République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Etude qualitative des solutions numériques des equations différentielles ordinaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Géométrie et Applications

par

Zaoui **M**ohammed [1]

Sous la direction de

Dr O. Bennihi

Soutenue le 24 mai 2017 devant le jury composé de

F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : medzacatalonais@gmail.com

REMERCIEMENTS

On remercie mon dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de *Dr. O. Bennihi*, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer au jury pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en apportant sa valeureuse contribution en tant qu'experts et profond connaisseur du domaine Analyse Géométrie et Application .

Mes remerciements par une immense reconnaissance envers toute notre famille. Il nous est impossible d'exprimer en quelques mots tout ce que nous devons, à ma mère, à mon père, et à toute la famille, pour leurs encouragements et leur appui moral qui m'ont permis de mener à bon terme ce travail.

Enfin, mes remerciements vont a tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce travail.

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes chèrs parents, les prunelles de mes yeux qui ont fait preuve de dévouement et de sacrifice.

Mon père, pour le soin, la protection, la responsabilité et la confiance qu'il a toujours eus à mon égard.

Ma mère, pour toute l'attention, le réconfort et l'affection dont elle m'a entouré. Que Dieu les protège à Jamais.

Mon grand père et Ma grand mère.

Mon frère *Houcine*.

Mes soeurs *, Rabia, Amina et Oum Elkheir*.

Ma soeur *fatima* et son mari *cheikh* et sa enfant *Mohammed Hassen*.

À ma tante *Mama* et son mari *Mustapha* et ses enfants : *Djahida, Taher, Sid Ahmed* et *Yassine*.

À mes oncles *Ibrahim*, *Mohammed*, *Ahmed*, *Slimane* et ses enfants.

À tous mes amis surtout *Ali*, *boubakr*, *B. Mohammed* .

À toute la promotion : Master 2 de math (Analyse Géométrie et Apllication) *2016-2017*.

Table des matières

Introduction

La résolution explicite et/ou l'etude qualitative des propriétés des solutions d'equations différentielles est un problème qui se pose dans la majorité des disciplines scientifiques. Lorsqu'il s'agit de modéliser avec précision le mouvement de corps complexes tels que des avions, des fusées ou des satellites, l'usage des approximations classiques de la mécanique rendrait les prévisions trop imprécises et ceci conduit à faire intervenir des équations différentielles dont la complexité théorique rend vaine toute tentative de résolution exacte. Dans ce cas, il est au contraire important de mettre en place des méthodes de calcul approché des solutions suffisamment précises pour permettre une prédiction aussi réaliste que possible. La résolution numérique des équations différentielles représente donc un champ de travail important en mathématiques, qui utilise des outils tout à fait élaborés. Ce n'est cependant pas à cet aspect auquel nous nous intéressons dans ce mémoire.

Notre objectif est, dans un premier temps, d'acquérir une bonne maitrise des techniques de résolution explicite vues en première année et d'étendre ces techniques à la résolution de quelques nouvelles classes d'équations non linéaires. Il s'agira ensuite de s'intéresser à des propriétés moins "calculatoires" des solutions, c'est-à-dire à des propriétés dont la démonstration ne fasse pas directement appel à la détermination explicite de ces solutions.
Rappelons que l'on appelle "équation différentielle" toute relation du type

$$F(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = 0$$

Entre la variable x, une fonction y de x et certaines de ses dérivées. Si n est le plus grand degré de dérivation de y dans l'équation, on dit que l'équation est "d'ordre n". On dit que y est solution de l'équation sur un intervalle I si y est n fois dérivable sur I et si, pour tout $x \in I$,

$$F(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

Si J est un intervalle contenant I (i.e.$I \subset J$), si y et z sont solutions respectivement sur I et J, et si la restriction de z à I est égale à y (en d'autres termes, les fonctions y et z coincident sur I), on dit que "z est un prolongement de y". L'une des qualités d'une solution d'équation différentielle est d'être définie sur l'intervalle le plus grand possible, c'est-à-dire de n'admettre aucun prolongement sinon elle-même. Une telle solution est dite "maximale". Nous verrons qu'il est parfois possible de montrer que les solutions maximales sont définies sur tout $\mathbb{R}$ (ou au contraire seulement sur un intervalle borné) sans calculer ces solutions, mais en utilisant seulement des propriétés de l'équation.

Ce mémoire est organisé dela manière suivante :
Le chapitre un est consacré aux notations , définitons et théorèmes utilisés tout au long du mémoire. Dans le chapitre 2 on exposera la théorie de résolution des équations différentielles ordinaires et en particulier le problème de cauchy. Enfin dans le chapitre 3 il s'agit de l'etude qualitative des EDO et en particulier à l'etudes des notions de consistance, de stabilité et de convergence des solutions.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduira certains théorèmes , définitions et notations qu'on utilisera tout au long de ce mémoire

1.1 Notations

Nous commençons ce chapitre par quelques notations utilisées dans les chapitres qui suivent :

- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réelles.
- $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres naturelles.
- $\mathbb{R}^n$: Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des rééels.
- $|.|$: Valeur absolue ou module.
- $\|.\|$: norme sur $\mathbb{R}^n$.
- $x'(t) = \frac{dx}{dt}$: dérivée temporelle de x.
- $x^{(i)}$: Ième dérivée.
- $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|.\| \leq r\}$ la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$
- (EDO) : Equation différentielle ordinaire.
- (EDP) : Equation différentielle aux dérivée partielle.

On note $E = \mathbb{R}^n$, $n > 1$ et $x = (x_1, ..., x_n)$ un élément de E. Sa norme $\|x\|_E$ sera l'une quelconque des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ (on rappelle que toutes les normes sont équivalentes sur E). Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : D \to E$ une fonction **continue**. Pour tout $(t, x) \in D$, on notera $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$ où chaque fonction f_i est continue de D dans $\mathbb{R}$. La notation (a, b) recouvre tous les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b],]a, b], [a, b[$ ou $]a, b[$. De même, on utilisera par exemple la notation $(a, b]$ pour ne pas préciser la nature de l'intervalle en a.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires (notées en abrégé edo) du premier ordre, sous forme normale (ou résolue) :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (E)$$

Commençons par préciser la notion de solution pour ce type d'équation .

1.2 Définitions

Définition 1.2.1. *Une solution de (E) est un couple (φ, J) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout $t \in J$ et*

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi(t)) \ , \quad \forall t \in J \quad \forall i = 1, ..., n$$

On remarque tout de suite que, f et φ étant deux fonctions continues, par composition $\varphi' = (\varphi_1', ..., \varphi_n')$ est également continue sur J et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. On notera $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$.

Exemple 1.2.1. *pour $n = 2$, $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ et*

$$f(t, x) = M(t)x = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$ sont des fonctions réelles continues, l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

est appelée équation linéaire du premier ordre.

Exemple 1.2.2. *Pour $n = 1$, $f(t; x) = a(t)x + b(t)x^\alpha$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues et $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, l'edo (E) est une équation de Bernoulli.*

Exemple 1.2.3. *L'équation $x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t)$ pour laquelle $n = 1$, $f(t; x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont trois fonctions continues, est une équation de Riccati. Le problème (E) peut avoir de nombreuses solutions sur un intervalle donné Par exemple, pour $n = 1$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f(t, x) \equiv 1$ l'edo :*

$$x'(t) = 1 \ , \qquad (1.1)$$

admet $\varphi(t) = t + c$ comme solution sur $\mathbb{R}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de problème de Cauchy :

Définition 1.2.2. *Soit* $(t_0, x_0) \in D$. *Résoudre le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) *où* J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0 *et* φ *une fonction dérivable* ($\varphi \in \mathcal{C}^1$) *de* J *dans* E *telle que* $(t, \varphi(t)) \in D$ *pour tout* $t \in J, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ *pour tout* $t \in J$ *et* $\varphi(t_0) = x_0$. *En intégrant l'edo du problème de Cauchy (PC) entre* t_0 *et* t *et en tenant compte de la condition* $x(t_0) = x_0$, *on obtient :*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \qquad (PCI)$$

où il faut comprendre :

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds = (\int_{t_0}^{t} f_1(s, \varphi(s))ds, ..., \int_{t_0}^{t} f_n(s, \varphi(s))ds)$$

Réciproquement, toute fonction φ *vérifiant (PCI) est bien une solution* $\mathcal{C}^1$ *de (PC). Nous utiliserons souvent l'équivalence entre les deux formulations (PC) et (PCI) dans la suite du mémoire.*

En reprenant l'exemple précédent, on voit que si l'on ajoute à l'équation (1.1) la condition $x(0) = 0$, *on doit fixer la constante* c *et l'unique solution définie sur* $\mathbb{R}$ *est* $\varphi(t) = t$. *Nous verrons plus tard cependant que ce n'est pas toujours aussi simple et que sans hypothèses supplémentaires, notamment sur la fonction* f, *l'unicité de la solution n'est pas assurée en général pour le problème de Cauchy. Les formulations (E) et (PC), bien que ne faisant intervenir que la dérivée première de* $x(t)$, *recouvrent en fait une large classe de problèmes. En effet, il est souvent possible de mettre sous la forme (E) des edo dans lesquelles apparaissent des dérivées à un ordre quelconque. Considérons pour simplfier que les fonctions* $x(t)$ *sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(i.e.n* $= 1$*). Soit* D *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ *avec* $p \geq 1$ *et* $f : D \to R$ *une fonction continue. En notant* $x^{(k)}(t)$ *la dérivée* k*-ème de* $x(t)$, *toute équation différentielle ordinaire du p-ème ordre associée à* f *qui s'écrit :*

$$x^{(p)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(p-1)}(t)) \ , \qquad (E_n)$$

peut se mettre sous la forme (E). Notons en effet $x_1(t) = x(t)$ *et* $x_{i+1}(t) = x^{(i)}(t)$

pour $i = 1, ..., p-1$ *et introduisons*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p et F(t,X) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_p(t) \\ f(t, x_1(t), ..., x_p(t)) \end{pmatrix}$$

L'edo (E_n) *devient alors :*

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

Le problème de Cauchy correspondant à l'équation ci-dessus s'obtient en ajoutant une condition du type $X(t_0) = X_0$ *où* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $X_0 \in \mathbb{R}^p$. *Ceci correspond à la donnée de* $x(t_0), x_0(t_0), ..., x^{p-1}(t_0)$. *Nous allons introduire maintenant la notion de solution approchée. Ces solutions ne seront en général pas aussi régulières que les solutions exactes dont nous venons de parler.*

Définition 1.2.3. *On dira qu'une fonction* φ *à valeurs dans* E *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *si :*

1. φ *est continue sur* J.
2. *Il existe un ensemble fini* $S = \{t_1, ..., t_p\}$ *de points de* J *tels que* φ *soit* $\mathcal{C}^1$ *sur* $J \backslash S$ *et* $\lim_{t \to t_i^+} \varphi'(t)$ *et* $\lim_{t \to t_i^-} \varphi'(t)$ *existent mais ne coïncident pas forcément.*

Nous avons alors :

Définition 1.2.4. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On dira que* $\varphi \in \mathcal{C}(J)$ *est une solution* ε*-approchée de* (E) *si :*

1. $(t, \varphi(t)) \in D, \ \forall t \in J$
2. φ *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* J *(on note* S *les points où* φ' *n'est pas définie).*
3. $\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\|_E \leq \varepsilon, \qquad \forall t \in J \backslash S$

1.3 Théorèmes

Théorème 1.3.1. *(**théorème des accroissements finis sur** $\mathbb{R}$) Soit* f *une fonction continue sur un intervalle [a, b], à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *dérivable sur]a, b[. Alors il existe* $c \in]a, b[$ *telle que :*

$$f(b) - f(b) = f'(c)(b-a)$$

où il existe $\theta \in]0, 1[$ *tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a)$$

Une autre version (plus faible) de ce résultat est l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 1.3.2. *(**l'inégalité des accroissements finis**) Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b], à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur]a,b[. soit $M \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x \in [a, b]$, alors $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ pour tout $x, y \in [a, b]$.*
On en déduit une première extension du théorème des accroissements finis pour les fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3.3. *(**Taylor-Lagrange**). Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'on ait :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0 + \theta h)$$

(notons ici que θ dépend de h).

Théorème 1.3.4. *(**Taylor avec reste intégral**). Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on a :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{p+1}}{(p)!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x_0 + th) dt$$

Chapitre 2

Résolution numérique d'une EDO

Ce chapitre concerne la résolution numérique approchée d'équations, et de systèmes d'équations, différentielles ordinaires. De telles équations interviennent dans de nombreux problèmes issus de la modélisation mathématique de phénomènes physiques ou biologiques et se rencontrent par conséquent dans des disciplines aussi variées que l'ingénierie, la mécanique ou l'économie . L'élaboration de techniques de résolution approchée des équations différentielles ordinaires constitue un vaste domaine d'études et de recherches depuis plus de trois siècles et notre objectif est d'en offrir au lecteur un premier aperçu. Après quelques rappels concernant les bases de la théorie des équations différentielles ordinaires, nous décrivons des méthodes de résolution numérique parmi les plus classiques et analysons leurs propriétés au moyen de techniques générales. Les notions de consistance, de stabilité et de convergence , occupent ici une place centrale.[1]

2.1 Définition des EDO

Soit une fonction $x(t)$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ (continûment dérivable d'ordre p). On appelle équation différentielle d'ordre p une équation de la forme :

$$F(t, x, x^{'}, x^{'}, ..., x^{(p)}) = 0$$

On appelle forme canonique d'une EDO une expression du type :

$$x^{(p)} = f(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(p-1)})$$

Seul ce type d'équations sera considéré . [5]

Toute équation différentielle canonique peut être écrite comme un système d'équations différentielles du premier ordre en introduisant $p-1$ fonctions défnies comme :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x^{'} \\ ... \quad ... \\ x_p = x^{p-1} \end{cases}$$

L'équation canonique se met sous la forme du système d'EDO d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ ... \quad ... \\ x_p' = f(t, x, x_1, x_2, ...x_p) \end{cases}$$

2.2 Solution des EDO

Nous considérons une équation différentielle ordinaire du premier ordre :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (1)$$

La première notion qu'il est important de préciser est celle de solution d'une équation différentielle ordinaire. Elle est l'objet de la définition suivante. [6]

Définition 2.2.1. ***(solution d'une équation différentielle ordinaire)*** *On appelle* ***solution de l'équation différentielle ordinaire*** *tout couple (J, x), avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ et x une fonction dérivable sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que l'équation (1) est satisfaite et $(t, x(t))$ appartient à D pour tout t appartenant à J.*

Définition 2.2.2. ***(prolongement d'une solution d'une équation différentielle ordinaire)*** *Soit (J, x) et $(\bar{J}, \bar{x})$ deux solutions de l'équation différentielle (1). On dit que $(\bar{J}, \bar{x})$ est un prolongement de (J, x) si $J \subset \bar{J}$ et $\bar{x}_{|J} = x$. Le prolongement induisant une relation d'ordre sur l'ensemble des solutions d'une équation, on a la définition et le résultat suivants.*

Définition 2.2.3. ***(solution maximale d'une équation différentielle ordinaire)*** *On dit que le couple (J, x) est une solution maximale de l'équation différentielle (1) si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.*

Théorème 2.2.1. *Toute solution de l'équation différentielle (1) se prolonge en une solution maximale (non nécessairement unique).*

Remarque Lorsque le domaine D est de la forme $D = I \times \Omega$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un ouvert de $\mathbb{R}$, il est tout à fait possible que la solution maximale (J, x) d'un problème de Cauchy soit telle que J n'est pas égal à I. Ceci conduit à l'introduction la définition suivante.

Définition 2.2.4. ***(solution globale d'une équation différentielle ordinaire)*** *Une solution de l'équation différentielle (1) est dite globale si elle est définie sur l'ouvert I tout entier. On observera que toute solution globale est maximale, mais que la réciproque n'est pas vraie.*

2.3 Le problème de cauchy

On appelle problème de Cauchy ou problème à la valeur initiale le problème qui consiste à trouver une fonction $x(t)$ définie sur l'intervalle $[t_0, T]$ telle que : [8]

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \ ; \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si la fonction f est continue et vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable alors le problème admet une solution unique. On dit que le problème est bien posé.

2.4 Existence locale des solutions

Historiquement, il a d'abord été démontrée que le problème de Cauchy (PC) admettait localement une solution unique. le mathématicien italien Peano en s'appuyant sur un résultat d'Ascoli a démontré : [1]

Théorème 2.4.1. *Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soit $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $C = |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b$soit inclus dans D. On note :*

$$M = \sup_{(t,x)\in C} \|f(t, x)\|_E \ et \ \alpha = min(a, \frac{b}{M})$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une solution "approchée au problème de Cauchy (PC) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Définition 2.4.1. *Un ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ définies sur un intervalle réel I et à valeurs dans E, est dit uniformément équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe*

$\delta_\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$\|f(t) - f(\tilde{t})\|_E \leq \varepsilon \ \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } \forall t, \tilde{t} \in I, |t - \tilde{t}| \leq \delta_\varepsilon$$

Nous aurons besoin également du :

Lemme 2.4.1. ***(Ascoli)*** *Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans E, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_E$. Alors tout sous ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(I)$, borné et uniformément équicontinu est relativement compact.*

Théorème 2.4.2. ***(Ascoli-Peano)*** *Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $C = \{|t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b\}$ soit inclus dans D. On note*

$$M = \sup(t, x)\|f(t, x)\|_E \text{ et } \alpha = \min(a, \frac{b}{M})$$

alors il existe (au moins) une solution φ au problème de Cauchy (PC) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$.

Corollaire 2.4.1. *Soitf $\in \mathcal{C}(D)$. Alors pour tout $(t_0; x_0) \in D$, il existe un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ sur lequel le problème de Cauchy (PC) admet une solution. Avant de nous intéresser au problème de l'unicité des solutions, voici un exemple simple qui montre qu'un problème de Cauchy peut avoir une infinité de solutions même sur un voisinage arbitrairement petit autour de la condition de Cauchy.*

2.5 Unicité locale des solutions

On commence par un Lemme technique mais qui sera trés utile dans la suite : [1]

Lemme 2.5.1. ***(Gronwall)*** *Soit ψ une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et á valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ et trois constantes $A \geq 0, B > 0$ et $C \geq 0$ telles que :*

$$\psi(t) \leq A + B|\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds| + C(t - t_0| \ \ \forall t \in [a, b]$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$ on a l'estimation :

$$\psi(t) \leq Ae^{B|t-t_0|} + \frac{C}{B}(e^{B|t-t_0|} - 1)$$

Définition 2.5.1. *On dira que f est lipschitzienne en x (uniformément par rapport à t), et on notera $f \in Lip(D)$, s'il existe $k > 0$ tel que :*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_E = k\|x_1 - x_2\|_E, \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D$$

Remarquer que cette notion n'entraîne pas que f est continue sur D comme le prouve l'exemple suivant : $D = \mathbb{R}^2$,$f(t,x) = 1$ si $t > 0$ et $f(t,x) = 0$ si $t \leq 0$. En revanche, si f est lipschitzienne au sens classique, c'est à dire s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\|_E \leq k(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_E), \quad \forall (t_1,x_1),(t_2,x_2) \in D$$

alors f est en particulier lipschitzienne en x uniformément en t.

Application 1 (du Lemme de Gronwall) Soit $f \in Lip(D) \cap C(D)$ avec pour constante de Lipschitz $k > 0$. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions respectivement ε_1 et ε_2-approchées de (E) sur un même intervalle $[a,b]$ et telles que, pour un certain $a < t_0 < b$ on ait :

$$\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\|_E \leq \delta$$

Alors, pour tout $t \in [a,b]$:

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_E \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1). \qquad (G)$$

Démonstration : En reprenant la démonstration du Théorème 2.4.2, on a l'écriture des solutions ε-approchées sous forme intégrale :

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_i(s),s) + \Delta_i(s)ds, \quad i = 1,2$$

avec $\|\Delta_i(s)\|_E \leq \varepsilon_i$, $i = 1,2$ on pose $\psi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_E$ et on a :

$$\psi(t) \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\|_E + \int_{t_0}^{t} \|f(\varphi_1(s),s) - f(\varphi_2(s),s)\|_E ds + \varepsilon_1 + \varepsilon_2|t - t_0|$$

Or, f étant Lipschitzienne en x uniformément en t :

$$\|f(\varphi_1(s),s) - f(\varphi_2(s),s)\|_E \leq k\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_E = k\psi(s)$$

On applique alors l'inégalité du Lemme de Gronwall pour obtenir (G).

Théorème 2.5.1. ***(Cauchy-Lipschitz)*** *Soit $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip(D)$ et avec les mêmes notations que pour le Théorème 2.4.2, il existe une **unique** solution au problème de Cauchy (PC) sur l'intervalle $[t_0 + \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Démonstration : Le Théorème 2.4.2 nous assure de l'existence d'au moins une solution φ_1 sur l'intervalle considéré. On note φ_2 une éventuelle autre solution et on introduit la fonction continue

$$\psi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_E$$

définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant des solutions du problème de Cauchy, elles s'écrivent, sous la forme intégrale (PCI) :

$$\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))ds, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \ i = 1, 2$$

On obtient en particulier que :

$$\psi(t) = \| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)ds\|_E \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)\|_E ds$$

puis, f étant lipschitzienne en x uniformément en t sur D, il existe $k > 0$ telle que $\|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\|_E \leq k\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_E$ pour tout $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ce qui nous donne :

$$\psi(t) \leq \int_{t_0}^{t} k|\psi(s)|ds$$

On conclut ensuite en appliquant le Lemme 2.5.1 de Gronwall avec $A = 0$, $B = k$ et $C = 0$. Introduisons une nouvelle définition :

Définition 2.5.2. *On dira que f est localement lipschitzienne sur D si pour tout $(t, x) \in D$ il existe une boule $B = \{(t', x') \in D, \ \|x - x'\|_E < \varepsilon, \ |t - t'| < \varepsilon\} \subset D$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B. On note alors $f \in Lip_{loc}(D)$. Dans cette définition la constante de lipschitz n'est valable que localement.*

Théorème 2.5.2. ***(Unicité globale)*** *Soit $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D)$ et soient (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (E) telles que $J_1 \cap J_2 \neq$. Si il existe un point $t0$ de $J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t0) = \varphi_2(t_0)$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Démonstration : Les ensembles J_1 *et* J_2 sont des intervalles. Il en est donc de même de $J = J_1 \cap J_2$ qui est en particulier connexe et non vide puisqu'il contient t_0. On note $I = \{t \in J \ \ telsque \ \ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. Montrons que I est ouvert et fermé dans J ce qui entraînera que $I = J$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues, on en déduit que I est fermé. Soit $t_1 \in I$, notons $x_1 = \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$. Alors $(t_1, x_1) \in D$ et selon le Théorème 2.5.1, le problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_1) = x_1$$

admet une unique solution sur $[t_1 - \alpha, t_1 + \alpha]$ On en déduit que $\varphi_1 = \varphi_2$ sur cet intervalle et que $]t_1 - \alpha, t_2 + \alpha[\subset I$ et donc que I est ouvert. On considţerera ţa partir de maintenant que l'on a toujours $f \in Lip_{loc}(D) \cap \mathcal{C}(D)$ ou plus simplement $f \in Lip(D) \cap \mathcal{C}(D)$, c'est ţa dire qu'il existe toujours une solution unique pour le problème de Cauchy (PC).

2.6 Prolongement des solutions locales, solutions maximales

Commençons par poser quelques définitions : [3]

Définition 2.6.1. *Soit (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (E). On dit que (φ_2, J_2) prolonge (φ_1, J_1) si $J1 \subset J_2$ et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur J_1. Une solution (φ, J) de (E) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.*

Théorème 2.6.1. ***(Existence d'une solution maximale)*** *Soit $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D)$. Alors par tout point $(t_0, x_0) \in D$ il passe une unique solution maximale au problème de Cauchy (PC).*

Démonstration : Considérons l'ensemble S de tous les couples (φ, J) de solutions au problème de Cauchy (PC). Si (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) sont deux tels couples alors $J_1 \cap J_2$ n'est pas vide car il contient t_0 et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$ d'aprés le Théorème 2.5.2. Soit I la réunion de tous les intervalles J. Sur I on peut donc définir la fonction ψ par $\psi \equiv \varphi$ sur J pour tout $(\varphi, J) \in S$. Cette fonction est la solution maximale cherchée.
La question à laquelle nous allons répondre maintenant est : pourquoi une solution maximale, définie sur un intervalle borné, ne peut-elle être prolongée sur un intervalle plus grand ?

Théorème 2.6.2. *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que $D =]a, b[\times\Omega$. Soient $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D)$ et $(t_0, x_0) \in D$. Si $(\varphi, (T_-, T_+))$ est une solution maximale du problţeme de Cauchy (PC), alors on a l'alternative suivante :*
- *ou bien $T_+ = b$, ou bien $T_+ < b$ et pour tout compact K de Ω il existe $t < T_+$ tel que $\varphi(t) \notin K$.*
- *Énoncé analogue pour T_-.*

Démonstration : Supposons que $T_+ < b$ et qu'il existe un compact K tel que $\varphi(t) \in K$ pour tout $t \in (t_0, T_+)$. Alors, comme $f \in \mathcal{C}(D)$, il existe $M > 0$ tel que $\|f(t, x)\|_E \leq M$ pour tout $(t, x) \in [t_0, T_+] \times K$. Soit $(t_n)_n$ une suite croissante tendant vers T_+ et telle que $t_0 < t_n < T_+$ pour tout n. En écrivant la solution φ sous forme intégrale, on obtient que :

$$\|\varphi(t_m) - \varphi(t_n)\|_E \leq \int_{t_n}^{t_m} \|f(s, \varphi(s))\|_E \leq M|t_m - t_n|, \ \forall m > n$$

La suite $(t_n)_n$ étant de Cauchy, il en est de même pour $(\varphi(t_n))_n$ qui est donc convergente. Notons $x_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n)$. Alors $x_1 \in K \subset \Omega$ et on a donc $(T_+, x_1) \in D$. La solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(T_+) = x_1$$

admet selon le Théorème 2.4.2 une solution locale qui prolonge φ au delà de T_+. Ceci contredit la maximalité de φ. On procède de façon analogue pour T_-.
Si Ω est borné, ce Théorème se traduit par : Le point de $\mathbb{R} \times E$ de coordonées $(t, \varphi(t))$ tend vers un point de la frontière du cylindre $]a; b[\times\Omega$ quand $t \to T_+$ et $t \to T_-$.

Chapitre 3

Etude Qualitative des solutions numériques des équations différentielles ordinaires

3.1 Introduction

dans ce chapitre on s'interessera à l'étude qualitative des solution numériques des équations différentielles on l'occurence : la consistance, la stabilité et la convergence. Ces trois notions nous permettent de mieux comprendre le comportement de l'erreur du même nom ainsi que de calculer la valeur minimale de l'erreur de la perturbation des solutions par des valeurs voisines de la solution. La notion de convergence nous permet d'évaluer l'erreur entre la solution exacte et la solution calculée par le schema numérique. [12]

Notion de schéma numériques

On considère une équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, dans laquelle f satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, et on notera dans toute la suite $t \to z(t)$ la solution unique sur $[t_0, t_0 + T]$, dont le graphe est contenu dans un cylindre de sécutité $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$.
On appelera parfois z la "solution exacte", par opposition aux solutions approchées notées $t \to x(t)$.
Pour l'évaluation approchée de $z(t)$, la stratégie générale est la suivante :

— Définir un schéma numérique : on appelle ainsi les formules de récurrence associées à une méthode numérique de résolution des équations différentielles. Il s'agit d'une méthode de calcul de valeurs approchées notées x_n

des $z(t_n)$, où les t_n sont les termes d'une subdivision à N pas de $[t_0, t_0+T]$:

$$t_0 < t_1 < .... < t_N = t_0 + T$$

Le n^{ime} pas est noté $h_n = t_{n+1} - t_n$ (on commence à l'indice 0), et le pas maximum est $h_{\max} = \max_{0 \le n \le N-1} h_n$
On peut considérer la fonction affine par morceaux $x(t)$ telle que pour tout $n, x(t_n) = x_n$, ce qui donne précisément :

$$x(t) = x_n + \frac{t - t_n}{h_n}(x_{n+1} - x_n) \ si \ t \in [t_n, t_{n+1}]$$

— Evaluer $\|x(t) - z(t)\|$ pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$ et trouver un majorant (en fonction de f et de la méthode utilisée) de

$$\sup_n (\sup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \|x(t) - z(t)\|)$$

— Etudier le comportement de cette majoration en fonction de la subdivision et particulièrement lorsque $h_{\max} \to 0$

Définition 3.1.1. *Un schéma numérique à un pas explicite est une équation de récurrence de la forme :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

Le domaine de définition de Φ contient au moins $U \times 0$ et on doit vérifier dans chaque situation concrète que l'itération est compatible avec ce domaine de définition. Mentionnons d'autres types de schémas numériques dont l'étude dépasse le cadre de ce cours. Dans les méthodes implicites la fonction Φ dépend aussi de x_{n+1}. Dans un schéma numérique explicite à q pas Φ dépend aussi d'un nombre fixe de termes précédemment calculés, $x_{n-q+1}.....x_n$, et la méthode doit être complétée par une initialisation, pour le calcul des q premiers termes.

Définition 3.1.2. *Un schéma numérique à un pas implicite est de la forme :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, x_{n+1}, h_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

Dans le cas d'une méthode implicite il s'agira le plus souvent de s'assurer que l'équation

$$x = x_n + h\Phi(t_n, x_n, x, h_n)$$

a une solution unique du moins pour tout h assez petit. Dans les cas les plus courants cela résultera du théorème des fonctions implicites.

Définition 3.1.3. *Un schéma numérique à q pas explicite est de la forme :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, ..., x_{n-q}, h_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

avec $n = N_q, ..., N-1$. Bien sur la calcul de x_n n'est possible qu'à partir de l'indice q et la méthode doit être complétée par une initialisation, le calcul des q premiers termes, par exemple par une méthode à un pas. L'erreur de consistance au pas n est par définition l'erreur commise sur x_{n+1}, lorsqu'on prend pour les valeurs précédentes des y_k les valeurs exactes $z(t_k)$, ce qui donne la définition suivante où nous n'explicitons que pour les méthodes a un pas.

Définition 3.1.4. *L'erreur de consistance est la suite*

$$e_n = z(t_{n+1}) - x_{n+1}(t_n, z(t_n), h_n) = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \Phi(t_n, z(t_n), h_n)$$

Définition 3.1.5. *On dit qu'un schéma numérique est d'ordre p, si $e_n = o(h_n^{p+1})$, lorsque $h_n \to 0$*
L'ordre d'une méthode est une indication importante qui avec la propriété dite de stabilité qui dépend de f gouverne la convergence de $x(t)$ vers $z(t)$. Nous conclue-rons seulement cette section par un résultat admis qui donne une première idée intuitive de la notion d'erreur de consistance :

Définition 3.1.6. *Une méthode numérique est dite consistante si*

$$\lim_{h_{\max} \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} |e_n| = 0$$

Théorème 3.1.1. *Une méthode à un pas est consistante si et seulement si quel que soit $(t, x) \in U$, on a :*

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

Démonstration :
Nous donnons plus loin une démonstration détaillée qui fait appel à un maniement de sommes de Riemann. Intuitivement on peut justifier cet enoncé en remarquant que par le théorème des accroissements finis 1.3.1,$z(t_{n+1}) - z(t_n)$ est de l'ordre de $h_n z'(t_n) = h_n f(t_n, z(t_n))$,
Donc que l'erreur de consistance $e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \Phi(t_n, z(t_n), h_n)$ est de l'ordre de $[f(t_n, z(t_n)) - \Phi(t_n, z(t_n), h_n)].h_n$.
Si la condition de l'énoncé n'est pas remplie cette difféerence est pour h tendant vers zéro de l'ordre de h, avec un facteur multiplicatif ne tendant pas vers zéro. Le cumul des erreurs d d'arrondi serait donc de l'ordre du cumul des h_n c'est à dire de la quantité fixe T, donc l'erreur ne tendrait pas vers 0 avec le pas.

3.2 Quelques exemples de méthodes à un pas

3.2.1 Méthode d'Euler.

On a déjà décrit cette méthode appelée aussi méthode de la tangente qui correspond au cas de la fonction :

$$\Phi(t,x,h) = f(t,x)$$

indépendante de t, définie sur $U \times \mathbb{R}$.
Calcul de l'erreur de consistance

$$e_n = z(t_n + h_n) - z(t_n) - h_n \cdot f(t_n, z(t_n))$$

$$= z(t_n + h_n) - z(t_n) - h_n \cdot z'(t_n)$$

par définition de z

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, z est de classe $\mathcal{C}^2$ et l'erreur de consistance prend la forme suivante grêce à la formule de Taylor.

$$e_n = \frac{1}{2} h_n^2 z''(t_n) + o(h_n^2)$$

$$= \frac{1}{2} h_n^2 f^{[1]}(t_n) + o(h_n^2)$$

Ainsi la méthode d'Euler est d'ordre un.

3.2.2 Méthode de Taylor d'ordre p.

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^p$: On a vu alors que z est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et on a défini des fonction $f^{[k]}$, construite par récurrence à partir de f et de ses dérivées partielles telles que $z^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, z(t))$; pour $k = 1, ..., p+1$: La formule de Taylor à l'ordre $p+1$ s'écrit alors :

$$z(t_n + h_n) = s(t_n) + \sum_{k=1}^{p} h_n^k \frac{1}{k!} f^{[k-1]}(t_n, z(t_n)) + \frac{1}{(p+1)!} f^{[p]}(t_n, z(t_n)) h_n^{p+1} + o(h_n^{p+1})$$

ou avec la formule de Taylor Lagrange :

$$z(t_n + h_n) = s(t_n) + \sum_{k=1}^{p} h_n^k \frac{1}{k!} f^{[k-1]}(t_n, z(t_n)) + \frac{1}{(p+1)!} f^{[p]}(t_n + \theta h_n, z(t_n + \theta h_n)) h_n^{p+1},\ \theta \in]0,1[$$

Ceci suggére le schéma numérique suivant obtenu en remplaçant les valeurs inconnues $z(t_k)$ par les x_k.

$$(\mathcal{T}_p)\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \sum_p^{k=1} h_n^p \frac{1}{k!} f^{[k-1]}(t_n, x_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{array}\right.$$

La fonction Φ associée à cette méthode est :

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{k=1}^{p} h^{k-1} \frac{1}{k!} f^{[k-1]}(t_n, x_n)$$

Le résultat suivant généralise celui qu'on a déjà trouvé pour la méthode d'Euler $(\mathcal{T}_1)$.

Proposition 3.2.1. *La méthode de Taylor $(\mathcal{T}^p)$ est du point de vue de l'erreur de consistance d'ordre p. Plus précisément, si on considère un cylindre de sécurité $C = [t_0 - T; t_0 + T]\bar{\mathcal{B}}(x_0, r)$, on a une majoration :*

$$e_n \leq \frac{1}{(p+1)!} \sup_{(t,x)\in C} \|f^{[p]}(t, x)\| h_n^{p+1}$$

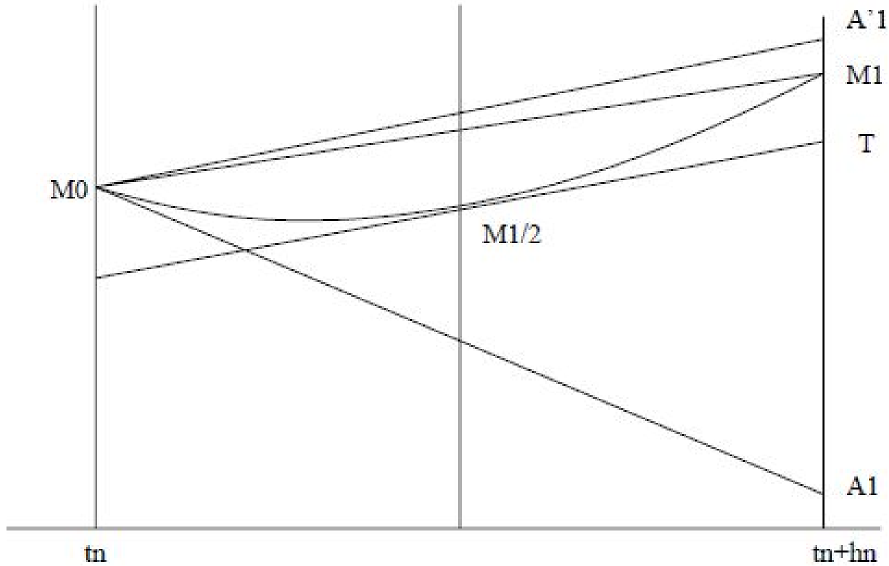
En effet selon la formule de Taylor qui a servi de base à la méthode on obtient directement (en prenant la formule de Taylor avec reste de Lagrange) :

$$e_n = z(t_n + h_n) - z(t_n) - \sum_{k=1}^{p} h_n^k \frac{1}{k!} f^{[k-1]}(t_n, z(t_n))$$

$$= \tfrac{1}{(p+1)!} f^{[p]}(t_n + \theta h_n, z(t_n + \theta h_n)) h_n^{p+1} \leq \tfrac{1}{(p+1)!} \sup_{(t,x)\in C} \|f^{[p]}(t, x)\| h_n^{p+1}$$

3.2.3 Méthode du point milieu.

Notons M_n le point de coordonnées $(t_n, z(t_n))$ du graphe de z. Le segment $[M_n, M_{n+1}]$ a une pente plus proche en général de $z'(t_n + \frac{h_n}{2})$ pente de la tangente au "point milieu" que de $z'(t_n)$, pente de la tangente en M_n, comme le montre la figure ci-dessous :



On peut donc considérer qu'une approximation de $z(t_{n+1})$ à partir de $z(t_n)$ meilleure que l'expression $z(t_n) + f(t_n, z(t_n))$ de la méthode d'Euler est :

$$z(t_n) + h_n z'(t_n + \frac{h_n}{2}) = z(t_n) + h_n f(t_n + \frac{h_n}{2}, z(t_n + \frac{h_n}{2})) \qquad (1)$$

Dans le schéma numérique que nous avons en vue on peut prendre par récurrence x_n approximation de $z(t_n)$.
Comme $z(t_n + \frac{t_n}{2})$ n'est pas connu non plus, il convient d'en chercher une approximation notée $x_{n+\frac{1}{2}}$. Le schéma d'Euler suggère de prendre $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, x_n)$.On aboutit ainsi donc au schéma numérique :

$$(\mathcal{M}) \left\{ \begin{array}{l} x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, x_n) \\ p_n = f(t_n + \frac{h_n}{2}, x_{n+\frac{1}{2}}) \\ x_{n+1} = x_n + h_n p_n \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{array} \right.$$

Ce schéma est encore une méthode à un pas explicite dans laquelle l'expression explicite de Φ obtenue en développant p_n est :

$$\Phi(t, x, h) = f(t_n + \frac{h_n}{2}, x_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, x_n))$$

Proposition 3.2.2. *La méthode* $(\mathcal{M})$ *est d'ordre 2 dès que* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$.

Démonstration : On écrit le schéma $(\mathcal{M})$ avec $x_n = z(t_n)$ ce qui donne l'erreur de consistance

$$e_n = z(t_n + h_n) - z(t_n) - h_n p_n \text{ , avec } p_n = f(t_n + \tfrac{h_n}{2}, x_n + \tfrac{h_n}{2} f(t_n, z(t_n)))$$

Comme p_n est une approximation de $z'(t_n + \frac{h_n}{2})$, on a interêt à décomposer en ainsi :

$$e_n = e'_n + e''_n \text{ , avec } \left\{ \begin{array}{l} e'_n = z(t_n + h_n) - z(t_n) - ?h_n z'(t_n + \frac{h_n}{2}) \\ e''_n = h_n(z'(t_n + \frac{h_n}{2}) - p_n) \end{array} \right.$$

On trouve d'abord en apppliquant la formule de Taylor jusqu'au terme en h_n^3 aux deux fonctions z et z' :

$$e'_n = z(t_n + h_n) - z(t_n) - h_n z'(tn) - h_n(z'(t_n + \frac{h_n}{2}) - z'(t_n))$$

$$= \frac{h_n^2}{2} z''(t_n) + \frac{h_n^3}{6} z^{(3)}(t_n) + o(h_n^3) - h_n(\frac{h_n}{2} z''(t_n) + \frac{h_n^2}{8} z^{(3)}(t_n) o(h_n^2))$$

$$= \frac{h_n^3}{24} z^{(3)}(t_n) + o(h_n^3) = \frac{h_n^3}{24} f^{[2]}(t_n, z(t_n)) + o(h_n^3)$$

d'autre part on peut appliquer la formule de Taylor par rapport à la variable x dans l'expression de e''_n, ce qui donne

$$e''_n = h_n[f(t_n + \frac{h_n}{2}, z(t_n + \frac{h_n}{2})) - f(t_n + \frac{h_n}{2}, z(t_n) + \frac{h_n}{2}) f(t_n, x_n))]$$

$$= h_n \frac{\partial f}{\partial x}(t_n + \frac{h_n}{2}, \theta_n)[z(t_n + \frac{h_n}{2})) - z(t_n) \frac{h_n}{2}) f(t_n, x_n)]$$

avec θ_n sur le segment $]z(t_n) + \frac{h_n}{2}) f(t_n, x_n), z(t_n + \frac{h_n}{2}))[=]x_{n+\frac{1}{2}}, z(t_n + \frac{h_n}{2}))[$ Du fait que $\theta_n = x_n + O(h_n)$, et du fait que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ on déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(t_n + \frac{h_n}{2}, \theta_n) = \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n) + O(h_n)$ et finalement tenant compte de $z'(t_n) = f(t_n, z(t_n))$, et en appliquant encore la formule de Taylor à l'ordre 2 à $z(t_n + \frac{h_n}{2})$:

$$e''_n = h_n(\frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n) + O(h_n))(\frac{h_n}{2} z'(t_n) + \frac{1}{2} \frac{h_n^2}{2} z''(t_n) - \frac{h_n}{2}) f(t_n, x_n))$$

$$= \frac{h_n^3}{8} \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n) z''(t_n) o(h_n^3) = \frac{h_n^3}{8} \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n) f^{[1]}(t_n, z(t_n)) + o(h_n^3)$$

En apparence ce calcul semble restreint au cas scalaire $m = 1$, mais en fait il est intégralement valable en général à condition de considérer que $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x).v$ désigne la valeur sur le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ de l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dérivé partielle de f au point $(t, x) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 3.2.1. *On considère l'équation $x' = -x$, avec les données initiales $t_0 = 0; x_0 = 1$, et la subdivision de $[0,1]$ de pas constant $\frac{1}{10}$, $t_n = \frac{n}{10}$, $n = 0, ..., 10$: La solution exacte est connue : $z(t) = e^{-t}$, ce qui permet de comparer aisément différentes méthodes quant à leur précision en fonction du pas. La comparaison est proposée en exercice et on constatera des erreurs respectives de l'ordre de $2.10^{-2}; 10^{-3}; 2.10^{-5}$ pour les schémas $(\mathcal{T}^1)(\mathcal{T}^2)$ et $(\mathcal{T}^3)$: On verra aussi que pour atteindre la même précision que par 10 pas avec $(\mathcal{T}^3)$, le nombre de pas nécessaires serait de :*

- *100 pas dans le cas de la méthode de Taylor d'ordre 2.*
- *10000 pas dans le cas de la méthode d'Euler.*

Vérifier au passage que la méthode du point milieu donne sur cet exemple la même formule que $\mathcal{T}^2$ Cet exemple montre que la méthode d'Euler n'est pas assez précise pour qu'on puisse s'en contenter dans la pratique. L'augmentation du nombre de pas est en effet préjudiciable à cause du cumul des erreurs d'arrondis, qui pour une méthode donnée impose une borne à la précision. Le choix d'une méthode résulte d'un compromis entre la sophistication du schéma utilisé qui doit rester raisonnable et le gain d'efficacité.

3.3 Etude générale de la convergence des méthodes à un pas : consistance et stabilité

3.3.1 Consistance, stabilité et convergence

La notion de consistance d'un schéma

Il s'agit du bon comportement de l'erreur du même nom.

Définition 3.3.1. *Une méthode numérique est dite consistante si*

$$\lim_{h_{\max}\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} |e_n| = 0$$

La notion de stabilité

Dans la pratique les valeurs de x_n sont perturbées par des valeurs voisines $\tilde{x}_n$ pour deux raisons :

1. Erreurs d'arrondi : on représente en machine la valeur x_n issue du calcul par un nombre décimal à q chiffres : $|\tilde{y_n} - y_n|$, est alors l'erreur d'arrondi majoré en valeur relative par $10^{-q}x_n$.

2. Incertitude expérimentale Dans la plupart des problèmes concrets la "vraie" valeur (notion mythique...) de x_0 est remplacée par une valeur $\tilde{x}_0$ tirée d'une expérience, d'une hypothèse .. etc : $|\tilde{x}_0 - x_0|$ est donc majorée par un nombre qui dépend de la précision expérimentale.

   La méthode ne peut donc être utile que si la perturbation sur $|\tilde{x}_n - x_n|$ provoquée par une faible perturbation $|\tilde{x}_0 - x_0|$ des données initiales et par les erreurs d'arrondi sur les termes $\tilde{x}_n$ antérieurs est faible.

Définition 3.3.2. *Une méthode est dite stable s'il existe $S > 0$ tel que quelle que soient les suites , définies par récurence par les formules :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n\Phi(t_n, x_n, h_n) \\ \tilde{x_{n+1}} = \tilde{x_n} + h_n\Phi(t_n, \tilde{x_n}, h_n) + \varepsilon_n \end{cases}$$

on a :

$$\max_{0\leq n\leq N} |\tilde{x_n} - x_n| \leq S(|\tilde{x_0} - x_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|)$$

Remarque 3.3.1. *(**Remarques sur l'évaluation de l'erreur**) Dans ces formules ε_n est une erreur d'arrondi qu'on majore dans la pratique en erreur relative par $0,5.10^{-q}$ en fonction de la précision de la machine : q est le nombre de chiffres dans l'écriture en virgule ottante et si $x_n \in [10^{k-1}, 10^k[$ avec $k \in Z$, l'erreur d'arrondi absolue est au plus $0,5.10^{k-q}$. La quantité $|\tilde{x_0} - x_n|$, de son coté doit être évaluée (donc majorée) en fonction de la nature (physique ou autre) du problème modélisé. Ainsi, selon la définition, on ne peut donc pas espérer une précision relative à priori meilleure que :*

$$s \times (N + 1) \times 0,5.10^{-16}$$

pour une écriture de réels avec 16 chiffres signiçatifs. Par conséquent, le fait qu'une méthode soit stable n'est pas une garantie d'obtenir des résultats numériquement fiables lorsqu'on se heurte à l'un des deux écueuils suivants :
- Lorsqu'on on prend un pas trés petit, donc N trés grand N le cumul des erreurs d'arrondis peut provoquer une erreur trop élevée.
- La constante de stabilité S peut être trés grande de l'ordre de 10^{+16} ou plus ce qui ote toute crédibilité aux résultats obtenus. C'est le cas de problème dits numériquement mal posés. C'est aussi le cas, lorsqu'on cherche les solutions pour $[t_0, t_0 + T]$, avec T trop grand. En effet que S croît exponentiellement avec T. Voir la formule finale dans la démonstration du théorème 3.3.3 avec une constante de stabilité en $S = e^{LT}$, et la sous section 3.4 avec le facteur $SCT = e^{LT}CT$ pour le facteur d'amplification de l'erreur.

La notion de convergence

Faisant abstraction des contraintes pratiques que nous venons d'évoquer on a quand même les résultats théoriques suivants, de démonstration trés facile, qui relient les deux notions de consistance et de stabilité à la convergence de la méthode :

Définition 3.3.3. *Une méthode numérique est dite convergente si pour toute solution exacte z définie sur un intervalle $[t_0, t_0+T]$ et toute suite (x_n) construite, selon le schéma numérique considéré, à partir de x_0 et d'une subdivision de $[t_0, t_0+T]$, on a la relation de convergence uniforme :*

$$\lim_{h_{\max}\to 0 x_0 \to z(t_0)} \max_{0\leq n\leq N} |x_n - z(t_n)| = 0$$

Théorème 3.3.1. *Une méthode numérique à un pas qui est stable et consistante est convergente.*

Démonstration : Posons $\tilde{x_n} = z(t_n)$. Dans ce cas l'erreur de consistance est par définition le réel e_n qui complète la formule :

$$z(t_{n+1}) = \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x_n} + h_n\Phi(t_n, \tilde{x_n}, h_n) + e_n$$

Donc e_n joue pour la suite des $z(t_n)$ le role de la correction ε_n associé en général à une suite $\tilde{x_n}$. D'aprés la définition de la consistance on a donc :

$$\max_{0\leq n\leq N} |z(t_n) - x_n| \leq S(|z(t_0) - x_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |e_n|)$$

L'hypothèse de consistance donne alors immédiatement le résultat annoncé.

3.3.2 Quelques conditions suffisantes et/ou nécessaires de consistance ou de stabilité.

Dans cet énoncé on suppose que Φ remplit la condition suivante presque toujours réalisée dans les exemples usuels :

$$\Phi \text{ est continue sur un ouvert contenant } U \times [-h_0, h_0]$$

Théorème 3.3.2. *Une méthode à un pas est consistante si et seulement si quel que soit $(t, x) \in U$, on a :*

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

Démonstration : D'aprés le théorème des accroissement finis 1.3.1, il existe quel que soit n un réel $c_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que :

$$e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n\Phi(t_n, z(t_n), h_n)$$

$$= h_n + z'(t_n) - h_n\Phi(t_n, z(t_n), h_n)$$

$$= h_n[f(c_n, z(c_n)) - \Phi(t_n, z(t_n)h_n)]$$

$$= h_n[f(c_n, z(c_n)) - \Phi(c_n, z(c_n), 0)] + h_n[\Phi(c_n, z(c_n), 0) - \Phi(t_n, z(t_n), h_n)]$$

Pour clarifier les calculs qui suivent on écrira au moment opportun ce résultat sous la forme :

$$e_n = h_n(A_n + B_n)$$

$$A_n = f(c_n, z(c_n)) - \Phi(c_n, z(c_n), 0)$$

$$B_n = \Phi(c_n, z(c_n), 0) - \Phi(t_n, z(t_n), h_n)$$

D'aprés l'uniforme continuité de Φ sur $C \times [-h_0, h_0]$ où C est le polycylindre de sécurité sur lequel on travaille :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \alpha > 0, \text{ telsque}$$
$$(|h| < \eta, |t - t'| < \eta, |x - x'| < \alpha) \Rightarrow |\Phi(t, x, 0) - \Phi(t', x', h)|)$$

Par ailleurs, quitte à diminuer η, on peut s'assurer en utilisant l'uniforme continuité de z sur $[t_0, t_0+T]$ que $|h_n| < \eta \Rightarrow |z(c_n) - z(t_n)| < \alpha$, donc finalement en enchainant les deux implications précédentes par transitivité :

$$|h_n| < \eta \Rightarrow |\Phi(c_n, z(c_n), 0) - \Phi(t_n, z(t_n), h_n| < \epsilon$$

On en tire

$$h_{max} < \eta \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h_n|\Phi(c_n, z(c_n), 0) - \Phi(t_n, z(t_n), h_n)| < \epsilon \sum h_n = \epsilon T$$

Autrement dit avec les notations abrégées $e_n = h_n(A_n + B_n)$, on a obtenu

$$h_{max} < \eta \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h_n|B_n| < \epsilon T$$

Donc $\sum_{n=0}^{N-1} h_n|B_n|$ tend vers zéro quand $h_{max} \to 0$. Or on peut par ailleur écrire les majorations suivantes :

$$|\sum_{n=0}^{N}(|e_n| - h_n|A_n|)| \leq \sum_{n=0}^{N} ||e_n| - h_n|A_n||$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} |e_n - h_n.A_n| = \sum_{n=0}^{N} h_n|B_n|$$

On a donc démontré que $\sum_{n=0}^{N} |e_n| - \sum_{n=0}^{N} h_n|A_n|$ tend vers zéro avec h_{max}. Or on reconnait dans la suite

$$\sum_{n=0}^{N} h_n|A_n| = \sum_{n=0}^{N} h_n|f(c_n, z(c_n)) - \Phi(c_n, z(c_n), 0)|$$

une suite de sommes de Riemann de l'intégrale $I = \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t, z(t)) - \Phi(t, z(t), 0)|$, donc une suite qui tend vers I. Le résultat obtenu nous donne alors aussi :

$$\lim_{h_{max}} \sum_{n=0}^{N} |e_n| = I$$

La condition de consistance est équivalente au fait que cette limite est nulle donc à

$$\int_{t0}^{t0+T} |f(t, z(t)) - \Phi(t, z(t), 0)| = 0$$

La nullité de cette intégrale de fonction positive continue impose pour tout t :

$$f(t, z(t)) = \Phi(t, z(t), 0)$$

. Dans tout ce raisonnement la condition initiale (t_0, x_0) est arbitraire, et l'égalité $f(t_0, y_0) = \Phi(t_0, x_0, 0)$est valable pour tout $(t_0, x_0) \in U$

Théorème 3.3.3. *Une condition suffisante de stabilité :*
Si Φ est Lipschitzienne par rapport à la variable x, la méthode est stable. De plus si L est la constante de Lipschitz pour Φ, la constante de stabilité est $S = e^{LT}$.

Démonstration : On reprend les notations de la définition 3.3.2 et on pose :

$$\theta_n = |\tilde{x}_n - x_n|$$

Par définition de la constante de Lipschitz pour Φ.

$$|\Phi(t, x_1, h) - \Phi(t, x_2, h)| \leq L|x_1 - x_2|$$

quel que soient (t, x_1, h) et (t, x_2, h) dans le domaine de définition de Φ. La majoration suivante découle aussitôt de la définition de la suite de θ_n et de la condition de Lipschitz :

$$\theta_{n+1} = |\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| = |\tilde{x}_n - x_n + h_n(\Phi(t_n, \tilde{x}_n, h_n) - \Phi(t_n, x_n, h_n)) + \epsilon_n| \quad (1)$$

$$\leq (1 + h_nL)\theta_n + |\varepsilon_n| \quad (2)$$

Lemme 3.3.1. *Lemme de Gronwall discret . Les inégalités (2) impliquent :*

$$\theta_n \leq e^{L(t_n-t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_n-t_i)}|\epsilon_i|$$

Démonstration : C'est un exercice élémentaire sur les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$ et on a donc

$$1 + h_n L \leq e^{Lh_n}$$

Le lemme se déduit par une récurrence sans mystère de cette majoration et de l'inégalité (2). L'étape de récurrence de n à $n+1$ s'écrit ainsi :

$$\theta_{n+1} \leq (1 + h_n L)\theta_n + \epsilon_n$$

$$\leq (1 + h_n L)[e^{L(t_n-t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_n-t_{i+1})}|\epsilon_i|] + |\epsilon_n|$$

$$\leq e^{Lh_n}[e^{L(t_n-t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_n-t_{i+1})}|\epsilon_i|] + |\epsilon_n|$$

$$= e^{L(t_{n+1}-t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_{n+1}-t_{i+1})}|\epsilon_i| + |\epsilon_n|$$

$$= e^{L(t_{n+1}-t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_{n+1}-t_{i+1})}|\epsilon_i|$$

On déduit de ce lemme que pour tout n,

$$\theta_n \leq e^{LT}(\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} |\epsilon_i|)$$

Ceci termine la démonstration du théorème de stabilité avec la constante de stabilité :

$$S = e^{LT}$$

Remarque : Ces calculs ne sont corrects que tant que les (t_n, x_n, h_n) et $(t_n, \tilde{x}_n, h_n)$ restent dans le domaine où Φ est Lipschitzienne de constante L.

Corollaire 3.3.1. *Si f est Lipschitzienne en x, les méthodes d'Euler et du milieu sont convergentes.*

Démonstration : D'aprés le théorème 3.3.1 il suffit pour cela d'établir la consistance et la stabilité. - La consistance est une conséquence directe du théorème 3.3.2, et de l'égalité $\Phi_{|h=0} = f$. C'est aussi valable pour la méthode de Taylor T_p. La stabilité se déduit du théorème 3.3.3 et du fait que Φ est Lipschitzienne : pour la méthode d'Euler, c'est immédiat car $f = \Phi$, et pour la méthode du milieu cela résulte des calculs suivants :

$$\phi = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x))$$

Donc si f est Lipshitzienne en x de constante de Lipschitz L on obtient :

$$|\Phi(t,x_1,h) - \Phi(t,x_2,h)| \leq L(|x_1 - x_2 + \frac{h}{2} f(t,x_1) - f(t,x_2)|)$$

$$\leq L|x_1 - x_2| + \frac{hL}{2} |f(t,x_1) - f(t,x_2)|$$

$$\leq (L + \frac{h}{2} L^2)|x_1 - x_2|$$

D'où le caractère lipschitzien de Φ avec la constante de Lipschitz $\Lambda = L + \frac{\delta}{2} L^2$, si on se limite a des pas h assez petits c'est à dire assujettis à une condition : $0 < h \leq \delta$

Note : On montre aussi que lorsque f est de classe $\mathcal{C}^p$ la méthode de Taylor T_p est convergente.

3.3.3 Ordre d'une méthode à un pas et erreur globale.

Méthode d'ordre p

Définition 3.3.4. *Une méthode consistante est dite d'ordre p si pour tout compact K il existe $C \geq 0$, tel que pour toute solution $z(t)$, de graphe $(t, z(t))$ contenu dans K, l'erreur de consistance satisfait à la condition :*

$$|e_n| \leq C h_n^{p+1}$$

Mentionnons une caractérisation de l'ordre p qui s'applique à la méthode de Taylor de même indice et généralise le critère de consistance déjà énoncé :

Proposition 3.3.1. *Sous l'hypothèse que Φ est de classe $\mathcal{C}^p$, la méthode est d'ordre p si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :*

$$\frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t,x,0) = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t,x) \ \textit{pour}\ 0 \leq l \leq p-1$$

Démonstration : Rappelons d'abord que l'erreur de consistance est :

$$e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \Phi(t_n, z(t_n), h_n)$$

La démonstration est similaire (en plus compliqué) a celle de la caractérisation de la consistance, qui correspond au cas $p = 1$. En appliquent la formule de Taylor Lagrange on a l'existence de $c_n, d_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tels que :

$$z(t_{n+1}) - z(t_n) = h_n z'(t_n) + ... + \frac{h_n^k}{k!} z^{(k)}(t_n) + ... + \frac{h_n^p}{p!} z^{(p)}(t_n) + \frac{h_n^{p+1}}{p+1!} z^{(p+1)}(t_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{h_n^k}{k!} f^{[k-1]}(t_n, z(t_n)) + \frac{h_n^{p+1}}{p+1!} f^{[p]}(c_n, z(c_n))$$

$$\Phi(t_n, z(t_n), h_n) = h_n[\phi(tn, z(tn), 0) + ... + \frac{h_n^l}{l!} \frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t_n, z(t_n), 0) + ... + \frac{h_n^{p-1}}{p-1!} \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial h^{p-1}}(t_n, z(t_n), 0)$$

$$+ \frac{h_n^p}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(d_n, z(d_n), d_n)]$$

On en tire

$$e_n = h_n[\sum_{l=0}^{p-1} \frac{h_n^l}{l!} (\frac{f^{[l]}(t_n, z(t_n))}{l+1} - \frac{\partial^l \Phi(t_n, z(t_n), 0)}{\partial h^l})] + \frac{h_n^{p+1}}{p!} (\frac{f^{[p]}(c_n, z(c_n))}{p+1} - \frac{\partial^p \Phi(d_n, z(d_n), d_n)}{\partial h^p})$$

Pour que cette expression soit un DL en h_n de la forme $o(h_n^p)$, il faut et il suffit que tous les termes $(\frac{h_n^l}{l!}(\frac{f^{[l]}(t_n,z(t_n))}{l+1} - \frac{\partial^l \Phi(t_n,z(t_n),0)}{\partial h^l})$ soient nuls ce qui fournit la condition de l'énoncé puisque par tout point (t_0, x_0) passe une unique solution locale. Le reste fournit la majoration de l'énoncé avec la constante $C = \frac{1}{(p+1)!} \|f[p]\|_K + \frac{1}{p!} \|\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}\|_{k \times [0,\delta]}$ où les normes utilisées sont les normes du sup $\| \bullet \|_\infty$ et les solution sont supposée confinés dans un ensemble compact K.
Pour justifier l'existence des $f^{[l]}$ on remarque que grâce à l'hypothèse de consistance on a $f = \Phi_| h = 0$, qui est donc bien de classe $\mathcal{C}^p$. Le cas $l = 0$ de la conclusion de l'énoncéredonne la condition de consistance, avec un démonstration simplifiée par le fait qu'on suppose ici Φ de classe $\mathcal{C}^1$ et pas seulement continue.

3.4 La constante SCT de majoration de l'erreur globale

On considère une méthode consistante et stable de constante de stabilité S qui est d'ordre p avec un facteur multiplicatif C. On a les majorations d'erreurs suivantes. D'abord le cumul des erreurs de consistance (qui n'est pas l'erreur globale) est :

$$\sum e_n \leq C \sum h_n^{p+1} \leq C(\sum h_n) h_{\max}^p = SCTh_{\max}^p$$

En effet la somme de tous les pas est $\sum(t_{n+1} - t_n) = T$ si on travaille sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$: Par définition de la stabilité, on trouve alors :

$$\max |x_n - z(t_n)| \leq S(|x_0 - z(t_0)| + CTh_{\max}^p)$$

L'erreur est donc majorée dans le cas d'absence d'erreur sur la condition initiale par

$$SCTh_{\max}^p$$

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'etude qualitative des solutions numériques des équations différentielles ordinaires en l'occurence les notions de consistance, stabilité et convergence. Comme perspectives d'avenir, on prévoit de poursuivre l'etude qualitative des solutions pour d'autres notions telles que la régularité et la contrôllabilité des solutions. On souhaite élargire cette étude aux équations aux dérivées partielles (EDP).

Bibliographie

[1] A. Munnier ,*Théoorie des équations difféerentielles ordinaires* , Institut Élie Cartan , 2006-2007.

[2] Boutayeb A, Derouich M, Lamlili M et Boutayeb W, *Analyse Numérique : SMA-SMI S4 Cours, exercices et examens*

[3] Coddington E-A et Levinson L, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York-Toronto-London, 1955. xii+429 pp.

[4] D. Hulin, *Equations différentielles ordinaires etudes qualitatives*,Université Paris-Sud, 2012-2013.

[5] Eric Goncalvès, *Résolution numérique, Discription des EDP et EDO* , Institut national polytechnique de grenoble, septembre 2005.

[6] Guillaume Legendre ,*Méthodes numériques , Itroduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique* ,version provisoire du 4 janvier 2017.

[7] J. Hadamard,*Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, Hermann, 1932.

[8] J. Hadamard,*Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signication physique*. Bull. Univ. Princeton, 1902.

[9] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **3** (1990), 163-168.

[10] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional differential evolution nonlocal Cauchy problem, *Selected Problems in Mathematics, Cracow Univ. of Tech. Monographs, Anniversary Issue* **6** (1995).

[11] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, *Appl. Anal.*, **40** (1991), 173-180.

[12] M. Granger ,*Equations différentielles. Méthodes numériques à un pas.*

[13] M. Crouzeix and A. L. Migno, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, 1989.

[14] N. Point and J.H. Saiac, *Equations aux dérivées partielles - mathématiques et méthodes numériques*, Cours de l'ESCPI, 2005.