République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Analyse de Floquet et théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger périodiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, géométié et applications

par

Abou **K**hater **C**haabane [1]

Sous la direction de **Dr G. D**jellouli

Soutenue le 25 mai 2017 devant le jury composé de

A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
H. Abbes	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : chaabaneaboukhater@gmail.com

Remerciments

Ce modeste travail ne pouvait avoir lieu sans l'aide et de gens qui ont été présents durant toute la période de mes études et même avant. Leur soutient m'était d'une importance capitale

je ne me prive pas de plaisir en citant les efforts de mon encadreur le docteur **G. Djellouli** qui m'a orienté et guidé dans mon chemin par ses fameux conseils et ses intéressantes interventions

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand

honneur d'y participer

Je remercie sincèrement monsieur **A. Azzouz**

pour l'honneur qui il me fait en présidant le jury

Je remercie vivement monsieur **B. Saadli** pour la confiance dont il me fait preuve en faisant

parties de ce jury

je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur **H. Abbes**

leur participation à mon jury. je suis honoré de leur présence.

Merci à mes parents, mes frères et sœurs ; mes amis qui mon épaulés dans les hauts et les bas, qui ont été patients avec moi et qui ont su implantés en moi la force , l'assurance et la conviction. J'espère les honorer et de ne jamais les décevoir

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
A mo père, le chemin à suivre dans cette vie que j'espère mpn Dieu l'accueille dans son vaste paradis.
A ma mère pour son soutien
A mes soeurs A mes frères, son épouse pour complité ce travail.
En leur témongnant lon amour et ma profonde admiration.
Que Dien vous protège et vous prète bonne santé et longur vie.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions la théorie de Floquet sur un espace de Banach. Nous sommes préoccupés par l'équation différentielle linéaire de la forme :

$$y'(t) = A(t)y(t), \tag{1.1}$$

où $t \in \mathbb{R},\ y(t)$ est une fonction à valeurs dans un espace de Banach X et $A(t)$ sont des opérateurs linéaires et bornés sur X.
Si le système est périodique, c'est-à-dire

$$A(t+\omega) = A(t) \tag{1.2}$$

de période ω, il s'appelle un système Floquet. Nous étudierons l'existence et l'unicité de la solution périodique, ainsi que la stabilité d'un système Floquet.
Cette mémoire sera présentée dans cinq chapitres principaux.
Ainsi, nous présentons aux lecteurs les espaces de Banach au chapitre trois et les opérateurs linéaires sur les espaces de Banach
Le premier chapitre est consacré d'une manière générale sur quelques notions de la théorie spéctrale et les équations différentielle
dans le deuxième chapitre nous examinons le système d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}^n$:

$$y' = A(t)y(t) \ + f(t), \tag{1.3}$$

où $A(t)$ est une fonction matricielle $n \times n$, $y(t)$ sont des vecteurs, et $f(t)$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Nous établissons la forme générale de toutes les solutions en utilisant la matrice fondamentale, consistant en n solutions indépendantes. En outre, nous pouvons trouver la stabilité des solutions directement en utilisant les valeurs propres de A.
Dans le troisième chapitre, nous étudions le système Floquet sur $\mathbb{R}^n$, où

$$A(t+\omega) = A(t). \tag{1.4}$$

Nous établissons le théorème de Floquet, dans lequel nous montrons que le système Floquet est étroitement lié à un système linéaire avec des coefficients constants, de sorte que les propriétés de ces systèmes peuvent être appliquées en particulier, nous pouvons répondre aux questions sur la stabilité du système Floquet.
Ensuite nous généralisons la théorie Floquet à un système linéaire sur les espaces de Banach, nous étudions les propriétés asymptotiques des solutions du système :

$$y'(t) = A(t)y(t), \tag{1.5}$$

où $y(t)$ est une fonction avec des valeurs dans un espace de Banach X et $A(t)$ sont des opérateurs linéaires et bornés sur X avec

$$A(t+\omega) = A(t). \tag{1.6}$$

Pour ce système, on peut montrer que la famille d'évolution $U(t,s)$ représentant les solutions périodique, c'est-à-dire

$$U(t+\omega, s+\omega) = U(t,s). \tag{1.7}$$

Ensuite, nous étudions la monodrome du système $V = U(\omega, 0)$. Nous soulignons que l'ensemble de spectres de V détermine la stabilité du système Floquet. De plus, nous montrons que l'existence et l'unicité de la solution périodique de l'équation non homogène dans un système Floquet est équivalente au fait que 1 appartient à l'ensemble résolvant de V.
Dans le quatirème chapitre et le dernier nous prouvons le théoréme principal concernant le lien entre la théorie de floquet et le spectre associé a l'opérateur différentiel de schodinger L sur $H^{2,2}(\mathbb{R})$

Chapitre 2

Eléments de la théorie spectrale des opérateurs et équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}^n$

2.1 Eléments de la théorie spectrale

Dans ce chapitre, nous étudierons un opérateur différentiel associé à l'équation (0.1). Mais d'abord, nous donnons diverses définitions de sous-ensembles du spectre d'un opérateur linéaire fermé densément défini dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ séparable

Définition 2.1.1. *soit $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ un opérateur linéaire fermé densément défini dans un espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{H}$.*
(i) L'ensemble de la résolvant $\rho(A)$ de A est défini par

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} | (A - zI)|_{D(A)} \; est \; injectif \; et \; (A - zI)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

De plus, $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ s'appel le spectre de A.
(ii) L'ensemble

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \; il \; existe \; un \; 0 \neq \psi \in \mathcal{D}(A), \; A\psi = \lambda\psi\}$$

s'appel le spectre ponctuel de A.
(iii) L'ensemble $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (A-\lambda I) : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ *est injectif et* $\operatorname{Im}(A-\lambda I) \subsetneqq \mathcal{H},\ \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)} = \mathcal{H}\}$ *s'appel le spectre continu de A. L'ensemble*

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \backslash (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$$

s'appel le spectre résiduel de A.
L'ensemble

$$\sigma_{ap}(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} |\ il\ exist\ \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)\ \ i.e \|f_n\| = 1, n \in \mathbb{N}, \|(A-\lambda I) f_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \right\}$$

s'appelle le spectre de point approximatif de A

Théorème 2.1.1. *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H},\ \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ *un opérateur linéaire fermé densément défini dans un espace complexe de Hilbert séparable* $\mathcal{H}$*. Alors*
i) $\rho(A)$ *est ouvert, et* $\sigma = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ *Est fermé en* $\mathbb{C}$
ii) Les relations suivantes sont valables :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (A-\lambda I) : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H} \text{ est injective, } \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)} \subsetneqq \mathcal{H}\},$$

$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A),$
$\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) = \sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \sigma_c(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset.$
iii) si A est normal (i.e., $A^*A = AA^*$*), ainsi* $\sigma_r(A) = \emptyset$*.*
iv) $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \sigma_{ap}(A) \subseteq \sigma(A)$*.*
v) $\sigma_r(A) \subseteq [\sigma_p(A^*)]^{cc} \subseteq \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$*.*
(Ici $E^{cc} = \{\overline{z} \in \mathbb{C} |\ z \in E\}$*.)*

Preuve 2.1.1. *i). Soit* $R(z) = (A - zI)^{-1}$ *pour* $z \in \rho(A)$*. Supposons que* $z_0 \in \rho(A)$ *et* $|z - z_0| < \frac{1}{\|R(z_0)\|}$*. ainsi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n R(z_0)^{n+1}$$

Converge vers un opérateur borné. De plus, on obtient

$$\begin{aligned} (A - zI)R(z_0)^{n+1} &= [A - z_0 I\ + (z_0 - z)I]\ (A - z_0 I)^{-1} R(z_0)^n \\ &= R(z_0)^n - (z - z_0) R(z_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(A-zI)\ \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n R(z_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n (A-zI)R(z_0)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n [R(z_0)^n - (z-z_0)R(z_0)^{n+1}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n R(z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{n+1} R(z_0)^{n+1} = I.$$

De même, on peut montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n R(z_0)^{n+1}(A-zI) = I$. *Ainsi,*

$$(A-zI)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n R(z_0)^{n+1},$$

Et en particulier, $z \in \rho(A)$. *Donc* $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ *est un ouvert, et donc* $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ *est fermé.*

iii) Supposons que A soit normal. alors $Ker(A-zI) = Ker(A^* - \overline{z}I)$ *donc*

$$\begin{aligned} ((A-zI)f,\ (A-zI)f) &= ((A^*-\overline{z}I)(A-zI)f,\ f) \\ &= ((A-zI)(A^*-\overline{z}I)f,\ f) \\ &= ((A^*-\overline{z}I)f,\ (A^*-\overline{z}I)f). \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que si $A - zI$ *est injectif, puis* $(A-zI)\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. *Mais*

$$\overline{(A-zI)\mathcal{D}(A)}^{\perp} = Ker(A^*-\overline{z}I) = Ker(A-zI) = \{0\}$$

Cela prouve(iii).

v) Ceci est une conséquence du fait que $(A-zI)$ *a un inverse continu si et seulement si il est injectif et son image est fermée. Donc* $(A-zI)$ *n'a pas d'inverse continu si et seulement si ce n'est pas injectif ou son image n'est pas fermée.*

iv). Supposer que $z \in \sigma_r(A)$. *ainsi* $\overline{(A-zI)\mathcal{D}(A)} \subsetneqq \mathcal{H}$, *et donc il existe*

$$g_0(\neq 0) \in [(A-zI)\mathcal{D}(A)]^{\perp}$$

alors $((A-zI)f,\ g_0) = 0$ *pour tout* $f \in \mathcal{D}(A)$. *donc* $|(Af,\ g_0)| \leq |z|\|g_0\|\|f\|$ *pour tout* $f \in \mathcal{D}(A)$, *nous voyons que* $g_0 \in \mathcal{D}(A^*)$, *et* $(f,\ (A^*-\overline{z}I)g_0) = 0$ *puor tout* $f \in \mathcal{D}(A)$. *Puisque* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$, *nous avons* $(A^*-\overline{z}I)g_0 = 0$, *et donc* $\overline{z} \in \sigma_p(A^*)$.

Ensuite supposons que $\overline{z} \in \sigma_p(A^*)$. *Ensuite, il existe* $g_0(\neq 0) \in \mathcal{D}(A^*)$ *tel que* $A^* g_0 = \overline{z} g_0$. *Donc, pour tous* $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$0 = (f,\ (A^* - \overline{z}I)g_0) = ((A - zI)f,\ g_0).$$

Ainsi $g_0 \notin (A - zI)\mathcal{D}(A)$, *et* $z \in \sigma(A)\backslash\sigma_c(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$.

2.2 Systèmes linéaires d'équations différentielles

Considérons le système de n équations différentielles linéaires de n variables :

$$\begin{aligned}
y_1' &= \alpha_{11}(t)y_1 + \alpha_{12}(t)y_2 + \cdots + \alpha_{1n}(t)y_n + f_1(t)\\
y_2' &= \alpha_{21}(t)y_1 + \alpha_{22}(t)y_2 + \cdots + \alpha_{2n}(t)y_n + f_2(t)\\
&\;\;....\\
y_n' &= \alpha_{n1}(t)y_1 + \alpha_{n2}(t)y_2 + \cdots + \alpha_{nn}(t)y_n + f_n(t)
\end{aligned}$$

Ce système peut être écrit comme équation différentielle vectorielle équivalente dans R^n,

$$y' = A(t)y + f(t)$$

où

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .... \\ y_n \end{pmatrix},\quad y' := \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ ..... \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & . & . & . & a_{1n}(t) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n1}(t) & . & . & . & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\quad f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Si la condition initiale est donnée par $y(s) = y_0$, alors nous avons un problème de valeur initiale.

2.2.1 Existence et unicité

Tout d'abord, nous aimerions donner un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de la valeur initiale. Le lecteur peut "voir la preuve de ce théorème pour un cas général dans le $théorèmeV.50$.

Théorème 2.2.1. *Supposons que la matrice* $A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *et la fonction vectorielle* $f(t)$ *sont continues pour* $t \geq 0$, *alors le problème de valeurs initiales :*

$$(IVP)\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

a une solution unique. Nous considérons d'abord l'équation homogène sur $\mathbb{R}^n$ *:*

$$y'(t) = A(t)y(t). \tag{2.2}$$

Nous allons commencer à travailler sur l'équation différentielle homogène (2.2) avec le théorème suivant :

Théorème 2.2.2. *.(Voir [4], Théorème* 2.11*) L'équation différentielle linéaire*(2.2) *a (au plus)* n *solutions linéairement indépendante, et si* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *sont* n *solutions linéairement indépendantes, alors*

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),$$

où $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ *sont des constantes, est une slution générale*
Nous résolvent d'abord l'équation différentielle autonome (2.2), *lorsque* $A(t) = A$ *est indépendant de* t.

Théorème 2.2.3. *Si* $(\lambda_0,\ x_0)$ *est une paire propre de la matrice* A, *alors*

$$y(t) = e^{\lambda_0 t}x_0 \tag{2.3}$$

définit une solution de

$$y'(t) = Ay(t) \tag{2.4}$$

dans $\mathbb{R}$

Preuve 2.2.1. *Soit*

$$y(t) = e^{\lambda_0 t} x_0 \tag{2.5}$$

alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda_0 e^{\lambda_0 t} x_0 = e^{\lambda_0 t} \lambda_0 x_0 \\ &= e^{\lambda_0 t} A x_0 = A e^{\lambda_0 t x_0} = A y(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour $t \in R$.

Pour résoudre l'équation différentielle non autonome (2.2) (où $A(t)$ varie), nous identifions l'équation différentielle de la matrice :

$$X'(t) = A(t)X(t); \qquad (I.4) \tag{2.7}$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & . & . & . & x_{1n}(t) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ x_{n1}(t) & . & . & . & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Le théorème suivant donne une relation entre l'équation différentielle vectorielle (2.2) et l'équation différentielle matricielle (2.7).

Théorème 2.2.4. *Supposons que la fonction matricielle* $A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *est continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et supposent que* ϕ *est défini par*

$$\phi(t) = (\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ .\ .\ .\ \phi_n(t))$$

est une fonction matricielle $n \times n$. *Alors* $\phi(t)$ *est une solution de l'équation différentielle de matrice* (2.7) *sur* I *si chaque colonne* ϕ_i *est une solution de l'équation différentielle vectorielle* (2.2) *sur* I. *de plus si* ϕ *est une solution de l'équation différentielle matricielle* (2.7) *alors pour tout vecteur constant* $c \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$$y(t) = \phi(t)c$$

est une solution de l'équation différentielle vectorielle (2.2).

Preuve 2.2.2. *Definissons*

$$\phi(t) := (\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ \ldots\ \phi_n(t))$$

et supposons que $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$ *sont la solution de* (2.2). *alors* ϕ *est une fonction matricielle continuement différentiable sur* I *et*

$$\phi'(t) = (\ \phi'_1(t),\ \phi'_2(t)\cdots\phi'_n(t))$$

$$= [A(t)\phi_1(t),\ A(t)\phi_2(t)\cdots A(t)\phi_n(t)]$$

$$= A(t)[\phi_1(t),\ \phi_2(t)\cdots\phi_n(t)]$$

$$= A(t)\phi(t),$$

pour $t \in I$. *Ainsi,* ϕ *est une solution de l'équation différentielle matricielle* (2.7) *sur* I.
Maintenant, soit

$$y(t) := \phi(t)c, \qquad \text{pour } t \in I,$$

où c *est un vecteur constant* $n \times 1$ *et* ϕ *est une solution de l'équation différentielle matricielle* (2.7). *alors*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \phi'(t)c \\ &= A(t)\phi(t)c \\ &= A(t)y(t) \end{aligned}$$

pour $t \in I$.

Du théorème ci-dessus, nous avons un résultat direct :

Corollaire 2.2.1. *Soit* $A(t)$ *une fonction de matrice continue sur un intervalle* I. *Alors, le problème de la valeur initiale*

$$(IVP)\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ *et* X_0 *est une matrice constante* $n \times n$, *a une solution unique* X *qui est une solution sur l'intervalle entier* I.

Le théorème suivant présente la relation entre les déterminants et la solution d'une équation différentielle

Théorème 2.2.5. *(Théorème de Liouville [4], Théorème 2.23) Supposons qu'il y ait n solutions $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$ de l'équation (2.2) sur I et ϕ est la fonction matricielle de colonnes $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$. Alors, si $t_0 \in I$,*

$$\det \phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]ds} \det \phi(t_0)$$

où

$$tr[A(t)] = \alpha_{11}(t) + \alpha_{22}(t) + \cdots + \alpha_{nn}(t)$$

et $t \in I$.

Du théorème ci-dessus, nous voyons que $\det \phi(t) = 0$ pour tous $t \in I$ si et seulement si $\det \phi(t_0) = 0$. Par conséquent, nous pouvons conclure le statut des déterminants d'une solution de l'équation matricielle comme suit :

Corollaire 2.2.2. *Supposons que ϕ soit la fonction matricielle à les colonnes $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$ et supposons que $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$ sont n solutions de l'équation (2.2).Alors*
(a) Les solutions $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$ dépend linéairement de I si $\det \phi(t) = 0$ pour tout $t \in I$
(b) Les solutions $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n$ sont linéairement indépendantes sur I si $\det \phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Puisque chaque équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}^n$ a n solutions indépendantes, nous souhaitons les appeler «*fondamental*» comme dans la définition suivante.

2.2.2 Matrice fondamentale

Définition 2.2.1. *(Matrice fondamentale) Si une fonction matricielle $n \times n$, ϕ est une solution de l'équation matricielle (2.7) sur I et $\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \cdots,\ \phi_n(t)$ sont n linéarement indépendamment sur I afin que $\det \phi(t) \neq 0$, alors*

$$\phi(t) := \ [\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ \ldots\ \phi_n(t)]$$

est appelée matrice fondamentale.

Exemple 2.2.1. *Trouvez la matrice fondamentale ϕ pour*

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y. \tag{2.9}$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

et les paires propres sont

$$\lambda_1 = -3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda_2 = 4, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteurs fonctions ϕ_1, ϕ_2 défini par

$$\phi_1 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \phi_1 = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ sont la solution de (2.9). Il résulte du théorème (2.2.4) que la matrice de fonction ϕ défini par

$$\phi(t) := \ [\phi_1(t),\ \phi_2(t)] = \begin{pmatrix} 3e^{-3t} & e^{4t} \\ -e^{-3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix},$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ est une solution matricielle de l'équation matricielle correspondant à (2.7). Donc

$$\det \phi(t) = \begin{vmatrix} 3e^{-3t} & e^{4t} \\ -e^{-3t} & 2e^{4t} \end{vmatrix} = 7e^{t} \neq 0$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ est une matrice fondamentale de (2.9) sur $\mathbb{R}$. Par le théorème (2.2.4) , la solution générale y de (2.9) est donnée par

$$y(t) = \phi(t)C = \begin{pmatrix} 3e^{-3t} & e^{4t} \\ -e^{-3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} c,$$

pour $t \in \mathbb{R}$, où c est un vecteur constant arbitraire 2×1.

Théorème 2.2.6. *Si ϕ est une matrice fondamentale pour* (2.7)*, alors $\psi = \phi \cdot C$, où C est une matrice constante arbitraire non singulière, est une matrice fondamentale générale pour* (2.7)*.*

Preuve 2.2.3. *Supposons que ϕ est une matrice fondamentale pour* (2.7) *et soit*

$$\psi = \phi \cdot C$$

où C est une matrice constante arbitraire non singulière.alors nous avons

$$\begin{aligned} \psi' &= \phi'(t) \cdot C \\ &= A(t)\phi(t)C \\ &= A(t)\psi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $\psi = \phi \cdot C$ est une solution de matrice pour (2.7)*. De plus,*

$$\begin{aligned} \det[\psi(t)] &= \det[\phi(t)C] \\ &= \det[\phi(t)]\det[C] \neq 0, \end{aligned}$$

Pour $t \in I$. Par conséquent, ψ est une matrice fondamentale. En outre, pour montrer que toute matrice fondamentale ψ est sous la forme

$$\psi(t) = \phi(t)C_0,$$

supposons que ψ est une matrice fondamentale arbitraire mais fixe de (2.7)*. Soit $t_0 \in I$ et soit*

$$C_0 := \phi^{-1}(t_0)\psi(t_0).$$

Alors, C_0 est une matrice constante non singulière et

$$\psi(t_0) = \phi(t_0)C_0.$$

Par conséquent, les deux $\psi(t)$ et $\phi(t) \cdot C_0$ sont des solutions de l'IVP

$$(IVP) \quad \begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(t_0) = \psi(t_0). \end{cases}$$

Par le Corollaire (2.2.1)*, nous avons*

$$\psi(t) = \phi(t)C_0,$$

Pour $t \in I$.

Donc e^{At} est une matrice fondamentale. Dans le théorème suivant, nous donnons certaines propriétés de la fonctions exponentielle matricielle

Théorème 2.2.7. *([4], théorème 2.39) Soient A et B $n \times n$ matrices Maintenant, nous essayons de trouver la matrice fondamentale pour l'équation différentielle*(2.7)*.*

Nous considérons d'abord le cas autonome, où $A(t) = A$.

Définition 2.2.2. *Supposons que A soit une matrice constante $n \times n$. Alors, la matrice de fonction exponentielle définie par e^{At} est la solution de*

$$(IVP)\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = Id, \end{cases} \tag{2.10}$$

où Id est la matrice identité $n \times n$.
Par le théorème de Liouville,

$$\det[e^{At}] = e^{\int_0^t tr[A(s)]ds} \det[e^{A \cdot 0}] = e^{tr[A]t} \neq 0.$$

constantes. alors
i) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, *pour* $t \in \mathbb{R}$.
ii) $\det[e^{At}] \neq 0$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* e^{At} *est une matrice fondamentale pour* (2.4) ; .
iii) $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$, *pour* $t,\ s \in \mathbb{R}$.
iv) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$,, *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et, en particulier,*

$$(e^{A})^{-1} = e^{-A},$$

v) si $AB = BA$, *alors* $e^{At}B = Be^{At}$ *pour* $t \in R$ *et, en particulier,*

$$e^{A}B = Be^{A};$$

vi) Si $AB = BA$, *alors*

$$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t} \qquad \textit{pour} \qquad t \in \mathbb{R}$$

et, en particulier,

$$e^{A}e^{B} = e^{(A+B)}$$

vii) $e^{At} = I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k\frac{t^k}{k!} + \cdots$,, *pour* $t \in R$;
viii) Si P *est une matrice non structurale, alors*

$$e^{PBP^{-1}} = Pe^B P^{-1}$$

Nous sommes maintenant en mesure de présenter explicitement la solution d'un problème de valeur initiale.

Théorème 2.2.8. *Les déclarations suivantes tiennent.*
i) le problème de la valeur initiale

$$(IVP) \begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

à la solution :

$$y'(t) = e^{At}y_0.$$

ii) le problème non homogène

$$(IVP) \begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

à une solution

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(s)f(s)ds$$

iii) Si ϕ *est une matrice fondamentale pour* (2.7), *alors la solution du* (IVP)

$$(IVP) \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.13}$$

est donné par

$$y(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)f(s)ds$$

Tout d'abord, nous avons besoin du lemme suivant, qui sera utilisé dans la preuve.

Lemme 2.2.1. *([4], théorème 5.21) Supposons que la fonction à valeur vectorielle $f(t,s)$ et la dérivée partielle $f_t(t,s)$ sont continues sur un intervalle $I \times I$ et $\alpha \in I$. alors*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,\ s)ds = \int_a^t f_t(t,\ s)ds + f(t,\ t).$$

Preuve 2.2.4. *(Du théorème (2.2.5))*
i) Soit $y(t) = e^{At}y_0$ alors

$$y^{'}(t) = Ae^{At}y_0 = \ Ay(t)$$

Aussi,

$$y(0) \ = \ e^{A(0)}y_0 = \ y_0.$$

Ainsi,

$$y(t) = e^{At}y_0$$

est la solution du problème de la valeur initiale (2.11).
ii) Soit

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(s)f(s)ds.$$

alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ae^{At}y_0 + \int_0^t Ae^{A(t-s)}(s)f(s)d(s) + e^{A(t-t)}f(t) \\ &= \ Ae^{At}y_0 + \int_0^t Ae^{A(t-s)}(s)f(s)d(s) + f(t) \\ &= \ A[e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(s)f(s)d(s)] + f(t) \\ &= \ Ay(t) + f(t). \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le Lemma (2.2.1) avec

$$f(t,\ s) = e^{A(t-s)}f(s).$$

En outre, il n'est pas trop difficile de voir que $y(0) = y_0$. Par conséquent, $y(t)$ est la solution de (2.13) *iii) Soit ϕ une matrice fondamentale et soit*

$$y(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)f(s)ds$$

alors

$$\begin{aligned} y^{'}(t) = &\ A(t)\phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + A(t)\phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)f(s)ds + f(t) \\ = &\ A(t)[\phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)f(s)ds] + f(t) \\ = &\ A(t)y(t) + f(t). \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \phi(t_0)\phi^{-1}(t_0)y_0 \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $y(t)$ est la solution de (2.13)*.*

Dans le cas général non autonome, où $A(t)$ varie, il n'est pas facile de trouver une matrice fondamentale. Le prochain théorème montre comment une matrice fondamentale peut être trouvée lorsque les matrices $A(t)$ sont commutatives.

Théorème 2.2.9. *([4], théorème 2.42) Supposons que $A(t)$ soit une matrice de fonctions continue $n \times n$ sur un intervalle I. Si*

$$A(t)A(s) = A(s)A(t)$$

Pour tout $t, s \in I$, alors

$$\phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$$

2.3 Stabilité des solutions d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}^n$

Nous étudions maintenant le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles autonomes et homogènes dans $\mathbb{R}^n$ quand $t \to \infty$.
Nous pouvons maintenant donner des résultats sur la stabilité des solutions d'équations différentielles autonomes et homogènes, dans lesquelles l'équivalence des parties a et partie e. Est le célèbre théorème de Lyapunov.

Théorème 2.3.1. *Considérons le système*

$$y'(t) = Ay(t)$$

alors, les énoncés suivants sont équivalents :
(a) *Le système est asymptotiquement stable, c'est-à-dire*

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}y_0 = 0$$

pour chaque vecteur $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *;*
(b) $\lim_{t\to\infty} \|e^{At}\| = 0$

(c) *Il existe des nombres positifs* M *et* ω *tels que*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t}$$

Pour tout $t > 0$*.*
(d) *Il existe un nombre* $t_0 > 0$ *tel que* $\|e^{At_0}\| < 1$*.*
(e) $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ *pour chaque valeur propre* λ *de* A*.*

Preuve 2.3.1. *L'implication* $(c. \to b.)$*,* $(B. \to d.)$ *et* $(b. \to a.)$ *Sont évidentes. Nous démontrons maintenant* $(a. \to b.)$*,* $(d \to c.)$ *et* $(a. \leftrightarrow e.)$ *un à la fois.*
$(a. \to b.)$ *Supposons que* $(e^{At})_i$ *soit la colonne* i^{th} *de* e^{At}*. Maintenant, prenez*

$$y_0 = [1, 0, \ \cdots, \ 0]^T$$

alors, de a, la solution du système $y'(t) = Ay(t)$ *est*

$$y(t) = e^{At}y_0 = (e^{At})_i \tag{2.14}$$

Puisque

$$\lim_{t\to\infty} (e^{At})_i = 0,$$

nous avons

$$\lim_{t\to\infty} \|(e^{At})_i\| = 0.$$

Dans le même raisonnement, nous provons que

$$\lim_{t\to\infty} \|(e^{At})_i\| = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i = 1, 2, \ \cdots, \ n.$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to\infty}\|e^{At}\| = \lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|(e^{At})_i\| = 0.$$

$(d. \to c.)$ *Soit t_0 le nombre avec*

$$\|e^{At_0}\| = r_0 < 1$$

Soit $t = mt_0 + s$, où t est un nombre tel que $t > t_0$, m est un nombre naturel et $0 \le s \le t_0$. Puisque la fonction e^{At} *est continue, le maximum*

$$M = \max_{0\le t\le t_0}\|e^{At}\|$$

existe. Donc nous avons que

$$\begin{aligned}
\|e^{At}\| &= \|e^{A(mt_0+s)}\| \\
&= \|e^{Amt_0}e^{As}\| \\
&\le \|e^{Amt_0}\|\|e^{As}\| \\
&\le M\|e^{Amt_0}\| \\
&\le M\|e^{At_0}\|^m \\
&= Mr_0^m = Me^{m\ln r_0} = Me^{(t-s)/t_0\ln r_0}(\textit{donc } m = (t-s)/t_0) \\
&= Me^{-s/t_0\ln r_0}e^{(lnr_0/t_0)t}
\end{aligned}$$

Soit

$$\omega = -(\ln r_0)/t_0.$$

puisque $r_0 < 1$, donc $\ln r_0 < 0$ et $\omega > 0$. Ainsi nous avons

$$\|e^{At}\| \le Me^{-s/t_0\ln r_0}e^{-\omega t} \le M_1e^{-\omega t},$$

où

$$M_1 = M\max_{0\le s\le t_0} e^{(-s/t_0)\ln r_0}.$$

$(a. \to e.)$ *Nous devons prouver si*

$$y(t) = e^{At}y_0 \to 0$$

comme $t \to \infty$ pour toute valeurs initiale y_0, alors $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pour chaque valeur propre λ de A. Au contraire, supposons que il existe une valeur propre λ, où $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Soit x_0 est le vecteur propre correspondant à λ, alors

$$y(t) = \operatorname{Re}[e^{\lambda t}x_0] = e^{\operatorname{Re}\lambda t}\cos(\operatorname{Im}\lambda t)x_0$$

est une solution du système, qui ne s'approche pas de 0 comme $t \to \infty$, puisque $x \neq 0$ et $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. C'est une contradiction avec les hypothèses. Ainsi, $\operatorname{Re}\lambda < 0$.
(e. $\to$ a.) Supposons que $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pour chaque valeur propre λ de a.
Nous allons prouver la partie (a) par trois cas
i) Si λ est une seule valeur propre réelle et x_0 est un vecteur propre correspondant, alors la solution

$$y(t) = e^{\lambda t x_0} \to 0 \text{ quand } t \to \infty$$

ii) Si λ est une multiplicité de valeur nette réelle k alors

$$y(t) = t^k e^{\lambda t} \to 0 \text{ quand } t \to \infty$$

iii) Si λ est une valeur propre complexe telle que $\lambda = (y + i\beta)$ alors

$$y(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)x_0 \to 0 \text{ quand } t \to \infty$$

et

$$y(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)x_0 \to 0 \text{ quand } \ t \to \infty$$

Ainsi, la solution générale

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots \alpha_n y_n \to 0$$

De la même manière que la preuve du théorème (2.3.1), nous pouvons également montrer le résultat suivant :

Théorème 2.3.2. *Considérons le système*

$$y'(t) = Ay(t). \tag{2.15}$$

i) Si les parties réelles de toutes les valeurs propres de A ne sont pas positives, et chaque valeur propre simple de partie réelle nulle alos toutes les solutions sont stables (c'est-à-dire qu'elles sont borné)
ii) Si A a une valeur propre de partie réelle positive, alors la solution est instable (c'est-à-dire qu'il existe une solution non bornée).

Chapitre 3

Théorie de Floquet sur $\mathbb{R}^n$

Les équations différentielles impliquant des fonctions périodiques jouent un rôle important dans de nombreuses applications. Nous considérons le système linéaire :

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t),$$

où $A(t)$ est une fonction périodique périodique évaluée par matrice avec la période ω (c'est-à-dire $A(t+\omega) = A(t)$) et $f(t)$ est également ω-périodique. De tels systèmes s'appellent les systèmes Floquet. Une question naturelle est : un système Floquet a-t-il une solution périodique avec la période ω? Malheureusement, la réponse est NON dans le cas général, comme l'indique le (3.3.2). Cependant, le système Floquet s'avère étroitement lié à un système linéaire avec des coefficients constants, de sorte que les propriétés qui ont été obtenues dans les chapitres précédents peuvent être utilisées. D'abord, nous avons un résultat sur l'existence du logarithme d'une matrice.

3.1 Logaritme d'une matrice

Théorème 3.1.1. *Si C est $n \times n$ matrice non synonyme, il existe une matrice B telle que*

$$e^B = C.$$

Preuve 3.1.1. *Nous allons le prouver par 2×2 matrices. Le cas général peut être prouvé de la même manière. Soit λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de C. Puisque C n'est pas singulier alors $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Nous avons 3 cas pour prouver le résultat :*
$Cas1$:. Supposons que

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Alors, il n'est pas difficile de voir que $C = e^B$, où

$$B = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$Cas2$:. Supposons

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, nous recherchons une matrice B de la forme

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$$

Pour que $e^B = C$. Pour cette matrice B, on peut calculer la

$$e^{Bt} = \begin{Bmatrix} e^{b_1 t} & b_2 t e^{b_1 t} \\ 0 & e^{b_1 t} \end{Bmatrix}$$

et donc,

$$e^B = \begin{bmatrix} e^{b_1} & b_2 e^{b_1} \\ 0 & e^{b_1} \end{bmatrix}$$

Nous résolvons maintenant pour b_1 et b_2 tels que $e^B = C$, on a $b_1 = \ln \lambda_1$ et $b_2 = \dfrac{1}{\lambda_1}$Nous pouvons donc simplement prendre

$$B = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & \frac{1}{\ln \lambda_1} \\ 0 & \ln \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$Cas3$:. C est une matrice constante non uniforme $2 \times\ 2$ arbitraire. Par Jordan

canonique il existe une matrice non singulière P telle que $C = PJP^{-1}$, où

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Par les deux cas précédents, il existe une matrice B_1 de sorte que

$$e^{B_1} = J.$$

Soit

$$B := PB_1P^{-1};$$

Alors par le théorème (2.2.7) partie (viii)

$$e^B = e^{PB_1P^{-1}} = Pe^{B_1}P^{-1} = C.$$

Exemple 3.1.1. *Trouver le* log *de la matrice*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique pour C est

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Les paires propres de C sont

$$\lambda = 1, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

et

$$\lambda = 5; \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La forme canonienne de C de Jordan est

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

De la preuve du théorème (3.1.1)*, si nous laissons*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

puis

$$PB_1P^{-1}$$

Est un journal de C fourni B_1 est un journal de J.
Notez que

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix}$$

Est un journal de J.
Par conséquent, un journal de C est donné par

$$\begin{aligned} B &= PB_1P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\ln 5 & \frac{1}{4}\ln 5 \\ \frac{3}{4}\ln 5 & \frac{3}{4}\ln 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nous avons maintenant le résultat principal de ce chapitre, appelé Floquet's Théorème, pour le système Floquet

3.2 Matrice fondamentale pour le système Floquet

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad II.10 \tag{3.1}$$

où

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \textit{pour tout} \;\; t.$$

Théorème 3.2.1. *Si φ est une matrice fondamentale pour le système Floquet* (3.1) *où la matrice $A(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à la période ω, alors*
1) *La fonction ψ définée par*

$$\psi(t) = \varphi(t+\omega)$$

est également une matrice fondamentale pour le système Floquet.
2) *Il existe une matrice B et une fonction de matrice $n \times \ n$ nonsse $\rho(t)$, qui est périodique avec la période ω de sorte que*

$$\phi(t) = \rho(t)e^{Bt} \quad \textit{Pour tout} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Preuve 3.2.1. *1) Supposons que ϕ soit une matrice fondamentale pour* (3.1) *et définissons*

$$\psi(t) = \phi(t+\omega).$$

Nous voulons montrer que ψ est également une matrice fondamentale. Alors

$$\psi'(t) \ = \ \phi'(t+\omega)$$

$$= \ A(t+\omega)\phi(t+\omega)$$

$$= \ A(t+\omega)\psi(t)$$

$$= \ A(t)\psi(t).$$

Parce que nous définissons $\psi(t) = \phi(t+\omega)$ et ϕ est une matrice fondamentale, alors

$$\det\psi = \det\phi(t+\omega) \neq 0$$

pour tout t. Ainsi, ψ est également une matrice fondamentale de (3.1)*.pour tout t. Ainsi, ψ est également une matrice fondamentale de* (3.1)*.*
2) *Puisque ϕ et ψ sont des matrices fondamentales pour* (3.1)*, alors par le théorème* (2.2.6) *il existe une matrice constante C telle que*

$$\phi(t+\omega) = \phi(t)C$$

et par le théorème (3.1.1*, il existe une matrice B telle que $e^{B\omega} = C$.*
Définissons la fonction matricielle ρ par

$$\rho(t) = \phi(t)e^{-Bt}$$

Maintenant, nous voulons prouver que $\rho(t)$ est périodique avec la période ω. Nous avons

$$\begin{aligned}
\rho(t+\omega) &= \phi(t+\omega)e^{-B(\omega+t)} \\
&= \phi(t+\omega)e^{-B\omega-Bt} \\
&= \phi(t)\cdot C\cdot e^{-B\omega}\cdot e^{-Bt} \\
&= \phi(t)\cdot e^{B\omega}\cdot e^{-B\omega}\cdot e^{-Bt}(parce\ que\ e^{B\omega}=C\ et\ e^{-B\omega}=C^{-1}) \\
&= \phi(t)e^{-Bt} \\
&= \rho(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent,$\rho(t+\omega)=\rho(t)$ *et* $\rho(t)$ *est une matrice de fonction périodique. Donc,*

$$\rho(t)=\phi(t)e^{-Bt}$$

implique que

$$\phi(t)=\rho(t)e^{Bt}.$$

Nous savons que si $\varphi(t)$ est une matrice fondamentale pour le système Floquet (3.1), alors $\varphi(t+\omega)$ est également une matrice fondamentale pour (3.1). Ainsi, $\phi(t+\omega)=\phi(t)C$ où C est une matrice constante. Maintenant, si nous voulons trouver C, soit $t=0$ alors nous avons

$$\phi(\omega)=\phi(0)C$$

alors

$$C=\phi^{-1}(0)\phi(\omega).$$

3.3 Multiplicateurs Floquet

Définition 3.3.1. *Soit ϕ une matrice fondamentale pour le système Floquet* (3.1) *et* $C=\phi^{-1}(0)\phi(\omega)$. *Les valeurs propres de C sont appelées multiplicateurs Floquet.*

Notons que si nous avons une autre matrice fondamentale ψ pour le système Floquet (3.1) et

$$D = \psi^{-1}(0)\psi(\omega),$$

alors toute la valeur propre de C doit être la même que la valeur propre de D.

Pour voir cela, par (2.2.6), il existe une matrice constante arbitraire $n \times\ n$ non singulière M, tel que

$$\psi(t) = \phi(t)M \quad pour\ tout\ t \in \mathbb{R}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} D &= \psi^{-1}(0)\psi(\omega) \\ &= (\phi(0)M)^{-1} \cdot \phi(\omega)M \\ &= M^{-1}\phi^{-1}(0) \cdot \phi(\omega)M \\ &= M^{-1}CM. \end{aligned}$$

Par conséquent, C et D sont des matrices similaires et ont donc les mêmes valeurs propres. Par conséquent, les multiplicateurs Floquet sont bien définis.

Exemple 3.3.1. *Trouver le multiplicateur Floquet pour le système Floquet*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{(\cos t + sint)}{(2+\sin t - \cos t)} \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, nous résolvons cette équation pour $y(t) = (y_1(t), y_2(t)\ )$. A partir de l'équation ci-dessus, nous avons des équations différentielles linéaires pour y_2 et y_1

$$y_1' = y_1(t) + y_2(t).$$

et

$$y_2' = \frac{(\cos t + \sin t)}{(2 + \sin t - \cos t)} y_2(t)$$

En résolvant ces équations d'abord pour y_2 et ensuite pour y_1, on obtient les solutions générales :

$$\begin{aligned} y_1 &= (ye^t - \beta(\cos t + \sin t), \\ y_2 &= \beta(2 + \sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$. Prenons $\alpha = 0,\ \beta = 1$, et alors $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, nous avons deux solutions : indépendantes

$$y(t) = \begin{pmatrix} -2 - \sin t \\ 2 + \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

et

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que la matrice fondamentale est

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -2 - \sin t & e^t \\ 2 + \cos t - \sin t & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}, (II.11)$$

Les multiplicateurs Floquet sont $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = e^{2\pi}$.

Le théorème suivant montre l'importance des multiplicateurs Floquet.

Théorème 3.3.1. *Supposons que $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n$ sont les multiplicateurs Floquet du système Floquet $y' = A(t)y$ alors, les solutions du système Floquet sont*
i). Asymptotiquement stable sur$[0, \infty[$ (c'est-à-dire $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ pour toutes les solutions $y(t)$) si $|\mu_i| < 1, 1 \leq i \leq n$
ii). Stable sur $[0, \infty[$ (c'est-à-dire que toutes les solutions sont délimitées) fournies $|\mu_i| < 1, 1 \leq i \leq n$ et chaque fois que $|\mu_i| = 1,\ \mu_i$ est une valeur propre simple ;
iii) Instable sur $[0, \infty[$ (c'est-à-dire qu'il y a une solution non bornée) pourvu qu'il y ait un i_0, $1 \leq i_0 \leq n$, tel que $|\mu_{i_0}| > 1$.

Preuve 3.3.1. *Nous allons prouver ce théorème pour les cas simplement bidimensionnels. Suppose que $y(t) = \phi(t)y_0 = \rho(t)e^{Bt}y_0$ est une solution du système Floquet et soit C donnée par :*

$$C = e^{B\omega}$$

Par le théorème de la forme canonique de Jordan, il y a des matrices M et J tels que

$$B = MJM^{-1},$$

où soit

$$J = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \text{ ou } J = \begin{pmatrix} \rho_1 & 1 \\ 0 & \rho_1 \end{pmatrix},$$

où $\rho_1,\ \rho_2$ *sont des valeurs propres de* B. *Il resulte que*

$$\begin{aligned} C &= e^{B\omega} \\ &= e^{MJM^{-1}\omega} \\ &= Me^{J\omega}M^{-1} \text{ par le theorème partie iii)} \\ &= MKM^{-1}, \end{aligned}$$

où soit

$$K = \begin{pmatrix} e^{\rho_1\omega} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2\omega} \end{pmatrix}$$

et

$$k = \begin{pmatrix} e^{\rho_1\omega} & \omega e^{\rho_1\omega} \\ 0 & e^{\rho_1\omega} \end{pmatrix}$$

Puisque les valeurs propres de K *sont identiques à la valeur propre de* C, *on obtient que les multiplicateurs de Floquet son*

$$\mu_i = e^{\rho_i\omega},$$

$i = 1, 2,$ *Où* $\rho_1 = \rho_2$ *est possible. Puisque*

$$|\mu_i| = e^{Re(\rho_i)\omega},$$

nous avons que

$$\begin{aligned} |\mu_i| &< 1 \quad si \ \ \mathrm{Re}(\rho_i) < 0 \\ |\mu_i| &= 1 \quad si \ \ \mathrm{Re}(\rho_i) = 0 \\ |\mu_i| &> 1 \quad si \ \ \mathrm{Re}(\rho_i) > 0. \end{aligned}$$

Soit

$$Q_1 = \sup_{t\in R} \|\rho(t)\| = \max_{t\in[0,\omega]} \|\rho(t)\|$$

et

$$Q_2 = \sup_{t\in R} \|\rho^{-1}(t)\| = \max_{t\in[0,\omega]} \|\rho^{-1}(t)\|.$$

pour $t \in \mathbb{R}$ *et*

$$\|e^{Bt}y_0\| = \|\rho^{-1}(t)y(t)\| \leq \|\rho^{-1}(t)\|\|y(t)\| \leq Q_2\|y(t)\|,$$

Pour $t \in \mathbb{R}$. *Il montre que la stabilité de* $y(t)$ *est équivalente à la stabilité de* $e^{Bt}y_0$ *. La conclusion de ce théorème suit le Théorème* (2.3.1)*et le Théorème* (2.3.2).

3.3.1 Propriété de multiplicateur Floquet.

Le prochain théorème montrera la propriété d'un multiplicateur Floquet.

Théorème 3.3.2. . *Un nombre* μ *est un multiplicateur Floquet du système Floquet* (3.1) *si et seulement s'il existe une solution non trivial* y *telle que*

$$y(t+\omega) = \mu y(t).$$

Preuve 3.3.2. *Preuve.* $\Rightarrow$ *Supposons que* μ *soit un multiplicateur Floquet de* (2.1) *afin que* μ *soit une valeur propre de* $C = \phi^{-1}(0)\phi(\omega)$ *et soit* $y_0 \neq 0$ *soit un vecteur propre correspondant à* μ *de sorte que* $Cy_0 = \mu y_0$. *Définissons la fonction vectorielle* y *par*

$$y(t) = \phi(t)y_0$$

qui est une solution non nulle, alors nous avons

$$\begin{aligned} y(t+\omega) &= \phi(t+\omega)y_0 \\ &= \phi(t)Cy_0 \\ &= \phi(t)\mu y_0 \\ &= \mu y(t). \end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$y(t+\omega) = \mu y(t).$$

$\Leftarrow$ *Supposons qu'il existe une solution non triviale telle que* $y(t+\omega) = \mu y(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Soit* ϕ *une matrice fondamentale pour* (3.1), *alors*

$$y(t) = \phi(t)y_0$$

Pour un vecteur non zéro y_0. alors

$$\begin{aligned} y(t+\omega) &= \phi(t+\omega)y_0 \\ &= \phi(t)Cy_0. \end{aligned}$$

Donc, de $y(t+\omega) = \mu y(t) = \mu\phi(t)y_0$ on a que

$$\phi(t)Cy_0 = \mu\phi(t)y_0.$$

Multiplions les deux côtés par $\phi^{-1}(t)$, nous avons

$$\phi^{-1}\phi(t)Cy_0 \;=\; \phi^{-1}(t)\mu\phi(t)y_0$$

ou

$$\mu y_0 = Cy_0.$$

Ainsi, μ est la valeur propre de C et il s'ensuit que μ est un multiplicateur Floquet de (3.1).

Exemple 3.3.2. *Il n'est pas difficile de montrer que*

$$y(t) = \begin{pmatrix} -e^{\frac{t}{2}}\cos t \\ e^{\frac{t}{2}}\sin t \end{pmatrix}$$

est une solution du système Floquet

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -1 + (\frac{3}{2})\cos^2 t & 1 - (\frac{3}{2})\cos t \sin t \\ -1 - (\frac{3}{2})\sin t \cos t & -1 + (\frac{3}{2})\sin^2 t \end{pmatrix} y.$$

Notons que

$$\begin{aligned} y(t+2\pi) &= \begin{pmatrix} -e^{\frac{t+2\pi}{2}}\cos t \\ e^{\frac{t+2\pi}{2}}\sin t \end{pmatrix} \\ &= e^{\pi}y(t). \end{aligned}$$

Par le théorème (3.3.2)*, e^{π} est un multiplicateur Floquet.*

Chapitre 4
Théorie de Floquet sur les espaces de Banach

Dans ce chapitre, nous étudions les solutions d'équations différentielles linéaires sur un espace de Banach de la forme

$$y'(t) = A(t)y(t),$$

où $A(t)$ est une fonction périodique définie par l'opérateur, c'est-à-dire $A(t+\omega) = A(t)$. Nous étudions la théorie des équations différentielles et des Floquet non autonome sur les espaces de Banach.

4.1 Equations différentielles non autonomes sur les espaces de Banach

Soit X un espace de Banach. Sur X, nous considérons maintenant le problème de Cauchy ou IVP

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t), & t \geq s, \\ y(s) = y_s \in X, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $A(t)$ sont des opérateurs linéaires et borné sur X. Les équations différentielles ci-dessus sont appelées équations d'évolution (voir plus de détails dans [2]). Tout d'abord, nous voulons montrer l'existence de la solution du problème de Cauchy (4.1)).

4.1.1 Existence de la solution

Théorème 4.1.1. *(Théorème de l'existence et de l'unicité) Supposons que la fonction* $t \to A(t)$ *soit continue sur* $\mathbb{R}$*. Alors, pour chaque valeur initiale* $y_s \in X$*, le problème Cauchy* (4.1) *a une solution unique.*

Preuve 4.1.1. *Nous allons prouver le théorème en utilisant le théorème de l'application de contraction. Il suffit de montrer que, pour chaque* $T > s$*,* (4.1)*, il existe une solution unique sur un intervalle* $[s, T]$*.*
Notons que $y(t)$ *est une solution de* (4.1) *si et seulement si* $y(t)$ *est une solution de l'équation intégrale*

$$y(t) = y_s + \int_s^t A(r)y(r)dr.$$

Nous définissons maintenant l'opérateur A *sur* $C[s, T]$ *par*

$$(Ay)(t) = y_s + \int_s^t A(r)y(r)dr, \ \ s \leq t \leq T.$$

Nous prouvons que pour tout $t \in [s, T]$ *et* $n \geq 1$*, nous avons*

$$\|(A^n y - A^n x)(t)\| \leq \|y - x\| M^n \frac{(t-s)^n}{n!}, (V.13) \tag{4.2}$$

où $M := \max_{t \in [s,T]} \|A(t)\|$*, par induction :*
1) *Nous montrons qu'il est vrai pour* $n = 1$*. Nous avons*

$$\begin{aligned}
\| \ (Ay - -Ax) \ (t)\| \ &= \ \|y_s + \int_s^t A(r)y(r)dr - (y_s + \int_s^t A(r)x(r)dr)\| \\
&= \ \| \int_s^t A(r)(y(r) - x(r))dr\| \\
&\leq \ \int_s^t \|A(r)\|\|y(r) - x(r)\|dr \\
&\leq \ \|y - x\| \int_s^t \|A(r)\|dr \\
&\leq \ \|y - x\| \int_s^t \max |A(r)|dr \\
&= \ \|y - x\| M(t - s)
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [s,T]$. *Ainsi,* (4.2) *est vrai pour* $n = 1$.
2) *Supposons que* (4.2) *soit vrai pour* $n = k$ *de sorte que*

$$\|(A^k y - A^k x)(t)\| \leq M^k \|y - x\| \frac{(t-s)^k}{k!}$$

Nous voulons montrer que c'est vrai pour $n = k+1$. *Nous avons*

$$\begin{aligned}
\|(A^{k+1} y - A^{k+1} x)(t)\| &= \|y_s + \int_s^t A(r) A^k y(r) dr - (y_s + \int_s^t A(r) A^k x(r) dr)\| \\
&= \| \int_s^t A(r)(A^k y(r) - A^k y(r)) dr\| \\
&\leq \int_s^t \|A(r)\| \|A^k y(r) - A^k y(r)\| dr \\
&\leq \int_s^t M \|A^k y(r) - A^k y(r)\| dr. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction, $\|(A^k y - A^k x)(r)\| \leq \|y - x\| M^k \frac{(r-s)^k}{k!}$ *Pour* $r \in [S,T]$. *Par conséquent, à partir de* (4.3), *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\|(A^{k+1} y - A^{k+1} x)(t)\| &\leq M^{k+1} \|y - x\| \int_s^t \frac{(r-s)^k}{k!} dr \\
&= M^{k+1} \|y - x\| \frac{1}{k!} \int_0^{t-s} \tau^k d\tau \qquad (\textit{où } \tau = r - s) \\
&= \|y - x\| M^{k+1} \frac{1}{k!} \left[\frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right]_0^{t-s} \\
&= \|y - x\| M^{k+1} \frac{1}{k!} \frac{(t-s)^{k+1}}{k+1} \\
&= \|y - x\| M^{k+1} \frac{(t-s)^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, (4.2) *est vrai pour* $n = k+1$ *et il est prouvé.*
De (4.2) *nous avons*

$$\|A^n y - A^n x\| \leq \|y - x\| M^n \frac{(T-s)^n}{n!}$$

Pour tout $n \geq 1$. *Maintenant, soit* $C_n := M^n \frac{(T-s)^n}{n!}$. *Alors, il est facile de voir que* $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$. *Donc, il existe* n_0 *(assez grand) tel que pour* $C_{n_0} < 1$. *Pour ce* n_0, A^{n_0}

est une l'application de contraction. Par conséquent, par le théorème de l'application de contraction généralisée, il existe un point fixe unique pour A*, tel que* $Ay = y$*. Ainsi, le* IVP (4.1) *a une solution unique pour chaque valeur initiale* $y_s \in X$*.*

Du théorème de l'existence et de l'unicité, nous pouvons maintenant définir une famille d'opérateurs bornés sur X pour décrire les solutions de l'IVP (4.1).

Définition 4.1.1. *. Pour chaque* t *et* s *dans* $\mathbb{R}$ *avec* $t \geq s$ *on déffinie l'opérateur* $U(t,s)$ *comme suit : pour chaque* $y_0 \in X$*,* $U(t,\ s)y_0 := y(t)$*, où* $y(\cdot)$ *est la solution unique de*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(s) = y_0 \in X. \end{cases} \tag{4.4}$$

La famille $\{U(t,\ s)\}_{t\geq s}$ *s'appelle une famille d'évolution générée par la famille* $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$*.*

Nous recueillons maintenant les propriétés de base d'une famille d'évolution.

Théorème 4.1.2. *Pour chaque* t *et* s *avec* $t > s$*,* $U(t,s)$ *sont des opérateurs linéaires et bornés sur* X*.*

Avant de prouver le théorème ci-dessus, nous indiquons le lemme.bien connus de Gronwall's

Lemme 4.1.1. *(Lemme de Gronwall) Soient* $I = [a,b]$ *et* $\beta(t)$ *et* $U(t)$ *des fonctions continues de valeur réelle déffinées sur la satisfaction de l'inégalité intégrale*

$$U(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(r)U(r)dr$$

Pour tout $t \in I$*, alors*

$$U(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(r)dr}$$

Pour tout $t \in I$*.*

Preuve 4.1.2. *Du théorème* (4.1.2) *: Nous montrons d'abord que* $U(t,s)$ *est linéaire, c'est-à-dire :*

$$U(t,\ s)(\alpha x + by) = \alpha U(t,\ s)x + bU(t,\ s)y$$

pour tout x et y dans X. Pour ce faire, soit

$$z(t) = U(t,\ s)(\alpha x + by) - \alpha U(t,\ s)x - bU(t,\ s)y$$

alors

$$\begin{aligned} z'(t) &= A(t)U(t,\ s)(\alpha x + by) - \alpha A(t)U(t,\ s)x - bA(t)U(t,\ s)y \\ &= A(t)(U(t,\ s)(\alpha x + by) - \alpha U(t,\ s)x - bU(t,\ s)y) \\ &= A(t)z(t). \end{aligned}$$

De plus, par définition de $U(t,s)$, nous avons $z(s) = (ax+by)-(ax+by) = 0$ (parce que $U(s,s) = Id$, voir le théorème (4.1.3)). Ainsi, $z(t)$ est la solution unique de

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(s) = 0. \end{cases}$$

puisque $y(t) \equiv 0$ est une solution, nous avons $z(t) \equiv 0$.
Pour montrer que $U(t,s)$ est un opérateur borné, nous utilisons la forme intégrale de la solution :

$$y(t) = y(s) + \int_s^t A(r)y(r)dr$$

ou

$$U(t,\ s)y = y + \int_s^t A(r)U(r,\ s)ydr,$$

Pour chaque vecteur $y \in X$. Par conséquent,

$$\|U(t,\ s)y\| \leq \|y\| + \int_s^t \|A(r)\|\|U(r,\ s)y\|\ dr.$$

Nous utilisons maintenant le lemme de Gronwall et obtenons

$$\|U(t,\ s)y\| \leq \|y\| \cdot e^{\int_s^t \|A(r)\|dr}$$

Pour tout $y \in X$, qui montre que $U(t,s)$ est borné.
Théorème 4.1.3. *. Soit $\{U(t,\ s)\}_{t\geq s}$ une famille d'évolution générée par $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Alors, les déclarations suivantes contiennent :*
1) $U(t,t) = Id$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$;
2) $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ pour $s \leq r \leq t$;

3) Pour chaque $s \in \mathbb{R}$ et $y \in X$, la fonction $t \mapsto U(t,s)y$ est continuellement différentiable et

$$\frac{d}{dt}U(t,\ s)y = A(t)U(t,\ s)y.$$

4) Pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $y \in X$, la fonction $s \mapsto U(t,s)y$ est continuellement différentiable et

$$\frac{d}{ds}U(t,\ s)y = -U(t,\ s)A(s)y.$$

5) La solution du problème non homogène

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ y(s) = y_s \end{cases} \tag{4.5}$$

est

$$y(t) = U(t,\ s)y_s + \int_s^t U(t,\ r)f(r)dr.$$

Preuve 4.1.3. 1) *Nous savons que $y(t) = U(t,s)y$ est la solution de* (4.4)*. Par conséquent, soit $t = s$, alors nous avons que $U(s,s)y = y(s) = y$, ce qui signifie que $U(s,s)$ est l'opérateur d'identité.*

2) *Nous voulons montrer que*

$$U(t,\ r)U(r,\ s)y = U(t,\ s)y$$

pour tout $y \in X$. De toute évidence, pour $t \geq r$, $y_1(t) = U(t,\ s)y$ est une solution de

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(r) = U(r,\ s)y. \end{cases} \tag{4.6}$$

soit $y_2(t) = U(t,\ r)U(r,\ s)y$ pour $t \geq r$, alors

$$y_2'(t) = A(t)U(t,\ r)U(r,\ s)y = A(t)y_2(t)$$

et $y_2(r) = U(r,\ r)U(r,\ s)y = U(r,\ s)y$ aussi. Ainsi, par l'unicité de la solution de (4.6)*, nous avons*

$$y_1(t) = y_2(t).$$

Donc,

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s).$$

3) *Il est évident à partir de la définition de* $U(t, s)$.

4) *Nous voulons prouver que*

$$\frac{d}{ds}U(t,\ s)y = -U(t,\ s)A(s)y$$

Pour tout $y \in X$. *Pour le faire, nous fixons* t *et* r *et laissons* $r \leq s \leq t$, *alors nous avons*

$$\frac{d}{ds}U(t,\ r)y = \frac{d}{ds}U(t,\ s)U(s,\ r)y.$$

puisque $U(t, r)y$ *est constant par rapport à* s, *on obtient*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}U(t,\ s)U(s,\ r)y \\ &= [\frac{d}{ds}U(t,\ s)]U(s,\ r)y + U(t,\ s)\frac{d}{ds}U(s,\ r)y. \end{aligned}$$

De la troisième partie, nous avons

$$\frac{d}{ds}U(s,\ r)y = A(s)U(s,\ r)y$$

Par conséquent, nous obtenons

$$0 = (\frac{d}{ds}U(t,\ s))U(s,\ r)y + U(t,\ s)A(s)U(s,\ r)y.$$

Maintenant, soit $r = s$, *nous avons*

$$0 = \frac{d}{ds}U(t,\ s)y + U(t,\ s)A(s)y,$$

ou de manière équivalente,

$$\frac{d}{ds}U(t,\ s)y = -U(t,\ s)A(s)y.$$

5) *Tout d'abord, soit* $t = s$ *nous avons*

$$\begin{aligned} y(s) &= U(s,\ s)y_s + \int_s^s U(t,\ s)f(r)d(r) \\ &= y_s. \end{aligned}$$

Ensuite, prenons la dérivé de

$$y(t) = U(t,\ s)y_s + \int_s^t U(t,\ s)f(r)dr,$$

alors nous avons

$$\begin{aligned} y'(t) &= (\frac{dy}{dt}U(t,\ s))y_s + \frac{d}{dt}\int_s^t U(t,\ r)f(r)dr \\ &= A(t)U(t,\ s)y_s + \frac{d}{dt}\int_s^t U(t,\ r)f(r)dr \\ &= A(t)U(t,\ s)y_s + \int_s^t A(t)U(t,\ r)f(r)dr + f(t) \\ &= A(t)[U(t,\ s)y_s + \int_s^t U(t,\ r)f(r)dr] + f(t) \\ &= A(t)y(t) + f(t). \end{aligned}$$

Nous Donc, $y(t)$ *est une solution de* (4.5)*. Maintenant, nous voulons montrer que cette solution est la seule solution de* (4.5)*. Supposons qu'il existe deux solutions* $y_1(t),\ y_2(t)$*, nous montrerons que* $y_1(t) = y_2(t)$*.*
Soit

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t).$$

alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y_1(t) + f(t) - A(t)y_2(t) - f(t) \\ &= A(t)(y_1(t) - y_2(t)) \\ &= A(t)y(t) \end{aligned}$$

et $y(s) = 0$*. Donc,* $y(t)$ *est la solution de*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(s) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Donc, $y(t) \equiv 0$ *par unicité. Par conséquent,* $y_1(t) = y_2(t)$*..*

4.2 Théorie du Floquet

Nous étudions maintenant le IVP (4.1), dans lequel $A(t)$ est périodique de période ω, c'est-à-dire $A(t+\omega) = A(t)$. Ce système s'appelle un système Floquet sur les espaces de Banach. Nous on a l'observation suivante sur un système Floquet.

Théorème 4.2.1. *. Supposons que* $\{U(t,\ s)\}_{t\geq s}$ *soit une famille d'évolution générée par* $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *dans un système Floquet. Alors nous avons*

$$U(t+\omega,\ s+\omega) = U(t,\ s).$$

pour tous les t *et* s *avec* $t \geq s$.

Preuve 4.2.1. *Nous montrons que*

$$U(t+\omega,\ s+\omega)y_0 = U(t,\ s)y_0$$

Pour tout $y_0 \in X$.. *Notez que* $U(t,\ s)y_0$ *est la solution de*

$$(IVP)\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(s) = y_0, \end{cases} \quad (V.18)$$

Pour $t \geq s$. *Soit* $z(t) := U(t+\omega,\ s+\omega)y_0$. *alors*

$$\begin{aligned} z'(t) &= A(t+\omega)U(t+\omega,\ s+\omega)y_0 \\ &= A(t)U(t+\omega,\ s+\omega)y_0 \\ &= A(t)z(t). \end{aligned}$$

De plus, $z(s) = U(s+\omega,\ s+\omega)y_0 = y_0$. *Ainsi,* $z(t)$ *est aussi la solution de* (4.7). *Par l'unicité de la solution, nous avons* $z(t) = U(t,\ s)y_0$, *ce qui implique que*

$$U(t+\omega,\ s+\omega) = U(t,\ s).$$

Ensuite, nous définissons la fonction valorisée par l'opérateur suivant :

$$P(t) := U(t+\omega,\ t)$$

et l'opérateur

$$V := P(0) = U(\omega,\ 0).$$

L'opérateur V *s'appelle la monodromie d'un système Floquet.*

Théorème 4.2.2. *Nous avons*

1) *La fonction* $P(t)$ *est w-périodique, c'est-à-dire* $P(t+\omega) = P(t)$ *;*

2) *L'ensemble de spectre ponctuel de* $P(t)$ *est indépendant de* t. *En d'autres termes,*

$$\sigma_p(P(t)) = \sigma_p(V)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve 4.2.2. *Nous prouvons d'abord*

1) *Nous avons*

$$\begin{aligned} P(t+\omega) &= U(t+\omega+\omega,\ t+\omega) \\ &= U(t+\omega,\ t) \text{ (puisque } U(t,s) \text{ est } \omega-\text{périodique)} \\ &= P(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $P(t)$ *est* $\omega-$*périodique.*

2) *Tout d'abord, nous montrons que pour* $s < t$ *nous avons*

$$\sigma_p(P(s)) \subseteq \sigma_p(P(t)).$$

en effet, supposons $s < t$ *et soit* $\mu \in \sigma_p(P(s))$. *Nous montrerons que* $\mu \in \sigma_p(P(t))$. *Cela signifie que* $P(s)x_0 = \mu x_0$ *pour quelque* $x_0 \neq 0$.. *Nous montrons que* $P(t)y_0 = \mu y_0$ *pour quelques* $y_0 \neq 0$. *Prenons* $y_0 := U(t,\ s)x_0$

$$\begin{aligned} P(t)y_0 &= P(t)U(t,\ s)x_0 \\ &= U(t+\omega,\ t)U(t,\ s)x_0 \\ &= U(t+\omega,\ s)x_0 \\ &= U(t+\omega,\ s+\omega)U(s+\omega,\ s)x_0 \\ &= U(t,\ s)P(s)x_0 \\ &= U(t,\ s)\mu x_0 \\ &= \mu U(t,\ s)x_0 \\ &= \mu y_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(t)y_0 = \mu y_0$ *et* μ *est une valeur propre de* $P(t)$. *Donc,* $\sigma_p(P(s)) \subseteq \sigma_p(P(t))$. *D'autre part, prenez un nombre entier* n_0 *assez grand, tel que* $s + n_0\omega > t$. *Par Le même argument, nous avons*

$$\sigma_p(P(t)) \subseteq \sigma_p(P(s+n_0\omega)).$$

mais, $P(s+n_0\omega) = P(s)$, *puisque* $P(t)$ *est* ω*-périodique. Par conséquent, nous avons*

$$\sigma_p(P(s)) \subseteq \sigma_p(P(t)) \subseteq \sigma_p(P(s+n_0\omega)) = \sigma_p(P(s)),$$

ou

$$\sigma_p(P(s)) = \sigma_p(P(t)).$$

Théorème 4.2.3. *. Le nombre μ est une valeur propre de $V = U(\omega, 0)$ si et seulement si le système Floquet*

$$y'(t) = A(t)y(t)(V.19) \tag{4.8}$$

a une solution non triviale $y(t)$ avec

$$y(t+\omega) = \mu y(t)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve 4.2.3. $\Rightarrow$: *Supposons que μ soit une valeur propre de V, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur non nul $y_0 \in X$ tel que*

$$\begin{aligned} \mu y_0 &= V y_0 \\ &= U(\omega,\ 0)y_0 \end{aligned}$$

Prenez $y(t) = U(t,\ 0)y_0$ pour être une solution non triviale du système Floquet (4.8)*. nous avoir*

$$\begin{aligned} y(t+\omega) &= U(t+\omega,\ 0)y_0 \\ &= U(t+\omega,\ \omega)U(\omega,\ 0)y_0 \\ &= U(t,\ 0)V y_0 \\ &= U(t,\ 0)\mu y_0 \\ &= \mu U(t,\ 0)y_0 \\ &= \mu y(t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$y(t+\omega) = \mu y(t).$$

$\Leftarrow$: *Supposons que $y(t)$ soit une solution non triviale du système Floquet avec $y(t+\omega) = \mu y(t)$. Soit $y_0 \in X$ tel que $y(t) = U(t,\ 0)y_0$. Nous avons*

$$\begin{aligned} y(t+\omega) &= U(t+\omega,\ \omega)U(\omega,\ 0)y_0 \\ &= U(t,\ 0)U(\omega,\ 0)y_0 \\ &= U(t,\ 0)V y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu y(t) &= U(t,\ 0)Vy_0 \\ \mu U(t,\ 0)y_0 &= U(t,\ 0)Vy_0 \\ U(t,\ 0)\mu y_0 &= U(t,\ 0)Vy_0.\end{aligned}$$

Prenons $t = 0$, nous avons $U(0,0) = Id$ et ensuite $\mu y_0 = Vy_0$. Par conséquent, μ est une valeur propre de V.

4.3 Spectre de la monodrome

Nous montrons maintenant que le spectre de la monodrome V déterminera la stabilité du système Floquet

Théorème 4.3.1. *Le système Floquet est asymptotiquement stable, c'est-à-dire i.e. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Pour toutes les solutions y, si $\lim_{m\to\infty} V^m = 0$.*

Preuve 4.3.1. *Supposons $\lim_{m\to\infty} V^m = 0$. Cela signifie $\lim_{m\to\infty} V^m y_0 = 0$ pour chaque $y_0 \in E$.*
Nous montrons que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} U(t,\ 0)y_0 = 0$$

Pour tout $y_0 \in E$. Soit $t = m\omega + t_0$ pour un entier m et $0 \le t_0 \le \omega$. alors

$$\begin{aligned}y(t) &= U(t,\ 0)y_0 \\ &= U(t_0 + m\omega,\ 0)y_0 \\ &= U(t_0 + m\omega,\ \omega)U(\omega,\ 0)y_0 \\ &= U(t_0 + m\omega,\ \omega)Vy_0 \\ &= U(t_0 + m\omega,\ 2\omega)U(2\omega,\ \omega)Vy_0 \\ &= U(t_0 + m\omega,\ 2\omega)V^2y_0 \ (\textit{puisque}\ U(2\omega,\ \omega) = U(\omega,0) = V) \\ &= U(t_0 + m\omega,\ m\omega)V^m y_0 \\ &= U(t_0,0)V^m y_0.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &= \|U(t_0,0)V^m y_0\| \\ &\leq \|U(t_0,0)\| \cdot \|V^m y_0\| \\ \|y(m\omega+t_0)\| &\leq M \cdot \|V^m y_0\|\end{aligned}$$

$\to 0$ *quand* $m \to \infty$ *mais* $m \to \infty$ *quand* $t \to \infty$, *où* $M = \max_{0\leq t_0\leq\omega}\{\|U(t_0,0)\|\}$, *et le théorème est terminé.*

Nous savons que pour le rayon du spectre R de V, où $R := \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(V)\}$ nous avons

$$R = \lim_{m\to\infty} \|V^m\|^{1/m}$$

Voir [1] pour plus de détails. Donc, $R < 1$ si et seulement si $\lim_{m\to\infty} V^m = 0$.Par conséquent, à partir du théorème ci-dessus, nous avons :

Corollaire 4.3.1. *. Si le rayon du spectre R de V est inférieur à 1, Alors le système Floquet est asymptotiquement stable.*

Le prochain lemme concerne la solution périodique d'un problème de valeur initiale inhomogène avec l'inhomogénéité w-périodique.

Lemme 4.3.1. *. Considérons le problème de valeur initiale inhomogène*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ y(s) = y_s, \end{cases} \tag{4.9}$$

où $f(t)$ est une fonction $\omega-$périodique, avec une solution correspondante

$$y(t) = U(t,\ s)y_s + \int_s^t U(t,\ r)f(r)dr.$$

Alors $y(t)$ est w-périodique si et seulement si $y(s+\omega) = y_s$

Preuve 4.3.2. *Preuve. De toute évidence, si $y(t)$ est ω-périodique, alors $y(s+\omega) = y_s$. Maintenant, supposons que $y(s+\omega) = y_s$ et nous voulons montrer que $y(t) = y(t+\omega)$*

pour tous les $t \geq s$. Nous avons

$$\begin{aligned}
y(t+\omega) &= U(t+\omega,\ s)y_s + \int_s^{t+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr \\
&= U(t+\omega,\ s)y_s + \int_s^{s+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr + \int_{s+\omega}^{t+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr \\
&= U(t+\omega,\ s+\omega)U(s+\omega,\ s)y_s + \int_s^{s+\omega} U(t+\omega,\ s+\omega)U(s+\omega,\ s)f(r)dr \\
&\quad + \int_{s+\omega}^{t+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr \\
&= U(t,\ s)U(s+\omega,\ s)y_s + \int_s^{s+\omega} U(s+\omega,\ r)f(r)dr + \int_{s+\omega}^{t+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr \\
&= U(t,\ s)y(s+\omega) + \int_{s+\omega}^{t+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr \\
&= U(t,\ s)y_s + \int_{s+\omega}^{t+\omega} U(t+\omega,\ r)f(r)dr \ (puisque\ y(s+\omega) = y_s) \\
&= U(t,\ s)y_s + \int_s^{t} U(t+\omega,\ r'+\omega)f(r'+\omega)dr',
\end{aligned}$$

où $r' = r-\omega$. Puisque $f(t)$ est un $\omega-$périodique ($f(s'+\omega) = f(s')$) et $U(t+\omega,\ r'+\omega) = U(t,\ r')$, donc nous avons cela

$$\begin{aligned}
y(t+\omega) &= U(t,\ s)y_s + \int_s^{t} U(t,\ r')f(r')dr' \\
&= y(t),
\end{aligned}$$

Pour toutes les $t \geq s$. Ainsi, $y(t)$ est une solution ω-periodique.

Nous exposons maintenant le théorème principal de ce chapitre, qui trouve les conditions telles que pour chaque fonction $\omega-$périodique f, le système Floquet possède une solution $w-$périodique unique. Ce théorème a été prouvé la première fois dans [5], 1999 avec une preuve différente, dans laquelle les semigroups d'évolution ont été utilisés. Dans ce mémoire, nous montrons une preuve plus simple avec seulement des connaissances de base.

Théorème 4.3.2. . *(Existence et unicité de la solution périodique) Considérez le système Floquet*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ y(s) = y_s. \end{cases} \tag{4.10}$$

Ensuite, les énoncés suivants sont équivalents :

i) Pour chaque fonction $\omega-$*périodique* $f(t)$*, l'équation* (4.10) *a une solution w-périodique unique* $y(t)$

ii) Pour le monodrome V *on a* $1 \in \rho(V)$.

Preuve 4.3.3. *ii)* $\Rightarrow$ *i) Supposons que* $1 \in \rho(V)$*. Soit* $y(t)$ *une solution de* (4.10)*, c'est-à-dire,*

$$y(t) = U(t,\ s)y_s + \int_s^t U(t,\ r)f(r)dr$$

Nous devons montrer que pour chaque $f(t)$*,* $\omega-$*périodique, il n'y a qu'une seule valeur* y_s *qui fait rendre* $y(t)$*,* $\omega-$*périodique. Soit* $y(t)$ *une solution* $\omega-$*périodique de* (4.10)*. alors* $y(0) = y(\omega)$*, ou en d'autres termes*

$$\begin{aligned} y(0) &= U(\omega,\ 0)y(0) + \int_0^\omega U(\omega,\ r)f(r)dr \\ &= Vy(0) + \int_0^\omega U(\omega,\ r)f(r)dr. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1 - V)y(0) = \int_0^\omega U(\omega,\ r)f(r)dr.$$

puisque $1 \in \rho(V)$*, nous avons*

$$y(0) = (1 - V)^{-1} \int_0^\omega U(\omega,\ r)f(r)dr.$$

Donc, il existe un $y(0)$ *unique qui fait de* $y(\omega) = y(0)$*. Par Lemme* $(4.3.1)$*, cela signifie qu'il y a un* $y(0)$ *unique qui rendre* $y(t)$ $\omega-$*périodique.*

i) $\Rightarrow$ *ii) : Supposons que pour chaque fonction* $f(t)$ *qui est* $\omega-$*périodique, il existe un* $y(t)$ *unique qui est une solution* $\omega-$*periodique. Nous devons montrer que* $1 \in \rho(V)$*, ce qui équivalent a montrer que* $(1 - V)$ *est injectif et surjectif à la fois.*

Pour montrer que $(1 - V)$ *est injectif, supposons, par la contraction, que* 1 *est une valeur propre de* V*, c'est-à-dire* $Vy_0 = y_0$ *pour le vecteur propre correspondant* y_0*. Nous montrons que le système*

$$y'(t) = A(t)y(t), \tag{4.11}$$

(C'est-à-dire que nous choisissons $f(t) = 0$, qui est une fonction périodique), a deux solutions. $\omega-$périodiques différents
Considérons la fonction

$$y(t) = U(t,\ 0)y_0.$$

Clairement, $y(t)$ est une solution de (4.11). *De plus,*

$$y(\omega) = U(\omega,\ 0)y_0 = Vy_0 = y_0 = y(0).$$

Par conséquent, par lemme $(4.3.1)$, *$y(t)$ est une solution $\omega-$périodique de* (4.11). *En revanche, $y(t) \equiv 0$ est une autre solution de système périodique* (5.13). *C'est une contradiction. Par conséquent, $(1 - V)$ est injectif.*
Pour montrer $(1 - V)$ est surjectif, nous montrons que pour chaque $y_0 \in X$, il existe un vecteur $u_0 \in X$, tel que $(1 - V)u_0 = y_0$. En effet, prenons une fonction à valeur réelle $g(t)$ avec les propriétés suivantes :
1) $g(\omega) = g(0) = 0$ *;*
2) $\int_0^\omega g(s)ds = 1$.
Par exemple, si $\omega = \pi$, alors $g(t) = \frac{1}{2}\sin t$ satisfait les conditions ci-dessus. Pour tout ω, alors $g(t) = \dfrac{\pi}{2\omega}\sin\dfrac{\pi t}{\omega}$ fait. Prenons $f(t) := g(t)U(t,0)y_0$, alors $f(t)$ est une fonction $\omega-$périodique. Soit $y(t)$ la solution unique du système (4.10) *correspondant à f. Alors nous avons*

$$\begin{aligned}
y(t) &= U(t,\ 0)y(0) + \int_0^t U(t,\ r)f(r)dr \\
&= U(t,\ 0)y(0) + \int_0^t U(t,\ r)g(r)U(r,\ 0)y_0 dr \\
&= U(t,\ 0)y(0) + \int_0^t g(r)U(t,\ 0)y_0 dr \\
&= U(t,\ 0)y(0) + [\int_0^t g(r)dr]U(t,\ 0)y_0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $t = \omega$ nous avons

$$\begin{aligned}
y(\omega) &= U(\omega,\ 0)y(0) + [\int_0^\omega g(r)dr]U(\omega,\ 0)y_0 \\
y(0) &= Vy(0) + Vy_0,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(1 - V)(y(0) + y_0) = y_0.$$

Par conséquent,$(1 - V)$ *est surjectif, et la preuve est complète.*

Chapitre 5

Analyse de Floquet et théorie spectrale des opérateurs de schrodinger périodiques

Consédérons l'équation différentielle

$$L\psi = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right]\psi(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, q \in C(\mathbb{R}), \tag{5.1}$$

telque $\psi, \psi' \in AC_{loc}(\mathbb{R})$, et q est une fonction périodique (possible d'avoir des valeurs complexes) avec période $\Omega \rangle 0$, telque

$$q(x+\Omega) = q(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Il est claire que l'equation (5.1) a deux solutions linéairement indépendents, toute solution de (5.1) peut être ecrit sous la forme d'une combinaison linéaire de ces deux solutions linéairement indépendants. Aussi si $\psi(x)$ est une solutions de (5.1), alors $\psi(x+\Omega)$ est une autre solution.

Si $q = 1$ et Ω est un nombre réel positif, on pose $\Omega = 1$ on sait que $\psi_1(x) = e^x$ et $\psi_2(x) = e^{-x}$ sont deux solutions linéairement indépendants de (5.1), alors on voit que $\psi_j(x)$ et $\psi_j(x+1)$ sont linéairement indépendants pour tout $j = 1, 2$ respectivement. Cependant les solutions $(\psi_1 + \psi_2)(x)$ et $(\psi_1 + \psi_2)(x+1)$ sont linéairement indépendants.

Maintenant on va montrer le théorème d'existance d'une solution non trivial de (5.1) telque $\psi(x)$ et $\psi(x+1)$ sont linéairement dependants.

Théorème 5.0.3. *Il existe une constante non nulle ρ et une solution non triviale de* (5.1) ψ *telque*

$$\psi(x) = \rho\psi(x+\Omega), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Preuve 5.0.4. *Il est claire que* (5.1) *a deux solutions ϕ_1 et ϕ_2 telque*

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1; \qquad \phi_2(0) = 0, \\ \phi_1'(0) &= 0; \qquad \phi_2'(0) = 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Alors on particulier

$$W(\phi_1, \phi_2) = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) = 1. \tag{5.4}$$

Alors, comme $\phi_1(x+\Omega)$ et $\phi_2(x+\Omega)$ sont aussi des solutions de (5.1)*, on utilise* (5.3) *on a*

$$\begin{aligned} \phi_1(x+\Omega) &= \phi_1(\Omega)\phi_1(x) + \phi_1'(\Omega)\phi_2(x), \\ \phi_2(x+\Omega) &= \phi_2(\Omega)\phi_1(x) + \phi_2'(\Omega)\phi_2(x). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Comme toute solution $\psi(x)$ de (5.1) *peut être ecrite sous la forme $\psi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_1(x)$, il suffit de montrer qu'il existe un vecteur $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ et a Constante $\rho \in \mathbb{C}$ telle que*

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\Omega) & \phi_2(\Omega) \\ \phi_1'(\Omega) & \phi_2'(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

ce qui équivalent (utilisons (5.5)*)*

$$\psi(x+\Omega) = \rho\psi(x).$$

Maintenant la question est de savoir si la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \phi_1(\Omega) & \phi_2(\Omega) \\ \phi_1'(\Omega) & \phi_2'(\Omega) \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

a un vecteur propre $(c_1, c_2)^T$ *(transposée de* (c_1, c_2)*) correspendants au valeur propre non nulle* ρ*, comme une valeur propre est une solution de l'équation quadratique*

$$\rho^2 - [\phi_1(x) + \phi_2'(x)]\,\rho + 1 = 0.$$

Où nous avons utilisé (5.4) *pour obtenir le terme constant 1, il est claire que chaque valeur propre non nulle. Par conséquent l'algèbre matricielle complete la preuve.*

Notons que la matrice M dans(5.6) est appelée matrice de monodromie de l'équation (5.1).

Théorème 5.0.4. $\psi_1(x)$ *et* $\psi_2(x)$ *deux solutions linéairement indépendants de l'équation* (5.1) *telque soit :*
i) $\psi_1(x) = e^{m_1 x} p_1(x)$*,* $\psi_2(x) = e^{m_2 x} p_2(x)$*, telque* $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ *et* $p_1(x), p_2(x)$ *sonts deux fonctions périodique de période* ω*; Où bien*
ii) $\psi_1(x) = e^{mx} p_1(x)$*, et* $\psi_2(x) = e^{mx}\{x p_1(x) + p_2(x)\}$*, telque* $m \in \mathbb{C}$ *et* $p_1(x)$ *et* $p_2(x)$ *sont des fonctions périodique de période* ω*.*

Preuve 5.0.5. *On déstingue deux cas*
1$^{\text{èr}}$ *cas : Supposons que la matrice de monodromie* M *a deux valeur propres* ρ_1, ρ_2*. Certainement,* (5.1) *a deux solutios linéairement indépendants* $\psi_1(x)$ *et* $\psi_2(x)$ *avec* $\psi_j(x + \Omega) = \rho_j \psi_j(x)$ *pour* $j = 1, 2$*.*
Ensuite on choisit des constants m_1, m_2 *telque*

$$e^{m_j \Omega} = \rho_j, \quad j = 1, 2. \tag{5.7}$$

Et on définit

$$p_j(x) = e^{-m_j \Omega} \psi_j(x), \quad j = 1, 2. \tag{5.8}$$

Alors on peut vérifier que $p_j(x)$ *est périodique de période* Ω *avec*

$$\begin{aligned} p_j(x + \Omega) &= e^{-m_j (x+\Omega)} \psi_j(x + \Omega) \\ &= e^{-m_j x} e^{-m_j \Omega} \rho_j \psi_j(x) \\ &= p_j(x). \;\; j = 1, 2, \;\; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi que $\psi_j(x) = e^{m_j x} p_j(x)$*, telque* $p_j(x)$ *est de période* ω*, alors on a le cas (i) dans le théorème.*

$2^{ème}$*cas : Supposons que la matrice* M *a* ρ *comme valeur propre double. Alors on choisit* m *telque* $e^{m\Omega} = \rho$. *Utilisons Théorème* (5.0.4), *une solution non triviale* $\Psi_1(x)$ *de* (5.1) *telque* $\Psi_1(x+\Omega) = \rho\Psi_1(x)$, *comme* (5.1) *a deux solutions linéairement indépendants, alors on choisit une deuxième solution* $\Psi_2(x)$ *linéairement indépendants avec* $\Psi_1(x)$. *Alors, comme* $\Psi_2(x+\Omega)$ *est aussi une solution de* (5.1), *alors on ecrit*

$$\Psi_2(x+\Omega) = d_1\Psi_1(x) + d_2\Psi_2(x) \text{ pour } d_1, d_2 \in \mathbb{C}.$$

Ainsi que

$$W(\Psi_1,\Psi_2)(x+\Omega) = W(\rho\Psi_1(x), \Psi_2(x+\Omega)) = \rho d_2 W\Psi_1, \Psi_2)(x).$$

Comme le Wronskien est un constante non nulle, on a

$$d_2 = \frac{1}{\rho} = \rho,$$

d'où

$$\Psi_2(x+\Omega) = d_1\Psi_1(x) + \rho\Psi_2(x), \text{ pour } d_1 \in \mathbb{C}.$$

Si $d_1 = 0$, *on a le* 1^{er}*cas avec* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. *Alors on a aussi le cas i) du théoreme. Supposons que* $d_1 \neq 0$, *on définit*

$$P_1(x) = e^{-mx}\Psi_1(x).$$

et $P_1(x)$ *est périodique de période* Ω. *Aussi on définit*

$$P_2(x) = e^{-mx}\Psi_2(x) - \frac{d_1}{\rho\Omega}xP_1(x).$$

Alors

$$\begin{aligned} P_2(x+\Omega) &= e^{-m(x+\Omega)}\Psi_2(x+\Omega) - \frac{d_1}{\rho\Omega}(x+\Omega)P_1(x+\Omega) \\ &= \frac{e^{-mx}}{\rho}\{d_1\Psi_1(x) + \rho\Psi_2(x)\} - \frac{d_1}{\rho\Omega}(x+\Omega)P_1(x) \\ &= \frac{d_1}{\rho}P_1(x) + e^{-mx}\Psi_2(x) - \frac{d_1}{\rho\Omega}xP_1(x) - \frac{d_1}{\rho}P_1(x) \\ &= P_2(x). \end{aligned}$$

Alors on la partie (ii) du théoreme avec $\psi_1(x) = \Psi_1(x)$ *et* $\psi_2(x) = \frac{\rho\Omega}{d_1}\Psi_2(x)$.
D'où la preuve du théorème

Les solutions ψ_1 et ψ_2 dans Théorème (5.0.4)sont appelées les solutions Floquet de (5.1).

Remarque 5.0.1. *Ces résultats forment la base du théorie du Floquet d'équations différentielles scalaires de second ordre.*

Remarque 5.0.2. *Le cas (i) du théorème (5.0.4) se produit lorsque la matrice M a deux vecteurs propres linéairement indépendants, tandis que le cas (ii) se produit lorsque M ne fonctionne pas ont deux vecteurs propres linéairement indépendants.*

Définition 5.0.1. *On appel*

$$\Delta = \frac{1}{2}(\phi_1(\Omega) + \phi_2'(\Omega)).$$

le Floquet discriminant de l'équation (5.1). Les solutiond ρ_1 et ρ_2 de l'équation

$$\rho^2 - 2\Delta\rho + 1 = 0 \tag{5.9}$$

S'appellent les multiplicateurs Floquet de l'équation (5.1).

Définition 5.0.2. *On dit que l'équation (5.1) est*
(a) instable si tous les solutionsnon triviales sont illimitées sur $\mathbb{R}$,
(b) conditionnellement stables s'il n'y a pas de caractère trivial Solution délimitée, et
(c) stable si toutes les solutions sont délimitées.
Plus tard, nous verrons que la stabilité conditionnelle est intimement liée à le Spectre de l'opérateur généré par L, défini dans (5.1).

Remarque 5.0.3. *Il est clair que ρ est une solution de l'équation quadratique (5.9) Si et seulement si $\frac{1}{\rho}$ est une solution de (5.9).*

Remarque 5.0.4. *Une solution non triviale $\psi(x)$ de (5.1) avec la propriété $\psi(x+\Omega)$ $=\rho\psi(x)$ est borné sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $|\rho| = 1$ puisque $\psi(x+n\Omega) = \rho n\psi(x)$ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Maintenant on va démontrer la stabilité de l'équation (5.1).

Théorème 5.0.5. *Supposons que* Δ *est réel*
(i) Si $|\Delta| \langle 1$ *alors tous les solutions de* (5.1) *sont bornés dans* $\mathbb{R}$.
(ii) Si $|\Delta| \rangle 1$ *alors tous les solutions non triviales de* (5.1) *sont non-bornées dans* $\mathbb{R}$.
(iii) Si $\Delta = 1$ *alors il existe au moins une solution non triviale de* (5.1) *périodique de période* Ω. *Deplus si* $\phi_1'(x) = \phi_2(x) = 0$ *alors tous les solutions sont périodiques de période* ω. *Ainsi que si* $\phi_1'(x) \neq 0$ *où* $\phi_2(x) \neq 0$ *alors il n'existe pas deux solutions priodiques linéairement indépendants*
(iv) Si $\Delta = -1$ *alors il existe au moins une solution* ψ *non triviale de* (5.1) *qui semi-périodique de semi période* ω *(i.e* $\psi(x+\Omega) = -\psi(x)$. *De plus si* $\phi_1'(x) = \phi_2(x) = 0$ *alors tous les solutions sont semi-périodiques de semi-période* ω. *Ainsi que si*$\phi_1'(x) \neq 0$ *où* $\phi_2(x) \neq 0$ *alors il n'existe pas deux solutions semi-priodiques linéairement indépendants.*
Si Δ *n'est pas réel, alors tous les solutions non triviales de* (5.1) *sont non bornées dans* $\mathbb{R}$.

Preuve 5.0.6. *Supposons que* Δ *est réel, alors les solutions* ρ_1 *et* ρ_2 *de* (5.9) *sont écrits*

$$\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 1} \tag{5.10}$$

On observe que

$$|\rho_1| = 1 \text{ (et aussi } |\rho_2| = \frac{1}{|\rho_1|} = 1\text{) si et seulement si } |\Delta| \leq 1. \tag{5.11}$$

pour $\rho_1 = e^{it}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\phi_1(x) + \phi_2'(x)\right) = \frac{1}{2}(\rho_1 + \frac{1}{\rho_1}) = \cos t.$$

(i) : Supposons que $|\Delta| \langle 1$ *utilisons* (5.11), *il est claire que* $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ *et comme* $\rho_1 = e^{it}$ *et* $\rho_2 = e^{it}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$, *alors on a* $\Delta = \cos t$.
Comme $|\Delta| \langle 1$ *alors* t *n'est pas un multiple de* π, *et on a* $\rho_1 \neq \rho_2$. *Alors oncas (i) du théorème* (5.0.4)*avec* $m_1 = \frac{it}{\Omega}$ *et* $m_2 = \frac{-it}{\Omega}$ *(voir* (5.0.4)*), et Chaque solution de* (5.1) *est bornée sur* $\mathbb{R}$.
(ii) : Supposons $|\Delta| > 1$. *Par*(5.10)

Notons que si q a des valeurs réelle, alors $\phi_1(\Omega)$ et $\phi_2'(\Omega)$ sont réels, et donc Δ.

5.1 Le cas où $q(x) \to q(x) - z, z \in \mathbb{C}$

Dans cette section, nous introduisons un paramètre complexe z dans (5.1) et étudions le comportement asymptotique de $\Delta(z)$ quand $|z| \to \infty$.
Considérons

$$-\psi''(x) + [q(x) - z]\psi(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

où ψ, $\psi' \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ et $q \in C(\mathbb{R})$ est une fonction périodique de période $\omega > 0$. Nous savons que pour chaque $z \in \mathbb{C}$, (5.12) a les solutions $\phi_1(z,\cdot)$ et $\phi_2(z,\cdot)$ tel que

$$\begin{array}{ll} \phi_1(z,0) = 1, & \phi_2(z,0) = 0 \\ \phi_1'(z,0) = 0, & \phi_2'(z,0) = 1 \end{array} \tag{5.13}$$

Soit

$$\Delta(z) = \frac{1}{2}(\phi_1(z,\Omega) + \phi_2'(z,\Omega)).$$

Il est connu que $\phi_j(z,x),\ j = 1,2$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, ainsi que $\Delta(z)$ sont entiers fonctions de z. Ensuite, nous étudierons le comportement asymptotique de $\Delta(z)$ en utilisant le lemme suivant.

Lemme 5.1.1. *Pour $x \geq 0$ et $z \neq 0$, nous avons les bornes suivantes pour $\phi_j(z,x),\ j = 1,2$,*

$$|\phi_1(z,x)| \leq \exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x] \exp[|z|^{-\frac{1}{2}} \int_0^x dx_1 \, |q(x_1)|], \tag{5.14}$$

$$|\phi_2(z,x)| \leq |z|^{-\frac{1}{2}} \exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x] \exp[|z|^{-\frac{1}{2}} \int_0^x dx_1 \, |q(x_1)|], \tag{5.15}$$

Preuve 5.1.1. *On peut voir que $\phi_j(z,x)$ satisfont les équations intégrales suivantes*

$$\phi_1(z,x) = \cos[\sqrt{z}x] + \int_0^x dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(x - x_1)}{\sqrt{z}} q(x_1)\, \phi_1(z,x_1), \tag{5.16}$$

$$\phi_2(z,x) = \frac{\sin[\sqrt{z}x]}{\sqrt{z}} + \int_0^x dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(x - x_1)}{\sqrt{z}} q(x_1)\, \phi_2(z,x_1), \tag{5.17}$$

Notons que ces équations intégrales sont invariantes sous le changement $\sqrt{z} \longmapsto -\sqrt{z}$ on peut choisir n'importe quelle branche pour la racine carrée.
Définissez une séquence $\{u_n(z,x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions récursivement comme suit :

$$\begin{aligned} u_0(z,x) &= 0, \\ u_n(z,x) &= \cos[\sqrt{z}x] + \int_0^x dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(x - x_1)}{\sqrt{z}} q(x_1)\, u_{n-1}(z,x_1), \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Montrerons que $\lim_{n\to\infty} u_n(z,x)$ *existe et que la limite est la solution de l'équation intégrale* (5.16).

soit $v_n(z,x) = u_n(z,x) - u_{n-1}(z,x)$ *pour* $n \geq 1$. *Tout d'abord, nous prétendons que*

$$|v_n(z,x)| \leq exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x]\frac{\left(\int_0^x dx_1\,|q\,(x_1)|\right)^{n-1}}{|z|^{\frac{n-1}{2}}\,(n-1)!}, x \geq 0, n \geq 1, \tag{5.18}$$

Qui sera prouvé par l'induction.

Le cas $n = 1$ *est clair puisque* $v_1(z,x) = \cos[\sqrt{z}x]$ *Supposons que*(5.18) *se tient pour un* $n \geq 1$, *c'est-à-dire supposons*

$$|v_n(z,x)| \leq \exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x]\frac{\left(\int_0^x dx_1\,|q\,(x_1)|\right)^{n-1}}{|z|^{\frac{n-1}{2}}\,(n-1)!}, x \geq 0 \tag{5.19}$$

alors, depuis

$$v_{n+1}\,(z,x) = \int_0^x dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(x-x_1)}{\sqrt{z}} q\,(x_1)\, v_n\,(z,x_1)\,,$$

On a

$$\begin{aligned}|v_{n+1}\,(z,x)| &\leq \int_0^x dx_1 \frac{|\sin[\sqrt{z}(x-x_1)|}{\sqrt{z}}\,|q\,(x_1)|\,|v_n\,(z,x_1)| \\ &\leq \frac{\exp[|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\,x]}{|z|^{\frac{n}{2}}\,(n-1)!}\int_0^x dx_1\,|q\,(x_1)|\left(\int_0^x dx_2\,|q\,(x_2)|\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$= \exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x]\frac{\left(\int_0^x dx_1\,|q\,(x_1)|\right)^{n}}{|z|^{\frac{n}{2}}\,n!}, x \geq 0,$$

Où nous avons utilisé (5.19) dans la deuxième étape. Ainsi, par induction, (5.19) détient pour tout $n \geq 1$, et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(z,x)| &\leq \exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\int_0^x dx_1\,|q\,(x_1)|\right)^{n-1}}{|z|^{\frac{n-1}{2}}\,(n-1)!} \\ &= \exp[\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right| x]\exp[\frac{\int_0^x dx_1\,|q\,(x_1)|}{|\sqrt{z}|}].\end{aligned} \tag{5.20}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} u_n\,(z,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n\,(z,x)$$

Existe, et la solution de l'équation intégrale (5.16). Ensuite, par l'unicité de la solution, on a $\lim_{n\to\infty} u_n(z,x) = \phi_1(z,x)$ et cela prouve (5.14).
La preuve de (5.15) est similaire à la preuve (5.14), avec (5.18) remplacé par

$$|v_n(z,x)| \leq exp[\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right| x]\frac{\left(\int_0^x dx_1 \left|q\left(x_1\right)\right|\right)^{n-1}}{|z|^{\frac{n}{2}}\left(n-1\right)!}, x \geq 0, n \geq 1,$$

Théorème 5.1.1.

$$2\Delta(z) =_{|z|\to\infty} 2\cos[\sqrt{z}\Omega] + \frac{\sin[\sqrt{z}\Omega]}{\sqrt{z}}\int_0^\Omega dxq(x) + O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{z}|\,\Omega)}{|z|}\right). \quad (5.21)$$

En particulier, $\Delta(z)$ est de l'ordre $\frac{1}{2}$et de type Ω. En outre, pour chaque $w \in \mathbb{C}$, il y a un ensemble infini $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ tel que $\Delta(z_n) = w$.

Preuve 5.1.2. *D'abord, nous différencions* (5.17) *par rapport à x pour obtenir*

$$\phi_2'(z,x) = \cos[\sqrt{z}\Omega] + \int_0^\Omega dx_1 \cos[\sqrt{z}\left(x - x_1\right)]q\left(x_1\right)\phi_2\left(z,x_1\right)$$

alors on a

$$\begin{aligned}
2\Delta\left(z\right) &= \phi_1\left(z,\Omega\right) + \phi_2'\left(z,\Omega\right) \\
&= \cos[\sqrt{z}\Omega] + \int_0^\Omega dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(\Omega - x_1)]}{\sqrt{z}} q\left(x_1\right)\phi_1\left(z,x_1\right) + \cos[\sqrt{z}\Omega] \\
&\quad + \int_0^\Omega dx_1 \cos[\sqrt{z}\left(\Omega - x_1\right)]q\left(x_1\right)\phi_2\left(z,x_1\right) \\
&= 2\cos[\sqrt{z}\Omega] + \int_0^\Omega dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(\Omega - x_1)}{\sqrt{z}} q\left(x_1\right)\cos[\sqrt{z}x_1] \\
&\quad + \int_0^\Omega dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(\Omega - x_1)}{\sqrt{z}} q\left(x_1\right)\int_0^{x_1} dx_2 \frac{\sin[\sqrt{z}(x_1 - x_2)}{\sqrt{z}} q\left(x_2\right)\phi_1\left(z,x_2\right) \\
&\quad + \int_0^\Omega dx_1 \cos[\sqrt{z}(\Omega - x_1)]q\left(x_1\right)\frac{\sin[\sqrt{z}x_1]}{\sqrt{z}} \\
&\quad + \int_0^\Omega dx_1 \cos[\sqrt{z}(\Omega - x_1)]q\left(x_1\right)\int_0^{x_1} dx_2 \frac{\sin[\sqrt{z}(x_1 - x_2)}{\sqrt{z}} q\left(x_2\right)\phi_2\left(z,x_2\right) \\
&= 2\cos[\sqrt{z}\Omega] + \frac{\sin[\sqrt{z}\Omega]}{\sqrt{z}}\int_0^\Omega dx_1 q\left(x_1\right) \\
&\quad + \int_0^\Omega dx_1 \frac{\sin[\sqrt{z}(\Omega - x_1)}{\sqrt{z}} q\left(x_1\right)\int_0^{x_1} dx_2 \frac{\sin[\sqrt{z}(x_1 - x_2)}{\sqrt{z}} q\left(x_2\right)\phi_1\left(z,x_2\right) \\
&\quad + \int_0^\Omega dx_1 \cos[\sqrt{z}(\Omega - x_1)]q\left(x_1\right)\int_0^{x_1} dx_2 \frac{\sin[\sqrt{z}(x_1 - x_2)}{\sqrt{z}} q\left(x_2\right)\phi_2\left(z,x_2\right)
\end{aligned}$$

Où dans la dernière étape, nous avons utilisé le péché sin $(z_1+z_2) = sin(z_1)cos(z_2)+ cos(z_1)sin(z_2)$. *ensuite, en utilisant* (5.14) *et* (5.15) *avec*

$$\begin{aligned} & \left|\sin\left[\sqrt{z}(\Omega - x_1)\right]\sin\left[\sqrt{z}(x_1 - x_2)\right]\right| \\ \leq\; & \exp[|\operatorname{Im}\sqrt{z}|(\Omega - x_1)]\exp[|\operatorname{Im}\sqrt{z}|(x_1 - x_2)] \\ =\; & \exp[|\operatorname{Im}\sqrt{z}|(\Omega - x_2)], \quad \textit{où} \;\; 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq \Omega, \end{aligned}$$

On peut voir que

$$2\Delta(z) =_{|z|\to\infty} 2\cos[\sqrt{z}\Omega] + \frac{\sin[\sqrt{z}\Omega]}{\sqrt{z}}\int_0^{\Omega} dxq(x) + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\,\Omega)}{|z|}\right)$$

Ensuite, nous rappelons les définitions de l'ordre et le type de fonctions entières. L'ordre d'une fonction entière f *est défini comme*

$$Ordre(f) = \lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log(\log(M(r,f)))}{\log(r)}$$

avec $M(r,f) = \max\{|f(re^{i\theta})||0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ *pour* $r > 0$.
Le type de f *est défini par*

$$Type(f) = \lim_{r\to\infty}\sup r^{-ordre(f)}\log(M(r,f))$$

Si pour certains nombres réels positifs c_1, c_2, d, *nous avons* $M(r,f) \leq c_1\exp[c_2 r^d]$ *pour tous les grands* r, *alors l'ordre de* f *est inférieur ou égal à* d. *De plus,*

$$Type(f) = \inf\{K > 0|\ \textit{Pour quelques}\ r_0 > 0, M(r,f) \leq \exp[Kr^{order(f)}]\ \textit{pour tout}\ r \geq r_0\}.$$

Ainsi, les revendications sur l'ordre et le type de $\Delta(z)$ *sont claires de l'expression asymptotique* (5.21).
Enfin, pour chaque $w \in \mathbb{C}$, *l'existence d'un ensemble infini* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ *tel que* $\Delta(z_n) = w$ *découle du petit théorème de Picard qui indique que n'importe quelle fonction d'ordre non entier a un tel ensemble* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Ceci complète la preuve.

5.2 Floquet discriminant $\Delta(\lambda)$ dans le cas réel

Supposons que $q \in C([0,\Omega])$ à valeurs réelle. Dans cette section, nous examinons d'abord certains problèmes périodiques et semi-périodiques de valeurs propres. Ensuite, à l'aide de ces problèmes de valeurs propres, nous étudions le comportement de discriminant du Floquet $\Delta(\lambda)$ quand λ varie sur la ligne réelle.
Considérons le problème de valeurs propres

$$-\psi''(x) + q(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), \tag{5.22}$$

sous les conditions aux limites

$$\psi(\Omega) = \psi(0)e^{it}, \qquad \psi'(\Omega) = \psi'(0)e^{it}, \tag{5.23}$$

Avec $t \in (-\pi, \pi]$ fixe et $\psi, \psi' \in AC([0,\Omega])$. Alors, pour chaque t, le problème de valeurs propres est auto-adjoint. Les valeurs propres sont toutes réelles si elles existent. Mais l'existence de valeurs propres infiniment dénombrables est claire par le théorème (5.1.1) puisque pour chaque, $t \in (-\pi, \pi]$,

$\lambda_n(t)$ est une valeur propre réelle si et seulement si $\Delta(\lambda_n(t)) = \cos(t)$,$n \in \mathbb{N}_0$.

De plus, pour chaque $t \in (-\pi, \pi]$,

$$\{\lambda_n(t) \mid_{n\in N_0}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Delta(\lambda) = \cos(t)\} = \{\lambda_n(-t) \mid_{n\in N_0}\}$$

. En outre, on peut voir que pour chaque $t \in (-\pi, \pi]$, les valeurs propres sont bornées inferieurment puisque $\Delta(\lambda) \to \infty$ quand $\lambda \to -\infty$.
(i) Le problème périodique est le problème de valeurs propres (5.23) sous la condition aux limites (5.23) avec $t = 0$, telle que ,

$$\psi(\Omega) = \psi(0), \psi'(\Omega) = \psi'(0).$$

Donc l'ensembles des valeurs propres est infiniment dénombrables tels que

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots, \text{ et } \lambda_n \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

. (ii) Le problème des valeurs propres semi-périodique est le problème aux valeurs propres (5.22), sous la condition aux limites (5.23) avec $t = \pi$, telle que,

$$\psi(\Omega) = -\psi(0),\ \psi'(\Omega) = -\psi'(0)$$

Donc l'ensembles des valeurs propres est infiniment dénombrables tels que

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots \quad \text{et} \quad \mu_n \to \infty \ \text{ quand } \ n \to \infty$$

Ensuite, en utilisant ces problèmes de valeurs propres pour étudier le discriminant Floquet $\Delta(\lambda)$.

Théorème 5.2.1. *Supposons que $q \in \mathbb{C}([0,\Omega])$ est à valeurs réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(i) Les nombres λ_n et μ_n apparaissent dans l'ordre

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots.$$

(ii) Dans les intervalles $[\lambda_{2m}, u_{2m}]$, $\Delta(\lambda)$ diminue de 1 à -1.
(iii) Dans les intervalles $[u_{2m+1}, \lambda_{2m+1}]$, $\Delta(\lambda)$ s'accroître de -1 à 1.
(iv) Dans les intervalles $(-\infty, \lambda_0)$ et $(\lambda_{2m-1}, \lambda_{2m})$, $\Delta(\lambda) > 1$.
(v) Dans les intervalles (μ_{2m}, u_{2m+1}), $\Delta(\lambda) < -1$.

Preuve 5.2.1. *Nous donnons la preuve en plusieurs étapes.*
(a) Il existe un $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(\lambda) > 1$ si $\lambda \leq \Lambda$. De plus, $\Delta(\lambda)$ change infiniment de signe au voisinage de $+\infty$. A partir de (5.21), on voit que $\lambda \to -\infty$,

$$\Delta(\lambda) = \exp\left[|\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\Omega\right]\left(1 + O(\left(\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

puisque $\Delta(\lambda)$ est une fonction continue de λ, il existe un $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que si $\lambda \leq \Lambda$, alors $\Delta(\lambda) > 1$. En outre de (5.21), on voit que $\lambda \to \infty$,

$$\Delta(\lambda) = \cos\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\Omega\right) - \frac{\sin\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\Omega\right)}{2\,|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\Omega} dx\ q(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

Ainsi , $\Delta(\lambda)$ change infiniment de signe près de $+\infty$.
(b) $\dot{\Delta}(\lambda) \neq 0$ si $|\Delta(\lambda)| < 1$, où $\dot{\Delta}\ (\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\Delta(\lambda))$.

D' abord , nous différencions (5.22) *par rapport à.* λ *Cela donne*

$$-\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial\phi_1(\lambda,x)}{\partial\lambda})+[q(x)-\lambda]\frac{\partial\phi_1(\lambda,x)}{\partial\lambda}=\phi_1(\lambda,x).$$

En outre, à partir de $\phi_1(\lambda,0)=1$, *nous avons*

$$\frac{\partial\phi_1(\lambda,0)}{\partial\lambda}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi_1(\lambda,0)}{\partial\lambda}\right)=0.$$

Alors, on peut vérifier que

$$\frac{\partial\phi_1(\lambda,x)}{\partial\lambda}=\int_0^x dt[\phi_1(\lambda,x)\phi_2(\lambda,t)-\phi_2(\lambda,x)\phi_1(\lambda,t)]\phi_1(\lambda,t). \tag{5.24}$$

De même,

$$\frac{\partial\phi_2(\lambda,x)}{\partial\lambda}=\int_0^x dt[\phi_1(\lambda,x)\phi_2(\lambda,t)-\phi_2(\lambda,x)\phi_1(\lambda,t)]\phi_2(\lambda,t), \tag{5.25}$$

et nous différencions ce par rapport à x *pour obtenir*

$$\frac{\partial\phi_2'(\lambda,x)}{\partial\lambda}=\int_0^x dt[\phi_1'(\lambda,x)\phi_2(\lambda,t)-\phi_2'(\lambda,x)\phi_1(\lambda,t)]\phi_2(\lambda,t).$$

Ceci, avec (5.24) *donnent*

$$\begin{aligned}2\overset{\bullet}{\Delta}(\lambda) &= \int_0^\Omega dt[\phi_1'(\lambda,\Omega)\phi_2^2(\lambda,t)+(\phi_1(\lambda,\Omega)-\phi_2'(\lambda,\Omega))\phi_1(\lambda,t)\phi_2(\lambda,t) \\ &\quad -\phi_2(\lambda,\Omega)\phi_1^2(\lambda,t)]\end{aligned} \tag{5.26}$$

où

$$\phi_1=\phi_1(\lambda,\Omega),\qquad \phi_1'=\phi_1'(\lambda,\Omega),\qquad \phi_2=\phi_2(\lambda,\Omega),\ \textit{et}\ \ \phi_2'=\phi_2'(\lambda,\Omega).$$

Donc

$$W(\phi_1,\phi_2)(\Omega)=\phi_1\phi_2^{'}-\phi_1'\phi_2=1,$$

$$\Delta^2=\frac{1}{4}(\phi_1^2+2\phi_1\phi_2'+\phi\prime_2^2)=1+\frac{1}{4}(\varphi_{_1}-\phi_{_2}')^2+\phi_2\phi_1'. \tag{5.27}$$

(Multiplication (5.26) *par* ϕ_2 *et réécrirons l'équation résultante , on obtient*

$$2\phi_2 \overset{\bullet}{\Delta}(\lambda) = -\int_0^\Omega dt \left[\phi_2\phi_1(\lambda,t) - \frac{\phi_{1-}\phi_2^{'}}{2}\phi_2(\lambda,t)\right]^2 - (1-\Delta^2(\lambda))\int_0^\Omega dt\phi_2^2(\lambda,t)$$

où nous avons utilisé (5.27), *On suppose ensuite que* $|\Delta(\lambda)| < 1$. *Alors de* (**??**), *nous avons*

$$\phi_2(\lambda,\Omega)\ \overset{\bullet}{\Delta}(\lambda) < 0$$

et en particulier $\overset{\bullet}{\Delta}(\lambda) \neq 0$.
(*c*) *à un zéro* λ_n *de* $\Delta(\lambda) - 1$,

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = 0 \quad \textit{si et seulement si} \ \ \phi_2'(\lambda_n,\Omega) = \phi_1'(\lambda_n,\Omega) = 0.$$

Également si $\overset{\bullet\bullet}{\Delta}(\lambda_n) = 0$, $\ddot{\Delta}\ (\lambda_n) < 0$
Supposons que $\phi_2(\lambda_n,\Omega) = \phi_1'(\lambda_n,\Omega) = 0$. *Alors nous avons*

$$\phi_2'(\lambda_n,\Omega) = \phi_1(\lambda_n,\Omega) = 1$$

Donc, par (5.26), *nous avons* $\dot{\Delta}(\lambda_n) = 0$. *En revanche, si* $\dot{\Delta}(\lambda_n) = 0$, *par* (**??**), *nous avons*

$$2\phi_2\phi_1(\lambda,t) + (\phi_1 - \phi_2^{'})\phi_2(\lambda,t) = 0$$

Puisque $\phi_1(\lambda,t)$ *et* $\phi_2(\lambda,t)$ *sont linéairement indépendant, on obtient* $\phi_2(\lambda_n,\Omega) = 0$ *et* $\phi_2^{'}(\lambda_n,\Omega) = \phi_1(\lambda_n,\Omega)$. *Enfin, de* (5.26) *Nous en déduisons* $\phi_1^{'}(\lambda_n,\Omega) = 0$. *Ensuite, afin de prouver que* $\ddot{\Delta}(\lambda_n) < 0$ *si* $\dot{\Delta}(\lambda_n) = 0$, *on distingue* (5.26) *par rapport à* λ, *remplaçons* $\lambda = \lambda_n$, *et l'utilisation* $\phi_2(\lambda_n,\Omega) = \phi_1^{'}(\lambda_n,\Omega) = 0$ *et* $\phi_2^{'}(\lambda_n,\Omega) = \phi_1(\lambda_n,\Omega) = 1$ *pour arriver à*

$$\begin{aligned} 2\ddot{\Delta}(\lambda_n) \quad = \quad & \int_0^\Omega dt \left[\left.\frac{\partial\phi_1'(\lambda,\Omega)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n}\phi_2^2(\lambda_n,t)\right. \\ & + \left(\left.\frac{\partial\phi_1(\lambda,\Omega)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} - \left.\frac{\partial\phi_2'(\lambda,\Omega)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n}\right)\phi_1(\lambda_n,t)\phi_2(\lambda_n,t) \\ & \left. - \left.\frac{\partial\phi_2(\lambda,\Omega)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n}\phi_1^2(\lambda_n,t)\right] \end{aligned} \tag{5.28}$$

(5.28) *. Maintenant, nous utilisons* (5.24) *et*(5.25) *pour obtenir*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} &= \int_0^{\Omega} dt\phi_2(\lambda_n,t)\phi_1(\lambda_n,t),\\
\left.\frac{\partial\phi_1'}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} &= -\int_0^{\Omega} dt\phi_1^2(\lambda_n,t),\\
\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} &= \int_0^{\Omega} dt\phi_2^2(\lambda_n,t),\\
\left.\frac{\partial\phi_2'}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} &= -\int_0^{\Omega} dt\phi_1(\lambda_n,t)\phi_2(\lambda_n,t)
\end{aligned}$$

où on a utilisé de nouveau $\phi_1(\lambda_n,\Omega)=\phi_2'(\lambda_n,\Omega)=1$ *et* $\phi_1'(\lambda_n,\Omega)=\phi_2(\lambda_n,\Omega)=0$. *Ainsi,*(5.28) *devient*

$$\ddot{\Delta}(\lambda_n)=\left[\int_0^{\Omega} dt\phi_1(\lambda_n,t)\phi_2(\lambda_n,t)\right]^2-\int_0^{\Omega} dt\phi_1^2(\lambda_n,t)\int_0^{\Omega} ds\phi_2^2(\lambda_n,s)\leq 0,$$

où la dernière étape détient par l'inégalité de Schwarz. Puisque $\phi_1(\lambda_n,t)$ *et* $\phi_2(\lambda_n,t)$ *sont linéairement indépendants, nous obtenons* $\ddot{\Delta}(\lambda_n)<0$.
(*d*) *A un zéro* μ_n *de* $\Delta(\lambda)$ +1,

$$\dot{\Delta}(\mu_n)=0 \text{ si et seulement si } \quad \phi_2(\mu_n,\Omega)=\phi_1(\mu_n,\Omega)=0.$$

Également si $\dot{\Delta}(\mu_n)=0,\quad \ddot{\Delta}(\mu_n)>0$.
Nous omettons la preuve ici parce que la preuve est assez similaire au cas (*c*) *ci-dessus.*
(*e*) *À l'aide de ce qui précède* (*a*) – (*d*), *nous étudions maintenant le comportement de la fonction continue*Δ (λ) *lorsque* λ *augmente de* $-\infty$ *à* ∞. *Puisque* $\Delta(\lambda)>1$ *proche* $-\infty$ *et et puisqu'il devient négatif pour certains* λ *près de* $+\infty$, *on voit qu'il existe un* $\lambda_0\in\mathbb{R}$ *tel que* $\Delta(\lambda_0)=1$ *et* $\Delta(\lambda)>1$ *si* $\lambda<\lambda_0$. *Comme* $\Delta(\lambda)$ *ne dispose pas de son maximum local à* λ_0, *nous obtenons que* $\Delta(\lambda_0)\neq 0$, *par* (*c*). *De plus,* $\Delta(\lambda_0)<0$. *Donc, comme* λ *augmente de* λ_0, $-1<\Delta(\lambda)<1$ *jusqu'à ce que* $\Delta(\lambda)=-1$ *à* μ_0, *où* $\Delta(\lambda)$ *est diminué par* (*b*). *Donc dans l'intervalle* $(-\infty,\,\lambda_0)$, $\Delta(\lambda)>1$, *et dans* $(\lambda_0,\,\mu_0)$, $\Delta(\lambda)$ *est décroissante de* 1 *à* -1.

Si $\Delta(\mu_0) = 0$, alors $\Delta(\lambda)$ a un minimum local à μ_0 par (d), et $\Delta(\lambda) + 1$ a des zéros doubles, et par conséquent $u_1 = \mu_0$. En outre, $\Delta(\lambda) > -1$ immédiatement à droit de μ_1, et elle augmente jusqu'à ce qu'il atteigne 1 à λ_1. Si $\Delta(\mu_0) \neq 0$ (et donc $\Delta(\mu_0) < 0$), $\Delta(\lambda) < -1$ immédiatement à droite de μ_0. Donc par (a) , $\Delta(\lambda)$ change infiniment de signe près de $+\infty$, quand λ augment, $\Delta(\lambda) = -1$ de nouveau à certains μ_1 avec $\Delta(\lambda) < -1$ pour $\mu_0 < \lambda < \mu_1$. Donc $\Delta(\lambda)$ ne dispose pas de minimum locaux à μ_1, on voit par (d) que $\Delta(\lambda) > -1$ immédiatement à droite de μ_1 jusqu'à atteindre 1 à λ_1.

Un argument similaire peut être appliqué aux cas où $\Delta\ (\lambda_1) = 0$ et $\Delta\ (\lambda_1) \neq 0$. En continuant cet argument vient compléter la preuve

Définition 5.2.1. *L'ensemble*

$$S = \bigcup_{m \in N_0} ([\lambda_{2m}, u_{2m}] \cup [\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1}]) \tag{5.29}$$

est appelé l'ensemble de stabilité conditionnelle de (5.22) dans le cas où q est réelle. On peut montrer que

$$S = \bigcup_{t \in [0,\pi]} \{\lambda_m(t) \mid_{m \in \mathbb{N}_0}\}.$$

5.3 La stabilité conditionnelle et le spectre des opérateurs de Schröodinger périodiques

Dans cette section,nous prouvons le théoréme principal concernant le lien entre la théorie de floquet et le spectre associé a l'opérateur différentiel de schodinger L sur $H^{2,2}(\mathbb{R})$ défini par

$$(Lf)(x) = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right] f(x) \text{ ,} x \in \mathbb{R}, f \in Dom(L) = H^{2,2}(\mathbb{R}) \tag{5.30}$$

ou $q \in C(\mathbb{R})$ est périodique de période ω.

Théorème 5.3.1. *le spectre de L est purement contiun. c'est -à-dire, $\sigma(L) = \sigma_c(L)$ et $\sigma_p(L) = \sigma_r(L) = \phi$.*

Preuve 5.3.1. *Nous montrons d'abord que* $\sigma_p(L) = \phi$*.supposons que* L *a une valeur propre* λ *et* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *la fonction propre correspondonte.Alors, par le theoreme* (5.0.5), ψ *est non bornée (et on peut facilement montrer que* ψ *n'est pas dans* $L^2(\mathbb{R})$*), sauf si* ψ *est une multiple d'une solution floquet avec* $|p| = 1$*.Mais méme dans le cas où* ψ *est une solution floquet quand* $|p| = 1$, $\psi \notin L^2(\mathbb{R})$*. Donc* L *n'a aucune valeurs propres.*
Ensuite, nous montrons que $\sigma_r(L) = \phi$*. En effet, nous utiliserons le* (2.1.1) (iv) $(i.e,\ \sigma_r(L) \subseteq \sigma_p(L^{\star})^{cc})$, *où*

$$(L^{\star} f) = -f''(x) + \overline{q(x)} f(x)\,,\ f \in dom(L^{\star}) = H^{2,2}(\mathbb{R})\,.$$

L'argument ci-dessus montre que $\sigma_p(L) = \phi$ *peut être appliqué pour montrer que* $\sigma_p(L^{\star}) = \phi$*. Ainsi,* $\sigma_r(L) = \phi$*.*
Dans le cas général où q *est complexe, la stabilité conditionnelle* S *est défini comme suit ,*

$$S = \{z \in \mathbb{C} /\ il\ existe\ une\ distribution\ non\ trivial\ \psi \in L^{\infty}(\mathbb{R})\ \ de\ L\psi = z\psi\}$$

il n'est pas difficile de voir cela

$$S = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \Delta(z) \in [-1{,}1]\}\,.$$

voici le théoréme principale de cette section.

Théorème 5.3.2. $\sigma(L) = S$*.*

Preuve 5.3.2. *Nous montrons tout d'abord que* $S \subseteq \sigma_{ap}(L) = \sigma(L)$*.Supposons que* $\gamma \in S$*. Alors, il existe une solution non triviale* $\Psi(\gamma,\cdot)$ *de* (5.22) *telle que*

$$\psi(\gamma, x + \Omega) = \rho\psi(\gamma, x), où\ |\rho| = 1 \tag{5.31}$$

Afin de définir une suite $\{f_n\}_{n \in N}$ *comme dans la* (2.1.1) *de* $\sigma_{ap}(L)$*, nous choisissons* $g \in C^2([0{,}\Omega])$ *tel que*

$$\begin{aligned} g(0) &= 0,\ g(\Omega) = 1 \\ g'(0) &= g''(0) = g'(\Omega) = g''(\Omega) = 0, \end{aligned}$$

$0 \leq g(x) \leq 1,\ x \in [0{,}\Omega]\,.$

Définons

$$f_n(\gamma,x) = c_n(\gamma)\psi(\gamma,x)h_n(x), \;\; x \in \mathbb{R}$$

où

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; |x| \leq (n-1)\,\Omega \\ g\,(n\Omega - |x|) & si \;\; (n-1)\,\Omega\langle |x| \leq n\Omega \\ 0 & si \;\; |x|\rangle n\Omega \end{cases}$$

et la constante de normalisation $c_n(\gamma)$ *est choisie pour garantir* $\|f_n\|_{L^2(\mathbf{R})} = 1$.
De (5.31) *et la définition de* $h_n(x)$, *on voit que*

$$c_n(\gamma) = \left(2n \int_0^\Omega dx\,|\psi(\gamma,x)|^2 + O(1)\right)^{-\frac{1}{2}} \to 0 \; quand \; n \to +\infty.$$

Ensuite, en utilisant $L\psi = \gamma\psi$,

$$\begin{aligned} (L-\gamma I)f_n(x) &= -c_n(\gamma)\left[\psi^{''}(\gamma,x)h_n(x) + 2\psi^{'}(\gamma,x)h_n^{'}(x) + \psi(\gamma,x)h_n^{''}(x)\right] \\ &\quad + c_n(\gamma)\left[q(x)-\gamma\right]\psi(\gamma,x)h_n(x) \\ &= c_n h_n(x)(L-\gamma I)\psi(\gamma,x) - c_n(\gamma)\left[2\psi^{'}(\gamma,x)h_n^{'}(x) + \psi(\gamma,x)h_n^{''}(x)\right] \\ &= -c_n(\gamma)\left[2\psi^{'}(\gamma,x)h_n^{'}(x) + \psi(\gamma,x)h_n^{''}(x)\right] \end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\|(L-\gamma I)f_n\| \leq c_n(\gamma)\left[\left\|2\psi^{'}(\gamma,.)h_n^{'}(.)\right\| + \left\|\psi(\gamma,.)h_n^{''}(.)\right\|\right]$$

De (5.31) *et la définition de* h_n *on en déduit que*

$$\begin{aligned} \left\|\psi^{'}(\gamma,.)h_n^{'}(.)\right\|^2 &= \int_{(n-1)\Omega \leq |x| \leq n\Omega} dx\left|\psi^{'}(\gamma,x)h_n^{'}(x)\right|^2 \\ &= \int_0^\Omega dx\left[\left|\psi^{'}(\gamma,\text{-}x)\right|^2 + \left|\psi^{'}(\gamma,x)\right|^2\right]|g'(x)|^2 \\ &= {}_{n\to+\infty}0\,(1)\,. \end{aligned}$$

De même, on peut montrer que

$$\left\|\psi(\gamma,.)h_n^{''}(.)\right\|_{n\to+\infty} = 0(1).$$

Alors, puisque $c_n(\gamma) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *nous avons*

$$\|(L-\gamma I)f_n\| \to 0 \; quand \; n \to \infty$$

Comme $\|f_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on voit que* $\gamma \in \sigma_{ap}(L)$. *alors* $S \subseteq \sigma_{ap}(L) = \sigma(L)$. *Ensuite, pour montrer que* $\sigma(L) \subseteq S$, *nous supposons que* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}\backslash S$. *alors* $\Delta(z) \in C\backslash[-1,1]$.

Tout d'abord, nous notons que puisque $\rho_+(\mathbf{z}) \neq \rho_-(\mathbf{z})$ *nous avons par Théorème* (5.0.4) (i) *que*

$$\psi_+(\mathbf{z},x) \ = e^{-m(\mathbf{z})x} \ p_+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}), \qquad \psi_-(\mathbf{z},x) \ = e^{m(\mathbf{z})x} \ p_-(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$$

où $\mathrm{Re}(m(z)) > 0$ *et* $p_\mp(z,.)$ *sont périodiques de période* ω. *Par conséquent*

$$\psi_\pm(\mathbf{z},.) \in L^2((R,\pm\infty)) \quad ,R \in \mathbb{R}$$

$$\psi_\pm(\mathbf{z},x+\Omega) = e^{\mp m(\mathbf{z})\Omega} \ \psi_\pm(z,x), \ \left|e^{\mp m(\mathbf{z})\Omega}\right| = \left|\rho_\pm(\mathbf{z})\right| \neq 1.$$

Définissons la fonction de Green $G(\mathbf{z},x,x^{'})$ *par*

$$G(\mathbf{z},x,x^{'}) = W(\psi_+,\psi_-)^{-1} \begin{cases} \psi_+(\mathbf{z},x)\psi_-(\mathbf{z},x') & si \ x' \leq x \\ \psi_+(\mathbf{z},x')\psi_-(\mathbf{z},x) & si \ x' \geq x \end{cases}$$

Alors, nous allons montrer que

$$(R(z)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} dx^{'} G(\mathbf{z},x,x^{'}) f(x^{'}) dx^{'}, \qquad f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

est un opérateur borné dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

On remarque que

$$|(R(z)f)(x)| \leq \frac{K^2}{\left|W(\psi_+,\psi_-)\right|}(G_1(x) + G_2(x)),$$

où K *est un borne supérieure de* $\left|\rho_\pm(z,x)\right|$, $x \in \mathbb{R}$ *et*

$$G_1(x) = e^{-m_0 x} \int_{-\infty}^{x} dx^{'} e^{m_0 x^{'}} \left|f(x^{'})\right|,$$

$$G_2(x) = e^{m_0 x} \int_{x}^{\infty} dx^{'} e^{-m_0 x^{'}} \left|f(x^{'})\right|, \ \ f \in L^2(R),$$

où $m_0 = \mathrm{Re}(m(z)) \geq 0$.

Voir [[1], page 84] pour la preuve de

$$\|G_1\| \leq \frac{1}{m_0} \|f\|. \tag{5.32}$$

Ici, nous allons montrer que

$$\|G_2\| \leq \frac{1}{m_0} \|f\| .$$

Nous suivrons les mêmes démarches de la démonstration de (5.32) *dans* [[*1*], *page* 84]. *Pour tout* $X < Y$, *une intégration par partie donnent*

$$\begin{aligned}
\int_X^Y dx G_2^2(x) &= \int_X^Y dx . e^{2m_0 x} (\int_x^\infty dx' e^{-m_0 x'} \left| f(x') \right|)^2 \\
&= \left[\frac{e^{2m_0 x}}{2m_0} (\int_x^\infty dx' e^{-m_0 x'} \left| f(x') \right|)^2 \right]_Y^X + \frac{1}{m_0} \int_X^Y dx e^{m_0 x} |f(x)| (\int_x^\infty dx' e^{-m_0 x'} \left| f(x') \right|) \\
&\leq \frac{1}{2m_0} G_2^2(Y) + \frac{1}{m_0} \left[\int_X^Y dx G_2^2(X) \int_X^Y dx |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2m_0} G_2^2(Y) + \frac{1}{m_0} \left[\int_X^Y dx G_2^2(X) \right]^{\frac{1}{2}} \|f\| . \tag{5.33}$$

Preuve 5.3.3. *De même,*

$$\begin{aligned}
G_2(Y) &= e^{m_0 Y} \int_Y^\infty dx' e^{-m_0 x'} \left| f(x') \right| \\
&\leq e^{m_0 Y} \left[\int_Y^\infty dx e^{-2m_0 x} \int_Y^\infty dx |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e^{m_0 Y} \left[\frac{1}{2m_0} e^{-2m_0 Y} \int_Y^\infty dx |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $Y \to \infty, G_2(Y) \to 0$, *et donc en faisant* $X \to -\infty$ *et* $Y \to +\infty$ *dans*(5.33), *on voit que* $0 < \|G_2\| < \infty$ *et donc*

$$\|G_2\| \leq \frac{1}{m_0} \|f\| .$$

Ensuite, nous montrons que

$$(L - zI)R(z)f \ = f \quad pourtous \ f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{5.34}$$

$$R(z)(L - zI)f \ = f \quad pourtous \ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap H^{2.2}(\mathbb{R}). \tag{5.35}$$

D'abord, soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. alors,

$$\begin{aligned}
-W(\psi_+,\psi_-)\frac{d^2}{dx^2}\left[R(z)f\right](x) &= -\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{x} dx^{'}\psi_+(z,x)\psi_-(z,x^{'})f(x^{'}) + \int_{x}^{+\infty} dx^{'}\psi_+(z,x^{'})\psi_-(z,x) \\
&= -\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x} dx^{'}\psi_+^{'}(z,x)\psi_-^{'}(z,x)f(x^{'}) + \int_{x}^{+\infty} dx^{'}\psi_+(z,x^{'})\psi_-^{'}(z,x)f(x^{'})\right] \\
&= W(\psi_+,\psi_-)f(x) \\
&\quad -\left[\int_{-\infty}^{x} dx^{'}\psi_+^{''}(z,x)\psi_-(z,x^{'})f(x^{'}) + \int_{x}^{+\infty} dx^{'}\psi_+(z,x^{'})\psi_-^{''}(z,x)f(x^{'})\right] \\
&= W(\psi_+,\psi_-)f(x) \\
&\quad +(z-q(x))\left[\int_{-\infty}^{x} dx^{'}\psi_+(z,x)\psi_-(z,x^{'})f(x^{'}) + \int_{x}^{+\infty} dx^{'}\psi_+(z,x^{'})\psi_-(z,x\right. \\
&= W(\psi_+,\psi_-)f(x) + W(\psi_+,\psi_-)(z-q(x))\int_{\mathbf{R}} dx^{'}G(z,x,x^{'})f(x^{'}).
\end{aligned}$$

Cela prouve (5.34)*. De même, on peut montrer* (5.35)*. Ainsi, $(L - zI)^{-1}$ existe et est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.*
Par conséquent,

$$z \in \varrho(L) = C\backslash\sigma(L)$$

ce qui démontre que $\sigma(L) \subseteq S$.

Avant de présenter notre prochain théorème, nous décrivons d'abord certaines définitions

Définition 5.3.1. *Un ensemble $\sigma \subset \mathbb{C}$ est un arc s'il existe $\gamma \in \mathcal{C}([a,b]), a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ tel que $\sigma = \{\gamma(t)|t \in [a,b]\}$. alors, nous appelons γ un paramétrage de l'arc σ. L'arc σ est appelé simple s'il a un paramétrage injectif. Et l'arc σ est appelé un arc analytique s'il a un paramétrage $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ tel que $t \to \gamma(t)$ est analytique sur $[a,b]$.*

Théorème 5.3.3. *L'ensemble de stabilité conditionnelle S. telque,*

$$S = \sigma(L) \subset \{z \in \mathbb{C}/M_1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq M_2, \mathrm{Re}(z) \geq M_3\}$$

où

$$M_1 = \inf_{x\in[o,\Omega]}\left[\mathrm{Im}(q(x))\right], \; M_2 = \sup_{x\in[o,\Omega]}\left[\mathrm{Im}(q(x))\right], M_3 = \inf_{x\in[o,\Omega]}\left[Re(q(x))\right].$$

Ensuite, nous fournissons, sans preuves, des résultats supplémentaires de Tkachenko [[9],[10]].

Théorème 5.3.4. *[[9], Theorem 1]Pour qu'une fonction Δ soit un Floquet discriminant de l'opérateur L dans* (5.30) *avec $q \in L^2([0,\Omega])$, il est nécessaire et Suffisant que ce soit une fonction entière du type exponentiel Ω de la forme*

$$\Delta(z) = \cos(\Omega\sqrt{z}) + \frac{Q}{\sqrt{z}}\sin(\Omega\sqrt{z}) - \frac{Q^2}{2z}\cos(\Omega\sqrt{z}) + \frac{f(\sqrt{z})}{z}$$

pour certains $Q \in \mathbb{C}$. où f est une fonction entière de type exponentiel n'excédant pas Ω satisfaisant les conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,|f(\lambda)|^2 < +\infty, \qquad \sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)| < +\infty$$

Théorème 5.3.5. *([[9], Theorem 2])Pour tout opérateur L de potentiel $q \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ périodique de période Ω et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un potentiel $q \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ périodique de période Ω tel que $\|q - q_\varepsilon\|_{L^2([0,\Omega])} \leq \varepsilon$ et le spectre de l'opérateur de Schröodinger périodique correspondant L_ε dans $L^2(\mathbb{R})$ de potentiel q_ε est l'union d'arcs analytiques* ***non-insectants****. Chaque arc spectral est injectif sur l'intervalle $[-1, 1]$ par le discriminant Floquet Δ_ε de L_ε.*

De plus, voir [10] pour certains résultats concernant la correspondance injectif entre classes d'opérateurs L avec $q \in_{L^2([0,\Omega])}$ et certaines surfaces de Riemann.
En conclusion, la théorie du Floquet est un outil très important pour étudier la stabilité des solutions des équations différentielles linéaires. Nous pouvons appliquer la théorie de Floquet à certaines équations différentielles de la physique ou de la biologie, telles que les équations de population et les équations de transport.

Bibliographie

[1] M. S. P. Eastham, The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, London, 1973.

[2] F. Gesztesy,Floquet Theory,Lecture Notes, Fall 1993.

[3] H. G. Heuser,Functional Analysis,Wiley, New York, 1982.

[4] E. L. Ince,Ordinary Differential Equations,Longmans, Green and Co.Ltd., New York, 1927.

[5] W. Magnus and S. Winkler,Hill's Equation,Dover, New .York, 1979.

[6] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis, rev. and enlarged ed., Academic Press, New York, 1980.

[7] F. S. Rofe-Beketov, The spectrum of non-selfadjoint differential operators with periodic coefficients,Sov.Math. Dokl.4, 1563–1566, 1963.

[8] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions associated with Second Order Differential Equations, Part II, Oxford University Press, Oxford,1958.

[9] V. A. Tkachenko, Discriminants and Generic Spectra of Nonselfadjoint Hill's Operators, Adv. Sov. Math., A. M. S.19,41–71, 1994.

[10] V. A. Tkachenko, Spectra of non-selfadjoint Hill's Operators and a class of Riemann surfaces, Ann. Math., 143,181–231, 1996

[11] J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces,Springer, New York, 1980