{E}(S_3 S_4))].$$

Notons que

$$\begin{aligned} S_1 S_2 - \mathbb{E}(S_1 S_2) &= (S_1 - \mathbb{E}S_1)(S_2 - \mathbb{E}S_2) + (S_2 - \mathbb{E}S_2)\mathbb{E}S_1 \\ &+ (S_1 - \mathbb{E}S_1)\mathbb{E}S_2 + \mathbb{E}S_1 \mathbb{E}S_2 - \mathbb{E}S_1 S_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

il reste à étudier chaque terme de la décomposition (3.2)

– a) Commençons par écrire

$$S_1 - \mathbb{E}S_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{K_j Y_j - \mathbb{E}K_j Y_j}{\phi_\chi(h)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_{1j}.$$

Pour appliquer l'inégalité exponentielle, Nous nous concentrons sur les moments absolus de la variable aléatoire Z_{1i}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Z_{1i}^m| &= \mathbb{E}|\phi_\chi(h)^{-m}(K_j Y_j - \mathbb{E}K_j Y_j)^m|, \\ &= \phi_\chi(h)^{-m} \mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^m \mathbf{C}_m^k (K_j Y_j)^k (\mathbb{E}K_j Y_j)^{m-k} (-1)^{m-k} \right|, \\ &= \phi_\chi(h)^{-m} \sum_{k=0}^m \mathbf{C}_m^k \mathbb{E}(K_1^k \mathbb{E}Y_j^k | \mathcal{X}_1) |\mathbb{E}(K_1 \mathbb{E}(Y_j | \mathcal{X}_1))|^{m-k}, \\ &\leq \phi_\chi(h)^{-m} \sum_{k=0}^m \mathbf{C}_m^k \mathbb{E}(K_1^k \sigma_k(\mathcal{X}_1)) |\mathbb{E}K_1 m(\mathcal{X}_1)|^{m-k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

En outre, $(H2_C)$ implique que $m(\mathcal{X}_1) = m(\chi) + o(1)$ alors en tenant compte que $(H8)$ est vérifiée, on a également $\sigma_k(\mathcal{X}_1) = \sigma_k(\chi) + o(1)$. Ceci, combiné avec l'équation (3.3), nous permet d'écrire :

$$\mathbb{E}|Z_{1i}^m| = O \left(\phi_\chi(h)^{-m} \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(K_1^k) (\mathbb{E}K_1)^{m-k} \right), \quad (3.4)$$

$$= O \left(\max_{k \in \{0, \dots, m\}} \phi_\chi(h)^{-k+1} \right), \quad (3.5)$$

$$= O(\phi_\chi(h)^{-m+1}), \quad (3.6)$$

sachant que $\mathbb{E}(K_1^k) = O(\phi_\chi(h))$ (voir Lemme 3.2.3- (i) avec $l = 0$). Enfin, il suffit d'appliquer le Corollaire 1.2.1-(ii) avec $a_n^2 = \phi_\chi(h)^{-1}$ pour obtenir

$$S_1 - \mathbb{E}S_1 = O_{P.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right). \quad (3.7)$$

– b) De la même manière, on a

$$S_2 - \mathbb{E}S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_i \beta_i^2 - \mathbb{E}(K_1 \beta_1^2)}{h^2 \phi_\chi(h)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{2i},$$

Alors

$$\mathbb{E}|Z_{2i}^m| = h^{-2m} \phi_\chi(h)^{-m} \sum_{k=0}^m \mathbf{C}_m^k \mathbb{E}(K_1^k \beta_1^{2k}) (\mathbb{E}K_1 \beta_1^2)^{m-k},$$

Ce dernier résultat avec Lemme (3.2.3)-(i) quand $l = 2$ implique que

$$\mathbb{E}|Z_{2i}^m| = O(\phi_\chi(h)^{-m+1}).$$

on peut encore appliquer le Corollaire 1.2.1-(ii) avec $a_n^2 = \phi_\chi(h^{-1})$ pour obtenir

$$S_2 - \mathbb{E}S_2 = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right)$$

– c) On peut remarquer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_1 &= \phi_\chi(h)^{-1} \mathbb{E}K_1 Y_1 \\ &= \phi_\chi(h)^{-1} \mathbb{E}K_1 m(\mathcal{X}_1), \end{aligned}$$

et comme $m(\mathcal{X}_1) = m(\chi) + o(1)$ on obtient $\mathbb{E}S_1 = O(1)$. De manière similaire on déduit que $\mathbb{E}S_2 = O(1)$.

– d) Etudions maintenant la quantité $\mathbb{E}S_1 \mathbb{E}S_2 - \mathbb{E}S_1 S_2$;

Pour la faire remarquons que

$$\mathbb{E}S_1 \mathbb{E}S_2 - \mathbb{E}S_1 S_2 = \left(1 - \frac{n(n-1)}{n^2}\right) h^{-2} \phi_\chi(h)^{-2} \mathbb{E}(K_1 \beta_1^2) \mathbb{E}(K_1 Y_1) + O\left((n\phi_\chi(h))^{-1}\right).$$

En utilisant les mêmes arguments précédents, on aura

$$\mathbb{E}S_1 \mathbb{E}S_2 - \mathbb{E}S_1 S_2 = O\left((n\phi_\chi(h))^{-1}\right).$$

qui est négligeable par rapport à $\sqrt{\log n / (n\phi_\chi(h))}$.

enfin on a la résultat suivant

$$S_1 S_2 \mathbb{E}(S_1 S_2) = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right)$$

et de la même manière, on peut démontrer que

$$S_3 S_4 \mathbb{E}(S_3 S_4) = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_\chi(h)}} \right)$$

– e) Pour terminer la preuve, il faut étudier la quantité Q

Tout d'abord notons que

$$h|\mathbb{E}\beta K_1| \leq Ch \left| \int_{B(\chi, h)} \beta(u, \chi) dP(u) \right|,$$

et l'hypothèse (H7) implique que

$$h|\mathbb{E}\beta K_1| = o\left(\int_{B(\chi, h)} \beta(u, \chi)^2 dP(u)\right),$$

En appliquant le lemme 3.2.3-(i) avec $K = 1_{[0,1]}$, $k = 1$ et $l = 2$

on a

$$\int_{B(\chi, h)} \beta(u, \chi)_2 dP(u) \leq Ch^2 \phi_\chi(h)$$

Ce qui implique que

$$\mathbb{E}\beta_1 K_1 = o(h\phi_\chi(h)).$$

D'un autre coté, le Lemme 3.2.3-(ii) et le dernier résultat nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}w_{12} = \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \mathbb{E}K_1 > Ch^2 \phi_\chi(h)^2.$$

et par conséquent

$$Q = O(1)$$

Chapitre 4

L'erreur quadratique et la normalité asymptotique

En régression non-paramétrique, l'objectif principal de la modélisation consiste à ajuster un modèle de manière à ce que l'on obtienne un compromis adéquat entre le biais d'estimation et la variance de l'estimateur. Dans ce chapitre, nous étudions la convergence en moyenne quadratique et la normalité asymptotique de l'estimateur local linéaire, une étude qui exige la précision de l'expression explicite des termes asymptotiquement dominants du biais et de la variance. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section nous regroupons l'ensemble des hypothèses utilisées pour établir les deux propriétés asymptotiques. Dans la deuxième sections, nous énonçons le théorème de l'erreur quadratique et celui de la normalité asymptotique. La troisième section est consacrée à la démonstration des résultats theniques.

4.1 Notations générales et hypothèses

Commençons ce chapitre par la notation suivante

$$W_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{W_{ij}}{K_j} \right) = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i - \left(\sum_{i=1}^n \beta_i K_i \right) \beta_j \text{ alors, } \hat{m}(\chi) = \frac{\sum_{j=1}^n W_j K_j Y_j}{\sum_{j=1}^n W_j K_j}$$

Pour tout $\chi \in \mathcal{H}$, Nous gardons les mêmes conditions du chapitre précédent, et nous imposons les hypothèses supplémentaires suivantes :

(M1) L'hypothèse (H3) est satisfaite, et de plus :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_\chi(uh)}{\phi_\chi(h)} = \Phi_\chi(u), \forall u \in [0, 1]$$

(M2) L'hypothèse ($H2_C$) est satisfaite pour les deux fonctions m et σ^2 telles que

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(\varepsilon^2 | \mathcal{X}).$$

(M3) L'hypothèse (H3) est satisfaite, et $\sup_{u \in B(\chi, r)} |\beta(u, \chi) - \delta(u, \chi)| = o(r)$,

et $\forall C_1 > 0, C_2 > 0 : C_1 |\delta(x, z)| \leq |\beta(x, z)| \leq C_2 |\delta(x, z)|$

(M4) L'hypothèse (H4) est satisfaite et de plus, on a : $K'(s) < 0$ pour $s \in [0, 1]$ et $K(1) > 0$.

(M5) L'hypothèse (H5) est satisfaite et de plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\phi_\chi(h) = \infty$$

Avant d'établir les résultats principaux de ce chapitre, nous donnons quelques notations qui seront utile dans la suite de ce mémoire

$$M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j(u))' \Phi_\chi(u) du, \quad \text{avec } j = 1, 2.$$

$$N(a, b) = K^a(1) - \int_0^1 (u^b K^a(u))' \Phi_\chi(u) du, \quad \text{pour tout } a > 0 \text{ et } b = 2, 4.$$

Remarque 4.1.1. Notons que, les hypothèses (M1) et (M2) sont des adaptations des conditions (H1) et (H3) dans Ferraty [11], sur l'estimation de l'opérateur de régression quand on remplace la semi-métrique d par la fonction réelle δ . Le reste des hypothèses sont techniques et elles sont classiques dans le contexte de la convergence en moyenne quadratique lorsque les données sont de type fonctionnel.

4.2 La convergence en moyenne quadratique

Le théorème suivant précise l'expression des termes asymptotiquement dominants du biais et de la variance.

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), nous avons :*

$$\mathbb{E}[\widehat{m}(\chi)] - m(\chi) = B_n(\chi) + O\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right) \quad (4.1)$$

et

$$\text{Var}[\widehat{m}(\chi)] = \frac{1}{n\phi_\chi(h)} \frac{M_2}{M_1^2} \sigma^2(\chi) + o\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right). \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned}
B_n(\chi) &= \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)] - m(\chi) = \frac{\mathbb{E}(W_1 K_1 Y_1)}{\mathbb{E}(W_1 K_1)} - m(\chi) \\
&= \frac{\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i - (\sum_{i=1}^n \beta_i K_i) \beta_1) K_1 Y_1]}{\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i - (\sum_{i=1}^n \beta_i K_i) \beta_1) K_1]} - m(\chi) \\
&= \frac{\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \mathbb{E}(K_1 \mathbb{E}(Y_1 | \mathcal{X}_1)) - \mathbb{E}(\beta_1 K_1) \mathbb{E}(\beta_1 K_1 \mathbb{E}(Y_1 | \mathcal{X}_1)) - m(\chi) \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \mathbb{E}(K_1) + m(\chi) \mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \mathbb{E}(K_1) - \mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)} \\
&= \frac{\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \cdot \mathbb{E}[K_1(m(\mathcal{X}_1) - m(\chi))] - \mathbb{E}(\beta_1 K_1) \cdot \mathbb{E}[\beta_1 K_1(m(\mathcal{X}_1) - m(\chi))]}{\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \cdot \mathbb{E}(K_1) - \mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Remarque 4.2.1. D'après le chapitre précédent, on a $B_n(\chi) = o(1)$ (voir le Lemme 3.2.1) en raison de la continuité de m . Et lorsque $\sum_{i=1}^n \beta_i K_i \equiv 0$, nous avons $\mathbb{E}(\beta_1 K_1) = 0$ et le terme de biais $B_n(\chi)$ tend vers $\mathbb{E}[K_1(m(\mathcal{X}_1) - m(\chi))]/\mathbb{E}(K_1) = O(h)$, qui est le biais de l'estimateur de Nadaraya-Watson [24].

Si nous imposons l'hypothèse supplémentaire suivante (H.A), Alors nous pouvons obtenir l'ordre exact du terme bias $B_n(\chi)$.

(H.A) $\mathbb{E}[m(\mathcal{X}) - m(\chi) | \beta(\mathcal{X}, \chi) = s] = \psi(s)$ avec $\psi''(0)$ existe. de plus $K = K(|\delta(\mathcal{X}, \chi)|/h)$ est mesurable par rapport à $\beta(\mathcal{X}, \chi)$.

Alors, sous cette hypothèse on a pour le numérateur de (4.3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[K_1(m(\mathcal{X}_1) - m(\chi))] &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[K_1(m(\mathcal{X}_1) - m(\chi)) | \beta_1]) = \mathbb{E}[K_1 \psi(\beta_1)] \\
&= \psi'(0) \mathbb{E}(K_1 \beta_1) + \frac{1}{2} \psi''(0) \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) + o(\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)).
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta_1 K_1(m(\mathcal{X}_1) - m(\chi))] &= \mathbb{E}[\beta_1 K_1 \psi(\beta_1)] \\
&= \psi'(0) \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) + \frac{1}{2} \psi''(0) \mathbb{E}(\beta_1^3 K_1) + o(\mathbb{E}(\beta_1^3 K_1)).
\end{aligned}$$

donc

$$B_n(\chi) = \frac{\frac{1}{2} \psi''(0) \mathbb{E}^2(\beta_1^2 K_1) - \frac{1}{2} \psi''(0) \mathbb{E}(\beta_1 K_1) \mathbb{E}(\beta_1^3 K_1)}{\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \cdot \mathbb{E}(K_1) - \mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)} (1 + o(1)),$$

Pour calculer le numérateur et le dénominateur de $B_n(\chi)$ on a le lemme suivant :

4.2.1 Lemme technique préliminaire :

Lemme 4.2.1. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), nous avons :*

- (a) $\mathbb{E}(K_1^j) = M_j \phi_\chi(h) + o(\phi_\chi(h))$, pour $j = 1, 2$;
- (b) $\mathbb{E}(K_1^a \beta_1) = o(h \phi_\chi(h))$, pour tout $a > 0$;
- (c) $\mathbb{E}(K_1^a \beta_1^b) = N(a, b) h^b \phi_\chi(h) + o(h^b \phi_\chi(h))$, pour tout $a > 0$ et $b = 2, 4$;
- (d) $\mathbb{E}(W_1 K_1) = (n - 1) \mathbb{E}(w_{12}) = (n - 1) N(1, 2) M_1 h^2 \phi_\chi^2(h) (1 + o(1))$.

on calcule le dénominateur :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) \mathbb{E}(K_1) - \mathbb{E}^2(K_1 \beta_1) &= \mathbb{E}(W_1 K_1) \\ &= (n - 1) \mathbb{E}(W_{12}) \\ &= (n - 1) \mathcal{N}(1, 2) M_1 h^2 \phi_\chi^2(h) (1 + o(1)) \end{aligned}$$

pour le numérateur :

$$[\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1) - \mathbb{E}(\beta_1 K_1) \mathbb{E}(\beta_1^3 K_1)] (1 + o(1)) = N(1, 2) h^2 \phi_\chi(h) + o(h^2 \phi_\chi(h)) (1 + o(1))$$

puis

$$B_n(\chi) = \frac{\frac{1}{2} \psi''(0) [N(1, 2) h^2 \phi_\chi(h) + o(h^2 \phi_\chi(h))]^2}{(n - 1) N(1, 2) M_1 h^2 \phi_\chi^2(h) (1 + o(1))} (1 + o(1))$$

alors

$$B_n(\chi) = \frac{1}{2} \psi''(0) \frac{\mathcal{N}(1, 2)}{M_1} h^2 (1 + o(1))$$

On constate de ce qui précède, que l'ordre du polynôme locaux constitue un des facteurs qui influencent Le compromis biais/variance. En effet, l'estimateur localement linéaire a un meilleur biais que l'estimateur à noyau. Il est d'ordre $O(h^2)$, alors qu'il était d'ordre $O(h)$ pour la méthode du noyau.

4.2.2 Preuve du Théorème 4.2.1

– Pour démontrer (4.1)

On utilise le développement usuel de $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z} = 1 - (z - 1) + \dots + (-1)^p (z - 1)^p + (-1)^{p+1} \frac{(z - 1)^{p+1}}{z} \quad \forall z \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Pour $p = 1$ et $z = \widehat{m}_0(\chi)$, on a

$$\frac{1}{\widehat{m}_0(\chi)} = 1 - (\widehat{m}_0(\chi) - 1) + \frac{(\widehat{m}_0(\chi) - 1)^2}{\widehat{m}_0},$$

Nous pouvons donc obtenir

$$\begin{aligned} \widehat{m}(\chi) - m(\chi) &= \frac{\widehat{m}_1(\chi)}{\widehat{m}_0(\chi)} - m(\chi) = \widehat{m}_1(\chi) \left[1 - (\widehat{m}_0(\chi) - 1) + \frac{(\widehat{m}_0 - 1)^2}{\widehat{m}_0(\chi)} \right] - m(\chi) \\ &= (\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)) - (\widehat{m}_0(\chi) - 1)\widehat{m}_1(\chi) + (\widehat{m}_0(\chi) - 1)^2\widehat{m}(\chi), \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widehat{m}(\chi)] - m(\chi) &= \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)] - \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)(\widehat{m}_0(\chi) - 1)] + \mathbb{E}[\widehat{m}(\chi)(\widehat{m}_0(\chi) - 1)^2] \\ &= \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)] - \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)\widehat{m}_0(\chi) - \widehat{m}_1(\chi)\mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi))] + \mathbb{E}[\widehat{m}(\chi)(\widehat{m}_0(\chi) - 1)^2] \\ &= \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)] - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)\widehat{m}_0(\chi)) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi))\mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)) + \mathbb{E}[\widehat{m}(\chi)(\widehat{m}_0(\chi) - 1)^2] \\ &= [\mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi))] - Cov(\widehat{m}_0(\chi), \widehat{m}_1(\chi)) + \mathbb{E}[(\widehat{m}_0(\chi) - 1)^2\widehat{m}(\chi)]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Comme $\mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)) = 1$, on a $\mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)) = m(\chi) + B_n(\chi) = m(\chi)(1 + o(1))$.

b) Concernant la partie dispersion (4.2), on utilise la décomposition suivante (voir Ferraty et al. [12])

$$\begin{aligned} Var[\widehat{m}(\chi)] &= \frac{Var(\widehat{m}_1(\chi))}{(\mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)))^2} - 4 \frac{\mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)Cov(\widehat{m}_1(\chi), \widehat{m}_0(\chi))]}{(\mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)))^3} \\ &\quad + 3Var(\widehat{m}_0(\chi)) \frac{(\mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi)))^2}{(\mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)))^4} + o\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Par suite, la preuve du Théorème 4.2.1 est une conséquence directe des deux expressions (4.4) et (4.5), et les deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.2. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), nous avons :*

$$Var[\widehat{m}_0(\chi)] = \frac{1}{n\phi_\chi(h)} \left(\frac{N(2,4)}{N^2(1,2)} + \frac{2N(2,2)}{N(1,2)M_1} + \frac{M_2}{M_1^2} \right) + (1 + o(1));$$

$$Cov(\widehat{m}_1(\chi), \widehat{m}_0(\chi)) = \frac{m(\chi)}{n\phi_\chi(h)} \left(\frac{N(2,4)}{N^2(1,2)} + \frac{2N(2,2)}{N(1,2)M_1} + \frac{M_2}{M_1^2} \right) + (1 + o(1));$$

$$Var[\widehat{m}_1(\chi)] = \frac{1}{n\phi_\chi(h)} \left(m^2(\chi) \left[\frac{N(2,4)}{N^2(1,2)} + \frac{2N(2,2)}{N(1,2)M_1} + \frac{M_2}{M_1^2} \right] \sigma^2(\chi) \frac{M_2}{M_1^2} \right) (1 + o(1)).$$

Lemme 4.2.3. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), nous avons :*

$$\widehat{m}_0(\chi) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\widehat{m}_0(\chi)) = 1$$

4.3 La normalité asymptotique

Nous établissons dans le résultat suivant la normalité asymptotique de l'estimateur local linéaire de la fonction de régression

Théorème 4.3.1. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), nous avons :*

$$\sqrt{n\phi_\chi(h)}(\widehat{m}(\chi) - m(\chi) - B_n(\chi)) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \frac{M_2}{M_1^2}\sigma^2(\chi)\right) \quad (4.6)$$

Si nous estimons la fonction $\phi_\chi(h)$ par la version empirique :

$$\widehat{\phi}_\chi(h) = \frac{\sharp(i : |\delta(\mathcal{X}_i, \chi)| \leq h)}{n}$$

Et imposer l'hypothèse supplémentaire :

$$(M6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n\phi_\chi(h)}B_n(\chi) = 0$$

Alors nous pouvons annuler le terme de biais et obtenir les deux simples versions suivantes :

Corollaire 4.3.1. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), nous avons :*

$$\sqrt{n\widehat{\phi}_\chi(h)}(\widehat{m}(\chi) - m(\chi)) \frac{M_1}{\sigma(\chi)\sqrt{M_2}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.7)$$

Pour éviter d'estimer les constantes impliquées dans le Corollaire 4.3.1, on peut considérer le noyau uniforme simple ($M_1 = M_2 = 1$) et obtenir le résultat suivant :

Corollaire 4.3.2. *Sous les hypothèses (M1)-(M5), $K(\cdot) = \mathbb{1}_{[0,1]}(\cdot)$ et si $\widehat{\sigma}^2(\chi)$ est un estimateur consistant de $\sigma^2(\chi)$, alors nous avons :*

$$\sqrt{\frac{n\widehat{\phi}_\chi(h)}{\widehat{\sigma}^2(\chi)}}(\widehat{m}(\chi) - m(\chi)) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.8)$$

4.3.1 Preuve du Théorème 4.3.1

On dénote

$$Q_n = (\widehat{m}_1(\chi) - \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)] - m(\chi)(\widehat{m}_0(\chi) - \mathbb{E}[\widehat{m}_0(\chi)]).$$

Et comme

$$B_n(\chi) = \mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)] - m(\chi) = \frac{\mathbb{E}[\widehat{m}_1(\chi)]}{\mathbb{E}[\widehat{m}_0(\chi)]} - m(\chi),$$

Alors

$$\widehat{m}(\chi) - m(\chi) - B_n(\chi) = \frac{Q_n(\chi) - B_n(\chi)(\widehat{m}_0(\chi) - \mathbb{E}[\widehat{m}_0(\chi)])}{\widehat{m}_0(\chi)},$$

Le Lemme 4.2.3 implique que $\widehat{m}_0(\chi) \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$. De plus, $B_n(\chi) = o(1)$ quand $n \rightarrow \infty$ (d'après Le lemme 3.2.1). Alors, nous pouvons obtenir

$$\widehat{m}(\chi) - m(\chi) - B_n(\chi) = \frac{Q_n(\chi)}{\widehat{m}_0(\chi)}(1 + o_p(1)).$$

Ainsi, pour montrer le théorème 4.3.1, il suffit de prouver que

$$\sqrt{n\phi_\chi(h)}Q_n(\chi) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \frac{M_2}{M_1^2}\sigma^2(\chi)\right). \quad (4.9)$$

En effet, on peut écrire d'une part :

$$\sqrt{n\phi_\chi(h)}Q_n(\chi) = [(\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)\widehat{m}_0(\chi)) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)\widehat{m}_0(\chi))]$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sqrt{n\phi_\chi(h)}[\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)\widehat{m}_0(\chi)] &= \frac{\sqrt{n\phi_\chi(h)}}{n\mathbb{E}(W_1K_1)} \sum_{j=1}^n W_j K_j (Y_j - m(\chi)) \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i \cdot \frac{\sqrt{n\phi_\chi(h)}\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)}{\mathbb{E}(W_1 K_1)} \sum_{j=1}^n K_j (Y_j - m(\chi)) \\ &\quad - \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1 K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i K_i \cdot \frac{\sqrt{n\phi_\chi(h)}\mathbb{E}(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}(W_1 K_1)} \sum_{j=1}^n \beta_j K_j (Y_j - m(\chi)) \\ &=: A_n \cdot B_n - C_n \cdot D_n \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{n\phi_\chi(h)}Q_n(\chi) &= \sqrt{n\phi_\chi(h)}[(\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)\widehat{m}_0(\chi)) - \mathbb{E}(\widehat{m}_1(\chi) - m(\chi)\widehat{m}_0(\chi))] \\ &= [A_n B_n - C_n D_n] - \mathbb{E}[A_n B_n - C_n D_n] \\ &= [A_n B_n - \mathbb{E}(A_n B_n)] - [C_n D_n - \mathbb{E}(C_n D_n)].\end{aligned}$$

Pour montrer l'équation (4.9), il suffit de montrer les deux lemmes suivantes :

Lemme 4.3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 4.3.1, on a :*

$$A_n B_n - \mathbb{E}(A_n B_n) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \frac{M_2}{M_1^2} \sigma^2(\chi)\right)$$

Lemme 4.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 4.3.1, on a :*

$$C_n D_n - \mathbb{E}(C_n D_n) \xrightarrow{P} 0.$$

Preuve du Lemme 4.3.1

On a $A_n B_n - \mathbb{E}(A_n B_n) = [B_n - \mathbb{E}(B_n)] + [(A_n - 1)B_n - \mathbb{E}((A_n - 1)B_n)]$.

L'inégalité de *Cauchy-Schwarz* implique que

$$\mathbb{E}|(A_n - 1)B_n - \mathbb{E}((A_n - 1)B_n)| \leq 2\mathbb{E}|(A_n - 1)B_n| \leq 2\sqrt{\mathbb{E}[(A_n - 1)^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(B_n^2)}.$$

De plus, en utilisant le lemme 4.2.1, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(A_n - 1)^2] &= \text{Var}(A_n) = \frac{1}{n^2 \mathbb{E}^2(\beta_1^2 K_1)} \cdot n \cdot \text{Var}(\beta_1^2 K_1) \\ &\leq \frac{1}{n(O(h^2 \phi_\chi(h)))^2} \cdot \mathbb{E}(\beta_1^4 K_1^2) \\ &= \frac{1}{nO(h^4 \phi_\chi^2(h))} \cdot O(h^4 \phi_\chi(h)) \\ &= O\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_n^2) &= \frac{n\phi_\chi(h)\mathbb{E}^2(\beta_1^2 K_1)}{\mathbb{E}^2(W_1 K_1)} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n K_j(Y_j - m(\chi)) \right]^2 \\
&= \frac{n\phi_\chi(h)O(h^4\phi_\chi^2(h))}{(n-1)^2O(h^4\phi_\chi^4(h))} [n\mathbb{E}(K_1(Y_1 - m(\chi)))^2 + n(n-1)\mathbb{E}^2(K_1(Y_1 - m(\chi)))] \\
&= \frac{n}{(n-1)^2O(\phi_\chi(h))} [nO(\phi_\chi(h)) + n(n-1)o(\phi_\chi^2(h))] \\
&= O(1) + o(n\phi_\chi(h)).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}((A_n - 1)B_n) - \mathbb{E}((A_n - 1)B_n)| &\leq 2\sqrt{\mathbb{E}[(A_n - 1)^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(B_n^2)} \\
&\leq 2\sqrt{O\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right) \cdot [O(1) + o(n\phi_\chi(h))]} = o(1),
\end{aligned}$$

Ce qui implique $(A_n - 1)B_n - \mathbb{E}((A_n - 1)B_n) = o_p(1)$.

Donc d'après le théorème de *Slutsky*, pour prouver le lemme 4.3.1, il suffit de montrer que

$$B_n - \mathbb{E}(B_n) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \frac{M_2}{M_1^2}\sigma^2(\chi)\right) \quad (4.10)$$

En effet

$$\begin{aligned}
B_n - \mathbb{E}(B_n) &= \frac{\sqrt{n\phi_\chi(h)\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)}}{\mathbb{E}(W_1 K_1)} \sum_{j=1}^n [K_j(Y_j - m(\chi)) - \mathbb{E}(K_j(Y_j - m(\chi)))] \\
&=: \sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj}
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_{nj} = \frac{\sqrt{n\phi_\chi(h)\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)}}{\mathbb{E}(W_1 K_1)} [K_j(Y_j - m(\chi)) - \mathbb{E}(K_j(Y_j - m(\chi)))]$ Sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance :

$$\text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj} \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj} \right)^2 = \frac{n\phi_\chi(h)\mathbb{E}^2(\beta_1^2 K_1)}{\mathbb{E}^2(W_1 K_1)} \cdot n \cdot \text{Var}(K_1(Y_1 - m(\chi))).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(K_1(Y_1 - m(\chi))) &= \text{Var}(K_1 Y_1) - 2m(\chi) \cdot \text{Cov}(K_1 Y_1, K_1) + m^2(\chi) \text{Var}(K_1) \\
 &= [\mathbb{E}(K_1^2 Y_1^2) - (\mathbb{E}(K_1 Y_1))^2] - 2m(\chi)[\mathbb{E}(K_1^2 Y_1) - \mathbb{E}(K_1 Y_1)\mathbb{E}(K_1)] + m^2(\chi)[\mathbb{E}(K_1^2) - \mathbb{E}^2(K_1)] \\
 &= [\mathbb{E}((m^2(\mathcal{X}_1) + \sigma^2(\mathcal{X}_1))K_1^2) - (\mathbb{E}(m(\mathcal{X}_1)K_1))^2] - 2m(\chi)[\mathbb{E}(m(\mathcal{X}_1)K_1^2) - \mathbb{E}(m(\mathcal{X}_1)K_1)\mathbb{E}(K_1)] \\
 &\quad + m^2(\chi)[\mathbb{E}(K_1^2) - \mathbb{E}^2(K_1)] \\
 &= [(m^2(\chi) + \sigma^2(\chi)\mathbb{E}(K_1^2))(1 + o(1)) - m^2(\chi)\mathbb{E}^2(K_1)(1 + o(1))] \\
 &\quad - 2m(\chi)[m(\chi)\mathbb{E}(K_1^2)(1 + o(1)) - m(\chi)\mathbb{E}^2(K_1)(1 + o(1))] + m^2(\chi)[\mathbb{E}(K_1^2) - \mathbb{E}^2(K_1)] \\
 &= \sigma^2(\chi)\mathbb{E}(K_1^2)(1 + o(1)) - m(\chi)\mathbb{E}(K_1^2)o(1) + m^2(\chi)\mathbb{E}^2(K_1)o(1) \\
 &= \sigma^2(\chi)\mathbb{E}(K_1^2)(1 + o(1)) = \sigma^2(\chi)M_2\phi_\chi(h)(1 + o(1)).
 \end{aligned}$$

Alors, d'après le lemme 4.2.1, on peut obtenir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj}\right) &= \frac{n\phi_\chi(h)[N(1, 2)h^2\phi_\chi(h)(1 + o(1))]^2}{[(n-1)N(1, 2)M_1h^2\phi_\chi^2(h)(1 + o(1))]^2} \cdot n\sigma^2(\chi)M_2\phi_\chi(h)(1 + o(1)) \\
 &= \frac{n^2M_2}{(n-1)^2M_1^2}\sigma^2(\chi)(1 + o(1)) \longrightarrow \frac{M_2}{M_1^2}\sigma^2(\chi).
 \end{aligned}$$

En utilisant le théorème central limite, la preuve de l'équation (4.10) est complétée si la condition *Lindeberg* est vérifiée. cependant la condition de *Lindeberg* est satisfaite, si pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\varepsilon_{nj}^2 1_{\{|\varepsilon_{nj}| > \eta\}}] = \mathbb{E}[(\sqrt{n}\varepsilon_{n1})^2 1_{\{|\sqrt{n}\varepsilon_{n1}| > \eta\sqrt{n}\}}] \longrightarrow 0,$$

Comme

$$\mathbb{E}[(\sqrt{n}\varepsilon_{n1})^2] = n\mathbb{E}(\varepsilon_{n1}^2) = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj}\right) \longrightarrow \frac{M_2}{M_1^2}\sigma^2(\chi).$$

Preuve du lemme 4.3.2

On a :

$$C_n D_n - \mathbb{E}(C_n D_n) = [(C_n - 1)D_n - \mathbb{E}((C_n - 1)D_n)] + [D_n - \mathbb{E}(D_n)].$$

D'une manière similaire à la preuve du lemme 4.3.1, nous avons

$$\mathbb{E}|(C_n - 1)D_n - \mathbb{E}((C_n - 1)D_n)| \leq 2\mathbb{E}|(C_n - 1)D_n| \leq 2\sqrt{\mathbb{E}[(C_n - 1)^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(D_n)^2}$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(C_n - 1)^2] &= \text{Var}(C_n) = \frac{1}{n^2 \mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)} \cdot n \cdot \text{Var}(\beta_1 K_1) \\ &\leq \frac{1}{n^2 (o(h\phi_\chi(h)))^2} \cdot n \cdot \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1^2) \\ &= \frac{1}{n^2 o(h^2 \phi_\chi^2(h))} \cdot n \cdot O(h^2 \phi_\chi(h)) \\ &= o\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n^2) &= \frac{n\phi_\chi(h)\mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}^2(W_1 K_1)} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \beta_j K_j (Y_j - m(\chi)) \right]^2 \\ &= \frac{n\phi_\chi(h)o(h^2 \phi_\chi^2(h))}{(n-1)^2 O(h^4 \phi_\chi^4(h))} [n\mathbb{E}(\beta_1 K_1 (Y_1 - m(\chi)))^2 + n(n-1)\mathbb{E}^2(\beta_1 K_1 (Y_1 - m(\chi)))] \\ &= \frac{n}{(n-1)^2} o\left(\frac{1}{h^2 \phi_\chi(h)}\right) [nO(h^2 \phi_\chi(h)) + n(n-1)o(h^2 \phi_\chi^2(h))] \\ &= o(1) + o(n\phi_\chi(h)), \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}|(C_n - 1)D_n - \mathbb{E}((C_n - 1)D_n)| \leq 2\sqrt{\mathbb{E}[(C_n - 1)^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(D_n^2)} = o(1),$$

Ce qui implique $(C_n - 1)D_n - \mathbb{E}((C_n - 1)D_n) = o_p(1)$.

Donc, pour terminer la preuve du lemme 4.3.2, il suffit de montrer que

$$D_n - \mathbb{E}(D_n) = o_p(1).$$

Nous avons

$$\mathbb{E}[D_n - \mathbb{E}(D_n)]^2 = \text{Var}(D_n) = \frac{n\phi_\chi(h)\mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}^2(W_1 K_1)} \cdot n\text{Var}(\beta_1 K_1 (Y_1 - m(\chi))).$$

D'un côté, on a

$$\text{Var}(\beta_1 K_1 (Y_1 - m(\chi))) = \sigma^2(\chi) \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1^2) (1 + o(1)).$$

Et le lemme 4.2.1 implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_n - \mathbb{E}(D_n)]^2 &= \frac{n\phi_\chi(h) \mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}^2(W_1 K_1)} \cdot n\sigma^2(\chi) \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1^2) (1 + o(1)) \\ &= \frac{n\phi_\chi(h) o(h^2 \phi_\chi^2(h))}{(n-1)^2 h^4 \phi_\chi^4(h) N^2(1, 2) M_1^2 (1 + o(1))} \cdot n\sigma^2(\chi) O(h^2 \phi_\chi(h)) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Qui complète la démonstration du Lemme 4.3.2, alors le Théorème 4.3.1 est prouvé.

4.3.2 Preuve des lemmes techniques

Preuve du Lemme 4.2.1

(a) Pour $j = 1, 2$, l'hypothèse (H1) implique que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_1^j) &= \int_0^1 K^j(t) dP_{\mathcal{X}}^{|\delta(\mathcal{X}, \chi)|/h}(t) \\ &= \int_0^1 \left[K^j(1) - \int_t^1 (K^j(u))' du \right] dP_{\mathcal{X}}^{|\delta(\mathcal{X}, \chi)|/h}(t) \\ &= K^j(1) \phi_\chi(h) - \int_t^1 (K^j(u))' \phi_\chi(uh) du \\ &= \left[K^j(1) - \int_t^1 (K^j(u))' \Phi_\chi(u) du \right] \phi_\chi(h) + o(\phi_\chi(h)) = M_j \phi_\chi(h) + o(\phi_\chi(h)). \end{aligned}$$

(b) Pour tout $a > 0$, l'hypothèse (M4) implique que

$$\mathbb{E}(K_1^a \beta_1) \leq C \int_{B(\chi, h)} \beta(u, \chi) dP_{\mathcal{X}}(u)$$

Donc, en utilisant l'hypothèse (H7), nous obtenons

$$h\mathbb{E}(K_1^a \beta_1) = o\left(\int_{B(\chi, h)} \beta^2(u, \chi) dP_{\mathcal{X}}(u)\right) = o(h^2 \phi_\chi(h)),$$

Qui conduit à $\mathbb{E}(K_1^a \beta_1) = o(h\phi_\chi(h))$.

(C) Pour $a > 0$, $b = 2, 4$, et soit $\delta_1 = \delta(\mathcal{X}, \chi)$, donc on peut écrire

$$\mathbb{E}(K_1^a \beta_1^b) = \mathbb{E}(K_1^a \delta_1^b) + \mathbb{E}[K_1^a (\beta_1^b - \delta_1^b)]$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_1^a (\beta_1^b - \delta_1^b)] &= \mathbb{E} \left[K_1^a \mathbb{1}_{B(\chi, h)} (\beta_1 - \delta_1) \sum_{l=0}^{b-1} \beta_1^{b-1-l} \delta_1^l \right] \\ &\leq \sup_{u \in B(\chi, u)} |\beta(u, \chi) - \delta(u, \chi)| \sum_{l=0}^{b-1} \mathbb{E} \left[K_1^a \mathbb{1}_{B(\chi, h)} |\beta_1|^{b-1-l} |\delta_1|^l \right] \end{aligned}$$

Alors que l'hypothèse (M3) donne

$$\mathbb{1}_{B(\chi, h)} |\beta_1| \leq \mathbb{1}_{B(\chi, h)} C_2 |\delta_1|.$$

Et également, l'hypothèse (M3) implique que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_1^a (\beta_1^b - \delta_1^b)] &\leq bC_2 \sup_{u \in B(\chi, u)} |\beta(u, \chi) - \delta(u, \chi)| \mathbb{E}[K_1^a |\delta_1|^{b-1}] \\ &\leq bC_2 \sup_{u \in B(\chi, u)} |\beta(u, \chi) - \delta(u, \chi)| h^{b-1} \mathbb{E}[K_1^a] = o(h^b \phi_\chi(h)), \end{aligned}$$

qui permet d'écrire

$$\mathbb{E}(K_1^a \beta_1^b) = \mathbb{E}(K_1^a \delta_1^b) + o(h^b \phi_\chi(h)).$$

Concernant le terme $\mathbb{E}(K_1^a \delta_1^b)$ pour $b = 2, 4$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_1^a \delta_1^b) &= \mathbb{E}(K_1^a |\delta_1|^b) = h^b \int_0^1 t^b K^a(t) dP_{\mathcal{X}}^{|\delta(\mathcal{X}, \chi)|/h}(t) \\ &= h^b \int_0^1 \left[K^a(1) - \int_t^1 (u^b K^a(u))' du \right] dP_{\mathcal{X}}^{|\delta(\mathcal{X}, \chi)|/h}(t) \\ &= h^b \left[K^a(1) \phi_\chi(h) - \int_t^1 (u^b K^a(u))' \phi_\chi(uh) du \right] \\ &= h^b \phi_\chi(h) \left[K^a(1) - \int_t^1 (u^b K^a(u))' \Phi_\chi(u) du \right] + o(h^b \phi_\chi(h)) \\ &= N(a, b) h^b \phi_\chi(h) + o(h^b \phi_\chi(h)), \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(K_1^a \delta_1^b) = N(a, b) h^b \phi_\chi(h) + o(h^b \phi_\chi(h)).$$

(d) Les résultats précédents permettent d'obtenir la partie (d). Comme $W_1 K_1 = \sum_{i=1}^n w_{i1}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_1 K_1) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n w_{i1}\right) = (n-1)\mathbb{E}(w_{12}) \\ &= (n-1)\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1 K_2 - \beta_1 K_1 \beta_2 K_2) \\ &= (n-1)\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)\mathbb{E}(K_2) - \mathbb{E}(\beta_1 K_1)\mathbb{E}(\beta_2 K_2) \\ &= (n-1)N(1, 2)M_1 h^2 \phi_\chi^2(h)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Qui complète la preuve

Preuve de Lemme 4.2.2

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{m}_0(\chi)] &= \frac{1}{(n\mathbb{E}(W_1 K_1))^2} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n W_j K_j\right) = \frac{1}{(n\mathbb{E}(W_1 K_1))^2} \text{Var}\left(\sum_{i \neq j=1}^n w_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}(w_{12}))^2} (n(n-1)\mathbb{E}[w_{12}^2] + n(n-1)\mathbb{E}[w_{12}w_{21}] \\ &\quad + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{13}] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{23}] \\ &\quad + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{31}] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{32}] - n(n-1)(4n-6)(\mathbb{E}[w_{12}])^2) \end{aligned}$$

Puisque

$$\mathbb{E}[w_{12}^2] = O(h^4 \phi_\chi^2(h)), \mathbb{E}[w_{12}w_{13}] = \mathbb{E}(\beta_1^4 K_1^2)\mathbb{E}(K_2)\mathbb{E}(K_3)(1 + o(1)) = N(2, 4)M_1^2 h^4 \phi_\chi^3(h)(1 + o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{21}] = O(h^4 \phi_\chi^2(h)), \mathbb{E}[w_{12}w_{23}] = \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)\mathbb{E}(\beta_2^2 K_2^2)\mathbb{E}(K_3)(1 + o(1)) = N(1, 2)N(2, 2)M_1 h^4 \phi_\chi^3(h)(1 + o(1))$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{31}] = \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1^2)\mathbb{E}(K_2)\mathbb{E}(\beta_3^2 K_3)(1 + o(1)) = N(1, 2)N(2, 2)M_1 h^4 \phi_\chi^3(h)(1 + o(1))$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{32}] = \mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)\mathbb{E}(K_2^2)\mathbb{E}(\beta_3^2 K_3)(1 + o(1)) = N^2(1, 2)M_2 h^4 \phi_\chi^3(h)(1 + o(1))$$

Donc, nous avons

$$\text{Var}[\widehat{m}_0(\chi)] = \frac{1}{n\phi_\chi(h)} \left(\frac{N(2, 4)}{N^2(1, 2)} + \frac{2N(2, 2)}{N(1, 2)M_1} + \frac{M_2}{M_1^2} \right) (1 + o(1))$$

De même,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\widehat{m}_1(\chi), \widehat{m}_0(\chi)) &= \frac{1}{(n\mathbb{E}(W_1K_1))^2} \text{Cov}\left(\sum_{i \neq j=1}^n w_{ij}Y_j, \sum_{i' \neq j'=1}^n w_{i'j'}\right) \\
&= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}(w_{12}))^2} (n(n-1)\mathbb{E}[w_{12}^2Y_2] + n(n-1)\mathbb{E}[w_{12}w_{21}Y_2] \\
&\quad + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{13}Y_2] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{23}Y_2] \\
&\quad + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{31}Y_2] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{32}Y_2] \\
&\quad - n(n-1)(4n-6)(\mathbb{E}[w_{12}Y_2]\mathbb{E}[w_{12}]))
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}[w_{12}^2Y_2] = O(h^4\phi_\chi^2(h))$, $\mathbb{E}[w_{12}w_{21}Y_2] = O(h^4\phi_\chi^2(h))$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{13}Y_2] = \mathbb{E}(\beta_1^4K_1^2)\mathbb{E}(K_2Y_2)\mathbb{E}(K_3)(1+o(1)) = m(\chi)N(2,4)M_1^2h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{31}Y_2] = \mathbb{E}(\beta_1^2K_1^2)\mathbb{E}(K_2Y_2)\mathbb{E}(\beta_3^2K_3)(1+o(1)) = m(\chi)N(1,2)N(2,2)M_1h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{32}Y_2] = \mathbb{E}(\beta_1^2K_1)\mathbb{E}(K_2^2Y_2)\mathbb{E}(\beta_3^2K_3)(1+o(1)) = m(\chi)N^2(1,2)M_2h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{23}Y_2] = \mathbb{E}(\beta_1^2K_1)\mathbb{E}(\beta_2^2K_2Y_2)\mathbb{E}(K_3)(1+o(1)) = m(\chi)N(1,2)N(2,2)M_1h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

Alors

$$\text{Cov}(\widehat{m}_0(\chi), \widehat{m}_1(\chi)) = \frac{m(\chi)}{n\phi_\chi(h)} \left(\frac{N(2,4)}{N^2(1,2)} + \frac{2N(2,2)}{N(1,2)M_1} + \frac{M_2}{M_1^2}(1+o(1)) \right)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\widehat{m}_1(\chi)] &= \frac{1}{(n\mathbb{E}(W_1K_1))^2} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n W_jK_jY_j\right) = \frac{1}{(n\mathbb{E}(W_1K_1))^2} \left(\sum_{i \neq j=1}^n w_{ij}Y_j \right) \\
&= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}(w_{12}))^2} (n(n-1)\mathbb{E}[w_{12}^2Y_2^2] + n(n-1)\mathbb{E}[w_{12}w_{21}Y_2Y_1] \\
&\quad + (n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{13}Y_2Y_3] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{23}Y_2Y_3] \\
&\quad + (n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{31}Y_2Y_1] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[w_{12}w_{32}Y_2^2] - n(n-1)(4n-6)(\mathbb{E}[w_{12}Y_2])^2)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[w_{12}^2Y_2^2] = O(h^4\phi_\chi^2(h))$, $\mathbb{E}[w_{12}w_{21}Y_2Y_1] = O(h^4\phi_\chi^2(h))$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{13}Y_2Y_3] = \mathbb{E}(\beta_1^4K_1^2)\mathbb{E}(K_2Y_2Y_2)\mathbb{E}(K_3Y_3)(1+o(1)) = m^2(\chi)N(2,4)M_1^2h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{23}Y_2Y_3] = \mathbb{E}(\beta_1^2K_1)\mathbb{E}(\beta_2^2K_2^2Y_2)\mathbb{E}(K_3Y_3)(1+o(1)) = m^2(\chi)N(1,2)N(2,2)M_1h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{31}Y_2Y_1] = \mathbb{E}(\beta_1^2K_1^2Y_1)\mathbb{E}(K_2Y_2)\mathbb{E}(\beta_3^2K_3)(1+o(1)) = m^2(\chi)N(1,2)N(2,2)M_1h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1)),$$

$$\mathbb{E}[w_{12}w_{32}Y_2^2] = \mathbb{E}(\beta_1^2K_1Y_2^2)\mathbb{E}(\beta_3^2K_3)(1+o(1)) = m^2(\chi) + \sigma N^2(1,2)M_2h^4\phi_\chi^3(h)(1+o(1))$$

ensuite nous avons

$$\text{Var}[\widehat{m}_1(\chi)] = \frac{1}{n\phi_\chi(h)} \left(m^2(\chi) \left[\frac{N(2,4)}{N^2(1,2)} + \frac{2N(2,2)}{N(1,2)M_1} + \frac{M_2}{M_1^2} \right] + \sigma^2(\chi) \frac{M_2}{M_1^2} (1 + o(1)) \right)$$

Preuve de Lemme 4.2.3

Selon la définition, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{m}_0(\chi) &= \frac{1}{n\mathbb{E}(W_1K_1)} \sum_{j=1}^n W_j K_j \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}(W_1K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i \cdot \sum_{j=1}^n K_j - \frac{1}{n\mathbb{E}(W_1K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i K_i \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i K_i \\ &= \frac{n\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)\mathbb{E}(K_1)}{\mathbb{E}(W_1K_1)} \cdot \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i \cdot \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1)} \sum_{j=1}^n K_j \\ &\quad - \frac{n\mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}(W_1K_1)} \cdot \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1 K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i K_i \cdot \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1 K_1)} \sum_{j=1}^n \beta_j K_j \end{aligned}$$

Par suite, ce lemme est valide puisque

$$\begin{aligned} \frac{n\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)\mathbb{E}(K_1)}{\mathbb{E}(W_1K_1)} &\rightarrow 1, \quad \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1^2 K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 K_i \xrightarrow{p} 1, \quad \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1)} \sum_{j=1}^n K_j \xrightarrow{p} 1 \\ \frac{n\mathbb{E}^2(\beta_1 K_1)}{\mathbb{E}(W_1K_1)} &= o(1), \quad \frac{1}{n\mathbb{E}(\beta_1 K_1)} \sum_{i=1}^n \beta_i K_i \xrightarrow{p} 1 \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1. *On peut aussi obtenir le lemme simplement par le fait*

$$\text{Var}[\widehat{m}_0(\chi)] = O\left(\frac{1}{n\phi_\chi(h)}\right) = o(1)$$

Chapitre 5

Application et conclusion

5.1 Application

Dans cette section, une étude de simulation est présentée pour illustrer la normalité asymptotique de notre estimateur local linéaire. On Simule $n = 200$ variables fonctionnelles (voir la figure 5.1) par

$$\mathcal{X}_i(t) = \sin(W_i - \pi(2t - 1)) \text{ pour } t \in [0, 1] \text{ et } i = 1, 2, \dots, 200,$$

où les variables aléatoires W_i sont i.i.d de loi uniforme sur l'intervalle $[0, \pi/4]$. Les courbes sont discrétisées Sur la même grille composée de 100 valeurs équidistantes dans $[0, 1]$.

La réponse réelle est générée par :

$$Y_i = m(\mathcal{X}_i) + \varepsilon_i$$

où ε_i suit la loi normale $N(0, 1)$ et

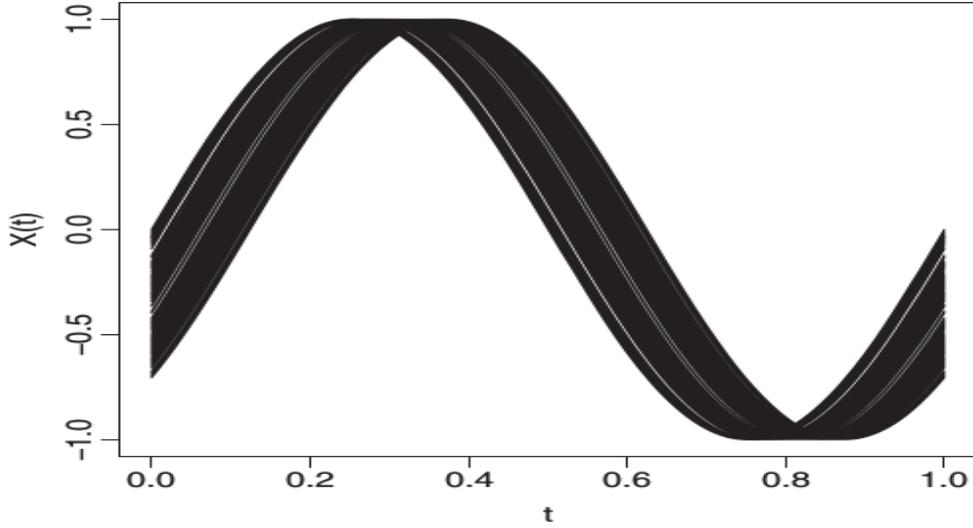
$$m(\mathcal{X}_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^{3/4} (\mathcal{X}'_i(t))^2 dt = 2\pi \int_{1/2}^{3/4} \cos^2(W_i - \pi(2t - 1)) dt.$$

Nous considérons le noyau quadratique

$$K(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)1_{[0,1]} \text{ et } K(1) > 0.$$

Nous prenons

$$\beta(\chi, \chi') = \int_0^1 \theta(t)(\chi(t) - \chi'(t)) dt,$$

FIGURE 5.1 – les Courbes simulées ($n = 200$)

Avec θ est la fonction propre de l'opérateur de covariance empirique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathcal{X}_i - \bar{\mathcal{X}})$ Correspondante à la plus grande valeur propre, avec $\bar{\mathcal{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i$.

Pour cette simulation, nous choisissons

$$\delta(\chi, \chi') = \sqrt{\int_0^1 (\chi(t) - \chi'(t))^2 dt}.$$

Nous sélectionnons le paramètre de lissage h par une la méthode de validation croisée.

Afin d'éviter toute difficulté dans l'estimation du terme du biais, nous pouvons supposer l'hypothèse (M6), et nous estimons les paramètres M_1 , M_2 et σ^2 par les estimateurs suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1(\chi) &= \frac{1}{n\widehat{\phi}_\chi(h)} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{|\delta(\mathcal{X}_i, \chi)|}{h}\right); \\ \widehat{M}_2(\chi) &= \frac{1}{n\widehat{\phi}_\chi(h)} \sum_{i=1}^n K^2\left(\frac{|\delta(\mathcal{X}_i, \chi)|}{h}\right); \\ \widehat{\sigma}^2(\chi) &= \frac{\sum_{i=1}^n K(|\delta(\mathcal{X}_i, \chi)|/h) Y_i^2}{\sum_{i=1}^n K(|\delta(\mathcal{X}_i, \chi)|/h)} - (\widehat{m}_{NW}(\chi))^2. \end{aligned}$$

Puis, d'après le résultat de la normalité asymptotique (4.6), nous avons

$$\Gamma_n = \frac{\widehat{M}_1(\chi)}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\chi)\widehat{M}_2(\chi)}} \sqrt{n\widehat{\phi}_\chi(h)(\widehat{m}(\chi) - m(\chi))} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1).$$

Discussion

Puisque nous simulons 200 courbes, nous avons 200 générations de Γ_n . Pour vérifier le résultat théorique, nous traçons l'histogramme et le Q-Q plot normal des 200 générations de Γ_n dans la Figure 5.2

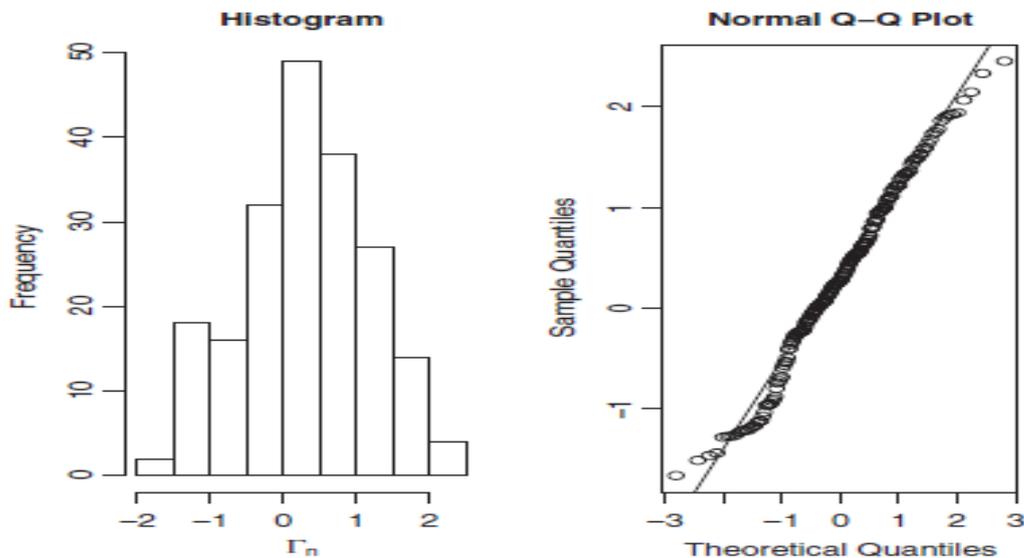


FIGURE 5.2 – Histogramme et Q-Q plot Γ_n

Dans la figure à gauche, l'histogramme de Γ_n est presque symétrique autour du point zéro et a bien une forme similaire à l'histogramme de la loi normale. Le graphe à droite est le plot Q-Q normal de Γ_n , Qui est presque une ligne. Ainsi, les résultats de la simulation indiquent que Γ_n obéit à une loi normale standard Lorsque n est grand, ce qui vérifi sa distribution limite.

5.2 Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'estimation non-paramétrique, par la méthode locale linéaire, et nous avons fixé comme objectif la fonction de régression, lorsque la variable explicative est fonctionnelle et la réponse est réelle.

Les principaux résultats que nous avons établi sont les suivants : Après avoir fait une description de la méthode des polynômes locaux, nous avons construit un estimateur local linéaire de la régression, et nous avons établi sa convergence presque-complète en précisant sa vitesse de convergence, lorsque les observations sont indépendantes identiquement distribuées. Ensuite, nous avons établi sa convergence en moyenne quadratique en précisant les expressions implicites des termes de biais et de la variance de l'estimateur construit. puis, nous avons établi la normalité asymptotique de cet estimateur. La performance de cette méthode est illustrée par une étude de simulation.

Bibliographie

- [1] Baïllo, A. and Grané, A. (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response, *J. of Multivariate Anal.*, **100**, 102-111.
- [2] Barrientos-Marin, J., Ferraty, F. and Vieu, P. (2010). Locally Modelled Regression and Functional Data. *J. of Nonparametric Stat.*, **22**, 617-632.
- [3] Berlinet, A., Elamine, A. and Mas, A. (2011). Local linear regression for functional data. *Inst. Statist. Math.*, **63**, 1047-1075.
- [4] Boj, E., Delicado, P. and Fortiana, J. (2010). Distance-based local linear regression for functional predictors. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 429-437.
- [5] Chouaf, A. and Laksaci, A. (2011). On the functional local linear estimate for spatial regression. *Statistics and Risk Modeling*, **29**, 189-214.
- [6] Cleveland, W. S., et Loader, C. L. (1996). Smoothing by local regression : Principles and methods. In W. Härdle et M. G. Schimek(Eds.), *Statistical Theory and Computational Aspects of Smoothing* (p. 10-49). New York : Springer.
- [7] Cleveland W. S. (1979). Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 829-836.
- [8] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application.
- [9] El Methni, M. and Rachdi, M. (2010) Local weighted average estimation of the regression operator for functional data, *Commun. in Statist.-Theory and Meth.*, **40**. 3141-3153.
- [10] Fan, J., Gijbels, I.(1996). *Local Polynomial Modelling and its Applications*. London, Chapman and Hall.
- [11] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis theory and practice*. Springer-Verlag.
- [12] Ferraty, F., MAS, A. and Vieu, P. (2007). Nonparametric regression on functional data : inference and practical aspects. *Aust. N. Z. J. Stat.*, **49**, 267-826.

- [13] Lejeune, M. (1985). Estimation non-parametrique par noyaux : regression polynomiale mobile. *Revue de Statist. Appliq.*, **33**, 43-68.
- [14] Loader, C. L. (1999). Local Regression and Likelihood. New York, NY : Springer-Verlag.
- [15] Masry, E. and Fan, J. (1997). Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 165-179.
- [16] Molenaar, P. and Boomsma, D. (1987). The genetic analysis of repeated measures : The Karhunen-Loeve expansion. *Behavior Genetics*, **17**, 229-242.
- [17] Müller, H.G. (1987). Weighted local regression and kernel methods for nonparametric curve fitting. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 231-238.
- [18] Obhukov, A. (1960). The Statistically Orthogonal Expansion of Empirical Functions. *Bull. Acad. Sci. USSR, Geophys. Ser.*, **3**, 288-291.
- [19] Opsomer, J.-D. (1995). Optimal bandwidths election for fitting an additive model by local polynomial regression. PhD Dissertation, Cornell University, Ithaca, New York.
- [20] Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (1997). Functional Data Analysis, *Springer Series in Statistics*. New-York.
- [21] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. (2005). Functional data analysis, Second Ed. *Springer*, New-York.
- [22] A. W. van der Vaart. (2000). Asymptotic Statistics. Cambridge University Press. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*.
- [23] Wand, M., and Jones, C. (1995). *Kernel Smoothing, Monographs on Statistics and Applied Probability* , (Vol. **60**) London : Chapman & Hall.
- [24] Watson, G.S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya A*, **26**, 359-372.
- [25] Zhou, Z. and Lin, Z.-Y. (2016). Asymptotic normality of locally modelled regression estimator for functional data.