République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Etude de quelques équations fractionnaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Aibout Samir[1]

Sous la direction de

M^{me} **F.Z.Mostefai**

Soutenue le 23 Mai 2017 devant le jury composé de

S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : admaibout1982@yahoo.com

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère :Halima, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père :Benaissa, qui peut étre fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

à tous mes proches de la famille Aibout, et plus particulièrement, mes soeurs et mes fréres tout à son nom et sans oublier la familles Bouzouira.

Mes fréres et soeurs qui n'ont cessé d'étre pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mon encadreur qui ma guidais durant tout ma recherche.

Mes professeurs de l'universitée "Dr.Moulay Taher à saida" qui doivent voir dans ce travail la fiertée d'un savoir bien acquis.

Tout qui mon donne de l'aide et des courages surtout : Mr. Djebbouri .

Touts mes amis qui ont toujours présenté pour moi.

Tous les étudiants du département de mathématique surtout mes amis de la promotion.

Samir

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon Dieu, notre créateur de nous avoir donn ? la force, la volontée et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.
J'adresse le grand remerciement à notre encadreur Mme F.Z.Mostefai, Maitre de conférences à l'universitée de Saida, qui a proposé le théme de ce mémoire, pour ses conseils du début à la fin de ce travail.
Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fais en acceptant de siéger à mon soutenance, tout particulièrement :
Mr.S.Ouakkas pour m'avoir fais l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
Je souhait exprimer notre gratitude à Mr.S.Abbas et Mme.N.Bekkouche pour avoir accepter d'examiner ce mémoire. Je vous remercie pour l'intéret que vous avez portez ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.
Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tout ce qui ont participé à réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondements de ce type de calcul (Voir les références [15], [22], [24], [27], [29], [33]), mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu un plus large intérêt ; voir les ouvrages ([25], [29], [33], [35]). Le calcul fractionnaire a un champ d'applications très vaste, ($voir$[14], [18], [19], [22], [27]), par exemples : viscoélasticité, théorie du contrôle, équation de diffusion, électricité, électromagnétique, biologie . . . Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de Benchohra et AL [7], [8], [10] et Byszewski et AL [11], [12], [13]. Notre travail est réparti en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de travail. Dans Le deuxième chapitre on présente quelques résultats d'existences et d'unicité de solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On considère les deux problèmes suivants :(2.1),(2.2),(2.3) Pour le troisième chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions de problème aux limites avec conditions non locales en utilisant l'approche de point fixe via les théorèmes de Banach et Schaefer, Ensuite on traite le problème aux limites avec conditions non locales dans le cas suivant :(3.1),(3.2)

Chapitre 1

Priliminaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élimentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telle que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaires, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, lemmes et théorème qui seront utilisés les chapitre suivants :

1.1 Notions et définitions

Soit $J := [0, T], T > 0$, Notons $C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme,

$$\|Y\|_\infty = sup\{|y(t)| : t \in J\},$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.
Soit $J := [0, T], T > 0$, et $\gamma \in \mathbb{R} \quad (0 \leq \gamma < 1)$. On introduit l'espace à poids $C_\gamma[0, T]$ des fonction f définies sur $[0, T]$, tel que la fonction $x^\gamma f(x) \in C[0, T]$ et

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|x^\gamma f(x)\|_c, \quad C_0[0, T] = C[0, T].$$

On note par $AC^1(J, E)$, l'espace de banach des fonctions dérivables $f : J \mapsto E$ dont la première dérivée est absolument continue.

Définition 1.1.1. *[37] Une fonction $f : J \mapsto E$ est dite absolument continue si pour* *tout* $\varepsilon \geq 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition finie* $[a_i, b_i]_{i=1}$ *vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i) < \delta$$

alors

$$\sum_{i=1}^{p} \|y(b_i) - y(a_i)\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, et* $A : E \mapsto F$ *une application linéaire. on dit que A est bornée si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

Définition 1.1.3. *Soient E et F deux espaces de banach, et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compacte dans F. f est dit compacte si f(E) est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.4. *Soit* $(\mathbb{K}, d)$ *un espace métrique et F un espace véctoriel normée, on dit qu'une partie* $A \subset C(\mathbb{K}, F)$ *est équicontinue si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\alpha(\varepsilon) > 0$ *telque pour tout* $f \in A$.

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

pour tout $x, y \in \mathbb{K} \quad tq \quad d(x, y) < \alpha(\varepsilon)$.

Définition 1.1.5. *Soient E un espace de banach et* $A : E \mapsto E$ *un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante* $0 \leq K < 1$ *telle que*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq K\|x - y\|_E, \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Définition 1.1.6. *Soit E un espace de banch muni de la norme* $\|.\|$ *et* $T : E \mapsto E$ *une application. un élément x de E est dit point fixe de T si Tx=x.*

Définition 1.1.7. *Soit f une fonction définie sur* $[0, +\infty)$*, f est dit d'ordre exponentielle* $\alpha, (\alpha > 0)$ *s'il existe une constante positive K et* $T > 0$*, telle que*

$$\forall \quad t > T \quad on\, a \quad |f(t)| \leq Ke^{\alpha t}.$$

Définition 1.1.8. *Soit* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ *une fonction localement intégrable sur* $[0, +\infty)$*, et d'odre exponentiel* α*.*
la transformée de laplace de la fonction f *est l'application* L *définie par*

$$L(f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t), \quad p \in \mathbb{C} \quad avec\ Re(p) > \alpha.$$

1.2 Éléments de calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions gamma, béta, ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction gamma

l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définit par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

avec $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$ une propriéte importante de la fonction gamma $\Gamma(z)$ est la relation de recurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

qui on peut la démontrer par un intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

La fonction béta

La fonction $\beta(p, q)$ est la fonction béta (ou intégrale eulerienne de première espèce), définie par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx \quad p > 0, q > 0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale euclidienne de première et seconde espèce :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad Re(p) > 0, Re(q) > 0$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaires nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Lionville.

Définition 1.2.1. *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a,b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$, est définie par*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

où Γ est la fonction gamma. lorsque a=0 nous écrivons

$$I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$$

ou

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \textit{pour } t > 0$$

$\varphi_\alpha(t) = 0$ *pour* $t \leq 0$ *et* $\varphi_\alpha \mapsto \delta$, *quand* $\alpha \mapsto 0$.

Théorème 1.2.1. *Pour $h \in [a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Lionville possède la propriété de semi groupe*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta h(t)) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) \quad \textit{pour} \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Preuve supposons d'abord que $h \in L^1[a,b]$ on a

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha (I_a^\beta h)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta h)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-x)^{\beta-1} h(x) dx ds \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini permet donc d'ecrire :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta h)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t h(x)[\int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} ds] dx$$

en effectuent le changement de variable

$$s = x + (t-x)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

On obtient

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta h)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t h(x)(t-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dx$$

enfin on obtient la relation

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta h)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t h(x)(t-x)^{\alpha+\beta-1} dx = (I_a^{\alpha+\beta} h)(x) \square$$

Propriéte Nous avons les propriétés suivantes :

- $I_a^0 h(t) = h(t)$.
- L'operateur intégrale I_0^α est linéaire.

Exemple 1.2.1. *Soit* $h(t) = (t-a)^m$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^m ds \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ *on obtient*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha h(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-x)^{\alpha-1} x^m ds \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+m+1)} \end{aligned}$$

D'ou

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{m+\alpha}$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieures définitions de dérivées fractionnaires, malheuresement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Lionville et de Caputo qui sont les plus utilisées.

1.2.4 Approche de Riemann-Lionville

Définition 1.2.2. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'odre α (avec $n-1 \leq \alpha < n$) au sens de Riemann-Lionville est definie par :*

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t)) \end{aligned}$$

1.3 Propriétés

1.3.1 Composition avec l'integrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Lionville est un inverse gauche de l'opérateur d'integration fractionnaire :

$$D^\alpha(I^\alpha f(t)) = f(t)$$

En génerale on a

$$D^\alpha(I^\beta f(t)) = D^{\alpha-\beta} f(t)$$

et si $\alpha - \beta < 0, \quad D^{\alpha-\beta}f(t) = I^{\beta-\alpha}f(t)$.

En génerale la dérivation et l'integration fractionnaire ne commutent pas

$$D^{-\alpha}(D_t^\beta f(t)) = D^{\beta-\alpha}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[D_t^{\beta-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

avec $m-1 \leq \beta < m$.

1.3.2 Composition avc les dérivées d'ordre entier

La derivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entier) ne comutent que si
$f^k(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\frac{d^n}{dt^n}(D^\alpha f(t)) = D^{n+\alpha} f(t) \tag{1.1}$$

mais

$$D^\alpha \frac{d^n}{dt^n}(f(t)) = D^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} \tag{1.2}$$

1.3.3 Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1 \leq \alpha < n \quad et \qquad n-1 \leq \beta < n$, alors

$$D^\alpha(D_t^\beta f(t)) = D^{\alpha+\beta}(f(t)) - \sum_{k=1}^{m} [D_t^{\beta-k}(f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

et

$$D^\beta(D_t^\alpha f(t)) = D^{\alpha+\beta}(f(t)) - \sum_{k=1}^{m} [D_t^{\alpha-k}(f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}$$

Par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire D^α et D^β $(\alpha \neq \beta)$, ne commutent que si $[D^{\beta-k} f(t)]_{t-=a}$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, et $[D^{\alpha-k} f(t)]_{t-=a}$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

1.4 Exemples

1.4.1 La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

En génerale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Lionville n'est pas nulle ni constante , mais on a

$$D^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

1.4.2 La Dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville

soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha \quad et \quad \beta > -1$, alors on a

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau$$

En faisont le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\beta(n-\alpha,\beta+1}{\Gamma(n-\alpha}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

1.4.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.4.1. *Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a,b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f, d'ordre $\alpha > 0$ est définie par*

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds,$$

ici $n = [\alpha] + 1$ *et* $[\alpha]$ *désignant la partie entière de* α. *Par exemple, pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow E$ *une fonction est absolument continue alors la dérivée d'ordre fractionnaire* α *de* f *existe.*

Propriétés

1- La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}^{c}_{\alpha}D^{\alpha}_{t} f(t)$ et ${}^{RL}_{\alpha}D^{\alpha}_{t} f(t)$ existent alors

$$ {}^{c}D^{\alpha} f(t) =^{RL} D^{\alpha} f(t) - \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} $$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura ${}^{c}D^{\alpha} f(t) =^{RL} D^{\alpha} f(t)$.

2- Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire Si f est une fonction continue on a

$$ {}^{c}D^{\alpha} I^{\alpha}_{a} f = f \, et \, I^{\alpha c}_{a} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!} $$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples

1.La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}^{c}D^{\alpha} C = 0. $$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Caputo Soit n un entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ avec $\alpha > n - 1$, alors on

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau-a)^{\beta-n}, $$

D'où

$$ {}^{c}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau $$

en effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
{}^cD^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle de Riemann-Liouville

- L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $x = a$.
- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo et que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Lioville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.
- Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens Riemann-Liouville, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

1.5 Quelques théorèmes de point fixe

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.5.1. (*Banach*) *[20]*

Soient X un espace de Banach, et $A : X \longrightarrow X$ *un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique.*
ie $\exists! u \in X$ *tel que* $Au = u$.

Théorème 1.5.2. (*Schauder*) *[38]*

Soient (E, d) *un espace metrique complet, soit X une partie convexe et fermé de E, et soit* $A : X \longrightarrow X$ *une application telle que l'ensemble* $\{Ax : x \in X\}$ *est relativement compacte dans E.*
Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.5.3. (*Schaefer*) *[20],[21]*

Soient X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ *un opérateur completement continu. Si l'ensemble*

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u, \, pour\, un\, certain\, \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné.
Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.5.4. (*Ascoli − Arzel*) *[21]*

Soit A un sous ensemble de $C(J, E)$ *, A est relativement compacte dans* $C(J, E)$ *, si et seulement si les conditions suivants sont vérifiées :*

1. *L'ensemble A est borné .i.e il existe une constante* $K > 0$ *tel que :*

$$\|f(x)\| \le K.$$

   $pour\, tout\, x \in J\, et\, f \in A.$

2. *L'ensemble A est équicontinue i.e pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \le \varepsilon.$$

   $pour\, tout\, t_1, t_2 \in J\, et\, f \in A$

3. *Pour tout* $x \in J$ *l'ensemble* $\{f(x), f \in A \subset E\}$ *est relativement compacte.*

1.6 Lemmes fondamentaux

Lemme 1.6.1. *[39] Soit $\alpha > 0$,alors l'équation différentielles*

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet les solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1$.

Preuve Supposons que

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = 0,$$

D'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-\alpha}(\frac{d}{dt})^n h(t) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} (\frac{d}{dt})^n h(s) ds = 0,$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} (\frac{d}{dt})^n h(s) ds = 0$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1} * h^{(n)}(s) = 0.$$

On applique la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L(t^{n^{-\alpha-1}} * h^{(n)}(t))(p) = L(0)(p) = 0$$

posant $H(p) = L(h)(p)$ on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{p^{n-\alpha}} (p^n H(p) - \Sigma_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{(k-1)}(0)) = 0$$

alors

$$p^n H(p) - \Sigma_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{(k-1)}(0) = 0$$

donc

$$H(p) = \Sigma_{k=1}^{n} p^{-k} h^{(k-1)}(0),$$

appliquant maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(H(p))(t) = L^{-1}(\Sigma_{k=1}^{n} p^{-k} h^{(k-1)}(0))(t)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} h(t) &= \Sigma_{k=1}^{n} h^{(k-1)}(0) L^{-1}(p^{-k})(t) \\ &= \Sigma_{k=1}^{n} h^{(k-1)}(0) . \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$h(t) = \Sigma_{i=0}^{n-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

pour $c_i = \frac{h_i(0)}{i!}$ on a

$$h(t) = \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

Supposons maintenant que

$$h(t) = \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha h(t) &= {}^c D^\alpha (\Sigma_{i=0}^{n-1} c_i t^i) \\ &= \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i^c D^\alpha t^i \\ &= \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} (\frac{d}{dt})^n t^i \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n - 1 < n)$ on a :

$${}^c D^\alpha h(t) = 0.$$

Ce qui achéve la démonstration.□

Lemme 1.6.2. *[39] Soit* $\alpha > 0$ *, alors*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, 2, ..., n-1,\ n = [\alpha] + 1.$

Chapitre 2

Problémes aux limites pour des equations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \, \forall t \in J = [0, T] \; 0 < \alpha < 1; \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo,$f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,une fonction continue,a,b,c sont des constantes réelle avec $a + b \neq 0$.

Dans la deuxiéme section, nous examinerons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \, \forall t \in J = [0, T] \; 1 < \alpha < 2; \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans la troisiéme section , nous examinerons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \, \forall t \in J = [0, T] \; 1 < \alpha < 2; \\ y(0) = y_0, \quad \acute{y}(0) = y_1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Oùf est comme dans le problème (2.1),(2.2).
Pour le premier on présentera deux résultats d'existence , le premier est basé sur le théorème de point fixe de Banach et le second sur le théorème de point fixe de Schaefer,ces résultats sont dus à Benchohra et AL [8] . Pour le deuxième et le troisiéme problème nous présenterons un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe par Schauder [2] .

2.1 Problème aux limites dans le cas $0 < \alpha < 1$

Dans cette section, on va étudier le problème (2.1) :

2.1.1 Existence des solutions

On commence par donner la définition d'une solution du problème (2.1)

Définition 2.1.1. *Une fonction* $y \in \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R})$ *est dite solution du problème (2.1) si* y *satisfait l'équation* ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ *sur* J *et la condition* $ay(0) + by(T) = c$.

Pour l'existence de la solution du problème (2.1), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *soit* $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Une fonction* y *est une solution de l'équation fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} [\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c] \tag{2.4}$$

si et seulement si y *est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T], \tag{2.5}$$

$$ay(0) + by(T) = c \tag{2.6}$$

Preuve Supposons d'abord que y est solution de (2.4) c'est à dire :

$$y(t) = I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b} [bI^\alpha h(T) - c]$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t &= {}^cD^\alpha (I^\alpha h(t) - \underbrace{\frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]}_{k} \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) - D^\alpha(k) \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) \end{aligned}$$

et d'aprés les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$${}^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t).$$

Ce que montre (2.5)i.e :

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c], \\ y(T) = I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= a[I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]] + b[I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]] \\ &= \frac{ac}{a+b} - \frac{ab}{a+b}[I^\alpha h(T)] + \frac{ab}{a+b}[I^\alpha h(T)] + \frac{bc}{a+b} \\ &= \frac{ac}{a+b} + \frac{bc}{a+b} \\ &= c. \end{aligned}$$

Ce que montre (2.6) i.e :

$$y(0) + by(T) = c$$

Inversement : supposons que y est solution de problème (2.1) :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t) \ , t \in [0, T] \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases}$$

D'aprés le lemme 1.6.2 on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha y(t) &= y(t) + c_0 \\ &= I^\alpha h(t) \\ y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) - c_0 \\ y(T) = I^\alpha h(T) - c_0. \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

Donc(2.6)

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad a(-c_0) + [\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c_0] &= c \\ \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{a+b}[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds] &= c_0 \end{aligned}$$

Alors :

$$y(t) = I^\alpha h(t) + \frac{1}{a+b}[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds] \qquad \square$$

On va donner un premier résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.1.1. *Suposons que :*

(H1)Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \le k|u - \overline{u}|, \, pour \, tout \, t \in J, toutu\overline{u} \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{kT^\alpha(1 + \frac{|b|}{|a+b|})}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.7}$$

alors, le problème (2.1) admet une solution unique définie sur $[0,T]$

Preuve On va transformer le problème (2.1) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$\mathbf{F} : \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$$

défini par :

$$\mathbf{F}(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \frac{1}{a+b}[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - c] \tag{2.8}$$

IL est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (2.1). F est bien défini, en effet : si $y \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$,alors,$(Fy) \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$. Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en effet, si $x, y \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,\mathrm{x}(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,\mathrm{x}(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad + \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{kT^\alpha(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty \\
\|F(x) - F(y)\|_\infty &\leq \frac{kT^\alpha(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

En vertu de (2.7), on peut déduire que F est une contraction, et d'aprés le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est solution du problème (2.1).□

Notre deuxième résultat pour le problème (2.1) est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 2.1.2. *Suposons que :*

(H1)La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H3)Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f(t,u)| \leq M \, pour \, tout \, t \in J \, et \, tout \, u \in \mathbb{R}.$$

alors, le problème admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve

Etape1 :F est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $\mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y, c'est à dire :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_n - y\|_\infty = 0.$$

il faut montrer que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$. Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\quad - \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha} [\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds] \\
&\leq \frac{T^\alpha (1 + \frac{|b|}{|a+b|}) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

Puisque f est continue alors,

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha (1 + \frac{|b|}{|a+b|}) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}$$

le deuxiemme membre de l'inégalité tend vers 0 alors F est continue.

Etape 2 :L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $\mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive l telle que pour tout $y \in B_{\eta^*}$ $B_{\eta^*} = \{y \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}) \, \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$, on a $\|F(y)\|_\infty \leq l$. Par $(H3)$ on a pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\|F(y)\|_\infty &\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} := l
\end{aligned}$$

Etape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $\mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2, B_{\eta^*}$ un ensemble borné de $\mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]ds \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} [(t_2-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^\alpha - t_2^\alpha)
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F. D'aprés l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzèlà, $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*} , c'est à dire F est complétement continu, et d'aprés l'étape 1 F est continu. Par conséquent $F : \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complétement continu .

Etape4 : Maintenant, il reste à montre que $E = \{y \in \mathbf{C}(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \; pour \; 0 < \lambda < 1\}$ est borné. Soit $y \in E$, alors $y = \lambda F(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c]]$$

Alors d'aprés $(H3)$ et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&+\frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} := R$$

Cela montre que E est borné. D'aprés le théorème de point fixe de Schaefer, On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.1).□

Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illuster l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$^c\mathrm{D}^\alpha = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)},\ t \in J := [0,1],\ \alpha \in [0,1] \tag{2.9}$$

$$y(0) + y(1) = 0 \tag{2.10}$$

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)},\ (t,x) \in J \times [0,\infty).$$

Soit $x, y \in [0, \infty)\, ett \in J$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|\frac{x}{(1+x)} - \frac{y}{1+y}| \\
&= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^t)(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

Alors la condition $H1$ est vérifée avec $k = \frac{1}{10}$. On doit vérifier que la condition est satisfaite pour des valeurs appropriées de $\alpha \in [0,1]$ avec $a = b = T = 1$. En effet

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1 > \frac{3k}{2} = 0.15 \tag{2.11}$$

Alors d'aprés le théorème de contraction de Banach, le problème (2.9),(2.10) a une seule solution sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaisant .

2.2 Problème aux limites dans le cas $1 < \alpha \leq 2$

Dans cette section , on va étudier le problème (2.2) :

2.2.1 Existence des solutions

Dans cette section on est concerné par l'éxistence des solutions du problème (2.2). On commence par donner la définition d'une solution du problème (2.2).

Définition 2.2.1. *Une fonction $y \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème si y satisfait l 'équation ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ et les conditions $y(0) = y_0$. et $y(T) = y_T$*

Pour l'existence de la solution du probléme (2.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit $1 < \alpha < 2$ et Soit $h : \mathrm{C}[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale d'ordre fractionnaire*

$$y(t) = I^\alpha h(t) + y_0 - \frac{t}{T}.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{y_T - y_0}{T}t \tag{2.12}$$

si et seulement si y est une solution du problème (2.2).

$$^C D^\alpha y(t) = h(t) \quad t \in J \tag{2.13}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y(T) = y_T \tag{2.14}$$

Preuve supposons d'abord que y est une solution du probléme (2.13) c'est à dire : d'une part on a :

$$\begin{aligned} ^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha (y_0 + I^\alpha h(t) - \frac{t}{T} I^\alpha h(t) + \frac{y_T - y_0}{T} t.) \\ &= {}^cD^\alpha (y_0) +^c D^\alpha I^\alpha h(t) \\ &\quad + D^\alpha \frac{t}{T} \underbrace{(-I^\alpha h(t) + y_T - y_0)}_{k} \\ &= {}^cD^\alpha (y_0) +^c D^\alpha I^\alpha h(t) +^c D^\alpha \frac{t}{T} k \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) \end{aligned}$$

et d'aprés les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$$^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t).$$

Ce que montre (2.13) i.e :

$$^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 + I^\alpha h(0), \\ y(T) = y_0 + I^\alpha h(T) - \frac{T}{T} I^\alpha h(t) + \frac{y_T - y_0}{T} T.. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y(T) = y_0 + y_T - y_0. \end{cases}$$

Ce qui montre (2.14)

$$y(0) = y_0 \quad y(T) = y_T$$

Inversement : supposons que y est solution de problème :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \; y(T) = y_T. \end{cases}$$

D'aprés le lemme 1.6.2 on a :

$$\begin{array}{rcl} I^\alpha D^\alpha y(t) & = & y(t) + c_0 + c_1 t \\ & = & I^\alpha h(t) \\ y(t) & = & I^\alpha h(t) + y_0 + y_1 t \end{array}$$

De plus on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) + y_0 \\ y(T) = I^\alpha h(T) + y_0 + y_1 T. \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

$$\textit{Donc } (2.14) \iff \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{y_T - y_0}{T}. \end{cases}$$

Alors :

$$y(t) = I^\alpha h(t) + y_0 - \frac{t}{T} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{y_T - y_0}{T} t \qquad \square$$

Supposons que $G(t, s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, \; 0 \leq s \leq t \leq T; \\ -\frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, \; 0 \leq t \leq s \leq T \end{cases} \tag{2.15}$$

tel que :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s) h(s) ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)}{T} t. \tag{2.16}$$

Remarque 2.2.1. *La fonction $t \in J \longrightarrow \int_0^T |G(t,s)|ds$ est continue sur J, et est donc bornée.*
Soit

$$\hat{G} = \sup\{\int_0^T |G(t,s)|ds,\, t \in J\}$$

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe Schauder.

Théorème 2.2.1. *Supposons que*

$(H1)$ *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

$(H2)$ *Elles existent deux fonction $\rho \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R}_+)$, et$\Psi \in [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ continues et non décroissantes. Telles que*

$$|f(t,u)| \leq \rho(t)\Psi(|u|),\, pour\, t \in J \;\; et \;\; tout \;\; u \in \mathbb{R}.$$

$(H3)$ *Il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\frac{M}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho^* \Psi(M)\hat{G} + |y_0| + |y_T - y_0|} \geq 1 \tag{2.17}$$

où $\rho^* = \sup \rho(s),\ s \in J$

Preuve Soit $\mathrm{C} = \{y \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R}), \|y\|_\infty \leq M\}$.Où M est la constante donnée par $(H3)$.il est clair que le sous-ensemble C est fermé et convexe. Nous allons montrer que F satisfait les conditions du théorème de point fixe de Schauder.
Etape 1 :F est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $\mathrm{C}(J, \mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t \in J$.

$$|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t,s)||f(s, y_n) - f(s, y(s))|ds$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que.

$$\|F(y_n) - F(y)(t)\|_\infty \longrightarrow 0\, lorsque\ n \longrightarrow \infty$$

Etape 2 : $F(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C}$

Soit $y \in$ C. On va montrer que $Fy \in$ C. Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
(|Fy)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T |G(t,s)||f(s,y)(s))|ds \\
&\quad +|y_0| + \frac{|y_T - y_0|}{T}|t| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho^*\Psi(\|y\|_\infty)\hat{G} \\
&\quad +|y_0| + |y_T - y_0| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho^*\Psi(M)\hat{G} \\
&\quad +|y_0| + |y_T - y_0| \\
\|Fy\|_\infty &\leq M.
\end{aligned}$$

D'aprés l'équation (2.17), on trouve :

$$\|Fy\|_\infty \leq M.$$

Etape 3 : F transforme C en un ensemble équicontinue deC$(J,\mathbb{R})$. Soit $y \in$ C $t_1, t_2 \in J\, t_1 < t_2\,; alors$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T |G(t_2,s)|f(s,y)(s))ds \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T |G(t_1,s)|f(s,y)(s))ds| \\
&\quad +|\frac{y_T - y_0}{T}t_2 - \frac{y_T - y_0}{T}t_1| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)||f(s,y)(s))|ds \\
&\quad +\frac{y_T - y_0}{T}|t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

quand $t_1 \longrightarrow t_2$. Le membre à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par le théorème d'Ascoli-Arzélà, N(C) est relativement compact pour tout borné de F. Alors N est complétement continu.

Par suite , on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème aux limite(2.2).$\square$

2.3 Problème à valeur pour le cas $\alpha \in]1,2[$

Dans cette section, on va étudier le problème (2.3) :

2.3.1 Existence de solutions

Définition 2.3.1. *Une fonction $y \in AC^1(I,E)$ est une solution du problème (2.3) si y satisfait l'équation ${}^cD^\alpha y(t) = f(t,y(t))$ sur I, et les conditions$y(0) = y_0$ et $\acute{y}(0) = y_1$.*

Lemme 2.3.1. *Soit $\alpha \in]1,2[$ et soit $h : I \longrightarrow E$ continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$y(t) = y_0 + y_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \tag{2.18}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites :

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t), \forall\, t \in I = [0,T] \tag{2.19}$$

$$y(0) = y_0, \acute{y}(0) = y_1. \tag{2.20}$$

Preuve : *par le lemme1.6.2 , on réduit le problème à une équation intégrale équivalente :*

$$\begin{array}{rclcrcl} {}^cD^\alpha y(t) & = & h(t) & \Longleftrightarrow & y(t) & = & I^r h(t) + c_0 + c_1 t. \\ & & & & y(t) & = & \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \\ & & & & & & +c_0 + c_1 t \end{array}$$

avec c_0 et c_1 des constantes dans E, Les conditions $y(0) = y_0$ et $\acute{y}(0) = y_1$. donnent :

$$c_0 = y_0.$$

$$c_1 = y_1.$$

donc on a (2.18) :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + y_0 + y_1 t$$

Inversement , si y satisfait l'équation intégrale, on aura :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &\quad + y_0 + y_1 t \\ {}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha y_0 +^c D^\alpha y_1 t \\ &\quad +^c D^\alpha I^r h(t). \end{aligned}$$

donc , on a :(2.19)

$$^cD^\alpha y(t) = h(t)$$

et : (2.20)

$$y(0) = y_0, \acute{y}(0) = y_1.\square$$

Afin d'établir le résultat principale concernant l'existence de solutions du probléme, considérons les conditions suivantes sur la fonction f.

Théorème 2.3.1. *Supposons que*

$(H1)$ *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

$(H2)$ *Elles existent deux fonction $\rho \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R}_+)$, $et \Psi \in [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ continues et non décroissantes. Telle que*

$$|f(t,u)| \leq \rho(t)\Psi(|u|), \, pour \, t \in J \quad et \quad tout \quad u \in \mathbb{R}.$$

$(H3)$ *Il existe une constante $r_0 > 0$ telle que*

$$\frac{r_0}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho^*\Psi(r_0)T^\alpha + |y_0| + |y_1|T} \geq 1 \tag{2.21}$$

où $\rho^* = \sup \rho(s)$, $s \in J$

On transforme le problème(2.18) en un problème au point fixe, en considérant l'opérateur :

$$N \ : \ \mathrm{C}(I,E) \longrightarrow \mathrm{C}(I,E)$$

$$y \longrightarrow N(y)(t) = y_0 + y_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds$$

Clairement, les points fixes de l'opérateur N sont des solutions pour le problème.
on considére $y \in \mathrm{C}(I,E)$, $\|y\|_\infty \leq r_0$ il est clair que l'ensemble C est fermé, borné et convexe.

But

On doit montrer que N satisfait les hypothèses du théorème

La preuve se fait en trois étapes :

Preuve

Etape 1 : Continuité de N

Soit $y_n$une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $\mathrm{C}(I,E)$.Alors , $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned}
\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s,y_n(s)) \\
&\quad - f(s,y(s)))ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)))\| ds
\end{aligned}$$

Puisque f est de continue, et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on aura :

$$\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\|_\infty \longrightarrow 0 \, quand \, n \longrightarrow \infty.$$

Etape 2 : $N(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C}$ $\forall y \in \mathrm{C}$ et $\forall t \in I$ par $(H2)$ et , on a :

$$\begin{aligned}
\|N(y)(t)\| &\leq \|y_0 + y_1 t\| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|(f(s,y(s))\| ds \\
&\leq \|y_0\| + \|y_1\| T \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \rho(s) \|y(s)\| ds \\
&\leq \|y_0\| + \|y_1\| T \\
&\quad + \frac{\alpha_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \rho(s) ds \\
&\leq \|y_0\| + \|y_1\| T + \frac{\alpha_0 \rho^*}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \|y_0\| + \|y_1\| T + \frac{\alpha_0 \rho^* T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\
&\leq \|y_0\| + \|y_1\| T + \frac{\alpha_0 \rho^* T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\
&\leq r_0
\end{aligned}$$

Etape 3 : Bornitude et équicontinuité de $N(\mathrm{C})$

Par l'étape 2, il est évident que $N(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C}(I, E)$ est borné.

Pour l'équicontinuité de $N(\mathrm{C})$, soit $t_1, t_2 \in\in I$ avec $t_1 < t_2$ et $y \in \mathrm{C}$, alors :

$$\begin{aligned}
\|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)\| &\leq \|y_1 t_2 - y_1 t_1\| \\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\leq \|y_1\| (t_2 - t_1) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) \|f(s, y(s)\| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \|(f(s, y(s)\| ds \\
&\leq \|y_1\| (t_2 - t_1) \\
&\quad + \frac{\alpha_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) \rho(s) ds \\
&\quad + \frac{\alpha_0}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \rho(s) ds
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité tend vers 0.

D'où l'équicontinuité de $N(\mathrm{C})$.

Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, N(C) est relativement compact dans C .

En appliquant de théorème de point fixe de Schauder, on conclue que N admet un point fixe qui est solution du problème (2.3).$\square$

Chapitre 3

Problèmes aux limites avec conditions non locales

Dans ce chapitre on présente quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales.

On considère les deux problèmes suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))\, \forall t \in J = [0, T]\, 0 < \alpha < 1; \\ y(0) + g(y) = y_{0.}. \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))\, \forall t \in J = [0, T]\, 0 < \alpha < 1; \\ y(0) = g(y)\, y(T) = y_T. \end{cases} \tag{3.2}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Ce type de problème a été introduit par le mathématicien polonais L.Byszewski, il a remarqué que la condition non locale est trèsappropriée que la condition locale (initiale)p our décrire correctement des phénomènes physiques [11], il a prouvé l'existence et l'unicité des solutions faibles et aussi des solutions classiques pour ce genre de problèmes.

Dans ce chapitre on présente quelques résultats d'existence et d'unicité [11],[12],[13] en s'appuyant sur les théorèmes de point fixe de Banach et de schaefer

3.1 Problèmes aux limites avec conditions non locales dans le cas $0 < \alpha < 1$

Dans cette section, on va étudier le probléme (3.1) :

3.1.1 Existence de solution

On commence par la définition du problème (3.1) .

Définition 3.1.1. *Une fonction $y \in \mathrm{C}^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.1) si elle satisfait l'équation ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur J et la condition $y(0) + g(y) = y_0$.*

Pour l'éxistence de la solution du problème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire.*

$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \tag{3.3}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$ {}^cD^\alpha y(t) = h(t)\, t \in [0, T] \tag{3.4}$$

$$y(0) + g(y) = y_0 \tag{3.5}$$

Preuve Supposons d'abord que y est une solution du problème

$$y(t) = I^\alpha h(t) + y_0 - g(y)$$

d'une part on a :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t &= {}^cD^\alpha(I^\alpha y(t) + \underbrace{y_0 - g(y}_{k} \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha y(t) +^c D^\alpha(k) \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha y(t) \end{aligned}$$

et d'aprés les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$$ {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t)$$

ce qui montre (3.4) i.e :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t)$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^{\alpha}h(0) + y_0 - g(y); \\ g(y) = g(y). \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} y(0) - g(y) &= I^{\alpha}h(0) \\ &\quad + y_0 - g(y) + g(y) \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Ce qui montre (3.5)i.e :

$$y(0) + g(y) = y_0.$$

Inversement : supposont que y est solution de problème :

$$\begin{cases} ^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t)\, t \in [0, T]; \\ y(0) + g(y) = y_0. \end{cases}$$

D'aprés le lemme 1.6.2 on a :

$$I^{\alpha}D^{\alpha}y(t) = y(t) + c_0$$

$$= I^{\alpha}h(t)$$

$$y(t) = I^{\alpha}h(t) - c_0$$

De plus on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^{\alpha}h(0) - c_0; \\ g(y) = g(y). \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^{\alpha}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds$$

Donc

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad I^{\alpha}h(0) + c_0 + g(y) \\ &\qquad\quad = y_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad c_0 = y_0 - g(y) \end{aligned}$$

Alors :

$$y(t) = I^{\alpha}h(t) + y_0 - g(y). \ \Box$$

on va donner un premier résultat concernant l'existence de la solution du problème (3.1), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Introduisons les hypothèses suivantes :

1. (H1)Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq k|u - \bar{u}| \, pour \, tout \, t \in J, \;\; et \;\; tout \;\; u, \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

2. (H2)Il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(t,u)| \leq M \, pour \, tout \, t \in J \;\; et \;\; tout \;\; u, \in \mathbb{R}.$$

3. (H3)Il existe une constante $\bar{M} > 0$ telle que :

$$|g(y)| \leq \bar{M} \, pour \, tout \, u \in \mathrm{C}([0,T], \mathbb{R})$$

4. (H4)Il existe une constante $\bar{k}$ telle que :

$$|g(y) - g(\bar{y})| \leq \bar{k}|y - \bar{y}|, \;\; pour \;\; tout \;\; y, \bar{y} \in \mathrm{C}([0,T], \mathbb{R}).$$

Théorème 3.1.1. *Soit $f \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$ et supposons que (H1),(H4)sont satisfait si :*

$$\bar{k} + \frac{KT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.6}$$

alors le problème non local admet une solution unique sur $[0, T]$.

Preuve On transforme le problème en un problème du point fixe. Considérons l'opérateur $\tilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ définie par

$$\tilde{F}(y)(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \tag{3.7}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur $\tilde{F}$ sont les solutions du problème (3.1). Il reste à montrer que $\tilde{F}$ est une contraction, en effet : si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$,

alors, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(x)(t) - \tilde{F}(y)(t)| &= |g(x) - g(y) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(f(s,x(s) - f(s,y(s))ds| \\ &\leq |g(x) - g(y)| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|(f(s,x(s) - f(s,y(s))|ds, \end{aligned}$$

par (H1),(H4) :

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(x)(t) - \tilde{F}(y)(t)| &\leq \bar{k}\|x-y\|_\infty \\ &\quad + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \bar{k}\|x-y\|_\infty \\ &\quad + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty, \end{aligned}$$

et par suite :

$$\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\|_\infty \leq (\bar{k} + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)})\|x-y\|_\infty.$$

En vertu de (3.6). On peut déduire que $\tilde{F}$ est une contraction, et d'après le théorème de Banach, $\tilde{F}$ admet un seul point fixe qui est une solution du problème(3.1).□

Maintenant nous donnons un résultat de l'existence basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.1.2. *Soit $f \in C(J,\mathbb{R})$ et supposons que (H2),(H3) sont satisfaites. Alors, le problème(3.1) admet au moins une solution sur $[0,T]$.*

Preuve On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que $\tilde{F}$ défini par (3.7) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape1 :$\tilde{F}$ est continu.

Soit y_n une suite telle que $y \longrightarrow y$ dans C$([0,T],\mathbb{R})$, alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}|\tilde{F}(y_n)(t) - \tilde{F}(y)(t)| &\leq |g(y_n) - g(y)| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\ &\leq |g(y_n) - g(y)| \\ &\quad + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty\end{aligned}$$

Puisque f et g sont continues, alors $\|\tilde{F}(y_n) - \tilde{F}(y)\|_{\infty \longrightarrow 0}$ quand $n \longrightarrow 0$, d'où la continuité de $\tilde{F}$.

Etape2 : $\tilde{F}(B_{\eta^*})$ est borné.

$$\begin{aligned}|\tilde{F}(y)(t)| &\leq |y_0| + |g(y)| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\ &\leq |y_0| + \tilde{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha\end{aligned}$$

Donc

$$\|\tilde{F}(y)\|_\infty \leq |y_0| + \tilde{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha \doteqdot \tilde{l}$$

et par suite $\tilde{F}(B_{\eta^*})$ est borné.

Etape3 :L'image de tout borné par $\tilde{F}$ est un ensemble équicontinue de C$([0,T],\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}|\tilde{F}(y)(t_2) - \tilde{F}(y)(t_1)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds|\end{aligned}$$

Et comme l'étape 3 du théorème $\tilde{F}$ est équicontinue. Par un raisonnement pareil $\tilde{F} : \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complément continu.

Etape4 :

Il reste à montrer que $\bar{E} = \{y \in \mathrm{C}(J,\mathbb{R})\, y = \lambda\bar{F}(y)\, pour\, 0 < \lambda < 1\}$ est borné

Soit $y \in \bar{E}$, alors $y = \lambda\tilde{F}(y)$;pour $0 < \lambda < 1\}$.Donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda[y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds].$$

Alors,d'aprés(H2),(H3), et pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{array}{rcl} |\tilde{F}y(t)| & \leq & |y_0 + g(y) \\ & + & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds| \\ & \leq & y_0| + \tilde{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha. \end{array}$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\|\tilde{F}(y)\|_\infty \leq |y_0| + \tilde{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha \doteqdot \bar{R}$$

Cela montre que $\bar{E}$ est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que $\tilde{F}$ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.1).□

3.2 Problème aux limites avec conditions non locales dans le cas $1 < \alpha < 2$

Dans cette section , on va étudier le problème (3.2) :

3.2.1 Existence de solution

On commence par la définition du problème (3.2) .

Définition 3.2.1. *Une fonction $y \in \mathrm{C}^2(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème si y satisfait l'équation ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur J, et les conditions $y(0) = g(y)\, y(T) = y_T$.*

Pour l'existence des solutions du problème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit $1 < \alpha < 2$ et soit $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire suivante*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - (1 - \frac{t}{T})g(y) + \frac{t}{T} y_T \tag{3.8}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites :

$${}^cD^\alpha y(t) = h(y(t))\, t \in J \tag{3.9}$$

$$y(0) = g(y) \;\; y(T) = y_T \tag{3.10}$$

Preuve supposons d'abord que y est une solution de c'est à dire :

$$y(t) = I^\alpha h(t) - \frac{1}{T} I^\alpha h(T) - (\frac{t}{T} - 1)g(y) + \frac{t}{T} y_T$$

d'un part, on a :

$$\begin{aligned}
{}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha (I^\alpha h(t) - \underbrace{\frac{t}{T} I^\alpha h(T)}_{k} \\
&\quad -(\frac{t}{T} - 1)g(y) + \frac{t}{T} y_T) \\
&= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) -{}^c D^\alpha(k) \\
&\quad -{}^cD^\alpha(\frac{t}{T} - 1)g(y) +{}^c D^\alpha(\frac{t}{T} y_T) \\
&= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t)
\end{aligned}$$

et d'aprés les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$$^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t)$$

ce qui montre (3.9) i.e :

$$^cD^\alpha y(t) = h(t)$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) + g(y) = g(y); \\ y(T) = I^\alpha h(T) - \frac{t}{T} I^\alpha h(T) + (\frac{t}{T} - 1)g(y) + \frac{t}{T} y_T = y_T. \end{cases}$$

Ce qui montre (3.10)

Inversement : supposons que y est une solution de problème

$$\begin{cases} ^cD^\alpha y(t) = h(t) t \in [0, T] \\ y(0) = g(y) \; y(T) = y_T. \end{cases}$$

D'aprés le lemme 1.6.2 on a

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

ils restent à trouver c_0, c_1. on a

$$y(0) = c_0$$

or d'aprés la condition non locale

$$y(0) = g(y)$$

on obtient

$$c_0 = g(y)$$

d'autre part

$$\begin{aligned} y(T) &= g(y) + c_1 T \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ c_1 T &= y(T) - g(y) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \end{aligned}$$

c'est à dire

$$c_1 = \frac{1}{T}y(T) - \frac{1}{T}g(y) - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

Par suite on a l'équation (3.8)

$$\begin{aligned} y(t) &= g(y) + \frac{1}{T}y(T) - \frac{t}{T}g(y) \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &- \frac{1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &- (\frac{t}{T}-1)g(y) + \frac{t}{T}y_T \qquad \square. \end{aligned}$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.2), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Soient les hypothèses suivantes

(H1)La fonction $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
(H2) Il existe une constante $k > 0$ tel que

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq k|u-\bar{u}|, \textit{ pour chaque } t \in J, \textit{ et pour tout } u, \bar{u} \in \mathbb{R}$$

(H3)Il existe une constante $\bar{k}$ telle que

$$|g(y) - g(\bar{y})| \leq \bar{k}|y-\bar{y}|, \textit{ pour chaque } y, \bar{y} \in \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}).$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que (H2) et (H4) sont satisfaites et si*

$$\frac{2kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{k} < 1 \tag{3.11}$$

alors, le problème (3.2) admet une solution unique sur J.

Preuve On transforme le problème(3.8) en un problème du point fixe. Considérons l'opérateur

$$F_3 : \mathrm{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{C}(J,\mathbb{R})$$

défini par :

$$F_3(y)(t) == \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - (\frac{t}{T}-1)g(y) + \frac{t}{T}y_T \tag{3.12}$$

F_3 est bien défini, en effet si $y \in \mathrm{C}(J,\mathbb{R})$ alors $(F_3y) \in \mathrm{C}(J,\mathbb{R})$.

Pour montrer que F_3 admet un point fixe il suffit de montrer que F_3 est une contraction, en effet si $x, y \in \mathrm{C}(J,\mathbb{R})$pour tout $t \in J$,alors

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t) - F_3(x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}||f(s,y(s)) - f(s,x(s))|ds \\
&+\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}||f(s,y(s)) - f(s,x(s))|ds \\
&+|\frac{t}{T} - 1||g(y) - g(x)| \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}|ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}|ds + |g(y) - g(x)| \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha \\
&+\frac{k\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \bar{k}\|x-y\|_\infty \\
&\leq (\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{k})\|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|F_3(y) - F_3(x)\|_\infty \leq (\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{k})\|x-y\|_\infty$$

Donc F_3 est une contraction et d'après le théorème de Banach (3.11) F_3 admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.2).$\square$

Notre deuxième résultat d'existence des solutions est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.2.2. *Supposons que les hypothèses (H1),(H2)et l'hypothèses suivante :*

(H5)Il existe une constante $M_3 > 0$, telle que

$$|g(u)| \leq M_3, \, pour\, chaque\, u \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R}).$$

sont satisfaites.

Alors le problème aux limites a au moins une solution sur J.

Preuve On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F_3 défini par admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.
Etape1 :F_3 est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $\mathrm{C}([0,T], \mathbb{R})$. convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y, c'est à dire :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_n - y\|_\infty = 0.$$

il faut montrer que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|F_3(y_n) - F_3(y)\|_\infty = 0$.Pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
|F_3(y_n)(t) - F_3(y)(t)| \leq \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}||f(s, y_n(s)) - f(s, x(s))|ds \\
& + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}||f(s, y_n(s)) - f(s, x(s))|ds \\
& + |\frac{t}{T} - 1||g(y_n) - g(y)| \\
\leq \; & \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in [0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, x(s))|ds \\
& + \frac{T}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in [0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, x(s))|ds \\
& + |\frac{t}{T} - 1||g(y_n) - g(y)| \\
\leq \; & \frac{\|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\
& + |g(y_n) - g(y)|
\end{aligned}$$

Puisque f et g sont continues, alors $\|F_3(y_n) - F_3(y)\|_\infty \longrightarrow 0$,quand $n \longrightarrow 0$, d'où la continuité de F_3 .

Etape2 : L'image de tout ensemble borné par F_3 est un ensemble borné dans $\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive l telle que pour tout $y \in B_{\eta^*}$, $B_{\eta^*} = \{y \in \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}).\ \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$, on a $\|F_3\|_{\infty \leq l}$. Par (H2)-(H5) on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}||f(s,y(s))|ds \\
&\quad + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&\quad + |\frac{t}{T} - 1||g(y) + \frac{|t|}{T}|y_T \\
&\leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad + \frac{|t|(M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2)}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&\quad + |g(y)| + y_T \\
&\leq \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + M_3 + y_T
\end{aligned}$$

donc

$$\|F_3(y)\|_\infty \leq \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + M_3 + y_T \doteqdot l,$$

et par suite $F_3 B_{\eta^*}$ est borné.

Etape3 : Limage du tout borné F_3 est une ensemble équicontinu de $\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R})$.. Soient $t_1, t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$ B_{η^*} un ensemble borné de $\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R})$. et soit$y \in B_{\eta^*}$.

Alors

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t_2) - F_3(y)(t_1)| &\leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]ds \\
&\quad + \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad + \frac{(t_2-t_1)(M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad + (\frac{t_2-t_1}{T})M_3 + (\frac{t_2-t_1}{T})y_T \\
&\leq \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^{\alpha} + t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha}] \\
&\quad \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha} \\
&\quad + \frac{T^{\alpha}(M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2)}{T\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1) \\
&\quad + (\frac{t_2-t_1}{T})M_3 + (\frac{t_2-t_1}{T})y_T \\
&\leq \frac{2(M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2)}{T\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha} \\
&\quad + \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{T\Gamma(\alpha+1)}(t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha}) \\
&\quad + (\frac{T^{\alpha-1}(M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2)}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M_3 + y_T}{T})(t_2-t_1)
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0. d'où la continuité de F_3.

D'aprés l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà $F_3(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F_3 est complètement continu, et d'aprés l'étape 1 , F_3 est continu. Par conséquent $F_3 : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape4 : Maintenant, il reste à montrer que $E = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F_3(y)\, pour\, 0 < \lambda < 1\}$ est borné. Soit $y \in E$, alors $y = \lambda F_3(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$. On a

$$y(t) = \lambda[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - (\frac{t}{T}-1)g(y) + \frac{t}{T}y_T],$$

alors, d'après (H2)-(H5), et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&+\frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&+|\frac{t}{T}-1)||g(y)|+\frac{|t|}{T}y_T] \\
&\leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}}+M_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&+\frac{|t|(M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}}+M_2)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds+|g(y)|+y_T \\
&\leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}}+M_2{}^{\alpha}}{T}\alpha\Gamma(\alpha) \\
&\quad \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}}+M_2{}^{\alpha}}{T}\alpha\Gamma(\alpha)+M_3+y_T.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}}+M_2{}^{\alpha}}{T}\alpha\Gamma(\alpha)+\frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}}+M_2{}^{\alpha}}{T}\alpha\Gamma(\alpha)+M_3+y_T := R$$

Cela montre que E est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que F_3 admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.2).$\square$

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec conditions aux limites. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach, Schaefer et Schauder.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, S. Arshad, D.O'Regan, V. Lupulescu, Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition., Fract. Calc. Appl., 15 (2012), 572-590.

[2] R.P. Agarwal, M. Benchohra, J.Nieto et A.Ouhab, Fractional Differantial Equations and Inclusions , Springer 2010

[3] R.P. Agarwal. A propos d'une note de M. Pierre Humbert, C. R. Académie des sciences , 236, 2031-2032(1953).

[4] S.Abbas, M. Benchohra and A N. Vityuk,On fractional order derivatives and Darboux problem for implicit differential equations , Frac. Calc. Appl. Anal. 15., (2012), 168-182.

[5] A. Babakhani and V. Daftardar-Gejji, Existence of positive solutions for multi-term nonautonomous fractional differential equations with polynomial coefficients. Electron. J. Differential Equations 2006, No. 129, 12 pp.

[6] M. Belmekki and M. Benchohra, Existence results for Fractional order semilinear functional differential equations, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 146 (2008), 9-20.

[7] M. Benchohra, J.R. Graef and S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, Appl. Anal. 87 (7) (2008), 851-863.

[8] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[9] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas and A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338 (2) (2008), 1340-1350.

[10] M. Benchohra and F.Ouaar, Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions , Math. Anal and Appl 2 (2010), 7-15.

[11] L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 494-505.

[12] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem. Selected problems of mathematics, 25-33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ. Technol, Krakow, 1995

[13] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[14] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering IIComputational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[15] A. M. A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. Fract. Calc. 7 (1995), 89-100.

[16] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 2. McGraw-Hill, New York (1955).

[17] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 3. McGraw-Hill, New York (1955).

[18] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mech. Systems Signal Processing 5 (1991), 81-88.

[19] W. G. Glockle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, Biophys. J. 68 (1995), 46-53.

[20] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[21] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[22] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[23] E.R. Kaufmann and E. Mboumi, Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2007, No. 3, 11 pp.

[24] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differential Equations 41 (2005), 84-89.

[25] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[26] V. Lakshmikantham , S.Leela and J. Vasundhara , Theory of fractional Dynamical Systems. Cambridge Academic Publishers. Cambridge, 2009.

[27] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

[28] F. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, J. Chem. Phys. 103 (1995), 7180-7186.

[29] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, 1993.

[30] G. M. Mittag-Leffler.Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. C. R. Académie des Sciences.$137, 554 - 558(1903)$.

[31] G. M. Mittag-Leffler.Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogéne. Acta Mathematica . 29,101-182 (1905).

[32] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, 1974.

[33] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[34] X. Su and L. Liu, Existence of solution for boundary valiue problem of nonlinear fractional differential equation, Appl. Math. 22(3) (2007), 291-298

[35] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[36] L. Schwartz, Theorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.

[37] K. Yosida, Functional Analysis, Spring-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[38] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems Spring- Verlag, New York, 1986.

[39] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional diffrential equations, Electron. J. Diff. Equ. 2006, No. 36, pp, 1-12.

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach, Schaefer et Schauder.