République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2015/2016

Variétés Riemanniennes Produits

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, géométié et applications

par

Ghailani Baghdad [1]

Sous la direction de

Dr H.M.Dida

Soutenue le 24 mai 2017 devant le jury composé de

A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
H. M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
O. Benihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : addad1102@gmail.com

Remerciments

Ce modeste travail ne pouvait avoir lieu sans l'aide et de gens qui ont été présents durant toute la période de mes études et même avant. Leur soutient m'était d'une importance capitale

je ne me prive pas de plaisir en citant les efforts de mon encadreur le docteur **H. M. Dida** qui m'a orienté et guidé dans mon chemin par ses fameux conseils et ses intéressantes interventions

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand

honneur d'y participer

Je remercie sincèrement monsieur **A. Azzouz**

pour l'honneur qui il me fait en présidant le jury

Je remercie vivement monsieur **O. Benihi** pour la confiance dont il me fait preuve en faisant

parties de ce jury

je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur **F. Hathout**

leur participation à mon jury. je suis honoré de leur présence.

Merci à mes parents, mes frères et sœurs ; mes amis qui mon épaulés dans les hauts et les bas, qui ont été patients avec moi et qui ont su implantés en moi la force , l'assurance et la conviction. J'espère les honorer et de ne jamais les décevoir

Dédicaces

A mon cher père et chère mère

A mes frères et soeurs

A toutes ma famille

A tous mes amis

A mes collègues de la faculté

Et à tous ceux qui m'ont porté leur soutien moral

Je dédie ce modeste travail

Table des matières

introduction

La géométrie différentielle est un domaine très vaste des mathématiques et dont le point de départ est l'étude des variétés différentiables, qui forment une classe d'espaces géométriques réguliers. La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on va introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à $\mathbb{R}^n$, afin d'y transférer ce qu'onsait déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas typologiquement identiques à $\mathbb{R}^n$. De tels objets sont familiers dans $\mathbb{R}^3$: une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe..., ressemblent localement à $\mathbb{R}^2$.

On voit toujours ces objets comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. Ce qu'on va définir ne peut a priori pas être vu comme sous-ensemble d'un $\mathbb{R}^n$. On donne une définition intrinsèque, qu'on appelle variétés, sans faire référence à un espace plus grand. On a dans la situation habitantsd'une sphère qui voudraient définir leurs habitat sans connaître ni se référer à $\mathbb{R}^3$. Un habitant d'une sphère, s.il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. On va recoller ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Globalement, on n'aura pas nécessairement $\mathbb{R}^n$, mais localement, on aura à notre disposition tout ce qu'on va faire sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On peut voir une variété différentiable M de dimension n comme une réunion (finie ou dénombrable) d'ouverts U de $\mathbb{R}^n$ dont chaque ouvert est muni d'un système de coordonnées locales $(x_i)_{i=1...n}$:

Il est bien connu que la notion du produit tordu joue un rôle important dans le domaine de la géométrie différentielle et celui de la physique, par exemple le meilleur modèle relativiste de l'espace-temps de Schawarchild, décrivant l'espace de sortie autour d'une étoile massive ou d'un trou noire est donné comme produit tordu de variétés adaptées.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux tenseurs de courbure, de courbure Riemannienne-Christoffel et de Ricci d'unevariété Riemannienne produit, on utilise pour cela la notion de relèvement pour établir la relation entre ces tenseurs et ceux des variétés M et N. L'objet principal consiste à montrer que chacun de ces tenseurs peut être écrit comme une somme des tenseurs de chaque variété de la base et de déterminer ensuite les propriétés géométriques du produit.

Ce mémoire est partagé en 3 chapitres.

Le chapitre 1 sera réservé aux notions générales et préliminaires de variétés différentielles.

Dans le chapitre 2, on donnera quelques notions et résultats de la géométrie Riemannienne. Il ne contient aucun résultat nouveau mais présentera un travail de synthèse au chapitre 3.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse aux tenseurs de courbure Riemannienne et de Ricci d'une variété Riemannienne produit et tordue. Nous montrons d'une façon générale que chacun de ces tenseurs est une somme des tenseurs de chaque variété de la base.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés topologiques

Définition 1.1 *Soit M un ensemble non vide. M est dite une variété topologique si*

1/ *M est un espace topologique séparé.*

2/ *Pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p et un homéomorphisme*

$$\phi : U \to W \subset \mathbb{R}^n$$

le couple (U, ϕ) est appelé une carte.

Pour $p \in U$, $\phi(p) = \phi(x^1(p), ..., x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ est appellée une fonction coordonnée. Un point p de M peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ). Un ensemble de cartes locales $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M i.e.

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

est appelé atlas de la variété.

On dit que $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouvert de M. Cet atlas n'est pas unique car la réunion de deux atlas est encore un atlas.

Définition 1.2 *Deux cartes* (U, ϕ) *et* (V, ψ)*.sur* M *sont dit compatibles si pour tous* $U \cap V = \Phi$*, l'application* $\phi \circ \psi^{-1} : (U \cap V) \in \mathbb{R}^n \to (U \cap V) \in \mathbb{R}^n$ *est un homorphisme. Sur* $U \cap V$*, les deux systemes de coordonnées*

$$\phi = (x^1, ..., x^n) \text{ et } \psi = (y^1, ..., y^n)$$

s'écrivent

$$\phi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, ..., y^n) \longmapsto (x^1 = f^1(y), ..., x^n = f^n(y))$$

et

$$\psi \circ \phi^{-1} : x = (x^1, ..., x^n) \longmapsto (y^1 = g^1(x), ..., y^n = g^n(x))$$

Alors, la compatibilité signifie que les fonctions f^i *et* g^i *sont des applications homéomorphismes.*

Définition 1.3 *Un atlas* $A = \{(U_a, \phi_a)\}$ *de dimension* n *de* M *est un ensemble de cartes de dimension* n *tel que*

1/ *Les ouverts* $\{(U_a)\}_{a \in I}$ *recouvrent* M*.*

2/ *Toutes les cartes de* A *sont compatibles deux à deux.*

On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est un atlas, c'est à dire que

$$A = \{(U_a, \phi_a)\} \text{ et } A' = \{(V_a, \psi_a)\}$$

sont équivalents si toutes les cartes (U_a, ϕ_a) *et* (V_β, ψ_β) *sont compatibles deux à deux*

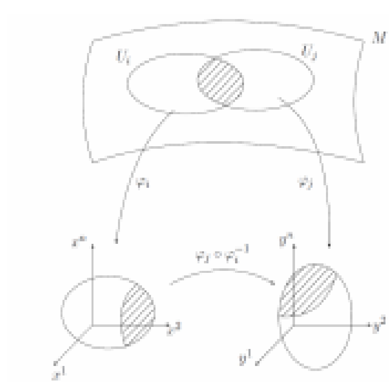

Fig1. Application de changement de cartes

1.1.2 Variétés différentiables

Il est maintenant naturel de vouloir définir la notion de dérivabilité. On n'a pas accès directement à cette notion sur l'espace topologique M. En effet, la dérivabilité sur $\mathbb{R}^n$ fait explicitement appel à la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, puisqu'on forme le rapport

$$\frac{[f(x+hy)-f(x)]}{h}$$

Sur un espace quelconque, cette relation n'a aucun sens a priori. La solution consiste à transférer la dérivabilité connue sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ vers les ouverts de M qui leur sont homéomorphes.

Pour cela, on remarque que si on donne une fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$, alors localement, on a une fonction continue

$$f \circ \phi^{-1} : W \to \mathbb{R}$$

On dit que f est dérivable en un point $p \in U$ si $f \circ \phi^{-1}$ l'est en $x = \phi(p)$.

Mais qu'advient-il de cette définition si $p \in U_i \cap U_j$ pour deux ouverts U_i et U_j de cartes locales de M ? Est-on sûr que si $f \circ \phi_j^{-1}$ est dérivable en $x = \phi_i(p)$, $f \circ \phi_j^{-1}$ l'est aussi en $y = \phi_j(p)$?

La définition n'aura un sens que si elle est indépendante du choix de l'ouvert contenant p.

On a ici un problème de définition lié au raccordement de deux cartes. En effet, afin que les définitions proposées soient cohérentes, il faut toujours vérifier qu'elles ne dépendent pas du choix de l'ouvert (et de la carte) contenant le point où on travaille.

Ici, cette condition de cohérence revient en fait à imposer que les applications $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient dérivables, ces applications allant bien sûr d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a donc la définition suivant :

Définition 1.4 *On dit que M est une variété différentiable de classe $C^r (r \geq 1)$ si*
1/ M est une variété topologique ,
2/ Il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de M tel que pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \Phi$,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe C^r. On dit alors que l'atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ est de classe C^r.

Proposition 1.5 *1- Une variété topologique peut admettre plusieurs atlas de classe C^r.*

2- Deux atlas ne sont pas toujours compatibles (leur réunion n'est pas nécessairement un atlas de classe C^r). Cela signifie qu'une variété topologique peut admettre plusieurs structures différentiables.

3- Un atlas de classe C^r est un atlas de classe $C^{r'}$ pour tout $r' \leq r$.

Définition 1.6 *Une carte locale (U, ϕ) d'une variété différentiable de classe C^r sera dite de classe $C^{r'}$ pour $r' \leq r$, si la réunion de cette carte avec un atlas qui définit la structure différentiable de M est un atlas de classe C^r*

Cette définition impose donc que les applications $\phi_i \circ \phi^{-1}$ soient de classe $C^{r'}$. Il sera donc possible de réunir deux atlas de classe C^r en un atlas de classe C^r, si toutes les cartes locales de l'un sont de classe C^r pour la structure différentiable définie par l'autre.

On dit qu'une fonction

$$f : M \to \mathbb{R}$$

est différentiable de classe $C^{r'}$, avec $r' \leq r$, si pour toute carte locale (U, ϕ) de classe $C^{r'}$

$$\phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

est de classe $C^{r'}$

Dans toute la suite, les variétés différentiables seront prises de classe C^∞, et toutes les cartes locales seront prises de classe C^∞ :

Coordonnées locales

Soit (U, ϕ) une carte locale de la variété différentiable M. Pour $p \in U$,$\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$\phi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$$

On dit que $(x^1(p), ..., x^n(p))$ sont les coordonnées de p dans la carte (U, ϕ), alors les n applications $(x^1, ..., x^n)$ sont les n applications coordonnées associées à cette carte, on note par (x^i).

Soit

$$X : \phi(U) \to W \subset \mathbb{R}^n$$

un difféomorphisme (de classe C^∞) entre l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ et un autre ouvert W de $\mathbb{R}^n$. Alors $(U, X \circ \phi)$ est encore une carte locale de la variété différentiable M, dont les coordonnées associées ne sont plus celle associées à la carte locale (U, ϕ).

Pour un ouvert U de M donné, il existe une infinité de systèmes de coordonnées sur U. X permet d'effectuer un changement de coordonnées sur l'ouvert U. Si (x^i) sont les coordonnées associées à (U, ϕ) et (y^j) sont celles associées à $(U, X \circ \phi)$, alors on note symboliquement le changement de coordonnées $(y^j(x^i))$ où l'on regarde les y^j comme n fonctions (de classe C^∞) définies sur l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.

On dit que le système de coordonnées associé à une carte locale (U, ϕ) est centré en $p \in M$ si $p \in U$ et $\phi(p) = (0, ..., 0)$. Les coordonnées de p sont donc nulles. Un tel système de coordonnée existe toujours pour n'importe quel p, puisqu'il suffit de composer l'homéomorphisme d'une carte locale par une translation dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné une carte locale (U, ϕ), une fonction

$$f : M \to \mathbb{R}$$

prendra localement la forme $f(x^1, ..., x^n)$ au dessus de U. En fait, il s'agit ici de la fonction $f \circ \phi^{-1}$.

Définition 1.7 *Une variété différentiable est le couple (M, A) où M est la variété topologique de dimension n, A est l'atlas maximal et les fonctions coordonnées sont de classe C^∞, on l'appelle aussi la structure différentiable de M.*

Définition 1.8 *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension n :*

Définition 1.9 *Soient (M^m, A) et (N^n, B) deux variétés différentiables. On dit que l'application*

$$f : M \to N$$

est de classe C^∞ si chaque représentation locale de f (respectivement A et B) est de classe

C^∞ c'est à dire si la composition

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1}$$

est une application différentiable

$$\phi(U \cap f^{-1}V) \to \psi V$$

pour toute carte $(U, \phi) \in A$ et $(V, \psi) \in B$.

Définition 1.10 *On dit que*

$$f : M \to N$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ si f et f^{-1} sont de classe C^∞ :

Exemple 1.11 $\mathbb{R}^n$ *est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte $(\mathbb{R}^n, id)$.*

Exemple 1.12 *Tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel* $\mathbf{E}$ *de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\phi : E \to \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, ϕ) . De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, ϕ).*

Exemple 1.13 *L'espace euclidien E^n est une variété de dimension n. Il est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ via le choix d'un systéme de coordonnée x. L'atlas à une carte (E^n, x) définit donc un structure différentiable.*

Exemple 1.14 *Le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite est une variété de dimension* 1 *: cepandant n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (puisque S^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour C^réer un atlas . On définit deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2)*

$$U_1 = S^1 \diagdown \{(1, 0)\}, U_2 = S^1 \diagdown \{(-1, 0)\}$$

et les fonction de coordonnées sont

$$\begin{aligned} \phi_1 &: U_1 \to]0, 2\pi[, (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta \\ \phi_2 &: U_2 \to]-\pi, \pi[: (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta \end{aligned}$$

Les domaines de ces cartes recouvrent le cercle : $U_1 \cap U_2 = S^1$.

De plus $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ *est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes son compatibles. Ainsi* $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ *est un atlas et définit une structure différentiable sur* S^1.

Exemple 1.15 *La sphère unité* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

est une variété de dimension 2.

En effet ; en peut construire un atlas en utilisant la projection stériographique, les points $N = (1, 0)$ *et* $S = (-1, 0)$ *désigant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts* $U_N = S^2 \diagdown \{N\}$ *et* $U_S = S^2 \diagdown \{S\}$ *et les applications*

$$\begin{array}{rccc} \phi_N : & U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \frac{1}{1-x_1}(x_2, x_3) \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} \phi_S : & U_S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \frac{1}{1+x_1}(x_2, x_3) \end{array}$$

déterminons les applications de changement de cartes $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ *et* $\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \diagdown \{0\}_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2 \diagdown \{0\}_{\mathbb{R}^2}$ *qui sont des difféomorphismes données par* $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$.

Donc $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ *définit une structure différentiable sur* S^2*. La figure suivante donne la projection stériographique de* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

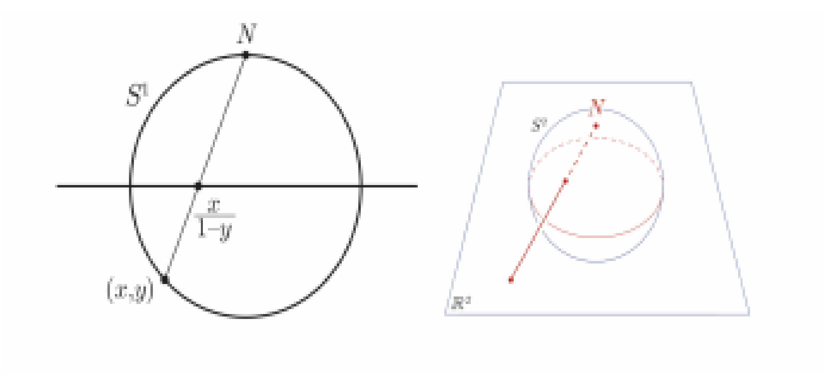

Fig 2. projection stéréographique de $\mathbb{S}^1$ *et* $\mathbb{S}^2$

Exemple 1.16 *Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n et d'atlas* $\{(U_a, \phi_a)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ *respectivement. Alors l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $m+n$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme* $\{U_a \times V_\beta, \phi_a \times \psi_\beta\}$, *où* $(\phi_a \times \psi_\beta)(p,q) = (\phi_a(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

1.2 Espaces Tangent et Cotangent

Soit M une variété différentiable et $p \in M$, pour définir le concept important de tangence au point p à la variété M, on utilise deux points de vue :

- Utiliser les courbes différentiables tracées sur M au voisinage de p et passant par p ,

- Dériver les germes (en p) de fonctions différentiables définies au voisinage de M et à valeur dans la variété différentielle $\mathbb{R}$ (munie de sa structure d'atlas à une carte $(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}}, 1)$.

Conformément à ces deux points de vue, on définit les courbes différentiables tracées sur $\mathbb{R}$ et passant par p et les germes de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}$ en p :

1.2.1 Espace Tangent

Soit M une variété différentiable de classe C^∞. On va définir la notion d'espace tangent.

Cette notion est assez immédiate dans le cas d'une sphère (par exemple) : c'est le plan tangent, dans $\mathbb{R}^3$, à la sphère au point considéré , c'est donc un sous espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Ici cependant, on va définir ce que sont les vecteurs tangents et le plan tangent sans avoir à faire référence à un quelconque espace plus grand que M.

Définition 1.17 *On considére l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur M,*

$$F(M) = \{f : M \to \mathbb{R} / f \text{ de classe } C^\infty\}$$

Pour $p \in M$, on définit sur $F(M)$ une relation d'équivalence :

$$f \sim g, \Longleftrightarrow \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } p \in U, \text{tel que } f_{|U} = g_{|U}$$

On note $C_p^\infty(M) = F(M) / \sim$ l'ensemble des classes d'équivalences dans $F(M)$ pour cette relation.

Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Définition 1.18 ***Dérivation.***
Une dérivation en p est une application linéaire

$$Dp : C_p^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$$

qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_p est une dérivation si, pour touts réels a et β et toutes fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ dans $C_p^{\infty}(M)$,
i) *$D_p(a\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha D_p(\tilde{f}) + \beta D_p(\tilde{g})$ (linéarité),*
ii) *$D_p(\tilde{f}.\tilde{g}) = g(x)D_p(\tilde{f}) + f(x)D_p(\tilde{g})$ (Leibniz)*
où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont les classes d'équivalence de f et g.

Définition 1.19 *L'espace tangent en p à M, T_pM, est l'espace vectoriel des dérivation sur $C_p^{\infty}(M)$:*

Remarque 1.20 *La relation d'équivalence définie sur $F(M)$ sert à ne faire dépendre $D_p(\tilde{f})$ que des valeurs de f autour de p. En effet, la seule information que $\tilde{f}$ puisse conserver de f est son comportement dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de p. Donc aucun autre point que p ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation D_p sur $C_p^{\infty}(M)$. En suite, la relation de Leibniz assure que cette dépandance ne peut se faire qu'au maximu M par la premiére dérivée de f en p, car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.*

Une base de l'espace tangent

Puisqu'on a un espace vectoriel il est utile d'en trouver une base.

Soient $(x^1, ..., x^n)$ des coordonnées au voisinage de p. Une base de T_pM est donnée par les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, pour $1 \le i \le n$, dont les courbes associées sont les γ_i définies par

$$\begin{cases} x^j(\gamma_i(t)) = 0, \text{ pour } j \neq i \\ x^i(\gamma_i(t)) = t \end{cases}$$

En particulier, la dimension de T_pM en tant qu'espace vectoriel est la dimension de M en tant que variété. Donc tout vecteur $X(p) \in T_pM$ s'écrit $X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ où les $X_i(p)$ sont des réels.

Cette écriture a l'avantage de suggérer que $X(p)$ est un vecteur puisqu'il a n composantes $X^1(p), ..., X^n(p)$, et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe γ définit ce vecteur, avec bien sûr $\gamma(0) = p$ alors on a

$$X^i(p) = (\frac{d\gamma^i(t)}{dt})_{|t=0}$$

On utilise cette relation, qu'on écrit $\dot{\gamma}(0) = X(p)$.

On considére l'effet d'un changement de coordonnées sur les n nombres $X^i(p)$: si on passe des coordonnées (x^i) aux coordonnées $(y^j(x^i))$, alors si

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

On a

Remarque 1.21

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)X^i(p)$$

Proposition 1.22 *L'espace tangent T_pM est un espace vectoriel de dimension n et l'ensemble $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\,|_p \,/ i = 1, ..., n\right\}$ forme une base de T_pM en coordonnées locales.*

Exemple 1.23 *Soit $\gamma : I \to S^n$ une courbe sur la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. La courbe satisfait à $\langle\gamma(t), \gamma(t)\rangle = 1$, alors*

$$\langle\dot{\gamma}(t), \gamma(t)\rangle + \langle\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = 0.$$

Donc, $\langle p, X\rangle = 0$, (i.e) tout vecteur tangent $X \in T_pS^n$ est orthogonal à p. D'autre part , si $X \neq 0$ tel que $\langle p, X\rangle = 0$, alors $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ avec

$$\gamma : t \to \cos(t\,|X|).p + \sin(t\,|X|).\frac{X}{|X|}$$

est une courbe sur S^n avec $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. Par conséquent,

$$TpS^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n+1} \big/ \langle p, X\rangle = 0\right\}$$

1.2.2 Espace Cotangent

Dualité

L'espace T_pM est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, qu'on note T_p^*M.C'est l'espace cotangent à M en p.

On rappel que le dual d'un espace vectoriel est l'ensemble des applications linéaires de cet espace vectoriel vers $\mathbb{R}$. Cet ensemble forme lui-même un espace vectoriel, de même dimension. On note $\langle a_{|p}, X_{|p} \rangle \in \mathbb{R}$ le couplage entre $a_{|p} \in T_p^*M$ et $X_{|p} \in T_pM$, c'est-à-dire $a_{|p}(X_{|p})$.

Différentielle d'une fonction

Soit f une fonction sur M. Si on considère $X_{|p}$ comme une dérivation, $X_{|p}.f \in \mathbb{R}$ dépend linéairement de $X_{|p}$. Ainsi, f définit une application linéaire $T_pM \to \mathbb{R}$ donc un élément de T_p^*M. On note $df(p)$ ou $df_{|p}$ cet élément, qui ne dépend bien sûr que de f et p. On a ainsi

$$\langle df_{|p}, X_{|p} \rangle = X_{|p} \cdot f$$

On dit $df_{|p}$ est la différentielle de f en p . Elle ne peut dépendre que des dérivées premières de f en p.

Une base de l'espace cotangent

Localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ), $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}$ est une base de T_pM pour tout $p \in U$. On note $\left\{dx^i_{|p}\right\}$ sa base duale. Cette écriture se justifie en effet par la définition de la différentielle, puisque les x^i sont n fonctions définies localement sur M et puisqu'on a par définition même de la différentielle

$$\left\langle dx^j_{|p}, \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta^j_i$$

Alors dans cette base,

$$df_{|p} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i_{|p}$$

1.3 Applications tangente et cotangente

Soit ϕ une application de classe C^1 définie au voisinage d'un point p d'une variété M à valeurs dans une variété N.

Définition 1.24 *On définit une unique application linéaire, appelée application tangente à ϕ et notée $T_p\phi$ définie de T_pM à valeurs dans $T_{\phi(p)}N$, vérifiant*

$$d_{\phi(p)}f \circ T_p\phi = d_p(f \circ \phi)$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$:

De même, on définit une unique application linéaire, appelée application cotangente à ϕ et notée$T_p^*\phi$ définie de $T^*_{\phi(p)}N$ à valeurs dans T_p^*M, vérifiant

$$T_p^*\phi(d_{\phi(p)}\phi) = dp(f \circ \phi)$$

L'application cotangent est la transposée de la tangente.

La proposition suivante résume aussi les propriétés importantes de l'application tangente.

Proposition 1.25 *Soient ϕ et ψ deux applications différentiables.*

(i) *On a $T_p(\phi \circ \psi) = T_{\psi(p)}\phi T_p\psi$:*

(ii) *Si c est une courbe, alors $T_{c(t_0)}\phi(c(t0)) = (\phi \circ c)(t_0)$:*

(iii) *Soit $X = (x_1, ..., x_n)$ des coordonnées locales au voisinage de p. Soit $Y = (y_1, ..., y_p)$ sont des coordonnées locales au voisinage de $\phi(p)$. Posons $\phi_j = y_j(\phi)$. Alors les coefficients de la matrice de $T_p\phi$ dans les bases associées aux coordonnées sont $\frac{\partial(\phi_j)}{\partial x_i}$:*

1.4 Fibré tangent

Définition 1.26 *Soit M une variété différentiable. On définit le fibré tangent TM de M comme union disjointe de tous les espaces tangents de M .i.e. $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$. Alors TM est une variété différentiable.*

Un élément de TM est un couple $(p, X(p))$ avec $p \in M$ et $X(p) \in T_pM$. On Cherche des coordonnées sur TM. Soit (U, ϕ) une carte locale sur M, de coordonnées(x^i). Pour $p \in U$, et $X(p) \in$

T_pM, on prend comme coordonnées du couple $(p, X(p))$ les réels $(x^1(p), ..., x^n(p), X^1(p, X), ..., X^n(p, X))$ où on décompose $X(p)$ selon $X(p) = X^i(p, X)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in TpM$. On a donc $2n$ coordonnées pour caractériser un élément de TM. Cette variété topologique est donc de dimension $2n$.

Il existe une application surjective particulière

$$\pi : TM \to M$$

définie par $\pi(p, X) = p$. C'est la projection de TM sur M. On remarque que les ouverts des cartes de TM, définies ci-dessus, sont les ouverts $\pi^{-1}(U) \subset TM$. D'autre part, en identifiant $p \in M$ au point $(p, 0)$ de TM, on peut considérer M comme une sous-variété de TM.

1.5 Champs de Vecteurs et Formes Différentielles

En chaque point p de M, on définit l'espace tangent. On a alors la possibilité de considérer une application qui associe à tout point p de M un vecteur dans T_pM. C'est la notion de champ de vecteurs. Formalisons ce concept.

1.5.1 Champ de vecteurs

Définition 1.27 *Soitent M une variété différentiable et TM le fibré tangent à M. Une section de TM est une application*

$$X : M \to TM$$

telle que $\pi \circ X$ soit l'identité sur M. C'est à dire que pour tout $p \in M$, on associe un $X(p) \in T_pM$. Une telle section X de classe C^∞, sera appelée champ de vecteurs sur M. La notion d'application de classe C^∞ entre variétés est définie plus bas.
Un champ de vecteurs est une application qui à tout point de la variété M associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon C^∞. Cette dernière hypothèse équivaut à ce que, si

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

les fonctions $X^i : M \to \mathbb{R}$ soient C^∞ sur l'ouvert de la carte locale.
On note $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M et par la suite, on note $X_{|p}$ à la place de $X(p)$.

1.5.2 Dérivations

On appelle dérivation sur l'algèbre $F(M)$ toute application linéaire $D : F(M) \to F(M)$, qui vérifie la relation de Leibniz :

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

Alors tout champ de vecteur X sur M définit une dérivation sur $F(M)$ par la relation suivante : $(X \cdot f)(p) = X(p) \cdot f$ où dans le second membre, $X(p)$ est pris comme dérivation au sens de la définition de T_pM. Localement, cette formule s'écrit

$$(X \cdot f)(p) = X^i(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

C'est la dérivée de f dans la direction de X.

Réciproquement, toute dérivation de l'algèbre $F(M)$ définit un champ de vecteurs. Donc on identifie $\Gamma(M)$ aux dérivations de $F(M)$.

1.5.3 Crochet de Lie

On munit $\Gamma(M)$ d'une structure supplémentaire. Soient $X, Y \in \Gamma(M)$ et $f \in F(M)$. Puisque $X \cdot f \in F(M)$, on lui appliquer Y. On obtient ainsi une application linéaire

$$YX : F(M) \to F(M)$$

Mais cette application n'est pas une dérivation. Il est possible de construire une dérivation à partir de X et Y , en posant

$$[X, Y] = XY - YX$$

Un calcul simple montre que $[X, Y]$ est une dérivation (i.e. vérifie la relation de Leibniz), donc appartient à $\Gamma(M)$. On appelle crochet de Lie de X et Y le champ de vecteurs $[X, Y]$.

Le crochet de Lie est antisymétrique en X et Y et vérifie l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

1.5.4 Formes différentielles

Définition 1.28 *Une r-forme différentielle (ou r-forme) sur M est un champ tensoriel de type $(0, r)$ complètement antisymétrique. On note $\Omega^r(M)$ l'espace vectoriel de ces r-formes. Pour $r = 0$, on a $\Omega^0(M) = \mathrm{F}(M)$. Pour $r = 1$, on retrouve les 1-formes différentielles. Pour $r > n$ (n dimension de M), on a $\Omega^r(M) = \{0\}$. Une r-forme différentielle est donc une application $\mathrm{F}(M)$-multilinéaire antisymétrique de $\Gamma(M) \times ... \times \Gamma(M)$ dans $\mathrm{F}(M)$.*

Expressions locales

Si $\{dx^i\}$ est une base locale des $1-$formes différentielles, au dessus de l'ouvert U d'une carte locale de M, de coordonnées (x^i), on pose

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma \in G_r} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes ... \otimes dx^{i_{\sigma(r)}}$$

pour $i_1 < ... < i_r$. Alors les $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$ engendrent localement $\Omega^r(M)$ sur les fonctions. C'est à dire que toute $r-$forme ω s'écrit, au dessus de $\cup$

$$\omega = \omega_{i_1...i_r} dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_r} = \omega_{i_1...i_r} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$$

où la seconde sommation porte sur $i_1 < ... < i_r$ et où les $\omega_{i_1...i_r}$ sont des fonctions $U \to \mathbb{R}$. Parfois, cette seconde sommation portera sur tous les indices $i_1, ..., i_r$, ce qui suppose que l'on étende la définition des $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$ à tous les $(i_1 < ... < i_r)$ et que les

$$\omega_{i_1...i_r} : U \to R$$

deviennent des fonctions complètement antisymétriques sur leurs indices, il faudra alors aussi placer un facteur $\frac{1}{r!}$ devant la somme.

Produit extérieur

Définition 1.29 *Soient $\omega \in \Omega^r(M))$ et $\eta \in \Omega^s$ (M), on définit le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$ par la formule*

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, ..., X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in G_{r+s}} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)})(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)})$$

Ce produit donne à l'espace vectoriel

$$\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus ... \oplus \Omega^n(M)$$

une structure d'algèbre. Il a la propriété de commutativité $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs}\eta \wedge \omega$.

Fibré des formes différentielles

On a regardé les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles comme des sections de fibrés. On va faire le même pour les $r-$formes différentielles sur M. Pour tout $p \in M$, posons $\wedge^r T_p^* M$ l'espace vectoriel des r-formes multilinéaires antisymétriques sur $T_p M$.

On définit alors la variété

$$\wedge^r T^* M = \bigcup_{p \in M} \wedge^r T_p^* M$$

appelée fibré des r-formes différentielles. Alors toute r-forme différentielle est une section C^∞ de ce fibré.

1.6 Fibré cotangent

1.6.1 Fibré cotangent

Définition 1.30 *Soient M une variété différentiable et $f \in C_p^\infty(M)$ une fonction différentiable en $p \in M$, alors*

$$\begin{array}{rcl} df_p & : & T_p M \to \mathbb{R} \\ v & \mapsto & df_p(v) = v(f) \end{array}$$

et $df_p \in T_p^* M$ (dual de $T_p M$).
On appelle $T_p^* M$ l'espace cotangent de M en p. Si (U, ϕ),$x = (x^1, ..., x^n)$ est une carte en p et $((\partial_1)_p, ..., (\partial_n)_p)$ est la base de $T_p M$, la différentielle $dx_p^i, i = 1, ..., n$, des fonctions x^i en p forme une base duale de $T_p^* M$, i.e. $df_p = (\partial_i)_p(f) dx_p^i$.

Définition 1.31 *Soit M une variété différentiable. On définit le fibré cotangent de M par*

$T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ tel que

$$\begin{array}{rccc} \pi: & T^*M & \longrightarrow & M \\ & \omega \in T_p^*M & \longmapsto & \pi(\omega,p) = p \in M \end{array}$$

est la projection canonique, et une section (champs covecteurs sur M ou 1-forme différentielle), une application $\omega : M \to T^*M$ avec $\pi \circ \omega = id$.
On note par $\Gamma^1(M)$ (ou $\Gamma_0^1(M), \Gamma^*(M), \Gamma^{0,1}(M)$) l'ensemble des champs covecteurs sur M.Si (U,ϕ) est une carte et ω un champ covecteur sur U, alors il existe des fonctions

$$\omega_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$$

tel que $\omega = \omega_i dx^i$.

1.6.2 1-formes différentielles

Soient M une variété différentiable et T^*M le fibré cotangent de M, une section de classe C^∞ de ce fibré $a : M \to T^*M$ est appelée une 1-forme différentielle sur M. C'est donc une application qui à tout $p \in M$ associe un élément $a_{|p}$ de T_p^*M.

On note $\Omega^1(M)$ l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur M. Ainsi, si $f \in F(M)$, on a $d_f \in \Omega^1(M)$ telle que

$$d_f : p \to df_{|p} \in T_p^*M$$

Localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale (U,ϕ) de M, on écrit $a = a_i dx^i$ avec $a_i : U \to \mathbb{R}$ fonction C^∞.

Le couplage avec un champ de vecteurs X s'écrit

$$\langle a, X \rangle = a_i X^i$$

Par recollement sur tous les ouverts des cartes locales, ce couplage donne une fonction C^∞ sur M

$$\langle a, X \rangle (p) = \left\langle a_{|p}, X_{|p} \right\rangle \in \mathbb{R}$$

1.7 Connexion Linéaire

On introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété M . Cette structure définit une nouvelle dérivation, la dérivation covariante. Cette dérivation agira sur les champs de vecteurs en général.

Définition 1.32 *Une connexion linéaire sur M est une application*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

telle que

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiants les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 1/\nabla_X(Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ 2/\nabla_{(X+Y)} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ 3/\nabla_{fX} Y &= f\nabla_X Y \\ 4/\nabla_X fY &= f\nabla_X Y + X(f)Y \end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M), f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.33 *Soitent ∇ une connexion sur M et (U, ϕ) une carte sur M de coordonnées locales $(x_1, x_2, ..., x_n)$. On définit les fonctions différentiables $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

appelées les symboles de Christoffel.
En générale,

$$\nabla_X Y = X^i (\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est la dérivée covariante associée à la connection linéaire ∇.

Exemple 1.34 ***1/*** *Une connexion affine est une sorte de dérivée directionnelle de champs de vecteurs sur une variété. Imaginez un champ de vecteurs V sur $\mathbb{R}^n$ (qui est une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Prenez un point et choisissez un vecteur tangent $X \in T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. On note par $\nabla_X V$ la dérivée covariante de V en p dans la direction X. On écrit $X = a^i \frac{d}{dx^i}$.*
Alors

$$\nabla_X V = a^i \frac{dV}{dx^i} \in T_p\mathbb{R}^n$$

2/ *On peut voir la connexion canonique sur $\mathbb{R}^n$ comme*

$$\nabla_X Y = X(Y^j)\frac{d}{dx^i} = X^i \frac{dY^j}{dx^i}\frac{d}{dx^i}$$

Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de la connexion par rapport à la base $\frac{d}{dx^i}$ sont identiquement nuls.

Définition 1.35 *Soit ∇ une connexion sur une variété différentiable M. Alors,*
1/ *Le tenseur de torsion de ∇ est une application*

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

tel que

$$T : (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

2/ *Le tenseur de courbure de ∇ est une application*

$$R : \Gamma(M) \times \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

tel que

$$R : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(M)$

Proposition 1.36

1/ *Les tenseurs T et R sont linéaires. pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ on a*

2/ $T(X,Y) = -T(Y,X)$

3/ $R(X,Y)Z = R(Y,X)Z$

4/ *Si $T = 0$, alors $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$*

qu'est appelée l'identité de Bianchi.

5/ *Si on pose $\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i$, $i = 1, ..., n$ où $x^1, ..., x^n$ sont les coordonnées locales de la carte (U, ϕ) sur M, alors*

$$R(X^i, X^j)X^k = \sum_{i=1}^{n} R^l_{ijk} X^l$$

où

$$R^l_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}) + X^i(\Gamma^l_{jk}) - X^j(\Gamma^l_{ik})$$

Chapitre 2

Variétés Riemanniennes

2.1 Tenseurs

2.1.1 Rappel sur les tenseurs

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. On note par E^* et F^* respectivement leurs espaces vectoriels duals. Pour $f \in E^*$, $g \in F^{\ *}$, $x \in E$ et $y \in F$, on pose

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

On définit $f \otimes g$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$. C'est le produit tensoriel des deux formes f et g.

Si $\{e^1, ..., e^p\}$ est une base de E^* et $\{f^1, ..., f^q\}$ une base de F^*, alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e^i \otimes f^j$.
Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$ et appelé produit tensoriel de E^* et F^* . Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij} e^i \otimes f^j$.

Tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^* , i.e. comme élément de E^{**} (en dimension finie, on a $E^{**} \simeq E$).

Pour $x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y) \end{cases}$$

En particulier, si $F = E^*$, on obtient $E \otimes ... \otimes E^* \otimes E^* \otimes ... \otimes E$ où E apparaît s fois et $E^* r$ fois. Les éléments de cet ensemble sont des formes $(r+s)$-linéaires sur $E^* \times ... \times E^* \times E \times ... \times E$ et d'élément de la forme

$$T = T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

c'est un tenseur de type (s, r). Les coefficients $T^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_s}$ sont les coordonnées du tenseur T dans la base (e_i).

Les indices bas de T sont covariants, et les indices hauts contravariants.

Un élément de $\mathbb{R}$ est par convention un tenseur de type $(0, 0)$. Un tenseur de type $(1, 0)$ est bien sûr un vecteur de E, et un tenseur de type $(0, 1)$ est une forme de E^* .

Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés. Le produit tensoriel du tenseur

$$S = S^{k_1 \dots k_q}_{l_1 \dots l_p} e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes ... \otimes e^{l_p}$$

avec le tenseur

$$T = T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots l_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S^{k_1 \dots k_q}_{l_1 \dots l_p} T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots l_s} e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes ... \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

On définit l'espace $\wedge^r E^*$ des r-formes multilinéaires antisymétriques sur E par

$$\otimes^r E^* = \underbrace{E^* \otimes ... \otimes E^*}_{r \text{ fois}} |$$

et posons $\wedge^r E^*$ le sous espace vectoriel de $\otimes^r E^*$ des éléments antisymétriques.

On définit le produit extérieur

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & \wedge^r E^* \times \wedge^s E^* & \longrightarrow & \wedge^{r+s} E^* \\ & (w, \eta) & \longmapsto & w \wedge \eta \end{array}$$

par

$$(w \wedge \eta)(x_1, ..., x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in G_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} w(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(r)}).\eta(x_{\sigma(r+1)}, ..., x_{\sigma(r+s)})$$

pour tous $x_1, ..., x_{r+s} \in E$.

Ce produit a la propriété de commutativité $w \wedge \eta = (1)^{rs} \eta \wedge w$.

On définit l'espace vectoriel

$$\wedge E^* = \wedge^0 E^* \wedge^1 E^* \otimes ... \otimes \wedge^p E^*$$

où on pose $.\wedge^0 E^* = \mathbb{R}, \wedge^1 E^* = E^*$.

On remarque que $\wedge^n E^* = \{0\}$ pour $n > p$ =dimension de E. Alors, le produit extérieur donne à $\wedge E^*$ une structure d'algèbre. C'est l'algèbre extérieure sur E^*.

2.1.2 Tenseurs sur les variétés

Soit M une variété différentiable de dimenssion n.

Définition 2.1 *Pour tout $p \in M$, on définit l'espace vectoriel*

$$T_p^{(s,r)} M = \underbrace{T_p M \otimes ... \otimes T_p M}_{s \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes ... \otimes T_p^* M}_{r \text{ fois}}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)} M$ est un tenseur de type (s, r) au dessus de p. Dans une base associée à des coordonnées locales $(x^i)_{i=1,...,n}$ au voisinage de p, il s'écrit

$$T_{|p} = T^{i_1 ... i_s}_{j_1 ... j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) dx^{j1}_{|p} \otimes ... \otimes dx^{jr}_{|p}$$

On considère la variété différentiable

$$T^{(s,r)}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{(s,r)}M$$

qui est un fibré au dessus de M, appellé le fibré des tenseurs de type (s,r). Les sections C^∞ de ce fibré seront appelées champs de tenseurs de type (s,r).
Un champ de tenseurs T de type (s,r) s'écrit localement par

$$T = T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_r}$$

par rapport à la carte locale de M, de coordonnées $(x^i)_{i=1,...,n}$.

Globalement, il est facile de vérifier qu'un tenseur de type (s,r) est une application $F(M)$-multilinéaire sur

$$\Omega^1(M) \times ... \times \Omega^1(M) \times \Gamma(M) \times ... \times \Gamma(M)$$

à valeurs dans $F(M)$.

Un champ de tenseurs de type $(0,0)$ n'est autre qu'une fonction sur M, un tenseur de type $(1,0)$ est un champ de vecteurs, et un tenseur de type $(0,1)$ est une 1-forme différentielle.

Pour le changement de coordonnées $x^i \mapsto y^j(x^i)$, les composantes du tenseur se changent selon la relation

$$T'^{i_1...i_s}_{j_1...j_r} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} ... \frac{\partial y^{i_s}}{\partial x^{k_s}} T^{k_1...k_s}_{l_1...l_r} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}} 1 ... \frac{\partial x^{l_r}}{\partial y^{j_r}}$$

2.1.3 Métriques Riemanninnes

Définition 2.2 *On appelle métrique Riemannienne sur M la donnée pour tout $p \in M$ d'un produit scalaire g_p (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur T_pM de p, i.e. pour toute carte (U,ϕ) sur M, la fonction*

$$p \mapsto g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)) = g_{ij}(p)$$

de U dans $\mathbb{R}$.

Les coefficients de la matrice $g_{ij}(p)$ sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (U, ϕ).

Définition 2.3 *On appelle une variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 2.4 *Sur $M = \mathbb{R}$, on pose*

$$g(p) = h(p)dx^2$$

où

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$$

dx^2 est la forme quadratique sur $\mathbb{R} \simeq T_pR$ définie par $dx^2(u,u) = \|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors g est une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.5 *Si $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sont deux champs de vecteurs sur M, alors, on a*

$$g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(p)X_i(p)Y_j(p)$$

Exemple 2.6 *Si (U, x) une carte sur M, alors $\partial_1, ..., \partial_n$ forme une base pour T_pM sa base duale est $dx_i = 1, ..., n$, alors la métrique g est donnée par*

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j = g_{ij}dx^i dx^j$$

Exemple 2.7 *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2)deux variétés Riemanniennes. Sur la variété produit M_1M_2 on définit une métrique produit $g_1 + g_2$,en posant pour tout $X, Y \in T_{(n_1,n_2)}M_1 \times M_2$*

$$(g_1 + g_2)_{(n_1,n_2)}(X, Y) = (g_1)_{n_1}(X_1, Y_1) + (g_2)n_2(X_2, Y_2)$$

où $X = X_1 + X_2$ et $Y = Y_1 + Y_2$ sont les décompositions de X et Y via l'identification

$$T_{(n_1,n_2)}M_1 \times M_2 = T_{n_1}M_1 \oplus T_{n_2}M_2$$

(i.e. X_i et Y_i sont des éléments de $T_{n_i}M_i$).

2.2 Isometrie

Définition 2.8 *Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme local sur M et h une métrique sur N. On définit une métrique $g = f^*h$ sur M appelée métrique tirée en arrière de h par f, on pose pour tout $(u, v) \in T_pM$*

$$(f^*h)_p(u, v) = h_{f(p)}(d_pf(u), d_pf(v))$$

Exemple 2.9 *La métrique du tore $\mathbf{T}^n$ de dimension n, s'obtient de l'application*

$$F : (x_j) \in \mathbb{R}^n \mapsto (e^{ix_j}) \in \mathbb{C}^n$$

où $g_{\mathbb{R}^n} = \langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^n}$ est la métrique sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.10 *On dit que*

$$f : (M, g) \to (N, h)$$

est une isométrie (resp. une isométrie locale) ssi f est un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local) et $g = f^*h$.

Exemple 2.11 *$(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ et $(\mathbf{T}^n, g_{\mathbf{T}^n})$ sont localement isométriques, mais pas isométriques.*

2.3 Connexion de Levi-Civita

Une connexion linéaire ∇ sera dite compatible avec la métrique g si

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour trois champs de vecteurs quelconques X, Y, Z sur M. ∇ est dite une connexion métrique. Il existe une unique connexion sans torsion compatible avec la métrique g, c'est la connexion de Levi-Civita, qui a pour expression

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})$$

par rapport à $(U, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ une carte sur M, d'où le théorème,

Théorème 2.12 *Sur toute variété Riemannienne* (M^n, g), *il existe une unique connexion linéaire* ∇ *telle que pour tout* $(X, Y, Z) \in \Gamma(M)^3$ *on a*

1/ $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$, ∇ *a torsion libre* $(T \equiv 0)$ *:*

2/. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, ∇ *compatible avec* g

∇ *est appellée connexion de Levi-Civita de la métrique* g.

Preuve. *Unicité.* On suppose qu'il existe une connexion vérifiant 1 et 2, on a

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) \\ &= g(Y, [X,Z]) + g(X, [Y,Z]) + g(Z, [X,Y]) + 2g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

parceque $\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z]$; $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$; $\nabla_X Y + \nabla_Y X = [X, Y] + 2\nabla_Y X$

On a donc

$$g(Z, \nabla_X Y) = \frac{1}{2}[Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[X,Y])] \tag{2.1}$$

ce qui prouve que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.

Existance : L'équation (2.1) implique qu'il y'a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coéfficients de matrice de g

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$$

de cette expression suit la définition des Γ_{ij}^k en termes des g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l})g^{lk}$$

■

2.4 Tenseur De Courbure Riemannien

Définition 2.13 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne muni d'une connexion de Levi-civita* ∇ *. Alors l'application* $R : C_3^\infty(TM) \to C_1^\infty(TM)$ *telle que*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

est un tenseur de M *de type* $(3, 1)$.

Proposition 2.14 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. Pour tout* $X, Y, Z, W \in C^\infty(TM)$ *de* M*, on a*

1/ $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

2/ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$,

3/ $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$,

4/ $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

5/ $R(X,Y)Z = R(X, Y+Z)(Y+Z) - R(X, Y-Z)(Y-Z) + R(X+Z, Y)(X+Z) - R(X-Z, Y)(X-Z)$:

Preuve. Soient X, Y, Z, W quatre champs de vecteurs sur M

$$\begin{aligned} 1/\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z) \\ &= -R(Y,X)Z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2/\ g(R(X,Y)Z,W) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, W) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, W) \\
&= XYg(Z,W) - YXg(Z,W) - [X,Y]g(Z,W) \\
&= -XYg(W,Z) + YXg(W,Z) + [X,Y]g(W,Z) \\
&= -(XYg(W,Z) - YXg(W,Z) - [X,Y]g(W,Z)) \\
&= -(g(\nabla_X\nabla_Y W, Z) - g(\nabla_Y\nabla_X W, Z) - g(\nabla_{[X,Y]}W, Z)) \\
&= -(g(\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}W, Z)) \\
&= -g(R(X,Y)W, Z)
\end{aligned}
$$

$3, 4, 5$, se démontrent de la même manière.

Proposition 2.15 *Soit (M,g) une variété Riemannienne et (U,x) une carte locale de M : Pour $i,j,k,l = 1,...,m$ on a*

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, g_{ij} = g(X_i, X_j) \text{ et } R_{ijkl} = g(R(X_i,X_j)X_k, X_l) :$$

Alors

$$R_{ijkl} = \sum_{s=1}^{m} g_{sl}\left(\frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^{m}\left\{\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr}\right\}\right),$$

où Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Cevita ∇ de (M,g) respectivement de (U,x).

■

Définition 2.16 *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Alors on définit le tenseur*

$$R_1 : C^3_1(TM) \to C^\infty_1(TM)$$

de type $(3-1)$ tel que

$$R_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

Définition 2.17 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne* , $p \in M$ *et* $\{e_1, ..., e_m\}$ *être une base orthonormée de* T_pM*. alors*

i) le tenseur de Ricci $p \in M$ $Ric_p(X)$ *est défini par*

$$Ric_p(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X, e_i)e_i,$$

ii) la courbure de Ricci *en* $p \in M$*, est défini par par*

$$Ric_p(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} g(R(X, e_i)e_i, Y),$$

iii) *la courbure scalaire* $\sigma(p)$ *par*

$$\sigma(p) = \sum_{j=1}^{m} Ric_p(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i$$

Corollaire 2.18 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de section constante Courbure* χ*. Ensuite, les points suivants*

$$\sigma(p) = m.(m-1).\chi$$

Preuve. *Soit* $\{e_1, ..., e_m\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_p(e_i, e_j) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_j, e_i) e_i, e_j) \\
\in &= \sum_{i=1}^{m} g(\chi(g(e_i, e_i) e_j) - g(e_j, e_i) e_i, e_j) \\
&= \chi \left(\sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_j) g(e_j, e_j) - \sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_j) g(e_i, e_j) \right) \\
&= \chi \left(\sum_{i=1}^{m} 1 - \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij} \right) = (m-1).\chi
\end{aligned}$$

pour obteur la formule pour la courbure scalare σ *suffit seulememt de multplier* $\mathrm{Ric}_p(e_i, e_j)$ *par* m ■

Chapitre 3

Variétés Produits

Définition 3.1 *Soient* $(M_1, A_1), (M_2, A_2)$ *deux variétés de classe* C^∞ *de dimension* m_1, m_2 *respectivement, alors le produit* $A_1 \times A_2$ *donné par* $A_1 \times A_2 = \{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \mid (U_i, \varphi_i) \in A_i\}$ *est un atlas sur* $M_1 \times M_2$ *de dimension* $m_1 + m_2$ *et de classe* C^∞, *où* $\varphi_1 \times \varphi_2$ *est définie par*

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \in \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$$

La variété $M_1 \times M_2$ *est dite variété produit de* M_1 *et* M_2

Proposition 3.2 *Soient* M_1 *et* M_2 *deux variétés de dimension* m_1 *et* m_2 *respectivement, alors pour tout* $(x, y) \in M_1 \times M_2$ *on a*

1. *l'application* $P_y : (z_1, y) \in M_1 \times \{y\} \to z_1$ *(resp* $Q_x : (x, z_2) \in \{y\} \times M_2 \to z_2$*) est un difféomorphisme*

2. *Les espace tangent* $T_{(x,y)}M_1 \times \{y\}$ *et* $T_{(x,y)}\{x\} \times M_2$ *sont deux sous espaces vectoriels de l'espace tangent* $T_{(x,y)}M_1 \times M_2$

3. $T_{(x,y)}M_1 \times M_2 = T_{(x,y)}M_1 \times \{y\} \oplus T_{(x,y)}\{x\} \times M_2 \cong T_xM_1 \oplus T_yM_2$

Proposition 3.3 (Formule de leibniz) *soit* ψ *une application* $M_1 \times M_2$ *dans* N
La différentielle de ψ *au point* (x, y) *est donné par*

$$T_{(x,y)}\psi(Z) = T_x\psi_y(X) + T_y\psi_x(Y),\ \forall Z \in T_{(x,y)}M_1 \times M_2$$

où ψ_y *et* ψ_x *sont définies par* $\psi_y(z_1) = \psi(z_1, y)$ *et* $\psi_x(z_2) = \psi(x, z_2)$ *respectivement et* $Z = X + Y \in T_xM_1 \oplus T_yM_2$

3.1 Extension de la Notion de Relévement aux Variétés Produits

Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension m_1 et m_2 respectivement pour rapprocher le calcul sur $M_1 \times M_2$ à celui de leur facteurs, nous avans besoin d'introduire la notion de relévement à partir de M_1 et M_2.

Définition 3.4 *soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension m_1 et m_2 respectivement On définit le relévement horizontal suivant M_1 et le relévement vertial suivant M_2 d'une fonction respectivement par :*

$$\begin{array}{cccc} R_h & C^{\infty}(M_1) & \longrightarrow & C^{\infty}(M_1 \times M_2) \\ & f_1 & \longmapsto & f_1^h = f_1 \circ P \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} R_v : & C^{\infty}(M_2) & \longrightarrow & C^{\infty}(M_1 \times M_2) \\ & f_2 & \longmapsto & f_2^v = f_2 \circ Q \end{array}$$

où P et Q sont les projections canoniques $M_1 \times M_2$ de dans M_1 et M_2 respectivement

Proposition 3.5 *Soient Z et W deux champs de vecteur sur la variete produit $M_1 \times M_2$, si pour $f_1 \in C^{\infty}(M_1)$ tout et pour tout $f_2 \in C^{\infty}(M_2)$ on*

$$\begin{cases} Z\left(f_1^h\right) = W\left(f_1^h\right) \\ Z\left(f_2^v\right) = W\left(f_2^v\right) \end{cases}$$

Définition 3.6 *Le relevement horizontal suivant M_1 (resp le relevement vertical suivant M_2) d'un vecteur tangent est définit par*

$$\begin{array}{cccc} R^h : & T_x M_1 & \longrightarrow & T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) \\ & X_x & \longmapsto & X_x^h \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} R^v : & T_y M_2 & \longrightarrow & T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) \\ & Y_y & \longmapsto & Y_y^v \end{array}$$

$$\text{tel que} \begin{cases} d_{(x,y)}P\left(X_x^h\right) = X_x \\ d_{(x,y)}Q\left(X_x^h\right) = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} d_{(x,y)}Q\left(Y_y^v\right) = Y_y \\ d_{(x,y)}P\left(Y_y^v\right) = 0 \end{cases}$$

cesi nous permet de définir le relevement horizontal (resp. vertical) d'un champ de vecteurs par

$$\begin{aligned} R^h &: \quad \Gamma(TM_1) \rightarrow \Gamma(T(M_1 \times M_2)) \\ X &\longmapsto X^h : X^h(x,y) = X_x^h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^v &: \quad \Gamma(TM_2) \rightarrow \Gamma(T(M_1 \times M_2)) \\ Y &\longmapsto Y^v : Y^v(x,y) = Y_y^v \end{aligned}$$

On note l'ensemble des relevements horizontaux (resp verticaux)des champs de vecteurs par

$$H_{M_1} = \left\{X^h \mid X \in \Gamma(TM_1)\right\} \text{ (resp. } H_{M_2} = \{X^v \mid X \in \Gamma(TM_2)\})$$

Remarque 3.7 X^h *(resp.* Y^v*) est l'unique champs de vecteurs dans* $\Gamma(T(M_1 \times M_2))$ *tel que* $dP \circ X^h = X \circ P$ *(resp.* $dQ \circ Y^v = Y \circ Q$*)*

Proposition 3.8 *Soient* M_1 *et* M_2 *deux varietes differentiables, alors pour tout* $X_1, Y_1 \in \Gamma^1(TM_1)$, $X_2, Y_2 \in \Gamma^1(TM_2)$, $f \in C^\infty(M_1)$ *et* $g \in C^\infty(M_2)$ *on a les proprietes suivantes*

1. $X_1^h\left(f^h\right) = (X_1(f))^h, X_1(g^v) = 0,$

2. $Y_2^v\left(f^h\right) = 0, Y_2^v\left(f^h\right) = \left(Y_2\left(f^h\right)\right)^v,$

3. $\left[X_1^h, Y_1^h\right] = [X_1, Y_1]^h,\ [X_2^v, Y_2^v] = [X_2, Y_2]^v,\ \left[X_1^h, Y_2^v\right] = 0,$

4. $(fX_1)^h = f^h X_1^h, (gX_2)^v = g^v X_2^v$ *On a aussi les résultats de représentation des champs de vecteurs sur une variété produit :*

Remarque 3.9 *1/ Tout champ de vecteurs $\tilde{Y}$ sur $M \times N$ s'écrit d'une manière unique sous la forme*

$$\tilde{Y}_{(x,y)} = (\tilde{Y}_y)^h_{(x,y)} + (\tilde{Y}_x)^v_{(x,y)} \text{ où } (x,y) \in M \times N$$

$\tilde{Y}_x \in H(N)$ et $\tilde{Y}_y \in H(M)$ tels que

$$\tilde{Y}_x(x) = d_{(x,y)}\pi(\tilde{Y}_{(x,y)}), \tilde{Y}_x(y) = d_{(x,y)}\sigma(\tilde{Y}_{(x,y)})$$

2/ $H(M)$ et $H(N)$ sont des sous-algèbres de Lie de $H(M \times N)$ tels que $H(M) \oplus H(N) \subset H(M \times N)$.

Proposition 3.10 *Si ω est un champ tenseurs de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) sur M, alors il existe un unique champ de tenseurs ω^h sur $M \times N$ de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) tel que*

$$\omega^h(X_1^h, ..., X_r^h) = (\omega(X_1, ..., X_r))^h$$

et

$$\omega^h(Z_1, ..., Z_r) = 0$$

pour tout $X_1, ..., X_r \in H(M)$ et $Z_1, ..., Z_r \in H(M) \cup H(N)$ où il existe au moins $i \in \{1, ..., r\}$ tel que $Z_i \in H(N)$.

Preuve. Pour l'existence on prend $\omega^h = \pi^*\omega$

L'unicité de ω^h découle de la proposition (3.10). ■

Ce résultat reste vrai pour le relèvement vertical des champs de tenseurs de type $(0,r)$ et $(1,r)$ sur N.

Corollaire 3.11 *Si ω et $\tilde{\omega}$ sont deux champs de tenseurs de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) sur M et N respectivement, alors il existe un unique champ de tenseurs $\varpi = \omega \oplus \tilde{\omega}$ de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) sur $M \times N$*

Proposition 3.12 *Si ω , ω' sont deux champs de tenseurs de type $(0,r)$ ou $(1,r)$ tels que $\omega(X_1, ..., X_2) = \omega'(X_1, ..., X_2)$ $\forall X_i \in H_{M_1} \cup H_{M_2}$, $i \in \{1, ..., r\}$ alors*

$$\omega' = \omega$$

Proposition 3.13 *Soient $\nabla, \tilde{\nabla}$ deux connexions lineaires sur $M_1 \times M_2$. Si*

$$\begin{cases} \nabla_{X_1^h} Y_1^h = \tilde{\nabla}_{X_1^h} Y_1^h, \\ \nabla_{X_1^h} Y_2^v = \tilde{\nabla}_{X_1^h} Y_2^v \\ \nabla_{X_2^v} Y_2^v = \tilde{\nabla}_{X_2^v} Y_2^v \end{cases}$$

alors $\nabla = \tilde{\nabla}$.

Preuve. Si $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m})$ et $(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n})$ sont des bases locales des champs de vecteurs relativement aux cartes $(U, \phi) \in \mathrm{atl}(M)$ et $(V, \psi) \in \mathrm{atl}(N)$, alors si

$$\begin{cases} X = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h + X^{j+m} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^v \\ Y = Y^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h + Y^{j+m} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \\ & X^i \left[Y^s \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h} \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)^h + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h (Y^s) \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)^h \right] + \\ & X^i \left[Y^{t+m} \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^h} \left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)^v + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^v (Y^{t+m}) \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)^v \right] + \\ & X^{j+m} \left[Y^s \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^v} \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)^h + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^v (Y^s) \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)^h \right] + \\ & X^{j+m} \left[Y^{t+m} \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^v} \left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)^v + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^v (Y^{t+m}) \left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)^v \right] \\ &= \tilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

■

Il découle immédiatement de la proposition (3.10) que si $(M, \overset{M}{\nabla})$ et $(N, \overset{N}{\nabla})$ sont deux connexions linéaires respectivement sur M et N , alors il existe une unique connexion produit ∇ sur $M \times\ N$ telle que

$$\mathbf{1/}\ \nabla_{X_1^h} X_2^h = \left(\overset{M}{\nabla}_{X_1} X_2\right)^h,\ \mathbf{2/}\ \nabla_{Y_1^v} Y_2^v = \left(\overset{N}{\nabla}_{Y_1} Y_2\right)^v,\ \mathbf{3/}\ \nabla_{X_1^h} Y_2^v = \nabla_{Y_1^v}, X_2^h = 0$$

pour tout $X_1, X_2 \in H(M)$ et $Y_1, Y_2 \in H(N)$.

Proposition 3.14 *Si* $(M_1, \nabla_1), (M_2, \nabla_2)$ *deux connexions lineaires sur* M_1 *et* M_2 *respectivement,alors il existe une unique connexions produit* ∇ *sur* $M_1 \times M_2$ *tell que*

$$\begin{aligned} 1/\ \nabla_{X_1^h} Y_1^h &= \left(\nabla^1_{X_1} Y_1\right)^h, \\ 2/\ \nabla_{X_1^h} Y_1^v &= \nabla_{X_1^v} Y_1^h = 0, \\ 3/\ \nabla_{X_2^v} Y_2^v &= \left(\nabla^2_{X_2} Y_2\right)^v. \end{aligned}$$

Proposition 3.15 *Si* T, T_M, T_N *(resp.* R, R_M, R_N *) désignent respectivement les tenseurs de torsion (resp. de courbure)sur* $M \times N$ M *et* N *, alors*

$$T = T_M^h + T_N^v \text{ et } R = R_M^h + R_N^v$$

Preuve. *Si* $X_1, X_2, X_3 \in H(M)$ *et* $Y_1, Y_2, Y_3 \in H(N)$ *alors*

$$\begin{aligned} 1/\ T(X_1^h, X_2^h) &= \nabla_{X_1^h} X_2^h - \nabla_{X_2^h} X_1^h - [X_1^h, X_2^h] = \left(\overset{M}{\nabla}_{X_1} X_2\right)^h - \left(\overset{M}{\nabla}_{X_2} X_1\right)^h - [X_1, X_2]^h \\ &= \left(\overset{M}{\nabla}_{X_1} X_2 - \overset{M}{\nabla}_{X_2} X_1 - [X_1, X_2]\right)^h \\ &= (T_M(X_1, X_2))^h \\ &= T_M^h(X_1^h, X_2^h) + T_N^v(X_1^h, X_2^h) \\ 2/\ T(X_1^v, X_2^v) &= \nabla_{Y_1^v} Y_2^v - \nabla^v_{Y_2} X_1^v - [Y_1^v, Y_2^v] \\ &= T_M^h(Y_1^v, Y_2^v) + T_N^v(Y_1^v, Y_2^v) \\ 3/\ T(X_1^h, Y_2^v) &= T_M^h(X_1^h, Y_2^v) + T_N^v(X_1^h, Y_2^v) = 0 \end{aligned}$$

Du corollaire (3.11) *on déduit que* $T = T_M^h + T_N^v$, *de la même façon on a* $R = R_M^h + R_N^v$.
Par conséquent, on obtient les résultats :

- $M \times N$ *est sans torsion si et seulement si* M *et* N *sont sans torsion.*

- $M \times N$ *est sans courbure si et seulement si* M *et* N *sont sans courbure* ■

3.2 Métriques diagonales sur la variété produit

On consacrera l'étude sur le tenseur de torsion, le tenseur de courbure Riemannienne le tenseur de courbure Riemannienne-Christoffel, le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne produit et tordue. Nous montrons en fait dans le cas produit que chacun de ces tenseurs peut étre écrit comme une somme des tenseurs de chaque une des variété de la base M_1 et M_2.

Proposition 3.16 *Si* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *sont deux variétés Riemanniennes de dimension* m_1 *et* m_2 *respectivement et* $f \in C^\infty(M_1)$ *une fonction strictement positive sur* M_1*, alors les tenseurs*

$$g^D = P^* g_1 + Q^* g_2 \text{ et } g_f = P^* g_1 + (f \circ p) Q^* g_2 \tag{3.1}$$

sont des métriques diagonales sur $M_1 \times M_1$

Preuve. Comme P et Q sont des applications de classe $C^\infty, P^* g_1, Q^* g_2$ et $(f \circ P) Q^* g_2 \in \Gamma^2(T^*(M_1 \times M_2))$ donc $g, g_f \in \Gamma^2(T^*(M_1 \times M_2))$ pour tout $X, Y \in \Gamma^1(T^*(M_1 \times M_2))$ les formules dans (3.1) deviennent respectivement :

$$\begin{cases} g^D(X,Y)(x,y) = g_1(dP(X(x,y), dP(Y(x,y)) + g_2(dQ(X(x,y), dQY(x,y)) \\ g_f(X,Y)(x,y) = g_1(dP(X(x,y), dP(Y(x,y)) + f(x) g_2(dQ(X(x,y), dQY(x,y)) \end{cases}$$

On montre alors que g_f induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $T_{(x,y)} M_1 \times M_2$. supposons que

$$g_f(v,w) = 0 \text{ pour tout } w \in T_{(x,y)}(M_1 \times M_2),$$

nous avons donc en particulier,

$$\begin{cases} f(x) g_2(dQ(v), dQ(w)) = 0, \\ g_1(dP(v), dP(w)) = 0 \end{cases} \quad \forall w \in T_{(x,y)}(\{x\} \times M_2) \cup T_{(x,y)}(M_1 \times \{y\})$$

et comme f est strictement positive on obtioent $dQ(v) = dP(v) = 0$ ∎

Définition 3.17 *la variété produit* $M_1 \times M_2$ *munie des métriques* g *et* g_f *sont dites respectivement variété riemannienne produit et variété riemannienne du produit tordu et* f *s'appelle la fonction de distorsion du produit tordue*

Remarque 3.18 *Les matrices associées a g^D et g_f sont respectivement*

$$\begin{pmatrix} (g_1)_{ab} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (g_2)_{cd} \end{pmatrix} \ et \ \begin{pmatrix} (g_1)_{ab} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (f \circ P)(g_2)_{cd} \end{pmatrix}$$

i.e

$$\begin{cases} (g)^D_{ab} = (g_1)_{ab} \\ (g)^D_{cd} = (g_2)_{cd} \\ (g)^D_{ad} = (g)^D_{cb} = 0 \end{cases} \ et \ \begin{cases} (g_f)_{ab} = (g_1)_{ab}\,,\ a,b \in \{1,...,m_1\} \\ (g_f)_{cd} = (f \circ P)(g_2)_{cd}\,, c,d \in \{m_1+1,...,m_1+m_2\} \\ (g_f)_{ad} = (g)_{cb} = 0, \end{cases}$$

2.les formules de (3.1) *sont équivalentes respectivement à*

$$\begin{cases} g^D\left(X_1^h, Y_1^h\right) = g_1(X_1,Y_1)^h \\ g^D\left(X_1^h, Y_2^v\right) = g^D\left(X_2^v, Y_1^h\right) = 0 \\ g^D\left(X_2^v, Y_2^v\right) = g_2(X_2,Y_2)^v \end{cases} \ et \ \begin{cases} g_f\left(X_1^h, Y_1^h\right) = g_1(X_1,Y_1)^h\,, \\ g_f\left(X_1^h, Y_2^v\right) = g_f\left(X_2^v, Y_1^h\right) = 0, \\ g_f\left(X_2^v, Y_2^v\right) = f^h.g_2(X_2,Y_2)^v\,, \end{cases}$$

3.3 Courbure des variétés Riemanniennes produits

$(M \times N, g^D)$ est dite variété Riemannienne produit.

Les propriétés géométriques d'une variété produit sont caractérisées par les tenseurs de type $(0, r)$ (resp. $(1, r)$) de la façon suivante : il s'agit de la métrique g^D associé à la

Connexion de Levi-Civita ∇ est exprimée à l'aide de la formule de Koszul par

Proposition 3.19 *Soient $(M_1 \times M_2, g^D)$ une variété de produit et R son tenseur de courbure. Si $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM_1)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_2)$ alors*
1/ $R\left(X^h, Y^h\right) Z^h = \left(R^M(X, Y)\right)^h$
2/ $R(X^v, Y^v) Z^v = \left(R^N(X, Y) Z\right)^v$
3/ $R\left(X^h, Y^h\right) Z^v = R(X^v, Y^v) Z^h = R\left(X^h, Y^v\right) Z^v = R\left(X^h, Y^v\right) Z^h = 0.$

Corollaire 3.20 *Sur une variéte produit $\left(M_1 \times M_2, g^D\right)$. Si $X, Y \in H(M)$ et $U, V \in H(N)$, alors, on a*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}\left(X^h, Y^h\right) &= (\operatorname{Ric}_M(X, Y))^h \\
\operatorname{Ric}(X^v, Y^v) &= (\operatorname{Ric}_N(X, Y))^v \\
\operatorname{Ric}\left(X^h, Y^v\right) &= 0
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $\{E_1, ..., E_n\}$, (resp $\{E_{m+1}, ..., E_{n+m}\}$) une base orthonormale locale des champs de vecteurs relativement à une carte(u, ϕ) sur M (resp (v, φ) sur N), pour tout $p \in u \times v$ on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}\left(X^h, Y^h\right) &= \sum_{i=1}^{n} g^D\left(R\left(E_i^h, X^h\right) Y^h, E_i^h\right)_p + \\
&\quad \sum_{i=m+1}^{n+m} g^D\left(R\left(E_i^v, X^h\right) Y^h, E_i^v\right)_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_M\left(R(E_i, X) Y, E_i\right)_p^h
\end{aligned}$$

■

3.4 Courbure des variétés Riemanniennes Tordue

La connexion de Levi-Civita ∇'de $(M_1 \times M_2, g_f)$ peut être maitenant rapprochée à celle de M_1 et M_2 comme suit.

Proposition 3.21 *Soient* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *deux variétés Riemanniennes et* $(M_1 \times M_2, g_f)$ *le produit tordu. Si* $X_1, Y_1 \in \Gamma^1(TM_1)$ *et* $X_2, Y_2 \in \Gamma^1(TM_2)$, *on a alors*

1. $\nabla_{X_1^h} Y_1^h = \left(\nabla^1_{X_1} Y_1\right)^h,$

2. $\nabla_{X_1^h} Y_2^v = \nabla_{X_1^v} Y_1^h = X_1(\text{in } f) X_2^v,$

3. $\nabla_{X_1^v} Y_1^v = \left(\nabla^2_{X_2} Y_1\right) - \frac{1}{2} g\left(X_1, X_2\right) \operatorname{grad}\left(f^2\right)^h.$

Preuve. *(1) En utilisant la formule de Koszu et la proposition* (3.8) *on obtient*

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{X_1^h} Y_1^h, Z_1^h\right) &= \left(X_1^h\right)\left(g_f\left(Y_1^h, Z_1^h\right)\right) + \left(Z_1^h\right)\left(g_f\left(X_1^h, Y_1^h\right)\right) \\
&\quad + g_f\left(Z_1^h, \left[X_1^h, Y_1^h\right]\right) + g_f\left(Y_1^h, \left[Z_1^h, X_1^h\right]\right) - g_f\left(X_1^h, \left[Y_1^h, Z_1^h\right]\right) \\
2g\left(\nabla_{X_1^h} Y_1^h, Z_2^v\right) &= -\left(X_2^v\right)\left(g_f\left(X_1^h, Y_1^h\right)\right) + g_f\left(X_2, \left[X_1^h, Y_1^h\right]\right) = 0
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.22 *Soient* $(M_1 \times M_2, g_1 \times f g_2)$ *une variété de produit tordu et* R *son tenseur de courbure. Si* $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma\left(TM_1\right)$ *et* $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma\left(TM_2\right)$, *alors,*

1. $R\left(X_1^h, Y_1^h\right) Z_1^h = \left(R\left(X_1, Y_1\right) Z_1\right)^h,$

2. $R\left(X_1^v, X_1^h\right) Y_1^h = \frac{H^{f^h}\left(X_1^h, Y_1^h\right)}{f^h} X_2^v = \frac{g_1\left(\nabla^1_{X_1} \operatorname{grad}(f), Y_1\right)^h}{f^h} X_2^v,$

3. $R\left(X_1^h, Y_1^h\right) Z_2^v = R\left(X_2^v, Y_1^v\right) Z_1^h = 0,$

4. $R\left(X_1^h, Y_2^v\right) Z_1^v = R\left(X_1^h, Y_2^v\right) Z_1^v = f^h g_2(Y_2, Z_2) \nabla^1_{X_1} \operatorname{grad}(f),$

5. $R\left(X_2^v, Y_2^v\right) Z_2^v = R\left(X_2, Y_2\right) Z_2)^v - \left|\operatorname{grad}\left(f^h\right)\right|^2 \left\{g_2\left(X_2, Z_2\right)^v Y_2^v - g_2\left(Y_2, Z_2\right)^v X_2^v\right\}.$

Preuve. Pour (1) on applique directement la définition du tenseur et la proposition (3.21) pour (2), il découle de la proposition (3.21) et $\left[X_2^v, Y_1^h\right] = 0$, on obtient donc

$$\begin{cases}
\nabla_{X_2^v} \nabla_{Y_1^h} Z_1^h = \frac{1}{f^h}\left(\nabla_{Y_1} Z_1\right)(f)^h X_2^v \\
-\nabla_{Y_1^h} \nabla_{X_2^v} Z_1^h = -Y_1\left(Z_1 \ln f\right)^h X_2^v - Z_1(\ln f) Y_1(\ln f)
\end{cases}$$

et comme

$$g_1\left(\nabla^1_{X_1}\operatorname{grad}(f),Y_1\right)=X_1\left(Y_1\left(f\right)\right)-\nabla^1_{X_1}\left(Y_1\left(f\right)\right)\text{ et }X_1\left(\ln\left(f\right)\right)=\frac{1}{f}X_1\left(f\right)$$

alors

$$R\left(X_2^v,X_1^h\right)Y_1^h=\frac{g_1\left(\nabla^1_{X_1}\operatorname{grad}(f),Y_1\right)^h}{f^h}X_2^v$$

Pour (3) on a

$$\begin{aligned}\nabla_{X_2^v}\nabla_{Y_2^v}Z_1^h &= z_1\left(\ln f\right)^h\left\{\left(\nabla^2_{X_2^v}Y_2\right)^v-\frac{1}{2}g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\left(f^2\right)^h\right\}\\ \nabla_{Y_2^h}\nabla_{X_2^v}Z_1^h &= -z_1\left(\ln f\right)^h\left\{\left(\nabla^2_{Y_2^v}X_2\right)^v-\frac{1}{2}g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\left(f^2\right)^h\right\}\\ -\nabla_{\left[X_2^v,Y_1^h\right]}Z_1^h &= -z_1\left(\ln f\right)^h\left[X_2,Y_2\right]^v\end{aligned}$$

d'oú $R\left(X_2^h,Y_2^v\right)Z_1^v=0.$

Pour (4) remarquons que d'aprés (2), (3) et la proposition 2.14, on a

$$\begin{cases} g_f\left(R\left(X_1^h,Y_2^v\right)Z_2^v,X_2^v\right)=g_f\left(R\left(Z_2^v,X_2^v\right)X_1^h,Y_2^v\right)\\ g_f\left(R\left(X_1^h,Y_2^v\right)Z_2^v,Y_1^v\right)=-f^hg_2\left(Y_2,Z_2\right)g_f\left(\left(\nabla^1_{X_1}\operatorname{grad}f\right)^h,Y_1^h\right)\end{cases}\quad\forall Y_i\in\Gamma^1\left(TM_i\right)$$

d'oú $R\left(X_1^h,Y_2^v\right)Z_2^v=-f^hg_2\left(Y_2,Z_2\right)\nabla^1_{X_1}\operatorname{grad}(f)^h$ et comme g_2 est symétrique alors $R\left(X_1^h,Z_2^v\right)Y_2^v=-f^hg_2\left(Y_2,Z_2\right)\nabla^1_{X_1}\operatorname{grad}(f)^h.$

Et on montre par raisonnement similaire (5) ■

Corollaire 3.23 *Sur une variéte tordue $(M_1\times M_2,g_f)$ avec $\dim M_2=m_2\geq 2$, on a pour tout $X_1,Y_2\in\Gamma^1(TM_1)$ et $X_2,Y_2\in\Gamma^1(TM_2)$ les relation suivantes :*

1. $r\left(X_1^h,Y_1^h\right)=r_1\left(X_1,Y_2\right)^h-\frac{m_2}{f^2}g_1\left(\nabla^1_{X_1}\ \operatorname{grad}(f),Y_1\right)^h,$

2. $r\left(X_1^h,Y_2^v\right)=0,$

3. $r\left(X_2^v,Y_2^v\right)=r\left(X_2,Y_2\right)^v-g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\left\{f\Delta(f)+(m_2-1)\left|\operatorname{grad}f\right|^2\right\}^h.$

Preuve. *Remarquons que si $\{E_1,...,E_{m_1}\}$ (resp $\{E_{m_1+1},...,E_{m_1+m_2}\}$ est une base orthonormale locale de champ de vecteurs relativement à une carte (U,φ) sur M_1(resp (V,ϕ) sur M_2) alors $\left\{E_1^h,...,E_{m_1}^h,E_{m_1+1}^v,\frac{1}{f^h}E_{m_1+1}^v,\frac{1}{f^h}E_{m_1+m_2}^v\right\}$, est une base orthonormale locale de champ de vecteurs relativement à la carte $(U\times V,\varphi\times\phi)$ sur $(M_1\times M_2)$.*

En utilisant la proposition 3.4.2 *et la définition de la courbure de Ricci, on obtient*

$$
\begin{aligned}
1.\ r\left(X_1^h,Y_1^h\right) &= \sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(R\left(E_i^h,X_1^h\right)Y_1^h,E_i^h\right)+\frac{1}{\left(f^h\right)^2}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_f\left(R\left(E_i^v,X_1^h\right)Y_1^h,E_i^v\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(R_1\left(\left(E_i,X_1\right)Y_1\right)_1^h,E_i^h\right)-\frac{1}{\left(f^h\right)^3}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_f\left(g_1\left(\nabla_{X_1}^1 \operatorname{grad}(f),Y_1\right)^h E_1^v,E_i^v\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(R_1\left(\left(E_i,X_1\right)Y_1\right)_1,E_i\right)^h-\frac{1}{f^h}g_1\left(\left(\nabla_{X_1}^1 \operatorname{grad}(f),Y_1\right)\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_2\left(E_1,E_i\right)^v\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(R_1\left(\left(E_i,X_1\right)Y_1\right)_1,E_i\right)^h-\frac{m_2}{f^h}g_1\left(\nabla_{X_1}^1 \operatorname{grad}(f),Y_1\right)^h.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ r\left(X_1^h,Y_1^v\right) &= \sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(R\left(E_i^h,X_1^h\right)Y_2^v,E_i^h\right)+\frac{1}{\left(f^h\right)^2}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_f\left(R\left(E_i^v,X_1^h\right)Y_2^v,E_i^v\right)\\
&= \frac{1}{\left(f^h\right)^2}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_f\left(f^h g_2\left(E_i,Y_2\right)^v\left(\left(\nabla_{X_1}^1 \operatorname{grad}(f),Y_1\right)\right)^h,E_i^v\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.\ r\left(X_2^h,Y_2^h\right) &= \sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(R\left(E_i^h,X_2^h\right)Y_2^h,E_i^h\right)+\frac{1}{\left(f^h\right)^2}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_f\left(R\left(E_i^v,X_2^h\right)Y_2^h,E_i^v\right)\\
&= -f^h g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\sum_{i=1}^{m_1} g_f\left(\nabla_{E_i}^1 \operatorname{grad}(f)\right)^h,E_i^h),+\frac{1}{\left(f^h\right)^2}\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} g_f\left(R_2\left(E_i,X_2\right)Y_2,E_i^v\right)\\
&\quad -\left|\operatorname{grad} f^h\right|^2\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2}\left\{-g_2\left(Y_2,E_i\right)g_f\left(X_2^v,E_i^v\right)+g_2\left(Y_2,X_2\right)g_f\left(E_i^v,E_i^v\right)\right\}\\
&= -f^h g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\left(\Delta(f)\right)^h+\frac{1}{\left(f^h\right)^2}\left(\left(f^2\right)^h\right)r_2\left(X_2,Y_2\right)^v-\left|\operatorname{grad} f^h\right|^2\\
&\quad -\{\left(f^2\right)^h g_2\left(X_2,Y_2\right)^v+m_2\left(f^2\right)^h g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\})\\
&= r_2\left(X_2,Y_2\right)^v-g_2\left(X_2,Y_2\right)^v\left(f^h\Delta(f)\right)^h+\left(m_2-1\right)\left|\operatorname{grad} f^h\right|^2).
\end{aligned}
$$

■

Bibliographie

[1] M. Atçeken and Keles, On the product Riemannian manifold, Differential Geometry Dynamical Systems Vol. 5 No. 1, 2003, pp. 1-8

[2] B.Y. Chen Geometry of warped product as Riemannian Submanifolds and related problems,Soochws journal of Mathematics, 22(2002) 125-156

[3] S. Gudmundsson , An introduction to Riemannian geometry, Lund University 2000.

[4] R. Nasri et M. Djaa, Sur la géometrie Riemannienne produit, Thése de Magistère, Mai 2004

[5] R. Nasri and M. Djaa, Sur la courbure des variétés Riemannienne produit, Scienences et Technologie A-N^{0}24, Décembre (2006), pp 15-20.

[6] O'Neill B., Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York 1983.