République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Calculs stochastiques sur les processus de Dirichlet

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique des Processus et Aplication

par

NEDJADI **I**kram [1]

Sous la direction de

Pr A.KANDOUCI

Soutenu le 22 Mai 2017 devant le jury composé de

Mme. F.MOKHTARI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Mr. A.KANDOUCI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr. M.KADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme. S.RAHMANI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : ikram.nedjadi@yahoo.com

Remerciements

Au début et avant tout, je rends grâce à **Dieu** tout puissant qui m'a aidé à terminer ce travail, Merci pour me guider .

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à **Pr.A.KANDOUCI** d'avoir bien voulu encadré ce travail et pour les conseils efficaces et les encouragements et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.

En outre, je reste et resterai fort reconnaissant à Dr.F.Mokhtari qui me fera honneur de présider ce jury, ainsi qu'a Mr.M. Kadi et Dr.S. Rahmani d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce jury.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes professeurs pour leurs conseils et leurs critiques et d'avoir guidé mes réflexions en acceptant à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi, vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je vous aime.

Je remercie mon frère, et mes soeurs pour leur encouragement, et Je remercie ma famille pour son soutien.
Enfin, je remercie tous mes Ami(e)s que j'aime tant, Pour leur sincère amitié et confiance.

Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs voeux et sentiments à toute ma famille,

en particulier mes parents.

Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception.

Table des matières

Introduction **11**

1 Généralité sur les processus aléatoires **13**

1.1 Définitions de base 13

1.2 processus de Dirichlet et processus de Dirichlet faible 16

1.2.1 processus de Dirichlet 16

1.2.2 Processus de Dirichlet faible 16

1.3 Décomposition de Fukushima-Dirichlet 23

1.3.1 La décomposition pour les fonctions $\mathrm{C}^{0,1}$ 24

1.3.2 La décomposition pour fonctions $C^{\frac{1}{2}+\gamma,1}$ 28

2 calcul stochastique par les processus de Dirichlet **31**

2.1 Fonctions des processus Dirichlet 31

2.2 Fonctionnalités des processus de Dirichlet 45

2.3 Intégrale stochastique pour des processus de Dirichlet 48

2.4 Etude approfondie de l'intégrale stochastique 60

3 Applications **67**

3.1 Classes de volatilité 67

3.2 Commutation en régime Markovien avec Dirichlet préalable. Application à la modélisation du prix des actions 68

3.2.1 Commutation en régime Markovien avec Dirichlet préalable : 68

3.2.2 Estimation 70

3.2.3 Modification de l'ensemble de données observées 71

3.2.4 La procédure d'échantillonnage de Gibbs 72

Introduction

DAns la théorie des probabilités, les processus de Dirichlet (après Peter Gustav Lejeune Dirichlet) est une famille de processus stochastiques dont les réalisations sont des distributions de probabilité. En d'autres termes, un processus de Dirichlet est une distribution de probabilité dont la gamme est elle-même un ensemble de distributions de probabilité. Il est souvent utilisé dans l'inférence bayésienne pour décrire les connaissances antérieures sur la répartition des variables aléatoires : il est probable que les variables aléatoires soient réparties selon une ou une autre distribution particulière.

Le calcul stochastique via régularisation est essentiellement connue dans le cas des intégrateurs continu X, voir par exemple [[26]], [[30]], avec un sondage dans [[31]]. Dans ce cas, une théorie assez complète a été développée, voir, par exemple des formules pour des processus avec des variations quadratiques finies (et plus générales), des équations stochastiques différentielles, une formule de type Ito-Wentzell [[12]] et des généralisations au cas des intégrateurs de type espace Banach, voir par exemple [[7]].

La notion de covariation $[X, Y]$ (ou variation quadratique $[X, X]$) pour deux processus X, Y (resp. Un processus X) a été introduite dans le cadre de régularisations (voir [[28]]) et de discrétisation aussi (voir [[13]]). Même s'il n'y a pas de théorème direct reliant les deux approches, ils coïncident dans tous les exemples considérés dans la littérature. Si X est un processus continu de variation quadratique finie, une formule Itô a été prouvée pour l'expansion de $F(X_t)$, lorsque $F \in C^2$, voir [[28]] ; Cela constitue la contrepartie du résultat connexe pour les discrétisations, voir [[13]]. En outre, pour F de classe C^1 et X une semi-martingale réversible, une extension de l'existence a été établie dans [[29]].

Lorsque F est moins régulière que C^1 , la formule d'Itô peut être remplacée par une décomposition de Fukushima-Dirichlet pour le processus de Dirichlet faible X (par rapport à une filtration donnée (F_t)). La notion de processus de Dirichlet est une généralisation familière du concept de semimartingale et a été introduite par [[29]] et [[2]] dans le cadre de la discrétisation. L'analogique de la décomposition de Doob-Meyer pour un processus de Dirichlet est que c'est la somme d'une martingale locale M et d'un processus adapté A avec une variation quadratique nulle. Ici, A est la généralisation d'un processus de variation bornée.

Cependant, l'exigence de A pour avoir une variation quadratique nulle impose que A soit continue, car un processus de variation bornée avec des sauts a une variation quadratique finie non nulle, la généralisation de la semimartingale dans le cas de saut n'est pas nécessairement représentée par la notion de processus de Dirichlet.

Une généralisation naturelle devrait au moins inclure la possibilité que A soit un processus de variation bornée avec des sauts. Le concept de (F_t) - processus Dirichlet faible a été introduite ensuite dans [[9]] et [[15]] pour un procédé continu X, et les applications de contrôle stochastique ont été considérées dans [[14]]. Un tel processus est défini comme la somme d'une martingale locale M et d'un processus adapté A tel que $[A, N] = 0$ pour chaque martingale locale continue N.
Cette notion se révèle être une généralisation correcte de la notion de sémimartingale dans le cadre discontinu, et est étendue au cas des processus de sauts dans le travail significatif [[3]], en utilisant les techniques de discrétisations. Dans le cas continu, une règle de chaîne a été établie pour $F(t, X_t)$ lorsque F appartient à la classe $C^{0,1}$ et X est un processus de Dirichlet faible, voir [[15]].
Un tel processus est en effet encore un processus Dirichlet faible (avec éventuellement aucune variation quadratique finie). Concernant le calcul dans le cas de sauts, seulement quelques foit ont été faites dans [[28]], [[27]], et plusieurs autres auteurs, voir le chapitre 15 de [[5]] et les références qui s'y trouvent.

Par exemple, aucune formule de type d'Itô n'a été établie dans le cadre de la régularisation et dans le cadre de la discrétisation, seuls très peu de résultats de règle de chaîne sont disponibles pour $F(X)$, lorsque $F(X)$ n'est pas une semimartingale. Dans cette direction, deux résultats particuliers sont disponibles : l'expansion de $F(X_t)$ lorsque X est une semimartingale réversible et F est de classe C^1 avec certaines conditions de support sur les dérivées (voir [[10]]) et une règle de chaîne pour $F(X_t)$ lorsque X est un processus de Dirichlet faible (càdlàag) et F est de classe C^1, voir [[3]]. Le travail dans [[10]] a été poursuivi par plusieurs auteurs, voir par exemple [[8]] et les références, élargissant le reste en utilisant les processus locaux de type temps.

Contrairement au cas continu, la décomposition $X = M + A$ n'est généralement pas unique. Nous présentons la notion d'un processus Dirichlet faible spécial en ce qui a trait à la filtration $\mathcal{F}_t$. Un tel processus est un processus de Dirichlet Faible en admettant une décomposition $X = M + A$, où M est une martingale $\mathcal{F}_t$-locale et où le processus orthogonal A est prévisible. La décomposition d'un processus de Dirichlet faible spécial est unique, Un tel processus constitue une généralisation de la notion de semimartingale dans le cadre de processus de Dirichlet faibles. Nous remarquons qu'un processus Dirichlet faible continu est un Dirichlet faible spécial.

Deux résultats significatifs sont le théorème (5.14) et le théorème 5.26 dans [[11]] ; Ils concernent tous deux les expansions de $F(t, X_t)$ où F est de la classe $C^{0,1}$ et X est un processus de Dirichlet faible à variation quadratique finie. Le théorème (5.14 dans [[11]] indique que $F(t, X_t)$ sera à nouveau un processus de Dirichlet faible, mais pas nécessairement à variation quadratique finie. Le théorème (5.26 dans [11]) concerne les cas où X et $F(t, X_t)$ sont des processus de Dirichlet faibles spéciaux. Une première étape significative dans ce sens a été faite dans [[3]], où X appartient à une classe peu différente de processus Dirichlet spéciaux faibles de sauts (d'énergie finie) et F ne dépend pas du temps et à dérivées à l'infini. Ils montrent que $F(X)$ est de nouveau un processus de Dirichlet faible spécial.

L'objet de mon travail est l'étude d'un processus qui représente une des généralisation de la notion de semimartingale : celle de "processus de Dirichlet", c'est à dire un processus qui admet une décomposition en somme d'une martingale continue de carré intégrable et d'un processus à variation quadratique nulle. A l'aide de la structure d'espace de Banach de l'ensemble D des processus de Dirichlet, la stabilite de D par transformation de classe $\mathcal{C}^1$ et une formule d'itô. On prouve l'existence de densités d'occupation ainsi que de certaines integrales stochastiques pour un certain type de processus de Dirichlet.
ce travail est réparti en trois chapitres :
le premier chapitre introduit les notions élémentaires et des définitions et propriétés sur les processus de Dirichlet qui seront utilisés dans la suite de notre travail.
Le deuxième chapitre étudie les calculs stochastique par rapport à une classe des processus qui ne sont pas des semimartingale, les processus de Dirichlet.

Le troisième chapitre présente une application du processus de Dirichlet en finance ; Dans laquelle on considère la loi de Dirichlet comme loi à priori pout l'éstimation de la volatilité

Chapitre 1

Généralité sur les processus aléatoires

1.1 Définitions de base

Définition 1.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *une famille de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *.*
On dit que $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *est une filtration si c'est une famille croissante, au sens où* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *si* $s \leq t$
si $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *est une filtration sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, on dit que* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité filtré.*

Propriété 1.1.1.
1. *Un processus* X *est croissant si p.s.* $t \to X_t$ *est une fonction croissante, c'est-à-dire si* $X_t(\omega) \leq X_s(\omega)$ *pour tout* $t \leq s$*, p.s. De même, on dira qu'un processus est continu à droite, dérivable, de classe* $\mathcal{C}^2$ *... etc si la fonction* $t \mapsto X_t(\omega)$ *verifie p.s. la propriété considérée.*
2. *Un processus* X *est dit à variation finie (V.F.) sur* $[0, t]$ *si*

$$\sup_{0 \leq t_0 < \ldots < t_n \leq t} \left(\sum_{k=0}^{n} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| \right) < +\infty.$$

Définition 1.1.2. *(Temps d'arrêt)*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré . Un temp d'arrêt relativement à* $(\mathcal{F}_t)$ *est une variable aléatoire* τ *à valeur dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \in \mathcal{F}_t$*.*

La définition est équivalente à $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \in \mathcal{F}_t$ *par stabilité des tribus par passage au complémentaire. Un temps d'arrêt doit étre vu comme un temps aléatoire qui suit l'évolution aléatoire sous-jacente. La raison pour laquelle l'événement* $\{\tau \leq t\}$ *et non l'événement* $\{\tau = t\}$ *intervient dans la définition du temps d'arrêt vient du temps discret : relativement à une filtration* $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ *un temps d'arrêt est plus simplement défini par* $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On voit facilement que si S *et* T *sont des temps d'arrêt, alors* $S \wedge T$ *est un temps d'arrêt .*

Définition 1.1.3. *(Martingales à temps continu) Un processus* $(\mathrm{M}_t)_{t\in T}$ *à valeurs réelles,* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *adapté et intégrable est :*
- *Une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *martingale si pour tout* $s < t \in T$ *on a* $\mathbb{E}(\mathrm{M}_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{M}_s$ *;*
- *Une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *surmartingale si pour tout* $s < t \in T$ *on a* $\mathbb{E}(\mathrm{M}_t \mid \mathcal{F}_s) \leq \mathrm{M}_s$
- *Une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *sousmartingale si pour tout* $s < t \in T$ *on a* $\mathbb{E}(\mathrm{M}_t \mid \mathcal{F}_s) \geq \mathrm{M}_s$

Ces définitions s'étendent aux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$*, c.à.d. chaque composante doit être respectivement une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$*-martingale, surmartingale, sousmartingale réelle.*

Remarque 1.1.1. *Si* $(\mathrm{M}_t)_{t\in T}$ *est une martingale alors* $\mathbb{E}(\mathrm{M}_t) = \mathbb{E}(\mathrm{M}_0)$ *pour tout* $t \in T$

Théorème 1.1.1. *Soit* X *un processus et* φ *une fonction convexe telle que* $\mathbb{E} \mid \varphi(X_t) \mid < \infty$ *pour tout* t.

1. *Si* X *une martingale alors* $\varphi(X_t)$ *est une sous martingale.*
2. *si* X *est une sousmartingale et* φ *est croissante (au sens large) alors* $\varphi(X_t)$ *est une sous martingale.*

Définition 1.1.4. *(processus arrêté)*
Soit X *un processus et* T *un temps d'arrêt. On note* X^T *le processus définit par* $X^T = X^{t\wedge T} = X^t \mathbb{1}_{\{t<T\}} + X^T \mathbb{1}_{\{t\geq T\}}$ *appelé processus arrété à* T.

Théorème 1.1.2. *(Théorémes d'arrêts)*
Soit X *une martingale uniformément intégrable continue à droite et* T *un temps d'arrêt. Alors* X^T *est aussi une martingale uniformément intégrable continue à droite. Il s'agit également d'une* $\mathcal{G}_t$*-martingale où* $\mathcal{G}_t = F_{t\wedge T}$ *.*

Corollaire 1.1.1. *Soit* Y *une v.a. intégrable et soient* S *et* T *des temps d'arrêts. Alors*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid F_S) \mid F_T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid F_T) \mid F_S) = \mathbb{E}(Y \mid F_{S\wedge T})$$

Théorème 1.1.3. *Soit X un processus adapté à trajectoires càdlàg. On suppose $\mathbb{E} \mid X_T \mid < \infty$ et $\mathbb{E}(X_T) = 0$ pour tous T.A. (fini ou pas). Alors X est une martingale uniformément intégrable.*

Définition 1.1.5. *(Martingales locales)*
On dit qu'un processus càd-làg adapté $X = (X_t)_{t \in \mathrm{T}}$ est une martingale locale s'il existe une suite $\mathrm{T}_n \uparrow \infty$ de temps d'arrêt tels que pour $X_t^{\mathrm{T}_n} \mathbb{1}_{\{\mathrm{T}_n > 0\}}$ soit une martingale uniformément intégrable pour tout n. On dit alors que les T.A .T_n localisent ou réduisent X .
On multiplie par $\mathbb{1}_{\{\mathrm{T}_n > 0\}}$ ce qui permet de prendre des conditions initiales X_0 pas forcément intégrable.
On a les notions équivalentes pour surmartingale locale et sousmartingale locale.

Définition 1.1.6. *On dit qu'un temps d'arrêt T reduit ou localise un processus X si X^T est une martingale uniformément intégrable.*

Propriétés 1.1.1. *Soient M, N des martingales locales et S et T des temps d'arrêts*

1. *Si T localise M et $S \leq T$ p.s. alors S réduit M ;*
2. *La somme $M + N$ est aussi une martingale locale ;*
3. *Si S et T localisent M alors $S \vee T$ réduit aussi M ;*
4. *Les processus M^T et $M^T \mathbb{1}_{\{T>0\}}$ sont des martingales locales ;*
5. *Soit X un processus càdlàg et $\mathrm{T}_n \uparrow \infty$ une suite croissante de T.A. Telle que pour chaque n fixé le processus $X^{T_n} \mathbb{1}_{\{T>0\}}$ est une martingale locale. Alors X est une martingale locale.*

Corollaire 1.1.2. *L'ensemble des martingale locales est un espace vectoriel.*

Théorème 1.1.4. *Si X est un processus qui est localement une martingale de carré intégrable alors X est une martingale locale.*

Théorème 1.1.5. *(Autre caractérisation des martingales locales.)*
Soit M un processus càd-làg adapté et $\mathrm{T}_n \uparrow \infty$ p.s une suite de T.A. Alors si pour chaque n le processus $\mathrm{M}^{T_n} \mathbb{1}_{\{\mathrm{T}_n > 0\}}$ est une martingale alors M est une martingale locale.

Définition 1.1.7. *Soit X une $(\mathcal{F}_t)$- processus adapeté .On dit que X est $(\mathcal{F}_t)$- orthogonal si $[X, N] = 0$ pour tout N continu $(\mathcal{F}_t)$ martingal locale.*

Proposition 1.1.1. *Si M est purement discontinue $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale. Alors :*

$$[M, M]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.2. *Soit $W = (W^1, ..., W^n)$ un mouvement $(\mathcal{F})$-Brownian alors $[W, W^*]_s = (\delta_{i,j})_s$*

1.2 processus de Dirichlet et processus de Dirichlet faible

1.2.1 processus de Dirichlet

Le processus de Dirichlet est un processus stochastique utilisé dans les modèles non paramétriques Bayésiens de données, particulièrement dans des modèles de mélange de processus de Dirichlet (aussi connu sous le nom de modèles de mélange infinis). Il s'agit d'une distribution par rapport aux distributions, c'est-à-dire que chaque tirage d'un processus Dirichlet est lui-même une distribution. On l'appelle un processus de Dirichlet, car Dirichlet a distribué des distributions marginales dimensionnelles finies, de même que le processus gaussien, un autre processus stochastique populaire utilisé pour la régression bayésienne non paramétrique, a des distributions marginales réparties en répartition finie gaussienne. Les distributions tirées d'un processus Dirichlet sont discrètes, mais ne peuvent être décrites en utilisant un nombre fini de paramètres, donc la classification comme modèle non paramétrique.

Définition 1.2.1. *On dit que processus $(\mathcal{F})$-adapté X est un processus de Dirichlet, s'il admet une décomposition $X = M + A$, où M est une martingale locale et A est un processus de variation quadratique finie avec $[A, A] = 0$*

1.2.2 Processus de Dirichlet faible

Les processus de Dirichlet faibles constituent une généralisation naturelle processus de Dirichlet, ce qui se prolongent naturellement semimartingales. Processus de Dirichlet été considérés par de nombreux auteurs. Soit $(F_t)_{t \geq 0}$ une filtration fixe vérifiant les conditions habituelles. (W_t) désignera un mouvement classique $(\mathcal{F})$-Brownian. Pour simplifier, nous devons respecter le cadre des processus continus.

Définition 1.2.2. *On dit que X est un processus de Dirichlet faible $(\mathcal{F})$-adapté, s'il admet la décomposition $X = M + A$, où M est une martingale locale et le processus A est $(\mathcal{F})$-orthogonal.*

Remarque 1.2.1. *1. La classe des processus de Dirichlet est plus grande que l'espace du Semimartingales spéciales. Toute fonction continue admettant une variation quadratique égale à zéro est un processus Dirichlet déterministe.*

2. Toute fonction continue est un processus de Dirichlet faible déterministe pour toute filtration :
En fait, considérons une martingale continue bornée N nulle en 0, nous avons

$$E\left(|\sum_{t_i^n \in D_n}(f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n))(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n})|^2\right) \leq \sup_{t_i^n}(f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n))^2 E(N_T)^2.$$

Et, de la continuité de f, ce dernier terme tend à 0 quand $n \to \infty$

Remarque 1.2.2. **(i)** *la décomposition $X = M + A$ du processus Dirichlet faible est unique.*
Pour voir cela, supposons que nous avons deux décompositions $X = M + A = M' + A'$ avec A et A' prévisible et vérifiant $[A, N] = [A, N'] = 0$ pour chaque martingale locale continue N. Alors $A - A'$ est une martingale locale continue, est une martingale locale prévisible, donc une martingale locale continue. Alors

$$[A - A', A - A']_T = [A - A', A]_T - [A - A', A']_T = 0$$

et on en déduit que $A = A'$.

(ii) *Un processus de Dirichlet faible X admet une variation quadratique nulle. Nous savons seulement que pour chaque martingale continue N la covariation $[X, N]$ existe.*

(iii) *Bien sûr, en général, la décomposition $X = M + A$ avec une martingale M et un processus prévisible A, n'implique pas que $[A, N] = 0$ pour chaque Martingale continue N, quand $[A, N]$ existe. Par exemple, prenons A comme un Martingale et $N = A$.*
La classe de processus Dirichlet faible est beaucoup plus grande que la classe des processus de Dirichlet .

Définition 1.2.3. *On dit que X est un processus d'énergie finie si*

$$\sup_n E\left[\sum_{t_i^n \in D_n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-}^n})^2\right] < +\infty \tag{1.2}$$

Cette "sup" sera notée $\varepsilon_n(X)$.
Bien sûr, si X a une énergie finie, $|X_t|^2$ est intégrable pour tout $t \leq T$ et aussi $\sum_{s \leq T} \Delta X_s^2$ est intégrable.

Théorème 1.2.1. *Si X est un processus d'énergie finie, il peut être écrit comme une somme $X = M + A$, où M est une martingale de carré intégrable et A est un processus prévisible de telle sorte qu'il existe une suite (D_{n_j}) de (D_n) Satisfaisant pour chaque $t \leq T$*

$$E\Big[\sum_{t_i^{nj} \in D_{n_j}, t_i^{nj} \leq t} (A_{t_i^{nj}} - A_{t_{i-1}^{nj}})(N_{t_i^{nj}} - A_{t_{i-1}^{nj}})\Big] \to 0 \tag{1.3}$$

comme $j \to \infty$ pour tout martingale N de carrés intégrable .

Remarque 1.2.3. *La famille de processus à énergie finie est clairement stable en outre, nous ne savons pas si cette stabilité est valable pour la famille de processus admettant une variation quadratique. Bien sûr, cela est vrai pour la famille des processus Dirichlet et des processus de Dirichlet faibles*

Théorème 1.2.2. *Supposons X est un processus à énergie finie. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est un processus de Dirichlet faible,*

(ii) *Pour chaque martingale locale continue N, la covariation quadratique $[X, N]$ est bien définie,*

(iii) *Pour chaque martingale N localement de carrée intégrable, la covariation quadratique $[X, N]$ est bien définie.*

Si l'une de ces conditions est remplie, la décomposition $X = M + A$ Comme un processus de Dirichlet faible est une décomposition naturelle de X, et cette dernière décomposition est unique.

Preuve. *$(i) \Rightarrow (iii)$ soit $X = M + A$ où M est une martingale locale et A est un processus prévisible tel que $[A, N] = 0$ pour toute martingale locale continue N. considérons La décomposition $N = N^c + N^d$, où N^c est la partie continue et N^d purement discontinue de N. Par la définition d'un processusde Dirichlet faible, la covariation $[X, N^c]$ est bien définie. Pour prouver l'existence de $[X, N^d]$, nous utilisons le lemme suivant.*

Lemme 1.2.1. *Supposons que X ait une énergie finie et que N soit une martingale intégrable localement de carrée qui représente la somme compensée de ses sauts. Alors X et N admettent une covariabilité telle que*

$$[X, N]_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta N_s. \tag{1.4}$$

Preuve. *(Preuve de lemme)*
En utilisant une suite de localisation des temps d'arrêt, on peut supposer que N est une martingale de carrée intégrable. On peut donc trouver une suite $(N_p)_p$ de martingales ayant des variations finies et seulement un nombre fini de sauts, De sorte que $N^p \to N$ dans $\mathbf{H}^2$ l'espace des martingales de carrés intégrables. Nous avons donc, pour p fixe,

$$\sum_{t_i^n \in D_n, t_i^n \leq 1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(N^p_{t_{i+1}^n} - N^p_{t_i^n}) \xrightarrow{p} \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta N_s^p. \tag{1.5}$$

quand $n \to \infty$. D'autre part,

$$E|\textstyle\sum_{t_i^n \in D_n, t_i^n \leq 1}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(N^p_{t_{i+1}^n} - N^p_{t_i^n}) - \sum_{t_i^n \in D_n, t_i^n \leq 1}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n})|$$

$$E|\Big(\textstyle\sum_{t_i^n \in D_n, t_i^n \leq 1}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{t_i^n \in D_n, t_i^n \leq 1}((N_{t_{i+1}^n} - N^p_{t_{i+1}^n}) - (N_{t_i^n} - N^p_{t_i^n}))^2\Big)^{1/2}|$$

$$(\varepsilon n(X))^{1/2} E([N - N^p, N - N^p]_t)^{1/2}$$

qui tends vers 0 quand $p \to \infty$ puisque $[N - N^p, N - N^p]_t \xrightarrow{p} 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} E|\textstyle\sum_{s \leq t} \Delta X_s(\Delta N_s - \Delta N_s^p| &\leq E\big(\big(\textstyle\sum_{s \leq t} \Delta X_s^2\big)^{1/2}\big(\sum_{s \leq t}(\Delta N_s - \Delta N_s^p)^2\big)^{1/2} \\ &\leq (\varepsilon n(X))^{1/2} E[[N - N^p, N - N^p]_t]^{1/2}, \end{aligned}$$

qui tends vers zéro quand p tends vers l'infini, d'où $\sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta N_s^p$ Converge en L^1 vers $\sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta N_s$.
Ces trois convergences donnent le lemme. ■

$(iii) \Rightarrow (ii)$ est évident.
$(ii) \Rightarrow (i)$ soit $X = M + A$ est une décomposition du théorème 1.2.2 et soit N une martingale locale continue. Définir $T_p = \inf\{t : |N_t| \geq p\}$ alors (T_p) est une séquence de localisation des temps d'arrêt. Nous allons prouver que pour chaque p, $[A, N^{T_p}] = 0$, ce qui implique que $[A, N] = 0$.
Par hypothèse, nous avons la convergence $S^n(X, N^{T_p})_t \xrightarrow{p} [X, N^{T_p}]_t$.
Par conséquent, nous en déduisons que $S^n(A, N^{T_p})_t \xrightarrow{p} [A, N^{T_p}]_t$ Nous allons montrer que, en fait

$$S^n(A, N^{T_p})_T \to [A, N^{T_p}]_T \ \in L^1. \tag{1.6}$$

Pour voir cela, il suffit de vérifier l'intégration uniforme de la séquence $\{S^n(A, N^{T_p})_T\}$. L'écriture $|S^n(X, N^{T_p})_T| \leq S^n(X, X)_T^{1/2} S^n(N^{T_p}, N^{T_p})_T^{1/2}$, et en utilisant l'inégalité de Holder, on obtient :

$$E|S^n(X, N^{T_p})_T|^{4/3} \leq (E[S^n(X, X)_T])^{2/3}(E[S^n(N^{T_p}, N^{T_p})_T^2])^{1/3} < \infty.$$

Une preuve similaire donne $E|S^n(M, N^{T_p})_T|^{4/3} < \infty$.
En conséquence, on déduit une intégrabilité uniforme de $\{S^n(A, N^{T_p})_T\}$ *et (1.6) est vrai. Par conséquent, en particulier*

$$E[S^n(A, N^{T_p})_T] \to E[A, N^{T_p}]_T,$$

et en raison de (1.3)

$$E[A, N^{T_p}]_T = 0 \tag{1.7}$$

Notons que le processus $[A, N^{T_p}]$ *a une variation finie, De plus, puisque* N *est continue,* $[A, N^{T_p}]$ *est également un processus continu. par conséquent, pour obtenir* $[A, N^{T_p}] = 0$ *il suffit de prouver que* $[A, N^{T_p}]$ *est une martingale locale.*
Considérons un temps d'arrêt borné $\tau \leq T$*, les mêmes arguments que ci-dessus montrent que* $E[S^n(A, N^{T_p \wedge \tau})_T]$ *Converge vers* $E[[A, N^{T_p \wedge \tau}]_T]$ *et (1.3) donne*

$$E[[A, N^{T_p}]_T] = E[[A, N^{T_p \wedge \tau}]_T] = 0.$$

Par conséquent, il suit facilement que le processus arrêté $[A, N]^{T_p}$ *est une martingale et* $[A, N]^{T_p} = 0$.
Puisque $P(T_p = T) \uparrow 1$*, la preuve de la dernière implication est terminée.*
Enfin, prenons $X = M' + A'$ *Toute décomposition naturelle de* X*. De la preuve de* $(ii) \Rightarrow (i)$*,* $X = M' + A'$ *est une décomposition de* X *comme un processus de Dirichlet faible, mais à partir de la remarque 1.2.2, une telle décomposition est unique. Cela prouve la dernière affirmation du théorème.* ■

Définition 1.2.4. *(Dirichlet faible spécial)*
On dit qu'un processus $(\mathcal{F})$ *adapté* X *est un processus de Dirichlet faible spécial s'il admet une décomposition du type ci-dessus telle que, de plus,* A *soit prévisible.*

Remarque 1.2.4. *Évidemment, un processus de Dirichlet est un processus de Dirichlet faible spécial .*

Proposition 1.2.1. *Soit* X *un processus Dirichlet faible spécial du type*

$$X = M^c + M^d + A; \tag{1.8}$$

où M^c est une martingale locale continue, et M^d st une martingale locale purement discontinue.
En supposant que $A_0 = M_0^d = 0$, la décomposition (1.8) est unique. Dans ce cas, la décomposition $X = M^c + M^d + A$ sera appelée la décomposition canonique de X.

Preuve. *Supposons que nous avons deux décompositions $X = M^c + M^d + A = M^{c'} + M^{d'} + A'$ avec A et A' prévisibles, Vérifiant $[A, N] = [A', N] = 0$ Pour tout N martingale locale continue .*
On fixe $\widetilde{A} = A - A'$, $\widetilde{M^c} = M^c - M^{c'}$ et $\widetilde{M^d} = M^d - M^{d'}$, par linéarité $\widetilde{M^c} + \widetilde{M^d} + \widetilde{A} = 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= [\widetilde{M^c} + \widetilde{M^d} + \widetilde{A}, \widetilde{M^c}] \\ &= [\widetilde{M^c}, \widetilde{M^c}] + [\widetilde{M^d}, \widetilde{M^c}] + [\widetilde{A}, \widetilde{M^c}] \\ &= [\widetilde{M^c}, \widetilde{M^c}], \end{aligned}$$

donc $\widetilde{M^c} = 0$ puisque $\widetilde{M^c}$ est une martingale continue. Il s'ensuit en particulier que $\widetilde{A}$ est une martingale locale prévisible, donc une martingale locale continue, en particulier

$$0 = [\widetilde{M^d}, \widetilde{M^d}] + [\widetilde{A}, \widetilde{M^d}] = [\widetilde{M^d}, \widetilde{M^d}]$$

et puisque $\widetilde{M_0^d} = 0$, on en déduit $\widetilde{M^d} = 0$ et donc $\widetilde{A} = 0$. ■

Remarque 1.2.5. *Pour tout X $(\mathcal{F})$ processus de Dirichlet faible spécial est du type (1.8). Chaque martingale locale M, peut être décomposé comme la somme d'une martingale locale continue $\widetilde{M}^c$ et une martingale locale purement discontinuée $\widetilde{M}^d$*

Corollaire 1.2.1. *Soit X est un $(\mathcal{F})$ Processus Dirichlet faible spécial. Alors pour chaque $t \in [0, T]$,*

(i) $[X, X]_t = [M^c, M^c]_t + \sum_{s \leq t} (\Delta X_t)^2$ *;*

(ii) $[X, X]_t^c = [M^c, M^c]_t$

Proposition 1.2.2. *Soit S est une $(\mathcal{F})$ semimartingale qui est un processus Dirichlet faible spécial. Alors, c'est une semimartingale spéciale.*

Preuve. *Soit $S = M^1 + V$ tel que M^1 est une martingale locale et V est un processus à variation bornée.*

Soit de plus $S = M^2 + A$, *où* A *est un* $(\mathcal{F})$*-processus orthogonal prévisible . Alors* $0 = V - A + M$ *ou* $M = M^2 - M^1$ *donc* A *est une semimartingale prévisible,* A *est une semimartingale spéciale, et donc par l'additivité* S *est une semimartingale spéciale aussi.* ■

Exemple 1.2.1. *Un exemple simple de processus Dirichlet faible est donné par un processus* Z *qui est indépendamment de* $\mathbb{F}$*, par exemple déterministe, de toute évidence, si* Z *un processus à variation quadratique finie , il ne peut pas être Dirichlet. Cependant, il est possible de montrer que* $[Z, N] = 0$ *pour n'importe quelle* $\mathbb{F}$*-martingale locale. En effet*

$$\begin{aligned}
\int_0^s (Z_{r+\epsilon} - Z_r)(N_{r+\epsilon} - N_r)dr &= \int_0^s dr(Z_{r+\epsilon} - Z_r) \int_r^{r+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} dN_\lambda \\
&= \int_0^s \frac{dN_\lambda}{\epsilon} \int_{(\lambda-\epsilon)\vee 0}^{\lambda} (Z_{r+\epsilon} - Z_r)dr \\
&= \int_0^s \frac{dN_\lambda}{\epsilon} \int_{(\lambda-\epsilon)\vee 0}^{\lambda} Z_{r+\epsilon}dr - \int_0^s \frac{dN_\lambda}{\epsilon} \int_{(\lambda-\epsilon)\vee 0}^{\lambda} Z_r)dr
\end{aligned}$$

L'expression précédente converge vers zéro puisque les deux derniers termes convergent . L'intégrale d'Itô $\int_0^s ZdN$ *puisque* N *est également une martingale locale par rapport à la filtration* $\mathbb{F}$ *agrandie avec* Z*.*

Exemple 1.2.2. *Soit* f *de classe* $C^0(\mathbb{R})$*,* $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$*.*

1. *Si* f *est* C^1*, alors* $X = f(W)$ *est un processus* $(\mathcal{F})$*-Dirichlet.*
2. $u(t, W_t)$ *est un processus* $(\mathcal{F})$*-Dirichlet faible, Mais pas Dirichlet en général.*
3. $F(W)$ *n'est pas toujours un processus de Dirichlet, même pas de variation quadratique finie.*

Exemple 1.2.3. *Soit* $(N_t)_{t\geq 0}$ *est* $(\mathcal{F})$*-martingale locale,* $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *un champ aléatoire continu tel que* $G(t, .)$ *est* $(\mathcal{F})$*-adapté pour chaque* t*.défini*

$$X_t = \int_0^t G(t, s)dN_s.$$

Alors (X_t) *est un processus* $(\mathcal{F})$*-Dirichlet faible avec une décomposition* $M + A$*, où*

$$M_t = \int_0^t G(s, s)dN_s.$$

Supposons que $[G(.,s_1);G(.,s_2)]$ existe pour tout s_1, s_2. Avec quelques autres Hypothèse technique, on peut montrer que A est un processus de variation quadratique finie avec

$$[A_t] = 2\int_0^t (\int_0^{s_2}[G(.,s_1);G(.,s_2)] \circ dM_{s_1}) \circ dM_{s_2}$$

Cette intégrale de Stratonovich itérée peut s'exprimer comme la somme $C_1(t) + C_2(t)$ où

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int_0^t [G(.,s);G(.,s)d[M]_s, \\ C_2(t) &= 2\int_0^t (\int_0^{s_2}[G(.,s_1);G(.,s_2)]dM_{s_1})dM_{s_2}. \end{aligned}$$

1.3 Décomposition de Fukushima-Dirichlet

Définition 1.3.1. *Un processus réel D est appelé processus $(\mathcal{F})$ -Dirichlet en T_t s'il est $(\mathcal{F})$-adapté et peut être écrit comme*

$$D = M + A, \tag{1.9}$$

où

(i) *M est une $(\mathcal{F})$ martingale locale,*

(ii) *A est un processus de variation quadratique nulle tel que (pour des raisons de commodité) $A_0 = 0$.*

A sera dit processus d'énergie nulle faible .
Un vecteur $D = (D^1 ... D^n)$ est dit Dirichlet s'il a toutes ses covariations mutuelles et chaque D^i est Dirichlet.

Remarque 1.3.1. *Un $(\mathcal{F})$-semimartingale est un $(\mathcal{F})$-processus Dirichlet.*

Exemple 1.3.1. *Des exemples de tels procédés se présentent dans plusieurs situations ; par exemple :*
Si X est un$(\mathbb{F})$-semimartingale $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f(x)$ est un $\mathbb{F}$-processus de dirichlet si : $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue telle que $\frac{\partial u}{\partial x}$ Existe et est continue, alors $(u(t,x_t))_{t\geq 0}$ est un processus de Dirichlet faible .

Remarque 1.3.2. *La décomposition 1.9 est unique, en fait, soit*

$$D = M^1 + A^1 = M^2 + A^2,$$

où M^1, M^2, A^1, A^2 remplissent les propriétés (i) et (ii) de la Définition (1.3.1). Alors nous avons $M + A = 0$ où $M = M^1 - M^2$ et $A = A^1 - A^2$ est telle que $[A, N] = 0$ pour tout $(\mathcal{F}_s)$ martingale locale N. Il suffit maintenant d'évaluer la covariation des deux membres avec M pour obtenir $[M, M] = 0$. Puisque $A_0 = 0$ alors $M_0 = 0$ et par conséquent $M = 0$.

Définition 1.3.2. *Un vecteur $D = (D^1 ... D^n)$ est dit un processus de* (F)*-Dirichlet faible si chaque D^i est* (F)*-processus Dirichlet faible . Un vecteur $A = (A^1, ..., A^n)$ est dit un $(\mathcal{F})$-Processus d'énergie nulle si chaque A^i est $(\mathcal{F}_s)$-processus faible d'énergie nulle.*

Proposition 1.3.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathcal{T}_t \times \mathbb{R}^n)$. Soit $X = (X^1, ..., X^n)^*$, ayant toutes ses covariations, V un processus de variation borné indexé par $\mathcal{T}_t$. Alors, pour $0 \leq s \leq t$,*

$$\begin{aligned} f(V_s, X_s) &= f(V_t, X_t) \int_t^s \partial_x f(V_r, X_r) d^- X_r \\ &+ \int_t^s \partial_v f(V_r, X_r) dV_r \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^s \partial_{xx} f(V_r, X_r) d[X, X^*]. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3. *Soit X (respectivement A) un processus de variation quadratique finie (respectivement nulle). Alors (X, A) a toutes ses covariations mutuelles et $[X, A] = 0$.*

Proposition 1.3.2. *Soit $V = (V^1, ... V^m)$ (respectivement $X = (X^1, ..., X^n)$) un vecteur de procédés en continu sur R_+ avec les processus de variation bornée (ayant respectivement tous ses covariations mutuelles).Soit $f, g \in C^{\frac{1}{2}+\gamma,1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ $(\gamma > 0)$. Alors $\forall s \geq 0$*

$$[f(V, X), g(V, X)]_s = \sum_{i,j=1}^n \int_0^s \partial_{x_i} f(V, X) \partial_{x_j} f(V, X) d[X^i, X^j]_r.$$

1.3.1 La décomposition pour les fonctions $\mathrm{C}^{0,1}$

Nous allons maintenant étudier un résultat concernant les processus de Dirichlet faible. Supposons $(\mathrm{D}_s)_{s \in \mathrm{T}_t}$ un $(\mathcal{F}_s)$-Dirichlet avecla décomposition 1.9 où A est un processus de variation quadratique nulle. Étant donnée une fonction $\mathrm{C}^{0,1}$ u de D, on ne peut s'attendre à ce que $Z = u(\cdot, D)$ est un processus de Dirichlet. Cependant on peut espérer que c'est au moins un processus Dirichlet faible . En effet, ce résultat est vrai même si D est un processus de Dirichlet faible avec variation quadratique finie.

Proposition 1.3.3. *Supposons que $(D_s)_{s\geq 0}$, soit un $(\mathcal{F}_s)$- processus Dirichlet faible ayant toutes ses covariations mutuelles. Pour chaque $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ nous avons $s \geq t$,*

$$u(s, D_s) = u(t, D_t) + \int_t^s \partial_x u(r, D_r) dM_r + \mathcal{B}^D(u)_s - \mathcal{B}^D(u)_t, \tag{1.10}$$

où

$$\mathcal{B}^D : \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathbb{R}^n)$$

est une carte linéaire ayant les propriétés suivantes :

1. *$\mathcal{B}^D$ est continue ;*
2. *si $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, alors*
   $\mathcal{B}^D(u)_s = \int_0^s \partial_s u(r, D_r dr + \int_0^s \partial_{xx} u(r, D_r) d[M, M]_r + \int_0^s \partial_x u(r, D_r) d^- A_r$;
3. *si $\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, alors $(\mathcal{B}^D(u)_s)$ est un processus de Dirichlet faible d'énergie nulle.*

Corollaire 1.3.1. *Supposons que $(D_t)_{t\geq 0}$ soit un processus $(\mathcal{F})$-Dirichlet faible (vecteur) ayant toutes ses covariations mutuelles.*
pour chaque $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $u(t, D_t)$ est un $(\mathcal{F})$- processus de Dirichlet faible avec la partie martingale $\widetilde{M} = \int_0^t \partial_x u(s, D_s) dM_s$.

Remarque 1.3.4. *Étant donné un temps d'arrêt borné τ Avec des valeurs dans $\mathcal{T}_t$, il est facile de voir que la décomposition (1.10) est toujours valable pour le processus arrêté D^τ. En fait, étant donné N un $(\mathcal{F})$-martingale, et A un $(\mathcal{F})$-Processus d'énergie zéro faible , nous avons $[N, A^\tau] = [N, A]^\tau = 0$*

Preuve. *(De la Proposition) Sans restriction de généralité, nous nous fixerons $t = 0$. La propriété 1)*

$$\mathcal{B}^D(u)_s = u(s, D_s) - u(0, D_0) - \int_0^s \partial_x u(r, D_r) dM_r,$$

Et en observant que le processus défini sur le côté droit a la propriété de continuité requise. La propriété 2) découle de la Proposition 1.3.1 appliquée inversement. En effet, si $u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, la proposition 1.3.1 peut être appliquée. En particulier

$$\int_0^s \partial_x u(r, D_r) d^- D_r$$

Existe, cela implique que,

$$\int_0^s \partial_x u(r, D_r) d^- A_r$$

Existe puisque

$$\int_0^s \partial_x u(r, D_r) d^- M_r = \int_0^s \partial_x u(r, D_r) dM_r$$

Est l'intégrale d'Ito classique.
Il reste à prouver le point 3) :

$$[u(., D) - \int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r, N] = 0$$

Pour chaque dimension $(\mathcal{F}_r)$-martingale locale N.
Pour simplifier les notations, on suppose que D est unidimensionnel. Donc D sera un processus de variation quadratique finie. Puisque la covariation des semimartingales coïncide avec la covariation classique

$$\left[\int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r, N\right] = \int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) d[M, N]_r,$$

Il reste à vérifier que, pour tout $s \in [0, T]$,

$$[u(., D), N]_s = \int_0^s \partial_x u(r, D_r) d[M, N]_r.$$

Pour cela, nous devons évaluer l'u.c.p. Limite de,

$$\int_0^s [u(r + \varepsilon, D_{r+\varepsilon}) - u(r, D_r)] \frac{N_{r+\varepsilon} - N_r}{\varepsilon} dr$$

En probabilité. Cela peut être écrit comme la somme de deux termes :

$$I_1(s, \varepsilon) = \int_0^s (u(r + \varepsilon, D_{r+\varepsilon}) - u(r + \varepsilon, D_r)) \frac{N_{r+\varepsilon} - N_r}{\varepsilon} dr,$$

$$I_2(s, \varepsilon) = \int_0^s (u(r + \varepsilon, D_r) - u(r, D_r)) \frac{N_{r+\varepsilon} - N_r}{\varepsilon} dr$$

D'abord nous prouvons que $I_1(s, \varepsilon)$ va à $\int_0^t \partial_x u(r, D_r) d[M, N]_r$.

$$\begin{aligned} I_1(s, \varepsilon) &= \int_0^s (u(r + \varepsilon, D_{r+\varepsilon}) - u(r + \varepsilon, D_r)) \frac{N_{r+\varepsilon} - N_r}{\varepsilon} dr \\ &= \int_0^s \partial_x u(r + \varepsilon, D_r)(D_{r+\varepsilon} - D_r) \frac{N_{r+\varepsilon} - N_r}{\varepsilon} dr + R_1(s, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1.11}$$

Où $R_1(s,\varepsilon) \to 0$ *u.c.p.comme* $\varepsilon \to 0$. *En effet*

$$R_1(s,\varepsilon) = \int_0^s \left[\int_0^1 [\partial_x u(r+\varepsilon, D_r+\lambda(D_{r+\varepsilon}-D_r)) - \partial_x u(r+\varepsilon, D_r)] d\lambda \frac{N_{r+\varepsilon}-N_r}{\varepsilon}(D_{r+\varepsilon}-D_r)\right] dr$$

Et la réclamation suit par la continuité de $\partial_x u$ *et de l'estimation*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (N_{r+\varepsilon}-N_r)(D_{r+\varepsilon}-D_r)dr$$

$$\leq \left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (N_{r+\varepsilon}-N_r)^2 dr \cdot \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (D_{r+\varepsilon}-D_r)^2 dr\right]^{\frac{1}{2}} [\varepsilon \to \infty]([N]\cdot[D])^{\frac{1}{2}}. \tag{1.12}$$

D'autre part, le premier terme de (1.11) peut être réécrit comme

$$\int_0^s \partial_x u(r,D_r)(D_{r+\varepsilon}-D_r)\frac{N_{r+\varepsilon}-N_r}{\varepsilon}dr + R_2(s,\varepsilon), \tag{1.13}$$

où $\mathcal{R}_2(s,\varepsilon) \to 0 u.c.p.$ *Discussion quant à* $\mathcal{R}_1(s,\varepsilon)$*.l'integrale dans (1.13) tends ver u.c.p. à* $\int_0^s \partial_x u(r,D_r)d[M,N]_r$, *puisque d'après 1.12 les mesures* $\frac{(N_{r+\varepsilon}-N_r)(D_{r+\varepsilon}-D_r)}{\varepsilon}dr$ *Convergent faiblement vers d[N,D] quand* $\varepsilon \to 0$. *Il reste à montrer que* $I_2(s,\varepsilon) \to 0$ *u.c.p. pour tout* $s \in [0,T]$ *en tant que* $\varepsilon \to 0$. *En utilisant les théorèmes de localisation (par exemple comme cela est habituellement fait par exemple dans [28], section IV.1), il suffit de supposer que* u *soit avec support compact et* N *soit une martingale carrée et intégrable. alors nous évaluons*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq T} |I_2(s,\varepsilon)|^2\Big). \tag{1.14}$$

Maintenant, nous avons, l'échange d'intégrales

$$\begin{aligned}
I_2(s,\varepsilon) &= \int_0^s [u(r+\varepsilon,D_r)-u(r,D_r)]\frac{N_{r+\varepsilon}-N_r}{\varepsilon}dr \\
&= \int_0^s [u(r+\varepsilon,D_r)-u(r,D_r)]dr \int_r^{r+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dN_\lambda \\
&= \int_0^s \frac{dN_\lambda}{\varepsilon}\int_{(\lambda-\varepsilon)\vee 0}^{\lambda}[u(r+\varepsilon,D_r)-u(r,D_r)]dr.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Doob implique que (1.14) est plus petit que

$$4\mathbb{E}\Big\{\int_0^T d[N]_\lambda \big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{(\lambda-\varepsilon)\vee 0}[u(r+\varepsilon,D_r)-u(r,D_r)]dr\big)^2\Big\}.$$

Le fait que u soit uniformément continu sur des ensembles compacts et le théorème de la convergence dominée de lebesgue implique le résultat.■

Corollaire 1.3.2. *Soit S une $(\mathcal{F}_s)$ semimartingale dans $\mathbb{R}_+$, $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathcal{T}_t \times \mathbb{R})$. Alors*

$$[u(\cdot, S), S]_t = \int_0^t \partial_x u(s, S_s) d[S]_s.$$

Preuve. *Soit $S = M + V$ la décomposition de S avec M une martingale locale et V un processus de variation finie avec $V_0 = 0$. Alors*

$$u(t, S_t) = u(0, S_0) + \int_0^t \partial_x u(s, S_s) dM_s + \tilde{A}_t,$$

Où $\tilde{A}$ est un processus faible d'énergie nulle. En particulier, un argument de localisation classique montre Que $[\tilde{A}, M] = 0$. D'autre part, évidemment $[\tilde{A}, V] = 0$; Par conséquent, par linéarité et Puisque la covariation des martingales locales est la convolution classique, le résultat suit.■

Définition 1.3.3. *(Fonctionnalités de conservation de la limite)*
Définir B comme ensemble de non anticipatif Les fonctions F telles que pour chaque sous-ensemble compact K de U , Chaque$R > 0$ il existe une constante $\mathcal{C}_{K,R}$ tel que :

$$\forall t \leq T, \forall (x, \upsilon) \in \mathbf{D}([0,t], K) \times S_t, \sup_{s \in [0,t]} \mid \upsilon(s) \mid < R \Rightarrow \mid F_t(x, \upsilon) \mid < \mathcal{C}_{K,R}. \tag{1.15}$$

En particulier si $F \in \mathbb{B}$, il est "localement" délimité au voisinage d'un chemin donné i.e.

$$\forall (x, \upsilon) \in U_t \times S_t, \ \exists C > 0, \eta > 0, \ \forall t \in [0,T], \forall (x', \upsilon') \in U_t \times S_t,$$

$$d_\infty((x_t, \upsilon_t), (x', \upsilon')) < \eta \Rightarrow \forall t \in [0,T], \mid F_t(x', \upsilon') \mid \leq C \tag{1.16}$$

1.3.2 La décomposition pour fonctions $C^{\frac{1}{2}+\gamma,1}$

Si, dans la proposition 1.3.3, $\mathcal{D}$ est un processus de Dirichlet il est de classe $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}+\gamma,1}$, $\gamma > 0$, puis les résultats de la Proposition 1.3.3 et du corollaire 1.3.1 peuvent être mieux précisés. Alors, c'est possible pour montrer que les processus de Dirichlet sont stables à travers les transformations $C^{\frac{1}{2}+\gamma,1}$, $\gamma > 0$.

Proposition 1.3.4. *Soit $(D_s)_{s>0}$ un processus $(\mathcal{F}_s)$-Dirichlet avec la décomposition (1.9). l'énoncé de la proposition 1.3.3 tient*

$$\mathcal{B}^D : C^{\frac{1}{2}+\gamma,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathbb{R}^n)$$

Remplissant les propriétés a), b) et

c) si $u \in C^{\frac{1}{2}+\gamma,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ puis $(\mathcal{B}^D(u)_s)$ est un processus de variation quadratique nulle.

Preuve. *Les points a) et b) suivent de la même manière que pour la décomposition de $C^{0,1}$. Afin d'établir la propriété c), nous procédons à l'utilisation de la bilinéarité de la covariation. nous montrera en effet que $\mathcal{B}^D(u)$ est un processus de variation quadratique nulle. Nous opérons avec le bilinéarité du processus de covariation et nous évaluons*

(i) $[u(\cdot, D), u(\cdot, D)]$,

(ii) $[u(\cdot, D), \int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r]$,

(iii) $[\int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r, \int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r]$.

comme suit.

(i) Nous appliquons la Proposition 1.3.2 pour obtenir cela

$$[u(\cdot, D), u(\cdot, D)]_s = \int_0^s \partial_x u(s, D_r) d[D, D^*]_r \partial_x u(r, D_r)^*.$$

(ii) Réglage $N_t = \int_0^s \partial_x u(r, D_r) dM_r$, remarque 1.3.3 implique que (N, D) a tous ses rapports mutuels supports ; donc encore, la proposition 1.3.2 implique que :

$$[u(\cdot, D), N^*]_s = \int_0^s \partial_x u(r, D_r) d[D, N^*]_r.$$

D'autre part, par la remarque 1.3.3

$$[D, N^*]_t = [M, N^*]_s = \int_0^s \partial_x u(r, D_r) d[M, M^*]_r \partial_x u(r, D_r)^*.$$

(iii) Le fait que la covariation de semimartingales coïncide avec la covariation classique donne

$$\left[\int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r, \int_0^{\cdot} \partial_x u(r, D_r) dM_r \right]_s = \int_0^s \partial_x u(r, D_r) d[M, M^*]_r \partial_x u(r, D_r)^*.$$

Enfin, par remarque 1.3.3 et la décomposition, nous obtenons cela

$$[D, D^*] = [M, M^*].$$

La bilinéarité de la covariation permet maintenant de conclure.

Chapitre 2

calcul stochastique par les processus de Dirichlet

2.1 Fonctions des processus Dirichlet

La fonction $f(t,x)$ doit être différenciable par rapport À x dans un sens "presque partout", nous commençons par définir

$$diff(f) = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : f(t,x) \ est \ différentiable \ en \ x\}. \tag{2.1}$$

Nous définissons également le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à laquelle $f(t,x)$ est différentiable par rapport à x dans un sens assez fort.

$$diff\mathbf{C}(f) = \left\{(t,x) : \lim_{\substack{s\to t \\ y,z\to x}} (f(s,z) - f(z,y))/(z-y) \ existe\right\} \subseteq diff(f). \tag{2.2}$$

Ici, la limite est prise sur tous les $s \in \mathbb{R}_+$ et $y, z \in \mathbb{R}$ avec $y \neq z$. Alternativement, $diff\mathcal{C}(f)$ st l'ensemble des points auxquels $\mathbf{D}_x f$ est continu.
Le résultat de la décomposition et le suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit X un processus de Dirichlet de décomposition $X = Y + Z$, où Y est une Semimartingale et Z est un processus càdlàg adapté de variation quadratique . Soit $f \in \mathcal{D}_0$ satisfait*

$$\int \mathbb{1}_{\{(t,X_t)\notin diff(f)\}} d[X]^c_t \ = \ 0 \tag{2.3}$$

$$\int\int \mathbb{1}_{\{(t,x)\notin diff\mathcal{C}(f),\mathbb{P}(X_t=x)>0\}} \mid d_t f(t,x) \mid dx \ = \ 0, \tag{2.4}$$

alors

$$f(t, X_t) = \int_0^t \mathbf{D}_x f(s, X_{s-}) dY_s + V_t, \tag{2.5}$$

où V est un processus de variation quadratique continue nulle .

Pour prouver ce théoréme on a besoin de la série des lemmes ci-dessous.
L'équation (2.3) est trivialement satisfaite chaque fois que f est indépendant du temps .
Pour tout processus X et une partition stochastique P de $\mathbb{R}_+$, nous utilisons $\delta_k^p X \equiv X_{\tau_k^p} - X_{\tau_{k-1}^p}$, donc l'expression

$$[X, Y]_t^p \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (X_{\tau_k^p \wedge t} - X_{\tau_{k-1}^p \wedge t})(Y_{\tau_k^p \wedge t} - Y_{\tau_{k-1}^p \wedge t}). \tag{2.6}$$

peut être écrite comme

$$[X, Y]_t^p = \sum_{k>0} \delta_k^p X^t \delta_k^p Y^t.$$

Ici, X^t désigne le processus arrêté
$X_s^t \equiv X_{s \wedge t}$. Supposons maintenant que X, Y sont des processus càdlàg et $S \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ est un ensemble bi-mesurable contenant seulment quelques instants finis dans chaque intervalle de temps borné (pour chaque $\omega \in \Omega$). Dans le but d'éliminer les points de discontinuité de X et Y, on a besoin de limite suivante

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{]\tau_{k-1}^p, \tau_k^p] \cap S \neq \phi\}} \delta_k^p X^t \delta_k^p Y^t = \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{s \in S\}} \Delta X_s \Delta Y_s. \tag{2.7}$$

Cela découle du fait que le côté gauche se réduit à une somme finie avec un terme pour chaque instant dans $]0, t] \cap S$, et la convergence est presque sûrment uniforme sur des intervalles de temps finis. Donc, définissez $\mathcal{S}$ pour être la collection de sous-ensembles bi-mesurables de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ qui ne contiennent que plusieur instants finis dans chaque intervalle de temps bornés (pour tout $\omega \in \Omega$). En fait, $\mathcal{S}$ peut être exprimé comme suit

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n] : \tau_n : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \textit{ sont mesurables et } \tau_n \uparrow \infty \right\}. \tag{2.8}$$

Pour toute partition P et tout $S \in \mathcal{S}$ et $t > 0$, on note $[P, S, t]$ l'ensemble (aléatoire) des $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_k^p < t$ et $]\tau_{k-1}^p, \tau_k^p] \cap S$ est vide. En utilisant cette notation, on donne une condition suffisante pour que $[X, Y]^c = 0$ soit satisfaite.

Lemme 2.1.1. *Soit X et Y deux processus càdlàg tel que X a une variation quadratique continue nulle et $[Y]$ existe, alors la covariaion $[X,Y]$ existe et satisfait $[X,Y]^c = 0$.*

Pour démontrer ce lemme, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 2.1.2. *Soit X et Y deux processus càdlàg adaptés tels que*

$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} \mid \delta_K^P X \delta_K^P Y \mid > \varepsilon \Big) = 0 \tag{2.9}$$

pour tous $t, \varepsilon > 0$. La limite est prise comme $\mathbf{P}$ en parcourant toutes les partitions de $\mathbb{R}_+$, alors, la covariation quadratique $[X,Y]$ existe et $[X,Y]^c = 0$

Preuve. *Tout d'abord, notons que pour chaque $Sin\mathcal{S}$ et $t > 0$,*

$$\sum_{s<t} \mid \Delta X_s \Delta Y_s \mid \leq \sum_{s\in S, s<t} \mid \Delta X_s \Delta Y_s \mid + \liminf_{|P|\to 0} \sum_{k\in[P,S,t]} \mid \delta_k^P X \delta_k^P Y \mid .$$

Par l'équation (2.9), le côté droit de cette expression doit, avec la probabilité 1, être fini pour tout $S \in \mathcal{S}$. Par conséquent, le processus à variation localement finie $A_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$ est bien défini.
montrons que $[X,Y] = A$. Considérons l'identité suivante :

$$\begin{aligned} [X,Y]_s^P - A_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{]\tau_{k-1}^p, \tau_k^p] \cap S \neq \phi\}} \delta_K^P X^s \delta_k^P Y^s - \sum_{u\in S} \Delta X_u^s \Delta Y_u^s \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{]\tau_{k-1}^p, \tau_k^p] \cap S = \phi\}} \delta_k^P X^s \delta_k^P Y^s - \sum_{u\notin S} \Delta A_u^s \end{aligned}$$

La limite (2.7) dit que les deux premiers termes du côté droit disparaissent comme $\mid P \mid$ tend vers 0 (Uniformément sur tous $s < t$), ce qui donne

$$\begin{aligned} &\limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\big(\sup_{s<t} \mid [X,Y]_s^P - A_s \mid \geq \epsilon \big) \\ &\qquad \leq \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} \mid \delta_k^P X \delta_K^P Y \mid \geq \varepsilon/2 \Big) + \mathbb{P}\Big(\sum_{s\notin S, s<t} \mid \Delta A_s \mid \geq \epsilon/2 \Big) \end{aligned}$$

pour tous $t, \epsilon > 0$.Comme A est càdlàg et mesurable, S peut augmenter pour inclure tous les temps de saut de A dans la limite, donc le dernier terme du côté droit peut être arbitrairement petit. En outre, par la condition du lemme, le premier terme peut également être aussi petit que l'on veut. ■

Cela conduit à la condition nécessaire et suffisante suivante pour un processus à avoir une variation quadratique continue nulle.

Lemme 2.1.3. *Soit X un processus càdlàg.X est à variation quadratique continue nulle si et seulement si*

$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\big(\sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P X)^2 > \varepsilon\big) = 0 \tag{2.10}$$

pour tous $t, \varepsilon > 0$.

Preuve. *Si 2.10 est satisfait, alors le lemme (2.1.2) avec $Y = X$ donne le résultat. Réciproquement, supposons que X est à variation quadratique continue nulle et considérons l'identité suivante,*

$$\begin{aligned}\sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P X)^2 &= [X]_\tau^P - \sum_{s\leq\tau}(\Delta X_s)^2 + \sum_{s\notin S, s\leq\tau}(\Delta X_s)^2 \\ &+ \sum_{s\in S, s\leq\tau}(\Delta X_s)^2 - \sum_{\tau_k^P<t} \mathbb{1}_{\{]\tau_{k-1}^P,\tau_k^P]\cap S\neq\phi\}}(\delta_k^P X)^2\end{aligned}$$

Ici, τ est le maximum des temps d'arrêt τ_k^P satisfaisant $\tau_k^P < t$.Comme X a une variation quadratique continue nulle, les deux premiers termes du côté droit convergent vers zéro en probabilité quand $|P|$ tend vers à 0. Ansi, la limite de (2.7) montre que les deux derniers termes disparaissent, cela donne

$$\limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P X)^2 > \varepsilon\Big) \leq \Big(\sum_{s\notin S, s<t} (\Delta X_s)^2 \geq \varepsilon\Big).$$

Le résultat vient en notant que nous pouvons augmenter S de telle sorte qu'elle contienne touts les instants de saut de X à la limite.$\blacksquare$

Le lemme 2.1.1 est une conséquence simple des lemmes 2.1.2 et 2.1.3.

Preuve. *du lemme 2.1.1. Pour $S \in \mathcal{S}, t > 0$ et une partition P, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne*

$$\sum_{k\in[P,S,t]} | \delta_k^P X \delta_k^P Y | \leq \Big(\sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P X)^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\tau_k^P<t} (\delta_k^P Y)^2\Big)^{1/2}$$

Comme la variation quadratique $[Y]$ est bien définie, nous pouvons prendre des limites quand $|P| \to 0$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} \mid \delta_k^P X \delta_K^P Y \mid > \varepsilon \Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \leq \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big([Y]_t \sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P X)^2 \geq \varepsilon^2\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(K \sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P X)^2 \geq \varepsilon^2\Big) + \mathbb{P}([Y]_t > K)
\end{aligned}$$

Pour tous $\varepsilon, K > 0$. Comme X a une variation quadratique continue nulle, le lemme 2.1.3 montre que le premier terme sur le côté droit de cette inégalité tend vers 0 si on prend la borne inférieure sur tous les $S \in \mathcal{S}$. Donc, en prenant la limite quand $K \to \infty$, on voit que le deuxième terme sur le côté droit disparaît également. Donc le résultat est démontré suite au lemme 2.1.2. ■

Le reste de cette section est consacré à la démonstration du théorème 2.1.1. Soit V le processus apparaissant sur le côté droit de (2.5),

$$V_t \equiv f(t, X_t) - \int_0^t D_x f(s, X_{s-}) dY_s.$$

Il faut montrer qu'il s'agit d'un processus à variation quadratique continue nulle, et l'approche utilisée consiste à diviser $\delta_k^P V$ en parties séparées,

$$\begin{aligned}
\delta_k^P V &= (f(\tau_k^P, X_{\tau_k^P}) - f(\sigma, X_{\tau_k^P}) + f(\sigma, X_{\tau_{k-1}^P}) - f(\tau_{k-1}^P, X_{\tau_{k-1}^P}) && (2.11)\\
&+ (\zeta_\sigma \delta_k^P X - \int_{\tau_{k-1}^P}^{\tau_k^P} D_x f(t, X_{t-}) dY_t && (2.12)\\
&+ (f(\sigma, X_{\tau_k^P}) - f(\sigma, X_{\tau_{k-1}^P}) - \zeta_\sigma \delta_k^P X). && (2.13)
\end{aligned}$$

Ici, σ est un temps d'arrêt choisie de façon appropriée dans l'intervalle $[\tau_{K-1}^P, \tau_K^P]$ et ζ est un processus simple et prévisible qui, par définition, sont des combinaisons linéaires des processus de la forme $A\mathbb{1}_{\{t>\tau\}}$ pour les temps d'arrêt τ et des varibles aléatoires bornées A, $\mathcal{F}_\tau$-mesurables .

En utilisant le lemme 2.1.3, nous montrons que la contribution de chacun des trois termes du côté droit de (2.11) à la partie continue de la variation quadratique de V peut être arbitrairement petite (en choisissant de manière appropriée σ et ζ).

Nous commençons par montrer que la contribution à la partie continue de la variation quadratique provenant du premier terme sur le côté droit de (2.11) est nulle. L'idée est de faire lisser les incréments de temps de f en utilisant l'identité suivante :

$$g(y) = \frac{1}{a}\int_{y-a}^{y}((a-y+x)g'(x)+g(x))dx, \tag{2.14}$$

qui est une application d'intégration par parties et s'applique à toute fonction absolument continue g et tout $a > 0$.

Lemme 2.1.4. *Soit X un processus càdlàg et soit $f \in \mathcal{D}_0$ satisfaisant (2.3). Alors, pour tout $t > 0$,*

$$ess\inf_{S\in\mathcal{S}}\limsup_{|P|\to 0}\sum_{k\in[P,S,t]}\sup_{s\in[\tau_{k-1}^P,\tau_k^P]}(f(\tau_k^P,X_s)-f(\tau_{K-1}^P,X_s))^2=0$$

Preuve. *Pour tout $u < \upsilon \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, on utilis la notation suivante :*

$$\delta_{u,\upsilon}f(x) \equiv f(\upsilon,x)-f(u,x).$$

Alors pour tout $a > 0$, en remplaçant $g(x) = (\delta_{u,\upsilon}f(x))^2$ dans (2.14), on trouve

$$\begin{aligned}(\delta_{u,\upsilon}f(y))^2 &= \frac{1}{a}\int_{y-a}^{y}(2(a-y+x)(\delta_{u,\upsilon}\mathcal{D}_xf(x))\delta_{u,\upsilon}f(x)+(\delta_{u,\upsilon}f(x))^2)dx\\ &= \frac{1}{a}\int_{y-a}^{y}\int_{u}^{\upsilon}(2(a-y+x)\delta_{u,\upsilon}\mathcal{D}_xf(x)+\delta_{u,\upsilon}f(x))d_tf(t,x)dx.\end{aligned}$$

Pour toute $S \in \mathcal{S}$, il s'ensuit que si $h_a^{P,S}(u,x)$ est une fonction (aléatoire)

$$\begin{aligned}h_a^{P,S}(u,x) &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^P<u<\tau_k^P\}}\mathbb{1}_{\{]\tau_{k-1}^P,\tau_k^P]\cap S=\phi\}}\sup_{S\in[\tau_{k-1}^P,\tau_K^P]}\mathbb{1}_{\{x\in(X_s-a,X_s)\}}\\ &\times\ |2(a-X_s+x)\delta_{\tau_{k-1}^p,\tau_k^p}\mathcal{D}_xf(x)+\delta_{\tau_{k-1}^p,\tau_k^p}f(x)|,\end{aligned}$$

Alors

$$A_S^P \equiv \sum_{k\in[P,S,t]}\sup_{s\in[\tau_k^p,\tau_{k-1}^p]}(\delta_{\tau_{k-1}^p,\tau_k^p}f(X_s))^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t h_a^{P,S}(s,x)|d_sf(s,x)|dx.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(t,x)$ est Lipschitz continu en x avec le coefficient K, auquel cas on à

$$\limsup_{|P|\to 0} |h_a^{P,S}(s,x)| \leq \mathbb{1}_{\{s\notin S\}} g_a(s,x),$$

$$\begin{aligned} g_a(s,x) &\equiv \mathbb{1}_{\{X_{S-}\wedge X_S - a \leq x \leq X_{S-}\vee X_S\}} \\ &\times \ (4K\mathbb{1}_{\{(s,x)\notin diffC(f)\}} + a^{-1}|\Delta_s f(s,x)|), \end{aligned}$$

où $\Delta_s f(s,x) \equiv f(s,x) - f(s^-,x)$. Ainsi, par le théorem de la convergence bornée,

$$\limsup_{|P|\to 0} A_S^P \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{\{s\notin S\}} g_a(s,x)|d_s f(s,x)|dx.$$

Comme $S \in \mathcal{S}$ peut être augmenté pour inclure (dans la limite) tous les temps où $f(s,x)$ ou X_n n'est pas continu,

$$ess \inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} A_S^P \leq 2K \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_S - a\leq x\leq X_S,(s,x)\notin diffC(f)\}}|d_s f(s,x)|dx.$$

Aussi, a peut être choisi arbitrairement petit, donc

$$ess \inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} A_S^P \leq 2K \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{\{x=X_s,(s,x)\notin diffC(f)\}}|d_s f(s,x)|dx.$$

Enfin, (2.3) montre que le côté droit a une espérence nulle, donc il doit étre presque sûrement égal à $0.$■

Nous associons maintenant la contribution à la partie continue de la variation quadratique de V à partir du deuxième terme sur le côté droit de (2.11).
Le processus prévisible η_s ci-dessous sera choisi pour être égal à $D_x f(s,X_{s-})$.

Lemme 2.1.5. *Soit $X = Y + Z$, où Y est une semimartingale et Z est un processus càdlàg adapté de variation quadratique continue nulle. Soit η processus uniformément borné et prévisible et soit ζ un processus prévisible simple, posons :*

$$B_K^P \equiv \sup_{s\in[\tau_{k-1}^p,\tau_k^p]} |\zeta_s\delta_k^P X - \int_{\tau_{k-1}^p}^{\tau_k^p} \eta_u dY_u|$$

pour toutes partition P de $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} (B_k^P)^2 \geq \varepsilon\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\int_0^t (\zeta-\eta)^2 d[Y] \geq \varepsilon\Big)$$

pour tous $t, \varepsilon > 0$

Preuve. *Tout d'abord, comme ζ est prévisible simple, il est constant par morceaux et il n'y a qu'un nombre fini d'instants où il n'est pas continu. Nous pouvons donc restreindre les $S \in \mathcal{S}$ qui contiennent tous les temps de discontinuité ζ. Dans ce cas, pour tout $k \in [P,S,t]$ et $s \in (\tau_{k-1}^p, \tau_k^p]$, on a $\zeta_s = \zeta_{\tau_k^p}$. Donc pour $k \in [P,S,t]$,*

$$\begin{aligned} \pm B_k^P &= \zeta_{\tau_k^p} \delta_k^P Z + (\zeta_{\tau_k^p} \delta_k^P Y - \int_{\tau_{k-1}^p}^{\tau_k^p} \eta_s dY_s) \\ &= \zeta_{\tau_k^p} \delta_k^P Z + \delta_k^P U, \end{aligned}$$

où U est le processus $U = \int (\zeta-\eta) dY$. Donc, l'inégalité triangulaire donne

$$\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} (B_k^p)^2 \Big)^{1/2} \leq K \Big(\sum_{K\in[P,S,t]} (\delta_K^P Z)^2 \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (\delta_K^P U^t)^2 \Big)^{1/2}, \tag{2.15}$$

où K est une borne supérieure pour $|\zeta|$. Comme Z a une variation quadratique continue nulle, le lemme 2.1.3 donne

$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P Z)^2 \geq \varepsilon\Big) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Enfin, en utilisant la définition de la variation quadratique, le dernier terme sur le côté droit de l'inégalité (2.15) converge en probabilité vers $[U]_t = \int_0^t (\zeta-\eta)^2 d[Y]$ quand $|P| \to 0$, ce qui achéve la démenstration du lemme. ■

Nous passons maintenant au troisième terme sur le côté droit de 2.11. Cela nécessitera un choix approprié de $\sigma \in [\tau_{k-1}^p, \tau_k^p]$. Plus précisément, pour tout partition P, nous choisirons les temps d'arrêt $(\sigma_k^p)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\tau_{k-1}^p \leq \sigma_k^p \leq \tau_{k-1}^p, \tag{2.16}$$

$$\sigma_k^p > \tau_{k-1}^p quand \tau_k^p > \tau_{k-1}^p, \tag{2.17}$$

pour chaque k. Une fois ces temps choisis, ils définissent une nouvelle partition $\tilde{P}$ donnée par

$$\tau_k^{\tilde{p}} = \begin{cases} \tau_{k/2}^p, & Si\ k\ estpair\ ; \\ \sigma_{(k+1)/2}^p, & Si\ k\ estimpair. \end{cases}$$

Le choix de σ_k^P sera faite avec l'aide du lemme suivant, dont la preuve utilise le théorème de section facultative ([4], ouIV.84[17], théorème 4.7).

Lemme 2.1.6. *Soient X un processus de Dirichlet, et ξ est un processus optionnel positif uniformément borné par certain $K \in \mathbb{R}_+$.Pour chaque partition P, posons*

$$D_K^P \equiv \xi_{\sigma_k^p}((X_{\tau_k^p} - X_{\sigma_k^p})^2 + (X_{\sigma_k^p} - X_{\tau_{k-1}^p})^2).$$

Alors, pour tout $\delta > 0$, nous pouvons choisir les temps d'arrêt σ_k^p satisfaisant les inégalités (2.16) telle que

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \limsup_{|P| \to 0} \Big(\sum_{k \in [P,S,t]} D_k^p \geq \varepsilon\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\int_0^t (K \mathbb{1}_{\{|\xi_s| > \delta\}} + \delta) d[X]_s^c \geq \varepsilon\Big)$$

pour tous $t, \varepsilon > 0$

Preuve. *D'abord, soit $X = Y + Z$ telle que Y est martingale locale continue et Z est un processus a variation quadratique fini nulle.Posons*

$$\begin{aligned} A_K^P &\equiv \xi_{\sigma_k^p}((Y_{\tau_k^p} - Y_{\sigma_k^p})^2 + (Y_{\sigma_k^p} - Y_{\tau_{k-1}^p})^2) \\ B_K^P &\equiv \xi_{\sigma_k^p}((Z_{\tau_k^p} - Z_{\sigma_k^p})^2 + (Z_{\sigma_k^p} - Z_{\tau_{k-1}^p})^2). \end{aligned}$$

Soit $S \in \mathcal{S}$ l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{k \in [P,S,t]} D_k^P \Big)^{1/2} &\leq \Big(\sum_{\tau_k^p < t} A_k^p \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k \in [P,S,t]} B_k^P \Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\sum_{\tau_k^p < t} A_k^p \Big)^{1/2} + \Big(K \sum_{k \in [\tilde{P},S,t]} (\delta_k^{\tilde{P}} Z)^2 \Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

où $\tilde{P}$ est la partition définie par (2.1) . Si nous choisissons un $\varepsilon' < \varepsilon$ et on pose $\varepsilon'' = K^{-1}(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon'})^2$, cela donne

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k \in [P,S,t]} D_k^P \geq \varepsilon\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\sum_{\tau_k^p} A_k^p \geq \varepsilon'\Big) + \mathbb{P}\Big(\sum_{k \in [\tilde{P},S,t]} (\delta_k^{\tilde{P}} Z)^2 \geq \varepsilon''\Big).$$

Comme Z a une variation quadratique continue nulle, le lemme 2.1.3 dit que le second terme du côté droit disparaît si on laisse $|P|$ tend vers zéro et prendre la borne inférieure les $S \in \mathcal{S}$, ce qui donne

$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\in[P,S,t]} D_k^P \geq \varepsilon\Big) \leq \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{\tau_k^p<t} A_k^p \geq \varepsilon'\Big). \tag{2.18}$$

Cela simplifie le problème du cas d'une martingale locale continue.
Nous faisons maintenant un choix pour les temps d'arrêt σ_k^P. Pour toute partition P et $k \in \mathbb{N}$, L'ensemble des instants $s \in (\tau_{k-1}^p, \tau_k^p]$ tel que $\xi_s \leq \delta$ est optionnnel. Ainsi, par le théorème de la section optionnelle, les temps d'arrêt δ_k^p peuvent être choisis de telle sorte que les inégalités (2.16) soient satisfaites, $\xi_{\sigma_k^P} \leq \delta$ quand $\sigma_k^P < \tau_k^P$ et

$$\mathbb{P}(\sigma_k^P < \tau_k^P) \geq \mathbb{P}(\exists s \in (\tau_{k-1}^P, \tau_k^P)\ telque\ \xi_s \leq \delta) - 2^{-k}|P|.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(\xi_{\sigma_k^p} > \delta) \geq \mathbb{P}(\forall s \in (\tau_{k-1}^P, \tau_k^P], \xi_s > \delta) + 2^{-k}|P|.$$

En outre, nous pouvons définir les temps d'arrêt

$$\tilde{\sigma}_K^P = \inf\{s \in (\tau_{k-1}^P, \tau_k^P] : \xi_s \leq \delta\} \cup \{\tau_k^P\}.$$

Par le choix de σ_k^P et $\sigma_k^{\tilde{P}}$, Les résiltat suivant est vérifié en dehors d'un ensemble de probabilité au plus, $2^{-k}|P|$:

$$\begin{aligned}
A_k^p &\leq \delta((Y_{\tau_k^P} - Y_{\sigma_k^P})^2 + (Y_{\sigma_k^P} - Y_{\tau_{k-1}^P})^2) + K\mathbb{1}_{\{\sigma_k^P=\tau_k^P\}}(Y_{\tau_k^P} - Y_{\tau_{k-1}^P})^2 \\
&\leq \delta((\delta_{2k}^{\tilde{P}}Y)^2 + (\delta_{2k-1}^{\tilde{P}}Y)^2) + K(Y_{\sigma_k^{\tilde{P}}} - Y_{\tau_{k-1}^P})^2 \\
&= \delta(\delta_{2k}^{\tilde{P}}Y)^2 + \delta(\delta_{2k-1}^{\tilde{P}}Y)^2 + 2K\int_{\tau_{k-1}^P}^{\sigma_k^{\tilde{P}}}(Y_s - Y_{\tau_{k-1}^P})dY_s + K\int_{\tau_{k-1}^P}^{\sigma_k^{\tilde{P}}} d[Y]_s,
\end{aligned}$$

où $\tilde{P}$ est la partition définie par 2.1 . Notons que $\xi_s > \delta$ quand $s \in (\tau_{k-1}^P, \sigma_k^{\tilde{P}})$, cette inégalité donne

$$A_k^P \leq \delta(\delta_{2k}^{\tilde{P}}Y)^2 + \delta(\delta_{2k-1}^{\tilde{P}}Y)^2 + K\int_{\tau_{k-1}^P}^{\tau_k^P} \mathbb{1}_{\{\xi_s>\delta\}}d[Y_s] + 2K\int_{\tau_{k-1}^P}^{\tau_k^P} \alpha_s^P dY_s \tag{2.19}$$

à l'extérieur d'un ensemble avec une probabilité d'au plus $2^{-k}|P|$ et avec

$$\alpha_s^P \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{s\in(\tau_{k-1}^P,\tilde{\sigma}_k^P\}}(Y_s - Y_{\tau_{k-1}^P}).$$

La continuité de Y implique que $\alpha^P \to 0$ Comme $|P| \to 0$, donne La convergence bornée pour l'intégration stochastique donne

$$\sup_{s<t} |\int_0^s \alpha_u^P dY_u| \to 0,$$

on la probabilité quand $|P| \to 0$. En sommant l'inégalité 2.19 sur k et prenant la limite quand $|P| \to 0$ on trouve

$$\limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}(\sum_{\tau_k^P<t} A_k^P \geq \varepsilon')$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}(\delta \sum_{\tau_k^{\tilde{P}}<t} (\delta_k^{\tilde{P}} Y)^2 + K \int_0^t \mathbb{1}_{\{\xi_s>\delta\}} d[Y]_s > \tilde{\varepsilon}) + \limsup_{|P|\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|P| \\
&\leq \mathbb{P}(\int_0^t (\delta + K\mathbb{1}_{\{\xi_s>\delta\}}) d[Y]_s \geq \tilde{\varepsilon}),
\end{aligned}$$

Où $\tilde{\varepsilon}$ est un nombre réel dans l'ordre $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon'$. Le résultat suit maintenant de la combinaison de cette inégalité (2.18) et de laisser $\tilde{\varepsilon}$ croit vers à ε.$\blacksquare$

Nous utilisons le Lemme 2.1.6 pour localiser la contribution à la partie continue de la variation quadratique de V venant du troisième terme sur le côté droit de (2.11).

Lemme 2.1.7. *Soient X un processus de Dirichlet et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est càdlàg en t et Lipschitz continu en x. On choisit un processus optionnel borné ζ et $h > 0$. Soit*

$$\xi_s \equiv \sup_{0<|a|\leq h} |\, (f(s, X_s + a) - f(s, X_s))/a - \zeta_s \,| \,.$$

Aussi, pour chaque partition P, On pose

$$C_k^P \equiv f(\sigma_k^P, X_{\tau_k^P}) - f(\sigma_k^P, X_{\tau_{k-1}^P}) - \zeta_{\sigma_k^P} \delta_k^P X.$$

Alors, pour tout $\delta > 0$, les temps d'arrêt σ_k^P satisfaisant les inégalités (2.16) peuvent être choisies de telle sorte que

$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}(\sum_{k\in[P,S,t]} (C_k^P)^2 \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(2\int_0^t (\mathbb{1}_{\{\xi_s>\delta\}} K^2 + \delta^2) d[X]_s^c \geq \varepsilon),$$

pour tous $t, \varepsilon > 0$ où $K \in \mathbb{R}$ est une borne supérieure pour ξ.

Preuve. *Notons d'abord que nous pouvons restreindre a aux nombres rationnels dans la définition ξ, il est donc la borne supérieure d'un ensemble dénombrable de processus optionnels et donc il est lui-même optionnel .*
pour tout partition P, on pose

$$a_k^P \equiv X_{\tau_k^P} - X_{\sigma_k^P}, \quad b_k^P \equiv X_{\tau_{k-1}^P} - X_{\sigma_k^P}.$$

Donc, on peut réécrire C_k^P comme

$$\begin{aligned} C_k^P &= \mathbb{1}_{\{a_k^P \neq 0\}}((f(\sigma_k^P, X_{\sigma_k^P} + a_k^P) - f(\sigma_k^P, X_{\sigma_k^P}))/a_k^P - \zeta_{\sigma_k^P})a_k^P \\ &- \mathbb{1}_{\{b_k^P \neq 0\}}((f(\sigma_k^P, X_{\sigma_k^P} + b_k^P) - f(\sigma_k^P, X_{\sigma_k^P}))/b_k^P - \zeta_{\sigma_k^P})b_k^P \end{aligned}$$

En particulier, si$|a_k^p|$ et $|b_k^p|$ sont à la fois plus petites que h, alors

$$|C_k^P| \leq \xi_{\sigma_k^P}(|X_{\tau_k^P} - X_{\sigma_k^P}| + |X_{\sigma_k^P} - X_{\tau_{k-1}^P}|)$$

et donc

$$(C_k^P)^2 \leq B_k^P \equiv 2\xi_{\sigma_k^P}^2((X_{\tau_k^P} - X_{\sigma_k^P})^2 + (X_{\sigma_k^P} - X_{\tau_{k-1}^P})^2). \tag{2.20}$$

Donc, si nous supposons que $S \in \mathcal{S}$ comprennent tous les temps s pour lesquels $|\Delta X_s| \geq h$, alors l'inégalité (2.20) se tiendra chaque fois que $]]\tau_{k-1}^P, \tau_k^P]] \cap S = \phi$ et $\tau_k^P < t$ pour toutes les partitions suffisamment fines P. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\sum_{k \in [P,S,t]} (C_k^P)^2 \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\sum_{k \in [P,S,t]} B_k^P \geq \varepsilon)$$

en limite quand $|P| \to 0$. Le résultat suit maintenant en appliquant le lemme 2.1.6 avec $2\xi^2$ au lieu de ξ, $2K^2$ à la place de K, et $2\delta^2$ au lieu de δ.■

Enfin, pour cette section, nous avons rassemblé les résultats des Lemmes 2.1.4, 2.1.5 et 2.1.7 pour prouver le théorème 2.1.1.

Preuve. *(Théorème 2.1.1)*
Par la condition du théorème, $X = Y + Z$ pour une semimartingale Y et processus de variation quadratique nulle Z. En utilisant la décomposition 1.14, on peut supposer que Y est

continu, donc $[Y] = [X]^c$*. Il doit être montré que* V *défini par* 2.5 *a une variation quadratique continue nulle. Par localisation, on peut supposer que* $f(t,x)$ *est Lipschitz continu en* x *avec le coefficient* L*, plutôt que juste localement Lipschitzienne.*
Soit η *le processus prévisible* $\eta_s = D_x f(s, X_{s-})$*, qui est uniformément borné par* L*. On choisit également un processus simple prévisible* ζ *tel que* $|\zeta| \leq L$*.Pour tout* $h > 0$*, on pose :*

$$\zeta_s^h \equiv \sup_{0<|a|\leq h} |(f(s, X_s + a) - f(s, X_s))/a - \zeta_s|,$$

qui est bornée par $2L$*. En supposant que, pour chaque partition* P*, les temps d'arrêt* σ_k^P *satisfait les inégalités* 2.16 *ont été choisies,* 2.11 *nous permet d'écrire*

$$\delta_k^P V = A_k^P + B_k^P + C_k^P,$$

avec

$$\begin{aligned} A_k^P &= f(\tau_k^P, X_{\tau_k^P}) - f(\sigma_k^P, X_{\tau_k^P}) + f(\sigma_k^P, X_{\tau_{k-1}^P}) - f(\tau_{k-1}^P, X_{\tau_{k-1}^P}), \\ B_k^P &= \zeta_{\sigma_k^P} \delta_k^P X - \int_{\tau_{k-1}^P}^{\tau_k^P} \eta_s dY_s, \\ C_k^P &= f(\sigma_k^P, X_{\tau_k^P}) - f(\sigma_k^P, X_{\tau_k^P}) - \zeta_{\sigma_k^P} \delta_k^P X, \end{aligned}$$

où σ_k^p *sont des temps d'arrêt satisfaisant les inégalités* 2.16*. En particulier,*

$$(\delta_k^P V)^2 \leq 3(A_k^P)^2 + 3(B_k^P)^2 + 3(C_k^P)^2. \tag{2.21}$$

Si $\tilde{P}$ *est la partition définie par* 2.1*, alors le Lemme* 2.1.4 *avec* $\tilde{P}$ *au lieu de* P *donne*

$$ess \inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \sum_{k\in[P,S,t]} (A_k^P)^2 = 0,$$

pour tout $t > 0$*. Donc, en appliquant les Lemmes* 2.1.5 *et* 2.1.7*, respectivement, au second et troisième termes sur le côté droit de* 2.21*, pour tout* $\delta > 0$*, les temps d'arrêt* σ_k^P *peuvent être choisis de sorte que*

$$ess \inf_{S\in\mathcal{S}} \limsup_{|P|\to 0} \mathbb{P}\big(\textstyle\sum_{k\in[P,S,t]} (\delta_k^P V)^2 \geq \varepsilon\big) \tag{2.22}$$

$$\leq \mathbb{P}\big(\textstyle\int_0^t (\zeta - \eta)^2 d[X]_t^c \geq \varepsilon/3\big) \tag{2.23}$$

$$+\mathbb{P}\big(2\textstyle\int_0^t (\mathbb{1}_{\{\xi_s^h > \delta\}} 4L^2 + \delta^2) d[X]_s^c \geq \varepsilon/3\big) \tag{2.24}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. *Aussi, chaque fois que* $(s, X_s) \in diff(f)$, *alors la définition de* ξ^h *donne*

$$\xi_s^h \to |D_x f(s, X_s) - \zeta_s|,$$

quand $h \to 0$. *Par* (2.3), *cette limite tient presque partout en ce qui concerne la mesure* $\int_0^t .d[X]^c$. *Combinant cela avec l'inégalité* $\mathbb{1}_{\{\xi^h > \delta\}} \leq \delta^{-2}(\xi^h)^2$, *on peut prendre des limites quand* $h \to 0$ *dans l'inégalité* (2.22),

$$ess \inf_{S \in \mathcal{S}} \limsup_{|P| \to 0} \mathbb{P}(\sum_{k \in [P,S,t]} (\delta_k^P V)^2 \geq \varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(\int_0^t (\zeta - \eta)^2 d[X]^c \geq \varepsilon/3) \tag{2.25}$$

$$+ \mathbb{P}(2 \int_0^t (4\delta^{-2} L^2 (D_x f(s, X_s) - \zeta_s)^2 + \delta^2) d[X]_s^c \geq \varepsilon/3). \tag{2.26}$$

Comme les processus previsible simples génèrent la tribu previsible σ*-algèbre, le lemme de la classe monotone montre qu'il existe une séquence de processus simples prévisibles* ζ^n *satisfaisant*

$$\mathbb{P}(\int_0^t (\zeta_s^n - \eta_s)^2 d[X]_s^c \geq \varepsilon) \to 0,$$

qand $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.
De plus, si η *est bornée par* L, *alors* ζ^n *peut être aussi choisi de telle sort qu'elle soit bornée par* L.*Ainsi, nous pouvons remplacer* X *par* Y *dans la partie droite de l'inégalité* (2.25) *et en passant à la limite, on trouve :*

$$ess \inf_{S \in \mathcal{S}} \limsup_{|P| \to 0} \mathbb{P}(\sum_{k \in [P,S,t]} (\delta_k^P V)^2 \geq \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{P}(2 \int_0^t (4\delta^{-2} L^2 (D_x f(s, X_s) - \eta_s)^2 + \delta^2) d[X]_t^c \geq \varepsilon/3) \\ &= \mathbb{P}(2\delta^2 [X]_t^c \geq \varepsilon/3). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est satisfaite parce que $\eta_s = D_x f(s, X_s)$ *quand* $\Delta X_s = 0$.
Le résultat suit maintenant en laissant δ *diminuer à* 0 *et en appliquant le Lemme* 2.1.3.$\square$

2.2 Fonctionnalités des processus de Dirichlet

Un processus de Dirichlet, ou un processus d'énergie finie, sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{B}_t, \mathbb{P})$ est un processus càdlàg adapté qui peut être représenté comme la somme d'une semimartingale et un processus continu adapté avec une variation quadratique nulle selon Subdivisions dyadiqus.
Soit $Y(t) = X(t) + B(t)$ étre un processus Dirichlet défini une somme de semimartingale X sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{B}_t, \mathbb{P})$ et B un processus continu adapté B avec une variation quadratique nulle le long de la subdivision diadyque. On note [X] le processus de variation quadratique associé à X, $[X]^c$ la partie continue de [X], et $\mu(dtdz)$ La mesure aléatoire à valeur entière décrivant les sauts de X.
Soit A un processus adapté avec des chemins cadlag. Notont que A ne doit pas être une Semimartingale.
Nous appelons $\prod_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k(n)}^n = T\}$ une subdivision aléatoire si le t_i^n Sont des temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{B}_t)_{t\in[0,T]}$.

Lemme 2.2.1. *si $F \subset F^{\infty}$ il satisfait la propriété de la limite locale :*
$\forall (x, \upsilon) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{S}_t, \exists C > 0, \eta > 0, \forall t \in [0, T], \forall (x', \upsilon') \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{S}_t$

$$d_{\infty}((x_t, \upsilon_t), (x'_t, \upsilon'_t)) < \forall t \in [0, T], |F_t(x'_t, \upsilon'_t)| \leq C \tag{2.27}$$

Définition 2.2.1. *Une fonction non anticipative F est censée avoir la propriété Lipschitz locale horizontale si et seulement si :*
$\forall (x, \upsilon) \in U_t \times S_t, \exists C > 0, \eta > 0, \forall t_1 < t_2 \leq T, \forall (x', \upsilon') \in U_{t_1} \times S_{t_1},$

$$d_{\infty}((x_{t1}, \upsilon_{t1}), (x', \upsilon')) < \eta \Rightarrow | F_{t2}(x'_{t1,t2-t1}, \upsilon'_{t1,t2-t1}) - F_{t1}((x'_{t1}, \upsilon'_{t1})) | < C(t_2 - t_1) \tag{2.28}$$

Proposition 2.2.1. *(Changement de formule variables pour les processus de Dirichlet)*
Soit $\prod_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k(n)}^n = T\}$. Une suite de subdivision aléatoires de $[0, T]$ tel que

(i) *X a une variation quadratique finie sur $\prod_n$ et B a une variation quadratique nulle le long de $\prod_n$ presque surement ,*

(ii) $\sup_{t\in[0,T]-\prod_n} |Y(t) - Y(t-)| + |A(t) - A(t-)| \longrightarrow^{n\longrightarrow\infty} 0 \ \mathbb{P} - p.s$

Alors, il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ de sorte que pour toute fonction fonctionnelle non anticipative $F \in \mathcal{C}^{1,2}$ satisfaisant

1. *F est prévisible dans la seconde variable au sens de*

$$\forall t \leq T, \forall (x, \upsilon) \in U_t \times S_t, \ F_t(x_t, \upsilon_t) = F_t(x_t, \upsilon_{t-}) \tag{2.29}$$

2. *$\nabla_x^2 F$ et $\mathcal{D}F$ Satisfaire la propriété de la limite locale 2.27*
3. *$F, \nabla_x F \nabla_x^2 F \in \mathbb{F}_l^\infty$*
4. *$\nabla_x F$ A la propriété Lipschitz locale horizontale 2.28*

L'égalité suivante s'accroche Ω_1 pour tout $t \leq T$:

$$F_t(Y_t, A_t) - F_0(Y_0, A_0) = \int_{]0,t]} \mathcal{D}_u F(Y_{u-}, A_{u-}) du +$$
$$\int_{]0,t]} \frac{1}{2} tr[\nabla_x^2 F_u(Y_{u-}, A_{u-}) d[X]^c(u)] \int_{]0,t]} \int_{R^d} [F_u(Y_{u-}^z, A_{u-}) - F_u(Y_{u-}, A_{u-}) - z \nabla_x F_u(Y_{u-}, A_{u-})] \mu(du, dz)$$
$$+ \int_{[0,t]} \nabla_x F_u(y_{u-}, A_{u-}) dY(u) \tag{2.30}$$

Où le dernier terme est l'intégrale Follmer

$$\int_{]0,T]} \nabla_x F_t(x_{t-}, \upsilon_{t-}) d^\pi x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{k(n)-1} \nabla_x F_{t_i^n}(x_{t_i^n -}^{n, \Delta_x(t_i^n)}, \upsilon_{t_i^n -}^n)(x(t_{i+1}^n) - x(t_i^n)),$$

Le long de la subdivision $\prod_n$, défini pour $\omega \in \Omega_1$ par :

$$\int_{]0,t]} \nabla_x F_u(Y_{u-}, A_{u-}) dY(u) = \lim_n \sum_{i=0}^{k(n)-1} \nabla_x F_{t_i^n}(Y_{t_i^n -}^{n, \Delta Y(t_i^n)}, A_{t_i^n -}^n)(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)) \mathbb{1}_{]0,t]}(t_i^n) \tag{2.31}$$

Où (Y^n, A^n)sont les approximations constantes par morceaux le long de $\prod_n$, défini dans :

$$\begin{aligned} x^n(t) &= \sum_{i=0}^{K(n)-1} x(t_{i+1}-) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) + x(T) \mathbb{1}_{\{T\}}(t) \\ \upsilon^n(t) &= \sum_{i=0}^{K(n)-1} \upsilon(t_i) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) + \upsilon(T) \mathbb{1}_{\{T\}}(t), \ h_i^n = t_{i+1}^n - t_i^n \end{aligned}$$

de plus L'intégrale de Follmer Par rapport à toute autre subdivision aléatoire vérifiant $(i)_(ii)$, est presque certainement égal à 2.31

Remarque 2.2.1. *Notons que la convergence de 2.31* **Tient** *sur un ensemble Ω_1 qui peut être choisi indépendamment du choix de $F \in \mathcal{C}^{1,2}$*

Preuve. *Soit $(\prod_n)$ une suite de subdivisions aléatoires vérifiant (i) et (ii). Alors il existe un ensemble Ω_1 avec $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ de sorte que pour $\omega \in \Omega_1(X, A)$ est une fonction cadlag et $(i) - (ii)$. est vérifiée trajectoriellement .En impliquant le théorème (2.5 dans [6]) à $(Y(., \omega), A(., \omega))$ le long de la subdivision $\prod_n(\omega)$ montre que 2.30 reste vraie sur Ω_1.*
Pour montrer l'indépendance de la limite dans 2.31 Par rapport à la subdivision choisie, nous notons que si $\prod_n^2$ est une autre suite de subdivisions aléatoires satisfaisant (i)-(ii), alors il existe $\Omega_2 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ de sorte qu'on peut appliquer le théorème 2.21 pour $\omega \in \Omega_2$ nous avons donc

$$\int_{]0,t]} \nabla_x F_u(Y_{u-}, A_{u-}).d^{\Pi^2} Y(u) = \int_{]0,t]} \nabla_x F_u(Y_{u-}, A_{u-}).d^{\Pi} Y(u)$$

sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. puisque $\mathbb{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$ Nous obtenons le résultat. ■

2.3 Intégrale stochastique pour des processus de Dirichlet

Quelque abréviation

1. martingale additif fonctionnel (MAF)
2. additif fonctionnel (MA)
3. fonctionnel additif continu positif (PCAF)
4. Fonction additive continue (CAF)
5. p.s presque sûrement

Définition 2.3.1. *(i) Une suite croissante* $(\mathcal{F}_k)_k \in \mathbb{N}$ *des sous-ensembles fermés de* E *s'appelle un* ε*-imbriqué si*

$$\cup_{k\in\mathbb{N}} D(\varepsilon)_{F_k} \text{ est } \tilde{\varepsilon}_1^{1/2} \text{ Dense dans } D(\varepsilon),$$

où

$$D(\varepsilon)_{F_k} := \{u \in D(\varepsilon) | u = 0m - p.s. \text{ sur } F_k^c\}$$

et $F_k^c := E \setminus F_k, k \in \mathbb{N}$.

(ii) Un ensemble $N \subset E$ *s'appelle* ε*-exceptionnel si* $N \subset \cap_{k\in\mathbb{N}} F_k^c$ *Pour un* ε*-imbriqué* $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Une propriété détient ε*-quasi-presque partout (abrégé* ε*-q.pp.)si elle détient en dehors d'un ensemble* ε*-exceptionnelle.*
(iii)Un ε*-q.pp. Définie La fonction* u *sur* E *est appelée* ε*- quasi continue si elle existe Un* ε*-imbriqué* $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tel que* $u|F_k$ *est continue pour tout* $k \in \mathbb{N}$*. Dans ce cas, nous écrivons* $u \in C(\{F_k\})$*.)*

Définition 2.3.2. *Une forme Dirichlet* $(\varepsilon, D(\varepsilon))$ *s'appelle quasi-régulière si :*
(i)Il existe un ε*-imbriqué composé de sous-ensembles compacts de* E*.*
(ii) Il existe un sous-ensemble $\tilde{\varepsilon}_1^{1/2}$*-dense de* $D(\varepsilon)$ *dont les éléments ont* ε*-quasi continue m-versions.*
(iii)Il existe un $u_n \in D(\varepsilon)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, ayant* ε*-quasi continue m-versions* $\tilde{u}_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, et Un ensemble* ε*-exceptionnel* $N \subset E$ *tel que* $\{\tilde{u}_n | n \in \mathbb{N}\}$ *Sépare les points de* $E \setminus N$*.*

Rappelons que tout martingale additive fonctionnel localement de carré intégrable M sur $I(\zeta)$ admet une fonction de saut ϕ sur $E_\partial \times E_\partial$ disparaissant sur diagonale tels que $\triangle M_t = \phi(X_{t-}, X_t)$,$t \in]0,\ \zeta_p[\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$. Quand $M \in \mathcal{M}^0$, nous pouvons élargit cette dituation en remplaçant $]0; \zeta_p[$ avec $]0; \infty[$ en raison de la décomposition de Fukushima et combinaison du théorème 5.2.1 et du lemme 5.6.3 dans [24]. Les mêmes prises d'affirmation pour $M \in \mathcal{M}^0_{loc}$ emplacement.

Lemme 2.3.1. *Soit ϕ une fonction de Borel sur $E \times E$ disparaissant sur la diagonale. Supposons que*

$$N(\mathbb{1}_{E\times E}(|\phi|^2 \wedge |\phi|))\mu_H \in S$$

Alors, il existe une martingale locale additive fonctionnel purement discontinue K sur $I(\zeta)$ tel que $K_t - K_{t-} = \phi(X_{t-}, X_t)$ pour tout $t < \zeta$, $\mathbf{P}_{x^{-p.s.}}$ pour q.p. $x \in E$.

Preuve. *L'hypothèse implique que le processus compensé*

$$K_t^{(2)} := \sum_{0<s\leq t} \phi(X_{s-}, X_s)\cdot\mathbb{1}_{\{|\phi(X_{s-},X_s)|>1\}}\mathbb{1}_{\{s<\zeta\}} - \int_0^t \int_E N(X_s, dy)\phi(X_s, y)\cdot\mathbb{1}_{\{|\phi(X_s,y)>1|\}}dH_s$$

Est une martingale local additive fonctionnel sur $I(\zeta)$, et que

$$A_t := \int_0^t \int_E N(X_s, dy)[\phi(X_s, y)]^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|\phi(X_s,y)|\leq 1\}}dH_s$$

Est une fonctionnel additif continue positive. Maintenant, si N est un MAF localement de carré intégrable avec fonction de saut φ, la formule

$$\Phi(N)_t := \int_0^t \int_E \phi(X_s, y) \cdot \mathbb{1}_{\{|\phi(X_s,y)|\leq 1\}}\varphi(X_s, y)N(X_s, dy)dH_s$$

définit une FAC localement de variation finie, et

$$[\Phi(N)_t]^2 \leq \langle N\rangle_t \cdot\ A_t, 0 < t < \zeta,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Un résultat de Kunita (Prop. 2.4 dans [18] Maintenant nous dit qu'il y a une martingale local additive fonctionnel $K^{(1)}$ tel que $\Phi(N) \equiv \langle K^{(1)}, N\rangle$ pour tout N. une martingale local additive fonctionnel $K := K^{(1)} + K^{(2)}$ réponds à la demande .■

Définition 2.3.3. *Soit M est une martingale local additive fonctionnel de carré-intégrable sur $I(\zeta)$ avec fonction de saut φ. Supposons que pour q.pp. $x \in E$, $\mathbf{P}_{x-}$p.s.*

$$\int_0^t \int_E (\widehat{\varphi}^2 \mathbb{1}_{\{|\widehat{\varphi}|\leq 1\}} + |\widehat{\varphi}| \mathbb{1}_{\{|\widehat{\varphi}|>1\}})(X_s, y) N(X_s, dy) dH_s < \infty \text{ pour chaque } t < \zeta, \tag{2.32}$$

où $\widehat{\varphi}(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$. On définit, $\mathbf{P}_m - p.s.$ sur $[0, \zeta[$,

$$\Lambda(M)_t := -\frac{1}{2}(M_t + M_t \circ r_t + \varphi(X_t, X_{t-}) + K_t) \text{ pour} t \in [0, \zeta[, \tag{2.33}$$

où K_t est le MAF local purement discontinu sur $I(\zeta)$ avec

$$K_t - K_{t-} = -\widehat{\varphi}(X_{t-}, X_t) \text{ pour chaque} t < \zeta, \mathbf{P}_x - p.s. \tag{2.34}$$

pour q.pp. $x \in E$.

Remarque 2.3.1. **i** *La condition 2.32 n'est rien d'autre que $N(\mathbb{1}_{E\times E}(|\widehat{\varphi}|^2 \wedge |\widehat{\varphi}|))\mu_H \in S$. En particulier, la condition 2.32 est satisfaite par la fonction de saut de tout élément de $\mathcal{M}^0$.*

ii *Il résulte du théorème (2.13 dans [34]) que $t \longmapsto \Lambda(M)_t$ est continue sur $[0, \zeta[$. Il est alors clair de la définition que Λ est un opérateur linéaire qui fait correspondre chaque $MAFs$ localement carré intégrable dans $CAFs$ sur $[0, \zeta[$, c'est à dire que $\Lambda(M)_t = \Lambda(M)_t \circ r_t$ $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{t < \zeta\}$. En effet, $-K_t := \sum_{s\leq t} \hat{\varphi}(X_{s-}, X_s) - \int_0^t \int_E \hat{\varphi}(X_s, y) N(X_s, dy) dH_s$ $t < \zeta$ Satisfaisant $K_t = K_t \circ r_t$ $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{t < \zeta\}$ pour un $t > 0$ fixé.*

iii *Si $\{M_n, n \geq 1\}$ est une suite de $MAFs$ ayant une énergie finie convergente probabilité vers M, alors il est facile de voir que $M_t^n \circ r_t, \varphi^n(X_{t-}, X_t) = M_t^n - M_{t-}^n$ et $\varphi^n(X_t, X_{t-})$ Converge vers $M_t \circ r_t$, $\varphi(X_{t-}, X_t) = M_t - M_{t-}$ et $\varphi(X_t, X_{t-})$ en probabilité, respectivement, sous $\mathbf{P}_m$. Par conséquent, nous avons $\Lambda(M^n)_t$ converge vers $\Lambda(M)_t$ en probabilité pour chaque $t > 0$.*

iv *Pour $u \in \mathcal{F}$*

$$\Lambda(M^u)_t = -\frac{1}{2}(M_t^u + M_t^u \circ r_t + u(X_{t-}) - u(X_t)) = -\frac{1}{2}(M_t^u + M_t^u \circ r_t) = N_t^u$$

$\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{t < \zeta\}$ pour chaque $t \geq 0$ fixé. Puisque $\Lambda(M^u)_t$ et N_t^u sont continus en t, nous avons $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$

$$\Lambda(M^u)_t = N_t^u \text{ pour tous } t < \zeta.$$

En d'autres termes, $\Lambda(M)$ coïncide sur $[0,\zeta[$ avec $\Gamma(M)$ défini par

$$\Gamma(Z)_t = N_t^{\gamma(Z)} - \int_0^t \gamma(Z)(X_s)ds \text{ pour } Z \in \mathcal{M} \tag{2.35}$$

avec $M = M^u$ pour $u \in \mathcal{F}$. Nous allons montrer que $\Lambda(M)$ défini ci-dessus coïncide sur $[0,\zeta[$ avec $\Gamma(M)$ défini dans 2.35 lorsque M est un MAF d'énergie finie. Un AF Z est dite pair (ou impair) si et seulement si $Z_t \circ r_t = Z_t$ ($ouZ_t \circ r_t = -Z_t$) $\mathbf{P}_{m-p.s.}$ sur $\{t < \zeta\}$ pour tout $t > 0$. Pour un processus càdlàg Z avec $Z_0 = 0$ et $T > 0$, on définit

$$R_T Z_t := (R_T Z)_t := Z_{T-} - Z_{(T-t)-} \text{ pour } 0 \le t \le T,$$

avec la convention $Z_{0-} = Z_0 = 0$. Notont que $R_T Z_t$ ainsi défini est un processus càdlàg en $t \in [0,T]$.

Lemme 2.3.2. *Supposons que Z soit un càdlàg PrAF(Progressivement additif fonctionnel). Alors, $\mathbf{P}_{m-p.s.}$. Sur $\{T < \zeta\}$,*

$$R_T Z_t = \begin{cases} Z_t \circ r_T, & \text{si } Z \text{ est pair} \\ -Z_t \circ r_T, & \text{si } Z \text{ est impair} \end{cases} \text{ pour tout } t \in [0,T] \tag{2.36}$$

Preuve. *Soit Z être un càadlàg PrAF et soit $T > 0$. D'apres le Lemme suivant ,*

Lemme 2.3.3. *pout $t, s > 0$,*

(i) *$\theta_t r_{t+s}\omega$ est s-équivalent à $r_s\omega$ si $t + s < \zeta(\omega)$ où $s \ge \zeta(\omega)$;*

(ii) *$r_t\theta_s\omega$ Pré-t-équivalent à $r_{t+s}\omega$. Est continu à s, alors $r_t\theta_s\omega$ est t-équivalent à $r_{t+s}\omega$.*

on a

$$Z_t \circ r_T = (Z_T - Z_{T-t} \circ \theta_t) \circ r_T = Z_T \circ r_T - Z_{T-t} \circ r_{T-t}, \text{ pour tout } t < T. \tag{2.37}$$

Lorsque Z est pair,

$$Z_t \circ r_T = Z_T - Z_{T-t} = Z_{T-} - Z_{(T-t)-} = R_T Z_t$$

$P_{m-p.s}$ sur $\{T < \zeta\}$ Pour chaque $0 \le t \le T$ fixe. Puisque les deux côtés sont à droits continus àdroits en $t \in [0,T[$, on a $P_{m-p.s}$. $R_T Z_t = Z_t \circ r_T$ $\forall t \in [0,T]$. Lorsque Z est un AF impair de Z, (2.36) Peut être prouvé de manière similaire. ■

Théorème 2.3.1. *Pour un MAF M d'énergie finie, $\Lambda(M)$ défini ci-dessus coïncide avec $\Gamma(M)$ défini dans 2.35, $\mathbf{P}_{m-p.s.}$ sur $[0,\zeta[$.*

Preuve. *Pour $u \in \mathcal{F}$ et $0 < t < T$, puisque N^u est une CAF pair, par le lemme 2.36,*

$$\begin{aligned}(M_t^u + 2N_t^u) \circ r_t &= (u(X_t) - u(X_0) + N_t^u) \circ r_T \\ &= u(X_{(T-t)-}) - u(X_{T-}) + N_{T-}^u - N_{(T-t)-}^u \\ &= M_{(T-t)-}^u - M_{T-}^u \\ &= -R_T M_t^u.\end{aligned}$$

Puisque $(M_t^u + 2N_t^u) \circ r_t$ et $R_T M_t^u$ sont continues à droite en t, on a $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{T < \zeta\}$,

$$R_T M_t^u = -(M_t^u + 2N_t^u) \circ r_T, \ \forall\, t \in [0, T]. \tag{2.38}$$

Pour $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$ et $u \in \mathcal{F}_b$, on définit $M_t = \int_0^t v(X_{s-}) dM_s^u$, qui est un MAF d'énergie finie.
Notons que, puisque $u \in D(\mathcal{L})$,$N_t^u = \mathcal{L}u(X_s)ds)$ est un processus continu de variation finie. Pour chaque $0 < t < T$ fixé et $n \geq 1$, on definit $t_i = it/n$ et $s_i = T - t + t_i$. En utilisant l'approximation standard de la somme de Riemann de l'intégrale d'Itô et du processus de covariance $[M^v, M^u]$, on a $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{T < \zeta\}$

$$\begin{aligned}&M_T - M_{T-t} + [M^v, M^u]_T - [M^v, M^u]_{T-t} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} v(X_{s_i}) \Big(M_{s_{i+1}}^u - M_{s_i}^u\Big) + \Big(M_{s_{i+1}}^v - M_{s_i}^v\Big)\Big(M_{s_{i+1}}^u - M_{s_i}^u\Big) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} v(X_{s_{i+1}}) \Big(M_{s_{i+1}}^u - M_{s_i}^u\Big) + \Big(N_{s_{i+1}}^v - N_{s_i}^v\Big)\Big(M_{s_{i+1}}^u - M_{s_i}^u\Big) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} v(X_{s_{i+1}}) \Big(M_{s_{i+1}}^u - M_{s_i}^u\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} v(X_{T-t+t_i}) \Big(M_{T-t+t_{i+1}}^u - M_{T-t+t_i}^u\Big) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} v(X_{t_i}) \Big(M_{t_{i+1}}^u - M_{t_i}^u + 2N_{t_{i+1}}^u - 2N_{t_i}^u\Big) \right) \circ r_T \\ &= -\left(\int_0^t v(X_{s-}) d(M_s^u + 2N_s^u) \right) \circ r_T.\end{aligned}$$

où, dans la troisième égalité, nous avons utilisé le fait que N^u a une énergie nulle, tandis que dans la seconde à la dernière équation, nous avons utilisé l'égalité (2.38). Notons que *l'intégrale stochastique pour N^u dans la dernière égalité est juste l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes puisque N^u est à variation finie.*

Notons également que $X_t = X_{t-}$p.s. pour tout $t > 0$ fixé. Nous avons donc pour chaque $t < T$ fixe, $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{T < \zeta\}$,

$$R_T M_t + R_T[M^v, M^u]_t = -\Big(\int_0^t v(X_{s-})d(M_s^u + 2N_s^u)\Big) \circ r_T.$$

Puisque les deux côtés sont continus à droit en $t \in [0, T]$, on a $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{T < \zeta\}$

$$R_T M_t + R_T[M^v, M^u]_t = -(\int_0^t v(X_{s-})d(M_s^u + 2N_s^u)) \circ r_T \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (2.39)$$

Par le Théorèm((3.1) et (3.8) dans Nakao [[32]]),

$$\int_0^t v(X_{s-})dN_s^u = \int_0^t v(X_s) \circ dN_s^u = \Gamma(M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{v,c} + M^{v,j}, M^{u,c} + M^{u,j}\rangle_t.$$

Il en résulte que $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{T < \zeta\}$

$$\begin{aligned} R_T M_t \ &+ \ R_T[M^v, M^u]_t \\ &= \ -(M_t + 2\Gamma(M)_t - \langle M^{v,c} + M^{v,j}, M^{u,c} + M^{u,j}\rangle_t) \circ r_T \\ &= \ -(M_t + 2\Gamma(M)_t - \langle M^{v,c} + M^{u,c}\rangle_t - \langle M^{v,j}, M^{u,j}\rangle_t) \circ r_T \ \forall t \le T. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} [M^v, M^u]_t &= \langle M^{v,c}, M^{u,c}\rangle_t + \sum_{s\le t}(M_s^v - M_{s-}^v)(M_s^u - M_{s-}^u) \\ &= \langle M^{v,c}, M^{u,c}\rangle_t + \sum_{s\le t}(v(X_s) - v(X_{s-}))(u(X_s) - u(X_{s-})). \end{aligned}$$

Prenons $t = T$ et notons que $\Gamma(M)$ et $\langle M^{v,c}, N^{v,c}\rangle$ sont continus même AFs, on a à partir de ce qui précède que $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ sur $\{T < \zeta\}$,

$$\Gamma(M)_t = -\frac{1}{2}(M_t + M_t \circ r_t + v(X_T)(v(X_{t-}) - v(X_t)) + K_t),$$

où

$$K_t = \sum_{s\le t}(v(X_s) - v(X_{s-}))(u(X_s) - u(X_{s-})) - \langle M^{v,j}, M^{u,c}\rangle_t$$

est le MAF *purement discontinu avec* $K_t - K_{t-} = (v(X_t) - v(X_{t-}))(u(X_t) - u(X_{t-}))$. *constatons* $M_t - M_{t-} = \varphi(X_{t-}, X_t)$, *où*$\varphi(x, y) = v(x)(u(y) - u(x))$, *et que*

$$K_t - K_{t-} = -\varphi(X_{t-}, X_t) - \varphi(X_t, X_{t-}).$$

Cela montre que $\Gamma(M)_t = \Lambda(M)_t \ \mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ *sur* $\{T < \zeta\}$ *pour tout* $t \geq$ *fixe . Comme les deux processus sont continus en* $t \in [0, \zeta[$, *on a* $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$.

$$\Gamma(M) = \Lambda(M) \quad sur[0, \zeta[,$$

pour un MAF M *de la forme* $M_t = \int_0^t v(X_{s-})dM_s^u$ *avec* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ *et* $v \in \mathcal{F}_b$.*Par le Lemme (5.4.5 dans [[23]]), tels MAF forment un sous-ensemble dense dans l'espace des MAFs ayant une énergie finie. Ainsi, par le lemme (3.1 à Nakao [[32]] et la remarque 3.3 (iii)), nous avons pour un MAF* M *général d'énergie finie,* $P_{m^{-p.s.}}$ $\Gamma(M_t) = \Lambda(M)_t$ *sur* $\{0, \zeta\}$, *il en résulte que* $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$ *pour tout* $t \geq 0$ *fixé. Puisque les deux processus sont continus dans* $t \in [0, \zeta[$ *il en résulte que* $\Gamma(M) = \Lambda(M)$ *sur*$[0, \zeta[$ $P_{m^{-p.s.}}$.■

Théorème 2.3.2. *Soit* M *un* MAF *localement de carré intégrable avec une fonction de saut* φ. *Supposons que* φ *satisfait la condition (2.32). Alors pour tout* $t > 0$, $\mathbf{P}_{m^{-p.s.}}$*sur* $\{t < \zeta\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} (\Lambda(M)_{(l+1)t/n} - \Lambda(M)_{lt/n})^2 = 0, \tag{2.40}$$

où la convergence est en probabilité par rapport à $\mathbf{P}_x m.p.s$ $.x \in E$

Preuve. *Par* $\Gamma(z)_t = N_t^{\gamma(Z)} - \int_0^t \gamma(Z)(X_s)ds$ *pour* $Z \in \mathcal{M}$ *et Théorème 2.3.1, 2.40 tient clairement lorsque* M *est un MAF d'énergie finie. Pour un MAF* M, *localement de carréintégrable, il existe une suite croissante d'ensembles compacts* $\{F_k, k \geq 1$ *avec* $\cap_{k=1}^{\infty}(E \setminus F_k)$ *Ayant une capacité nulle telle que* $\mathbb{1}_{F_k} * M$ *est un MAF ayant une énergie* MAF *finie pour chaque* $k \geq 1$, *et donc 2.40 est vérifier avec* $\mathbb{1}_{F_k} * M$ *à la place de* M . $\forall k \geq 1$

$$\Lambda(M)_t = \Lambda(\mathbb{1}_{F_k} * M)_t - \frac{1}{2}K_t^k \ \ \mathbf{P}_{m^{-p.s.}} \ sur \ [0, \tau_{F_k}[,$$

où K_t^k *est un MAF local purement discontinu sur* $I(\zeta)$ *avec.* $K_t^k - K_{t-}^k = \mathbb{1}_{F_k^c}(X_{t-})\varphi(X_{t-}, X_t) + \mathbb{1}_{F_k^c}(X_t)\varphi(X_t, X_{t-})$, $t < \zeta$. *puisque* $\mathbb{1}_{F_k} * M \in \mathcal{M}^0$, *on a*

$$\int_E N(\mathbb{1}_{F_k \times E}\varphi^2)d\mu_H = \int_E N(\mathbb{1}_{E \times F_k}\overline{\varphi}^2)d\mu_H < \infty.$$

Par conséquent, par le Lemme 2.32 nous avons l'existence d'une martingale locale purement discontinue sur $I(\zeta)$ avec des sauts donnés par $\mathbb{1}_{F_k}(X_{t-})\varphi(X_{t-}, X_t) + \mathbb{1}_{F_k}(X_t)\varphi(X_t, X_{t-})$, $t < \zeta$. Donc on obtient l'existence de tels K_t^k. puisque est donné le support carré de K^k estt donné par

$$\sum_{s \le t} \mathbb{1}_{F_k^c}(X_{s-})\varphi^2(X_{s-}, X_s) + \mathbb{1}_{F_k^c}(X_s)\varphi^2(X_s, X_{s-}),$$

et il disparaît à $t < \tau_{F_k}$, Nous avons pour tout $t > 0$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} (\Lambda(M)_{(l+1)t/n} - \Lambda(M)_{lt/n})^2 = 0 \quad \mathbf{P}_{m^{-p.s.}} \ sur \ \{0 < \tau_{F_k}\}$$

En passant à la limite lorsque $K \uparrow \infty$ cela donne 2.40 .■

Nous sommes maintenant en mesure de définir les intégrales stochastiques avec $\Lambda(M)$ comme intégrateur. Notez que pour $f \in \mathcal{F}_{loc}$, $M^{f,c}$ est bien défini. De plus, pour $f \in \mathcal{F}_{loc}$ et une MAF local et de carré-intégrable M

$$t \mapsto (f * M)_t := \int_0^t f(X_{s-})dM_s$$

est un MAF local est de carré-intégrable

Définition 2.3.4. *(Intégrale stochastique)*
Supposons que M est un MAF localement de carré intégrable et $f \in \mathcal{F}_{loc}$. Soit $\varphi : E_\partial \times E_\partial \to \mathbb{R}$ est une fonction de saut pour M, et supposer que φ satisfait la condition (2.32). On définit l'intégral stochastique sur $[0, \zeta[$ par,

$$\begin{aligned} &\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s \\ &:= \Lambda(f * M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{f,c}, M^c\rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_E (f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s, \end{aligned} \tag{2.41}$$

chaque fois que $\Lambda(f * M)$ est bien définie et le troisième terme dans le côté droit de (2.41) est absolument convergent.

Remarque 2.3.2. *(i) Voici quelques conditions suffisantes pour chaque terme du côté droit de 2.41 pour être bien défini. En plus des conditions de la définition (2.3.4), nous supposons que $\mathbf{P}_m - p.s.$*

$$\int_0^t \int_{E_\partial} (f(X_s) - f(y))^2 N(X_s, dy) dH_s < \infty, \ \forall \ t < \zeta \tag{2.42}$$

et cela que

$$\int_0^t \int_E \varphi(y, X_s)^2 N(X_s, dy) dH_s < \infty, \ \forall t < \zeta. \tag{2.43}$$

Alors, les premier et le troisième termes du côté droit de (2.41) sont bien définis. C'est parce que $N(\mathbb{1}_{E\times E}|\widehat{\varphi}|)\mu_H \in S$ *implique que* $N(\mathbb{1}_{E\times E}|f\widehat{\varphi}|)\mu_H \in S$*, et*

$$f(x)\varphi(x, y) + f(y)\varphi(y, x) = f(x)\widehat{\varphi}(x, y) + (f(y) - f(x))\varphi(y, x),$$

alors $\Lambda(f * M)$ *est bien définie sur* $[0, \zeta[$ *compte tenu de la condition (2.32) pour* $f * M$*, (2.42) et (2.43).*

La condition (2.42) est satisfaite lorsque f *est une fonction bornée dans* $\mathcal{F}_{loc}$ *ou* $f \in \mathcal{F}$*. En effet, lorsque* $f \in \mathcal{F}$*, le côté gauche de (2.42) est juste* $\langle M^{f,d}\rangle_t$*.*
Lorsque f *est une fonction bornée dans* $\mathcal{F}_{loc}$*, il existe une suite croissante d'ensembles ouverts finie* $\{D_n, n \geq 1\}$ *avec* $\cup_{n=1}^{\infty} D_n = E$ *q.pp. et une suite de fonctions bornées* $\{f_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ *tel que* $f = f_n$ *sur pour tout* $n \geq 1$*.notons que pour chaque* $n \geq 1$*,* $M^{f_n,d}$ *est une martingale purement discontinue de carrée intégrable et*

$$M_t^{f_n,d} - M_{t-}^{f_n,d} = f_n(X_t) - f_n(X_{t-})$$

Alors $t \mapsto \sum_{s\leq t}(f_n(X_s) - f_n(X_{s-}))^2$ *est* $\mathbf{P}_x$*-intégrable pour q.pp.*$x \in E$*. Puisque* f *et* f_n *Sont bornées, nous avons pour tout* $n \geq 1$

$$t \mapsto \sum_{s\leq t}(f(X_s) - f(X_{s-}))^2 \mathbb{1}_{\{s\leq\tau_{D_n}\}},$$

est un processus croissant et $\mathbf{P}_x$*-intégrable pour chaque* $t \geq 0$ *fixé pour q.pp* $x \in E$*. Cela implique que la prévisible duale existe une . Ainsi (2.42) tient pour chaque* $t < \tau_{D_n}$ *et donc pour chaque* $t < \zeta$*.*

La condition (2.43) est satisfaite lorsque M^d est P_m de carré-intégrable. En effet,

$$\begin{aligned} E_m[\sum_{s\leq t}\varphi^2(X_s,X_{s-}):t<\zeta] &= E_m[[M^d]_t\circ r_t:t<\zeta] \\ &= E_m[[M^d]_t:t<\zeta]\leq E_m[\langle M\rangle_t] \\ &\leq te(M)<\infty \end{aligned}$$

Alors le Corollaire 4.5 *dans* [[25]] *nous dit que*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}E_m[\sum_{s\leq t}\varphi^2(X_s,X_{s-}):t<\zeta]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}E_m[\sum_{s\leq t}\varphi^2(X_s,X_{s-})],$$

ce qui implique

$$E_m[\int_0^t\int_E\varphi(y,X_s)^2N(X_s,dy)dH_s]<\infty,$$

pour tout $t>0$ par son subadditivité. Par conséquent, nous obtenons (2.43).
(ii) On suppose que $f\in\mathcal{F}$. Soit K_t une MAFlocale purement discontinue sur $I(\zeta)$ avec $K_t-K_{t-}=-\varphi(X_{t-},X_t)-\varphi(X_t,X_{t-})$ sur $]0,\zeta]$. Alors

$$\langle M^{f,j},M^j+K\rangle_t=-\int_0^t\int_E(f(y)-f(X_s))\varphi(y,X_s)N(X_s,dy)dH_s.$$

Dans ce cas, (2.41) peut être réécrit comme

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s=\Lambda(f*M)_t-\frac{1}{2}\langle M^{f,c}+M^{f,j},M^c+M^j+K\rangle_t \tag{2.44}$$

Sur $[0,\zeta[$.
Alors, quand $M=M^u$ pour $u\in\mathcal{F}$ et $f\in\mathcal{F}\cap L^2(E;\mu_{\langle u\rangle})$, $\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s$ sur $[0,\zeta[$ est juste $\int_0^t f(X_s)\circ d\Gamma(M)_s$ définie par.

$$\int_0^t f(X_s)dN_s^u:=\Gamma(f*M^u)_t-\frac{1}{2}\langle M^{f,c}+M^{f,j},M^{u,c}+M^{u,j}\rangle_t, \tag{2.45}$$

Cela montre que l'intégration stochastique donnée dans la définition (2.39) étend la définition de Nakao (2.45) d'une intégrale stochastique Introduit pour la première fois dans [[32]].

Théorème 2.3.3. *L'intégrale stochastique dans (2.41) est bien définie . C'est-à-dire si M et $\widetilde{M}$ Sont deux MAF localement de carrés intégrables, de sorte que toutes les conditions de la définition 2.3.3 pour M et $\widetilde{M}$ Sont satisfaits et $\Lambda(M) \equiv \Lambda(\widetilde{M})$ sur $[0,\zeta[$, alors pour chaque $f \in \mathcal{F}_{loc}$ pour lesquels $\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s$ et $\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(\widetilde{M})_s$ sont bien définies, nous avons $\mathbf{P}_m - p.s.$*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(\widetilde{M})_s \text{ sur } [0,\zeta[.$$

Preuve. *Il est équivalent de montrer que*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M-\widetilde{M})_s = 0 \text{ sur } [0,\zeta[.$$

En prenant M au lieu de $M-\widetilde{M}$, on peut supposer que $\widetilde{M}=0$. De plus un argument de localisation permet de supposer que f est bornée. Soit $\varphi : E_\partial \times E_\partial \to \mathbb{R}$ est une fonction de saut pour M. Soit K_t le MAF purement discontinu et localement de carré intégrable sur $I(\zeta)$ avec

$$K_t - K_{t-} = -\varphi(X_{t-},X_t) - \varphi(X_t,X_{t-}),\ t<\zeta.$$

puisque $\Lambda(M)\equiv 0$, on a

$$M_t + M_t\circ r_t + \varphi(X_t,X_{t-}) + K_t = 0 \text{ sur } [0,\zeta[\tag{2.46}$$

Ainsi, par (2.37) et (2.46), sur $\{T<\zeta\}$,

$$\begin{aligned} M_t\circ r_T &= M_T\circ r_T - M_{T-t}\circ r_{T-t} && (2.47)\\ &= -M_T - K_T + M_{T-t} + K_{T-t} - \varphi(X_T,X_{T-}) + \varphi(X_{T-t},X_{(T-t)-}), && (2.48)\end{aligned}$$

pour chaque $t\in[0,T]$. En utilisant l'approximation standard de la somme de Riemann et (2.47), nous avons pour $f\in\mathcal{F}$

$$\begin{gathered}(f*M)_t\circ r_t + f(X_t)\varphi(X_t,X_{t-})\\ = -(f*M)_t - (f*K)_t - [M^f, M+K]_t\\ = -(f*M)_t - (f*K)_t - \langle M^{f,c}, M^c\rangle_t + \textstyle\sum_{s\le t}(f(X_s)-f(X_{s-}))\varphi(X_s,X_{s-}),\end{gathered}$$

$\mathbf{P}_m - p.s.$ sur $\{t<\zeta\}$ pour tout $t\ge 0$ fixé .Par conséquent, nous avons pour $f\in\mathcal{F}_{loc}$,$\mathbf{P}_m - p.s.$ por tout $t\in[0,\zeta[$

$$(f*M)_t\circ r_t + f(X_t)\varphi(X_t,X_{t-})$$

$$= -(f * M)_t - (f * K)_t - \langle M^{f,c}, M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}), \tag{2.49}$$

puisque les deux côtés sont continus à droite en $t \in [0, \zeta[$. Soit $\widetilde{K}$ le MAF local purement discontinu sur $I(\zeta)$ avec

$$\widetilde{K}_t - \widetilde{K}_{t-} = -f(X_{t-})\varphi(X_{t-}, X_t) - f(X_t)\varphi(X_t, X_{t-}) \ \forall t \in [0, \zeta[.$$

Alors, pour $f \in \mathcal{F}_{loc}$, on a par (2.49),

$$\begin{aligned}
\Lambda(f * M)_t &= -\frac{1}{2}((f * M)_t + (f * M) \circ r_t + f(X_t)\varphi(X_t, X_{t-}) + \widetilde{K}_t) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^t f(X_{s-}) dK_s + \langle M^{f,c}, M^c \rangle_t - \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}) - \widetilde{K}_t\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^t f(X_{s-}) d\Lambda(M)_s$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda(f * M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{f,c}, M^c \rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_E (f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s) N(X_s, dy) dHs \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t f(X_{s-}) dK_s - \frac{1}{2}\sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}) - \frac{1}{2}\widetilde{K}_t \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_E (f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s) N(X_s, dy) dHs
\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_t &= -\sum_{s \leq t} (f(X_{s-})\varphi(X_{s-}, X_s) + f(X_s)\varphi(X_s, X_{s-})) \\
&+ \int_0^t \int_E (f(X_s)\varphi(X_s, y) + f(y)\varphi(y, X_s)) N(X_s, dy) dH_s,
\end{aligned}$$

cela donne

$$K_t = \lim_{\epsilon \to 0} \Big(-\sum_{s \leq t} (\widehat{\varphi} 1\!\!1_{|\widehat{\varphi}| > \varepsilon})(X_{s-}, X_s) + (N(\widehat{\varphi} 1\!\!1_{|\widehat{\varphi}| > \varepsilon}) * H)_t \Big), \tag{2.50}$$

où $\widehat{\varphi}(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$. *Il s'ensuit que,*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = 0 \text{ pour tout } t < \zeta,$$

$\mathbf{P}_m - p.s.$ *Cela prouve le théorème* ■

Remarque 2.3.3. *La preuve ci-dessus montre en réalité que si* $\Lambda(M) = \Lambda(\widetilde{M})$ *sur* $[0,T] \cap [0,\zeta[$, *alors*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(\widetilde{M})_s \text{ sur } [0,T] \cap [0,\zeta[.$$

2.4 Etude approfondie de l'intégrale stochastique

Théorème 2.4.1. *Supposons que* $f \in \mathcal{F}_{loc}$ *et que* M *soit un* MAF *localement de carré intégrable satisfaisant le lemme 2.3.3 :*
telle que $\Lambda(M)$ *est un processus continu* A *de variation finie sur* $[0,\zeta[$. *Supposons que l'intégrale stochastique* $t \mapsto \int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s$ *est bien défini. Alors*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \int_0^t f(X_s)dA_s \quad \text{sur } [0,\zeta],$$

où l'intégrale sur le côté droit est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

Preuve. *Soit* $\varphi : E_\partial \times E_\partial$ *une fonction de Borel disparaissant sur la diagonale avec* $\varphi(X_{t-}, X_t) = M_t - M_{t-}$ *pour* $t \in [0,\zeta[$.*Soit* K_t *le* MAF *purement discontinu localement intégrable sur* $I(\zeta)$ *avec*

$$K_t - K_{t-} = -\varphi(X_{t-}, X_t) - \varphi(X_t, X_{t-}), \; t \in]0,\zeta[.$$

Puisque $\Lambda(M) = A$ *sur* $[0,\zeta[$,

$$M_t \circ r_t + \varphi(X_t, X_{t-}) = -M_t - K_t - 2A_t, \text{ pour tout } t \in [0,\zeta[.$$

Ainsi, par (2.37), pour tout $T > t > 0$, *sur* $\{T < \zeta\}$,

$$M_t \circ r_T = -M_T - K_T + 2A_T + M_{T-t} + K_{T-t} + 2A_{T-t} - \varphi(X_T, X_{T-}) + \varphi(X_{T-t}, X_{(T-t)-}) \quad (2.51)$$

fixons Maintenant $f \in \mathcal{F}_{loc}$; comme précédement, on peut supposer sans perte de généralité que f est bornée. En utilisant l'approximation de somme Riemann standard, nous obtenons, sur $\{t < \zeta\}$,

$$\begin{aligned}(f * M)_t \circ r_t + f(X_t)\varphi(X_t, X_{t-}) &= -(f * M)_t - (f * K)_t - 2(f * A)_t - [M^f, M + K + 2A]_t \\ &= -(f * M)_t - (f * K)_t - 2(f * A)_t - \langle M^{f,c}, M^c\rangle_t \\ &+ \sum_{s\leq t}(f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\mathbf{P}_m - p.s.$ pour toust $\{t < \zeta\}$,

$$\begin{aligned}&= (f * M)_t \circ r_t + f(X_t)\varphi(X_t, X_{t-}) && (2.52)\\ &= -(f * M)_t - (f * K)_t - 2(f * A)_t - \langle M^{f,c}, M^c\rangle_t && (2.53)\\ &+ \sum_{s\leq t}(f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}), && (2.54)\end{aligned}$$

puisque les deux côtés sont continus à droiet en $t \in [t < \zeta[$.
Soit $\widetilde{K}$ le MAF local purement discontinu sur $I(\zeta)$ avec

$$\tilde{K}_t - \tilde{K}_{t-} = -f(X_{t-})\varphi(X_{t-}, X_t) - f(X_t)\varphi(X_t, X_{t-}), \text{ pour tout } t \in [0, \zeta[.$$

Alors, par (2.52), on a

$$\begin{aligned}\Lambda(f * M)_t &= -\frac{1}{2}\Big((f * M)_t + (f * M) \circ r_t + f(X_t)\varphi(X_t, X_{t-}) + \widetilde{K}_t\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^t f(X_{s-})dK_s + 2\int_0^t f(X_{s-})dA_s + \langle M^{f,c}, M^c\rangle_t \\ &- \sum_{s\leq t}(f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}) - \widetilde{K}_t\Big).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^t f(X_{s-}d\Lambda(M)_s &= \Lambda(f*M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{f,c}, M^c\rangle_t \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_E (f(y) - f(X_s)\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t f(X_{s-})dK_s + \int_0^t f(X_{s-})dA_s \\ &- \frac{1}{2}\sum_{s\le t}(f(X_s) - f(X_{s-}))\varphi(X_s, X_{s-}) - \frac{1}{2}\tilde{K}_t \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_E (f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s.\end{aligned}$$

Il résulte de 2.50 - (2.50) que

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \int_0^t f(X_{s-})dA_s, \text{ pour tout } t \in [0, \zeta[.$$

Cela prouve le théorème. ■ *Notonss que si* $f, g \in \mathcal{F}_{loc}$, *alors* $fg \in \mathcal{F}_{loc}$.

Théorème 2.4.2. *Soit* $f, g \in \mathcal{F}_{loc}$ *et soit* M *est un* MAF *localement de carré intégrable satisfaisant 2.3.3. Alors*

$$\int_0^t g(X_{s-})d\Big(\int_0^s f(X_{r-})d\Lambda(M)_r\Big) = \int_0^t f(X_{s-})g(X_{s-})d\Lambda(M)_s, \text{ pour } t < \zeta, \tag{2.55}$$

chaque fois que toutes les intégrales sont bien définies.

Preuve. *Soit* $\varphi : E_\sigma \times E_\sigma$ *est une fonction de Borel disparaissant sur la diagonale avec* $\varphi(X_{t-}, X_t = M_t - M_{t-}$ *pour chaque* $t \in]0, \zeta_p[$. *Soit* K_t *et* $\widetilde{K_t}$ *soyez les MAF locaux purement discontinus sur* $I(\zeta)$ *avec* $K_t - K_{t-} = -\varphi(X_{t-}, X_t) - \varphi(X_t, X_{t-})$, $t \in]0, \zeta[$ *et* $\widetilde{K_t} - \widetilde{K_{t-}} = -f(X_{t-}\varphi(X_{t-}, X_t) - f(X_t\varphi(X_t, X_{t-})$, $t \in]0, \zeta[$ *espectivement. Ensuite, le côté gauche de (2.55) est égal à*

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^t g(X_{s-})d\Lambda(f*M)_s - \frac{1}{2}\int_0^t g(X_{s-})d\langle M^{f,c}, M^c\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t\int_E g(X_s)(f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s \\ &\textstyle= \Lambda(fg*M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{g,c}, (f*M)^c\rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^t\int_E (g(y) - g(X_s))f(y)\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s \\ &\textstyle-\frac{1}{2}\int_0^t g(X_{s-})d\langle M^{f,c}, M^c\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t\int_E g(X_s)(f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s \\ &\textstyle\Lambda(fg*M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{fg,c}, M^c\rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^t\int_E (f(y)g(y) - f(X_s)g(X_s))\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s \\ &\textstyle\int_0^t f(X_{s-})g(X_{s-})d\Lambda(M)_s.\end{aligned}$$

Cela prouve le théoréme. ■

Soit $\mathcal{J}$ la classe des processus de Dirichlet qui peurent être écrite comme une somme d'une $\{\mathcal{F}\}$-semimartingale Y et $\Lambda(M)$ pour un MAF M localement de carré intégrable satisfaisant la condition de la Définition 2.3.3. Les deux derniers théorèmes impliquent que l'intégrale stochastique suivante est bien définie pour les intégrateurs $Z \in \mathcal{J}$.

Définition 2.4.1. *Pour $f \in \mathcal{F}_{loc}$ et $Z = Y + \Lambda(M) \in \mathcal{J}$, on définit sur $[0, \zeta[$*

$$\int_0^t f(X_{s-})dZ_s := \int_0^t f(X_{s-})dY_s + \int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s,$$

quand cette dernier intégrale stochastique est bien définie.

Pour établir la formule d'Itô, on a besoin du théoréme suivant :

Théorème 2.4.3. *Soit $f \in \mathcal{F}_{loc}$ et soit M est un MAF localement carré intégrable tel que $\int_0^{\cdot} f(X_{s-})d\Lambda(M)$ est bien définie sur $[0, \zeta[$.Alors pour tout $t > 0$, $\mathbf{P}_m$-p.s.sur $\{t < \zeta\}$,*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} f(X_{lt/n})(\Lambda(M)_{(l+1)t/n} - \Lambda(M)_{lt/n}). \tag{2.56}$$

Ici, la convergence est en probabilité par rapport à P_x pour m-p.e. $x \in E$

Preuve. *par (2.37), $M_s \circ r_t = M_s \circ r_t - M_{t-s} \circ r_{t-s}$ pour tout $s < t$. Soit $\varphi : E_\partial \times E_\partial \to \mathbb{R}$ une fonction Borel nulle sur l'ensemble diagonale avec, $\varphi(X_{t-}, X_t = M_t - M_{t-}$ pour tout $t \in [0, \zeta[$. Soit K est le MAF locale purement discontinue sur $I(\zeta)$ avec $K_t - K_{t-} = -\varphi(X_{t-}, X_t) - \varphi(X_t, X_{t-})$, $t \in]0, \zeta[$. Alors, pour tout $t > 0$ fixé, $\mathbf{P}m$-p.s. sur $\{t < \zeta\}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} f(X_{lt/n})(\Lambda(M)_{(l+1)t/n} - \Lambda(M)_{lt/n})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(f*M)_t - \frac{1}{2}(f*K)_t + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f(X_{lt/n})(M_{(l+1)t/n}\circ r_{(l+1)t/n} - M_{lt/n}\circ r_{lt/n}) \\
&= -\frac{1}{2}(f*M)_t - \frac{1}{2}(f*K)_t - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{l=0}^{n-1} f(X_{(l+1)t/n})(M_{(l+1)t/n} - M_{lt/n})\right]\circ r_t \\
&= -\frac{1}{2}(f*M)_t - \frac{1}{2}(f*K)_t - \frac{1}{2}(f*M)_t\circ r_t - \frac{1}{2}[M^F, M]_T\circ r_t \\
&= -\frac{1}{2}(f*M)_t - \frac{1}{2}(f*K)_t - \frac{1}{2}(f*M)_t\circ r_t - \frac{1}{2}\langle M^{f,c}, M^c\rangle_t - \frac{1}{2}\sum_{s\le t}(f(X_{s-}) - f(X_s))\varphi(X_s, X_{s-}) \\
&= \Lambda(f*M)_t + \frac{1}{2}\widetilde{K}_t - \frac{1}{2}(f*K)_t - \frac{1}{2}\langle M^{f,c}, M^c\rangle_t - \frac{1}{2}\sum_{s\le t}(f(X_{s-}) - f(X_s))\varphi(X_s, X_{s-}) \\
&= \int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s,
\end{aligned}$$

où $\widetilde{K}$ dans la deuxième à la dernière égalité est le MAF locale purement discontinu avec

$$K_s - K_{s-} = -f(X_{s-})\varphi(X_{s-}, X_s) - f(X_s)\varphi(X_s, X_{s-}), \quad s\in]0,\zeta] \ \blacksquare$$

Remarque 2.4.1. **(i)** *Le théorème 2.4.3 implique immédiatement les théorèmes 2.41 et 2.51.*

(ii) *Par 2.40, nous avons également*

$$\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f(X_{(l+1)t/n})(\Lambda(M)_{(l+1)t/n} - \Lambda(M)_{lt/n}) \qquad (2.57)$$

Par conséquent, nous pourrions représenter cette intégrale stochastique par $\int_0^t f(X_s)d\Lambda(M)_s$ ou $\int_0^t f(X_s)\circ d\Lambda(M)_s$. Ici, $\int_0^t f(X_s)\circ d\Lambda(M)_s$ est l'intégrale de type Fisk-Stratonovich :

$$\int_0^t f(X_s)\circ d\Lambda(M)_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{f(X_{(l+1)t/n}) + f(X_{lt/n})}{2}(\Lambda(M)_{(l+1)t/n} - \Lambda(M)_{lt/n}). \qquad (2.58)$$

(iii) *Pour tout $f\in\mathcal{F}_{loc}$ et M un MAF $\mathbf{P}_m$- de carré intégrable, par l'approximation de somme de Riemann 2.56, Nous pouvons étendre l'intégrale stochastique $\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s$ sans imposer de conditions supplémentaires.*

En effet, soit $\{\mathbf{G}_l\}$ un ε-imbriqué de Borel finie et $f_l\in\mathcal{F}_b$ avec $f = f_l$ m-p.e. sur $\mathbf{G}_l$. Par 2.56, non a $\int_0^t f_n(X_{s-})d\Lambda(M)_s = \int_0^t f_m(X_{s-})d\Lambda(M)_s$ pour $t < \tau_{G_n}$ et $n < m$.

Nous pouvons donc définir $\int_0^t f(X_{s-})d\Lambda(M)_s := \int_0^t f_l(X_{s-})d\Lambda(M)_s$ *pour* $t < \tau_{G_n}$*.En particulier, nous obtenons l'intégrale stochastique* $\int_0^t f(X_{s-})dN_s^u$*, sur* $]0,\zeta[$*, pour toute* $f \in \mathcal{F}_{loc}$ *et* $u \in \mathcal{F}$ *comme extention de l'intégrale stochastique de Nakao.*

Théorème 2.4.4. *(Formule d'Itô) Supposons que* $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ *et* $u = (u_1, ..., u_d) \in \mathcal{F}^d$*.Alors* $\mathbf{P}_m - p.s.$ *sur* $\{t < \zeta\}$ *, on a*

$$\Phi(u(X_t)) - \Phi(u(X_0))$$

$$= \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(u(X_{s-}))du_k(X_s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(u(X_{s-}))d\langle M^{u_i,c}, M^{u_j,c}\rangle_s$$

$$+ \sum_{s\leq t}\Big(\Phi(u(X_s)) - \Phi(u(X_{s-})) - \sum_{k=1}^d \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(u(X_{s-}))(u_k(X_s) - u_k(X_{s-}))\Big).$$

Preuve. *Notons que* $\Phi \circ u \in \mathcal{F}_{loc}$ *et que*

$$u_k(X_t) = u_k(X_0) + M_t^{u_k} + N_t^{u_k} = u_k(X_0) + M_t^{u_k} + \Lambda(M^{u_k})_t.$$

Cette version de la formule d'Itô découle des théorèmes 2.3.2 et 2.56 par une raisonnement similaire à celui utilisé pour prouver cette formule pour les semimartingales.(Voir [33]). ■

Chapitre 3

Applications

3.1 Classes de volatilité

Soit (S_t) est le processus du cours des actions. Supposer que $X_t = \log(S_t)$, satisfait :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \theta(t)h(X_t)dB_t \tag{3.1}$$

Où la fonction $h(.)$ est supposée connue, le coefficient de volatilité $\theta(.)$ est une fonction aléatoire du temps et va être estimée, et le coefficient derive $b(t,x)$ est inconnu. Nous observons une trajectoir du processus $(X_t, t \in [0,T])$ échantillonné à des instants discrets $t_i = i\Delta$, pour $i = 1, ..., N$. Dans certaines conditions et après un changement de variable (Voir par exemple. [[1]]), l'équation (3.1) se réduit à

$$dX_t = b_t(t, X_t)dt + \theta(t)dB_t.$$

Une méthode raffinée pour estimer $\theta(t)$ consiste à utiliser des ondelettes. Considérons $(V_j, j \in \mathbb{Z})$ une analyse multi résolution r-régulière de $L^2(\mathbb{R})$ de sorte que la fonction d'échelle associée Φ et la fonction wavelet ψ est à support compact.
Pour tout j, la famille $\{\Phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\Phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthogonale de V_j. Le temps est échantillonné avec $\Delta = 2^{-n}$,S_t, l'estimateur est alors :

$$\theta^2(t) = \sum_k \mu_{j(n)}, k^{\Phi} j(n), k(t) \tag{3.2}$$

pour $j(n) < n$, où

$$\mu_{j(n),k} = \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_{j(n),k}(t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2. \tag{3.3}$$

Supposons que nous avons observé n trajectoires $X_1, ..., X_l, ..., X_n$ Échantillonné comme ci-dessus, et que nous voulons les classer en fonction de leur composante de volatilité, c'est-à-dire que nous voulons classer les $\theta_l^{,}s$ estimés par (3.2).
On voit alors que nous venons d'appliquer l'algorithme dans [22] aux vecteurs $\mu^l_{j(n),k}$ qui sont des représentations de dimension finie de les $\theta_l, l = 1, ...$

3.2 Commutation en régime Markovien avec Dirichlet préalable. Application à la modélisation du prix des actions

Dans cette application , motivé par certains modèles mathématiques en finance portant sur «Marchés de changement de régime», nous considérons le cas où le processus de temps continu est une chaîne de Markov à temps continu dont l'état à l'instant t modélise l'état du marché à l'instant t.

En effet, la volatilité étudiée dans (chapitre 5 dans [[22]] était constante pendant un certain intervalle de temps de longueur aléatoire sans aucune hypothèse sur le processus de commutation, ici la commutation dépend d'une chaîne de Markov dont les état représentent les différents régimes. En outre, les différentes valeurs de la tendance et de la volatilité dépendent de l'état de cette chaîne qui «choisit» ces valeurs parmi celles qui sont i.i.d. Ceux. De toute évidence, nous avons affaire à la volatilité stochastique .
Dans cette approche, les régimes jouent le même rôle que les classes dans la classification : chaque observation temporelle appartient donc à une classe qui i.e à un régime. Notre contribution consiste à placer un processus Dirichlet d'avant sur l'espace des trajectoir de la chaine de Markov Espace de la chaîne de Markov, qui est un espace de fonction càdlàg. Cette idée est nouvelle car elle n'a jamais été utilisée dans la littérature.

3.2.1 Commutation en régime Markovien avec Dirichlet préalable :

Dans cette section, prenons $\bar{\alpha} = H$, La distribution d'une chaîne de Markov à temps continu sur un ensemble fini d'états et nous proposons un nouveau modèle hiérarchique qui est spécifié dans le cadre mathématique de la finance . Bien sûr, cela peut être utilisé de manière similaire dans de nombreux autres cas. Nous considérons l'équation différentielles stochastique du modèle Black-Scholes dans un environnement aléatoire avec un Dirichlet préable sur l'espace des trajetoire de la chaîne, les états de la chaîne représentont l'environnement

lié au marché Nous modélisons le prix des actions à l'aide d'un mouvement brownien géométrique avec un dérive et variance en fonction de l'état du marché.
L'état du marché est modélisé par une chaîne de Markov en temps continu avec un Dirichlet préalable. Dans ce qui suit, la notation σ sera utilisée pour désigner la variance plutôt que les écarts-types.
Les notations suivantes seront adoptées :

1. n désigne le nombre de données observées et également la longueur d'une trajectoire observée.
2. M désignera le nombre d'états de la chaîne de Markov.
3. L'espace d'états de la chaîne est notée $S = \{i : 1 \leq i \leq M\}$.
4. N désigne le nombre de trajectoir simulées.
5. m désigne le nombre d'états distincts d'un trajectoir.

– Le cours des actions est dirigé par une SDE de type :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \beta(X_t)dt + \sqrt{\sigma(X_t)}dB_t,\ t \geq 0,$$

où B_t est un mouvement brownien standard. Par la formule d'Itô, le processus $Z_t = \log(S_t)$ l'SDE suivante ,

$$dZ_t = \mu(X_t)dt + \sqrt{\sigma(X_t)}dB_t,\ t \geq 0,$$

où $\mu(X_t) = \beta(X_t) - \frac{1}{2}\sigma(X_t)$. Les données observées sant de la forme $Z_0, Z_1, ..., Z_n$.

– Le processus (X_t) est supposé un processus de Markov en temps continu prenant des valeurs dans l'ensemble $S = \{i : 1 \leq i \leq M\}$. Les probabilités de transition de cette chaîne sont indiquées par $p_{ij}, i, j \in S$ et la matrice du taux de transition est $Q_0 = (q_{ij})_{i,j\in S}$ avec

$$\lambda_i > 0, \quad q_{ij} = \lambda_i p_{ij}\ si\ ß \neq j,\ \text{ et } q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij},\ i, j \in S.$$

On définit les log-retours, $Y_t = Z_t - Z_{t-1} = \log(S_t/S_{t-1}), t = 1, 2, ..., n$.
Supposons que nous connaissons le chemin $X = \{X_s, 0 \leq s \leq n\}$. Soit $T_j(t)$ le temps passé par le chemin X dans l'état j dans l'intervalle de temps $[t-1, t]$. on définit

$$\mu(t) := \sum_{j=1}^{M} \mu(j)T_j(t); \quad \sigma(t) := \sum_{j=1}^{M} \sigma(j)T_j(t). \tag{3.4}$$

Donc, conditionnellent à la trajectoir X, Y_t sont i.i.d. et suivant la loi . $\mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t), t = 1, 2, ..., n$.

– pour tout $i = 1, 2, ..., M$. Les préalables sur $\mu_i = \mu(i)$ et $\sigma_i = \sigma(i)$ sont spécifiés par

$$\mu_i \sim^{ind} \mathcal{N}(\theta, \tau^\mu) \text{ avec } \theta \sim \mathcal{N}(0, A), \;\; A > 0, \tag{3.5}$$

$$\sigma_i \sim^{ind} \Gamma(\upsilon_1, \upsilon_2). \tag{3.6}$$

– La chaîne de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ a priable $\mathcal{D}(\sigma H)$, où H est une mesure de probabilité sur l'espace de chemin de fonctions càdlàg $D([0, \infty], S)$. La distribution initiale selon H est la distribution uniforme $\pi_0(1/M, ..., 1/M)$, et la matrice de taux de transition est Q avec $p_{ij} = 1/(M-1)$, et $\lambda_i = \lambda > 0$. Ainsi, la chaîne de Markov sous Q passera un temps exponentiel avec une moyenne $1/\lambda$ Dans chaque état i et ensuite fait un saut à l'état $j \neq i$ Avec probabilité $1/(M-1)$.

Une réalisation de la chaîne de Markov à partir du préalable est générée comme suit : Générer un grand nombre de chemins $X_i = \{x_s^i : 0 \leq s \leq n\}, i = 1, 2, ..., N$, pour H . Générer le vecteur de probabilités $(p_i, i = 1, ..., N)$ à partir d'une distribution de Poisson Dirichlet avec le paramètre α. Ensuite établie une réalisation de la chaîne de Markov à partir de

$$p = \sum_{i=1}^{N} p_i \delta_{X_i}, \tag{3.7}$$

qui est une mesure de probabilité sur l'espace des trajectoirs $D([0, N], S)$ Le paramètreλ est choisi d'être aussi petit, de sorte que la variance est grande et, par conséquent, nous obtenons une grande variété de chemins à échantillonner à un stade ultérieur. Le préalable pour α est donné par,

$$\alpha \sim \Gamma(\eta_1, \eta_2). \tag{3.8}$$

3.2.2 Estimation

L'estimation est effectuée en utilisant la simulation d'un grand nombre de trajectoire de la chaîne de Markov, qui sera choisie en fonction d'un vecteur de probabilité (généré par la rupture du bâton), puis en utilisant la technique d'échantillonnage de Gibbs bloqué. Cette technique utilise la distribution a posteriori des différents paramètres. On note μ et σ, les valeurs actuelles des vecteurs $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$, respectivement $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$. Soit Y le vecteur des données observées $(Y_1, ..., Y_n)$.

Soit $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le vecteur des valeurs actuelles des états de la chaîne de Markov aux instants $t = 1, 2, ..., n$, respectivement. Soit $X^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ les valeurs distinctes dans X.

3.2.3 Modification de l'ensemble de données observées

Pour obtenir la répartition conditionnelle des paramètres, nous avons d'abord Besoin d'extraire le changement dans les retours logarithmiques entre les temps de saut de la chaîne de Markov. Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_j$ les instants où le chemin X change d'état. On définit les log-retours entre les instants de saut, $W_k = \log(S_{t_k}/S_{t_{k-1}}$, $k = 1, 2, ..., J$. Pour obtenir des réalisations de W_k à partir du processus observé Y, nous devons simulons des variables aléatoires gaussiennes conditionnées par leurs sommes.

Soit $t \in \{0, 1, ..., n\}$ pour lequel la chaîne change d'état au moins une fois dans l'intervalle de temps $[t-1, t]$.Soit $t_{k-1} < t-1 < t_k < ... < t_{k+p} < t < t_{k+p+1}$, les instants de saut qui se produisent dans $[t-1, t]$, pour certains $p \geq 1$.
Soit $V_t^1 = \log(S_{t_k}/S_{t-1})$ et $V_t^2 = \log(S_{t_k}/S_{t_{k+p}})$. Alors,

$$Y_t = V_t^1 + \sum_{i=1}^{p} W_{k+i} + V_t^2. \tag{3.9}$$

Supposons que pour certains i la chaîne X est dans l'état j_i d'état dans l'intervalle de temps $[t_{k+i-1}, t_{k+i})$, $i = 0, 1, ..., p+1$. soit $s_0 = t_k - t - 1$,$s_i = t_{k+i} - t_{k+i-1}$, $i = 1, 2, ..., p$, et $s_{p+1} = t - t_{k+p}$. Soit $m_j = \mu(j_i)s_i$ et $v_j = \sigma(j_i)s_i$, $i = 0, 1, ..., p+1$. Rappelons que $Y_t \sim \mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t)$, où $\mu(t), \sigma(t)$ sont définis dans (3.4) Il est facile à voir que la densité conditionnelle conjointe de $(V_t^1, W_{k+1}, ..., W_{k+p})$ sachant $\{Y_t = y\}$

$$f(u_0, u_1, \ldots, u_p) = C \prod_{i=0}^{p} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{v_i + v_{p+1}}{v_i v_{p+1}}\Big(u_i - \frac{v_{p+1}m_i + v_i(y - m_{p+1})}{v_i + v_{p+1}}\Big)^2\right), \tag{3.10}$$

où C est une constante qui dépend de y et des paramètres. Ainsi on peut simuler les variables $V_t^1, W_k, W_{k+1}, ..., W_{k+p}$ par des Gaussiens indépendants, puis, obtenie V_t^2 en utilisant (3.9).

En utilisant la procédure ci-dessus, nous pouvons obtenir une réalisation pour tous les W_k pour lesquels $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [t-1, t]$, pour $t \in \{0, 1, ..., n\}$. Maintenant, pour tout k pour lequel il existe un $q \geq 0$, Tel que $t-1 \leq t_{k-1} < t < t+1 < ... < t+q \leq t_k < t+q+1$, On peut obtenir W_k en utilisant la relation

$$W_k = V_t^2 + \sum_{i=1}^{q} Y_{t+i} + V_{t+q+1}^1. \tag{3.11}$$

Notons que les valeurs W dépendent de la trajectoire X et elles sont calculées à chaque itération.

3.2.4 La procédure d'échantillonnage de Gibbs

Nous sommes maintenant prêt à estimer les distributions postérieures des paramètres à l'aide d'échantillonnage de Gibbs. Chaque itération produit une réalisation des paramètres de leur distribution postérieure approximative. Chaque itération se compose d'un grand nombre d'échantillons obtenus de manière récursive pour chaque paramètre conditionnée par les valeurs actuelles des paramètres et d'autres données.

– **Conditionnellement à** μ. Pour chaque $j \in X^*$ considérons

$$(\mu_j|\theta, \tau^\mu, \sigma, X, W) \sim^{ind} \mathcal{N}(\mu_j^*, \sigma_j^*), \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned} \mu_j^* &= \sigma_j^* \left(\sum_{k:X_{t_{k-1}}=j} \frac{W_k}{\sigma_j(t_k - t_{k-1})} + \frac{\theta}{\tau^\mu} \right) \\ \sigma_j^* &= \left(\frac{n_j}{\sigma_j} + \frac{1}{\tau^\mu} \right)^{-1}, \ et \end{aligned}$$

et n_j étant le nombre de fois que j se produit dans X. Pour tout $j \in X \setminus X^*$, on simule de manière indépendante $\mu_j \sim \mathcal{N}(\theta, \tau^\mu)$.

– **Conditionnellement à** σ. pour tout $j \in X \setminus X^*$ considérons

$$(\sigma_j|\mu, \upsilon, X, W) \sim^{ind} \Gamma(\upsilon_1 + \frac{n_j}{2}, \upsilon_{2,j}^*), \tag{3.13}$$

où

$$\upsilon_{2,j}^* = \upsilon_{2,j} + \sum_{k:X_{t_{k-1}}=j} \frac{(W_k - \mu_j(t_k - t_{k-1}))^2}{2(t_k - t_{k-1})}.$$

Ainssi pour chaque $j \in X \setminus X^*$, on simule de manière indépendante $\sigma_j \sim \Gamma(\upsilon_1, \upsilon_2)$.

– **Conditionnellement à** X

$$(X|p) \sim \sum_{i=1}^{N} p_i^* \delta_{X_i}, \tag{3.14}$$

où

$$p_i^* = \prod_{j=1}^{m} \Big(\prod_{k:=x^{i,*}_{t^i_{k-1}}=j} \frac{1}{(2\pi\sigma_j(t_k - t_{k-1}))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j}(W_k^i - \mu_j(t_k - t_{k-1}))^2} \Big) p_i, \tag{3.15}$$

où $(x_1^{i,*}, ..., x_m^{i,*})$ désigne les valeurs uniques actuelles $m = m(i)$ des états et t_k^i, W_k^i sont définis au paragraphe 3.2.3 pour le chemin $X_i, i = 1, ..., N$

– **Conditionnellement à** p

$$p_1 = V_1^*, \ et \ p_k = (1 - V_1^*) \cdots (1 - V_{k-1}) V_k^*, \quad k = 2, 3, \cdots, N-1 \ , \tag{3.16}$$

où

$$V_k^* \sim^{ind} \beta\Big(1 + r_k, \alpha\Big),$$

$r_k = 1$ si $i = k$ et 0 sinon .

– **Conditionnellement à** α

$$(a|p) \sim \Big(N + \eta_1 - 1, \eta_2 - \sum_{i=1}^{N-1} \log(1 - V_i^*)\Big) \ ,$$

où les valeurs V^* sont celles obtenues dans la simulation de p dans l'étape ci-dessus.

– **Conditionnellement à** θ

$$(\theta|\mu) \sim \mathcal{N}(\theta^*, \tau^*), \tag{3.17}$$

où

$$\theta^* = \frac{\tau^*}{\tau^\mu} \sum_{j=1}^{M} \mu_j,$$

et

$$\tau^* = (\frac{M}{\tau^\mu} + \frac{1}{A})^{-1}$$

Preuve. (a) *Le calcul des distributions postérieures pour μ, σ et θ suit de la même manière que dans [[21]]. Ici, $X_t = s$ signifie que la variable de classe est égale à s.*

(b) *Conditionnel pour X*

$$P\{X = X_i|p, \mu, \sigma, W\} = P\{W|p, \sigma, X = X_i, \mu\}P\{X = X_i|\sigma, \mu, p\}P\{\mu, \sigma\}$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \Big(\prod_{k:=x^{i,*}_{t^i_{k-1}}=j} \frac{1}{(2\pi\sigma_j(t_k - t_{k-1}))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j}(W^i_k - \mu_j(t_k - t_{k-1}))^2} \Big) p_i,$$

où $X_i = (x^i_1, ..., x^i_n$ et $(x^{i,*}_1, ..., x^{i,*}_m$ représentent les valeurs uniques actuelles m dans le chemin X_i.

(c) *Conditionnellement à p Le schéma de Sethuraman (stick-breaking) peut être étendu aux distributions bêta à deux paramètres, voir [[20]] :*

Soit $V_k \overset{\infty}{\sim} \beta(a_k, b_k)$,pour tout $k = 1, ..., N$. Soit

$$p_1 = V_1, \text{ et } p_k = (1 - V_1)...(1 - V_{k-1})V_k, k = 2, 3, ..., N - 1$$

Nous allons écrire le vecteur aléatoire ci-dessus, en bref comme

$$p \sim SB(a_1, b_2, ..., a_{N-1}, b_{N-1}).$$

Par Connor et Mosimann (1969), la densité de p est

$$(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{\Gamma(a_k - b_k)}{\Gamma(a_k)\Gamma(b_k)}) p_1^{a_1-1} ....p_{N-1}^{a_{N-1}-1} p_N^{b_{N-1}-1} \times (1-P_1)^{b_1-(a_2-b_2)} ...(1-P_{N-2})^{b_{N-2}-(a_{N-1}-b_{N-1})},$$

où $P_k = p_1 + ... + p_k$.

De ce fait, il suit facilement que la distribution est conjugué pour l'échantillonnage multinomial, et par conséquent la distribution a posteriori de p sachant X, où $a_k = 1$ et $b_k = \alpha$ pour tout k,

$$SB(a^*_1, b^*_1, ..., a^*_{N-1}, b^*_{N-1}),$$

où

$$\begin{aligned} a^*_k &= 1 + r_k \\ b^*_k &= \alpha \end{aligned}$$

et r_k égal à 1 si $i = k$ et 0 sinon , $k = 1, ..., N - 1$. ■

conclusion

- Dans ce mémoire, je me suis intéréssée à l'étude d'une classe de processus qui ne sont pas des semimartingales ; les processus de Dirichlet et Dirichlet faible . J 'ai étudié le calcul stochastique via ces processus en se basant sur de nouvelles approches qui consistent à décomposer ces processus en deux processus habituellement reconnus en calcul stochastique classique (calcul d'Itô).
- On a rencontré des difficultés en termes de structure d'espace dans lequel les conditions d'intégrabilité par rapport au processus de Dirichlet sont satisfaites ainci que l'écriture de la formule d'Itô associée à ce type de processus .
- Comme perspectives, on pourra étudier les conditions de la résolution des équations différentielles stochastiques dirigées par les processus de Dirichlet et ensuite regarder le comportement des solutions (propriété de Markov, périodicité, comportement asymptotique ; etc).

Bibliographie

[1] Bigelow, J. L. and Dunson, D. B. . Posterior simulation across nonparametric models for functional clustering. AJournal of the Royal Statistical Society, Series B. , under revision.(1992).

[2] Bertoin, J. Les processus de Dirichlet en tant qu'espace de Banach. Stochastics, 18(2) :155-168, 1986.

[3] Coquet, F. Jakubowski, A. Msemin, J. and S lomisnski, L. Natural decompositionof processes and weak Dirichlet processes. In In memoriam Paul-Andrse Meyer : Séminaire de Probabilités XXXIX, volume 1874 of Lecture Notes in Math., pages 81-116. Springer, Berlin, 2006.

[4] Dellacherie, C. and Meyer, P.-A. . Probabilités et Potentiel. Hermann, Paris. Chapitres I à IV, Edition entièrement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1372. MR0488194 ,(1975).

[5] Di Nunno, G. ϕksendal, B. Proske, F. Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[6] David-Antoine FOURNIE,Functional Itô calculus and Applications,COLUMBIA UNIVERSITY, 2010

[7] Di Girolami, C. Russo, F. Generalized covariation for Banach space valued processes,Itô formula and applications. Osaka J. Math., 51(3) :729-783, 2014.

[8] Eisenbaum, N. Local time-space calculus for reversible semimartingales. In Séminaire de Probabilités XL, volume 1899 of Lecture Notes in Math., pages 137-146. Springer, Berlin, 2007.

[9] Errami, M. Russo, F. n-covariation, generalized Dirichlet processes and calculus with respect to finite cubic variation processes. Stochastic Process. Appl., 104(2) :259-299, 2003.

[10] Errami, M. Russo, F. Vallois, P. Itô's formula for $C^{1,\lambda}$-functions of a càdlàg process and related calculus. Probab. Theory Related Fields, 122(2) :191-221, 2002.

[11] Elena Bandini and Francesco Russo. Weak Dirichlet 2processes ; Calculus via regularizations ; Random measure ; Stochastic integrals for jump processes ; Orthogonality. MSC 2010 : 60J75 ; 60G57 ; 60H05

[12] Flandoli, F. Russo, F. Generalized integration and stochastic ODEs. Ann. Probab.,30(1) :270-292, 2002.

[13] Follmer, H. Calcul d'Itô sans probabilitses. In Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg,Strasbourg, 1979/1980) (French), volume 850 of Lecture Notes in Math., pages 143-150. Springer, Berlin, 1981.

[14] Gozzi, F. Russo, F. Verification theorems for stochastic optimal control problems via a time dependent Fukushima-Dirichlet decomposition. Stochastic Process. Appl., 116(11) :1530-1562, 2006.

[15] Gozzi, F. Russo, F. Weak Dirichlet processes with a stochastic control perspective. Stochastic Process. Appl., 116(11) :1563-1583, 2006.

[16] Giorgio Fabbri and Francesco Russo. HJB equations in infinite dimension and optimal control of stochastic evolution equations via generalized Fukushima decomposition , arXiv :1207.5710. January (2017).

[17] He, S. W.,Wang, J. G. and Yan, J. A. (1992). Semimartingale Theory and Stochastic Calculus. Kexue Chubanshe (Science Press), Beijing MR1219534

[18] Kunita,Hiroshi. Absolute continuity of Markov processes and generators, Nagoya Math. J. 36 (1969)1-26.

[19] [Hafedh Faires]. ModReles hiSerarchiques de Dirichlet Ra temps continu. MathSematiques [math]. UniversitSe d'OrlSeans, 2008. FranXcais. tel-00466503

[20] Hemant Ishwaran ; Mahmoud Zarepour. The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique , Vol. 30, No. 2. (Jun, 2002), pp. 269-283.

[21] Ishwaran James(2001) and Walker Muliere (1997, 1998).Gibbs Sampling Methods for Stick-Breaking Priors .

[22] Mr. Richard EMILION Professeur, Université d'Orléans, Modèles hiérarchiques de Dirichlet à temps continu, Discipline : Mathématiques, 2008.

[23] M. Fukushima, Dirichlet Forms and Markov Processes, North-Holland Publ. Company, 1980.

[24] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, de Gruyter, Berlin, 1994.

[25] R.K. Getoor, Some remarks on measures associated with homogeneous random measures, Seminar on stochastic processes, 1985 (Gainesville, Fla., 1985), 94-107, Progr. Probab. Statist., 12,BirkhAauser Boston, Boston, MA, 1986.

[26] Russo, F. Vallois, P. Intsegrales progressive, rsetrograde et symsetrique de processus non adaptses. C. R. Acad. Sci. Paris Sser. I Math., 312(8) :615-618, 1991.

[27] Russo, F. Vallois, P. Noncausal stochastic integration for lrad lrag processes. In Stochastic analysis and related topics (Oslo, 1992), volume 8 of Stochastics Monogr., pages 227-263. Gordon and Breach, Montreux, 1993.

[28] Russo, F. Vallois, P. The generalized covariation process and Itô formula. Stochastic Process. Appl., 59(1) :81-104, 1995.

[29] Russo, F. Vallois, P. Itô formula for C^1-functions of semimartingales. Probab. Theory-Related Fields, 104(1) :27-41, 1996.

[30] Russo, F. Vallois, P. Forward, backward and symmetric stochastic integration. Probab. Theory Related Fields, 97(3) :403-421, 1993.

[31] Russo, F. Vallois, P. Elements of stochastic calculus via regularization. In Sseminaire de Probabilitses XL, volume 1899 of Lecture Notes in Math., pages 147-185. Springer, Berlin,2007.

[32] S. Nakao, Stochastic calculus for continuous additive functionals of zero energy, Z. Wahrsch. verw. Gebiete 68 (1985) 557-578.

[33] S. W. He, J. G. Wang and J. A. Yan, Semimartingale Theory and Stochastic Calculus. Science Press, Beijing New York, 1992.

[34] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, K. Kuwae T. S. Zhang, Stochastic Calculus for Dirichlet Processes,Research Report No. 26, 2006, Probability and Statistics Group School of Mathematics, The University of Manchester.

Ce mémoire a été rédigé avec LaTeX.